



**HAL**  
open science

## Sur l'interaction de deux hélions

W.M. Elsasser

► **To cite this version:**

W.M. Elsasser. Sur l'interaction de deux hélions. Journal de Physique et le Radium, 1934, 5 (2), pp.71-74. 10.1051/jphysrad:019340050207100 . jpa-00233204

**HAL Id: jpa-00233204**

**<https://hal.science/jpa-00233204>**

Submitted on 4 Feb 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## SUR L'INTERACTION DE DEUX HÉLIONS

Par W. M. ELSASSER.

**Sommaire.** — On recherche dans quelles conditions on peut appliquer une méthode d'approximation à l'interaction de deux particules  $\alpha$  : La fonction d'onde se décompose en une fonction représentant le mouvement des centres de gravité multipliée par des fonctions propres représentant l'état intérieur des hélions. La difficulté du problème réside dans le fait que, grâce aux phénomènes d'échange, cette série de fonctions n'est plus, en général, un système de fonctions orthogonales. On trouve comme critère de l'application de la méthode que les dimensions des hélions doivent être petites par rapport à la distance moyenne des centres de gravité. La dite condition n'étant, très probablement, pas remplie pour un ensemble d'hélions formant un noyau, l'image d'un noyau composé d'hélions ne peut être employée qu'avec une certaine réserve.

**1. Fonctions d'onde symétrisées.** — Le problème en question a de l'intérêt à deux points de vue. Premièrement, pour le traitement du choc entre deux hélions et secondement pour les questions de structure nucléaire. C'est surtout en vue de cette seconde application que nous avons entrepris la recherche suivante. L'image d'un noyau composé d'hélions est suggérée surtout par des considérations d'ordre énergétique, puisque les poids atomiques des éléments lourds ne diffèrent pas beaucoup des multiples du poids atomique de l'hélium. Nous verrons cependant que l'énergie seule n'est pas une grandeur appropriée pour la mesure de l'interaction, si les particules considérées sont elles-mêmes des systèmes complexes. En effet, l'image d'un noyau composé d'hélions, n'a qu'une application très restreinte.

Un problème de notre type a été traité par Ehrenfest et Oppenheimer <sup>(1)</sup>, et ces auteurs ont montré que les noyaux d'hélium obéissent à la statistique de Bose-Einstein, fait qui donne lieu aux phénomènes bien connus dans les bandes de la molécule He<sub>2</sub>. Le cas où la distance de deux hélions est comparable à leurs dimensions spatiales, est plus délicat ; puisque c'est surtout ce cas qui arrive dans les questions de la structure nucléaire, il semble mériter un examen plus détaillé que celui que lui ont consacré ces auteurs.

Nous nous bornerons au cas de deux hélions seulement ; celui de l'interaction de plusieurs hélions à la fois n'ajoute, en principe, rien de nouveau. Nous nous permettrons encore une simplification de notre problème, qui, tout en facilitant les calculs d'une manière considérable, n'enlève rien d'essentiel des phénomènes à étudier. Nous supposons les hélions composés de deux particules seulement, de sorte que les particules primitives obéissent au principe de Pauli. Nous envisagerons d'abord le cas où les parti-

cules ne possèdent pas de spin ; une modification éventuelle des résultats provenant de l'existence du spin sera discutée après.

Soient  $x_1 x_2 x_3 x_4$  les coordonnées des quatre particules formant le système de deux hélions. Soit

$$\Phi_{\alpha; \alpha\beta} = C_{\alpha}(x_1 + x_2 - x_3 - x_4) \psi_{\alpha}(x_1 - x_2) \psi_{\beta}(x_3 - x_4) \quad (1)$$

une fonction propre représentant un état du système, où  $\psi_{\alpha}, \psi_{\beta}, \dots$  forment un système en fonction orthogonales correspondant aux états intérieurs d'un hélion, et où  $C_{\alpha}$  est une fonction dont l'argument est la distance des centres de gravité des deux hélions. Grâce à l'absence du spin, les fonctions  $\psi$  jouissent de la propriété

$$\psi(-x) = -\psi(x).$$

La fonction (1) n'est pas encore antisymétrique par rapport aux variables  $x_1 \dots x_4$ . Nous la remplaçons par

$$\Psi_{\alpha; \alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{6}} \sum_P \varepsilon_P P \Phi_{\alpha; \alpha\beta} \quad (2)$$

où  $P$  est une permutation de 4 objets. On supprime dans la somme toutes les permutations qui ne donnent qu'un interchangeement des variables à l'intérieur des fonctions  $C$  et  $\psi$ . Il nous reste de cette manière 6 permutations différentes. Nous posons

$$\varepsilon_P = \begin{cases} +1, & \text{si } P \text{ est une permutation paire} \\ -1, & \text{si } P \text{ est une permutation impaire.} \end{cases}$$

Remarquons une propriété très importante du système de fonctions (2). Si  $\alpha = \beta$  et si  $C$  est une fonction antisymétrique par rapport aux centres de gravité (dans notre cas une fonction impaire de son argument), l'expression (2) disparaît. Des hélions étant dans le même état intérieur, ne peuvent donc exister qu'en des mouvements symétriques, ce qui correspond à la vali-

<sup>(1)</sup> EHRENFEST et OPPENHEIMER, *Phys. Rev.*, 1931, **37**, 333.

dité approximative de la statistique de Bose-Einstein pour ces particules.

Il est parfois commode d'avoir une expression explicite de la formule (2). En spécialisant les opérateurs  $P$ , on peut écrire

$$\Psi_{\varrho; \alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{6}} [4 - P_{(23)} + P_{(34)}P_{(23)} + P_{(12)}P_{(23)} - P_{(12)}P_{(34)}P_{(23)} + P_{(14)}P_{(23)}] \Phi_{\varrho; \alpha\beta}. \quad (3)$$

Ici,  $P_{(ij)}$  est un opérateur interchangeant les variables  $x_i$  et  $x_j$ , possédant la propriété

$$P_{(ij)}^2 = 1. \quad (4)$$

Nous nous servirons plus tard de ces formules.

**2. Les produits scalaires.** — Nous avons maintenant obtenu un système de fonctions ayant le type de symétrie approprié à la validité du principe de Pauli pour les particules primitives et tenant simultanément compte de la formation de particules secondaires par association des particules primitives en paires. On pourrait donc penser qu'on a simplement à développer une fonction d'onde quelconque selon les fonctions de ce système et appliquer ensuite les règles ordinaires de la mécanique quantique. Mais les fonctions (2) ne forment plus, en général, un système de fonctions orthogonales comme le faisaient les fonctions primitives  $C$  et  $\psi$ . Pour le démontrer, nous calculerons les produits scalaires de fonctions (2) <sup>(1)</sup>.

Soit

$$\Psi_{\sigma; \gamma\delta} = \frac{1}{\sqrt{6}} \sum_{P'} \varepsilon_{P'} P' \Phi_{\sigma; \gamma\delta}$$

une deuxième fonction de la série (2). On a donc

$$(\Psi_{\sigma; \gamma\delta}, \Psi_{\varrho; \alpha\beta}) = \frac{1}{6} \left( \sum_{P'} \varepsilon_{P'} P' \Phi_{\sigma; \gamma\delta}, \sum_P \varepsilon_P P \Phi_{\varrho; \alpha\beta} \right). \quad (5)$$

Remarquons que les opérateurs de permutation jouissent de la propriété

$$P(f.g) = Pf.Pg \quad (6)$$

où  $f$  et  $g$  sont des fonctions quelconques des  $x$ . Par conséquent, on peut écrire (5) sous la forme

$$(\Psi_{\sigma; \gamma\delta}, \Psi_{\varrho; \alpha\beta}) = \frac{1}{6} \sum_{P'} \varepsilon_{P'} P' \left( \Phi_{\sigma; \gamma\delta}, (P')^{-1} \sum_P \varepsilon_P P \Phi_{\varrho; \alpha\beta} \right). \quad (7)$$

On peut simplifier cette expression ; en effet on a

$$(P')^{-1} \sum_P \varepsilon_P P \Phi_{\varrho; \alpha\beta} = \varepsilon_{P'} \sum_P \varepsilon_P P \Phi_{\varrho; \alpha\beta}$$

car  $\sum_P \varepsilon_P P \Phi$  étant une fonction antisymétrique par

<sup>(1)</sup> Nous écrivons  $(\varphi, \psi) = \int \varphi^* \psi dv$ .

rapport aux  $x$ , le seul effet d'une permutation peut être de changer ou non le signe de cette fonction, selon que  $(P')^{-1}$  (et simultanément  $P'$ ) est une permutation impaire ou paire. D'autre part, le produit scalaire étant un simple nombre, un opérateur de permutation n'a aucun effet sur lui. (7) devient donc

$$(\Psi_{\sigma; \gamma\delta}, \Psi_{\varrho; \alpha\beta}) = (\Phi_{\sigma; \gamma\delta}, \sum_P \varepsilon_P P \Phi_{\varrho; \alpha\beta}). \quad (8)$$

A l'aide de la formule (3), on peut réduire cette expression à l'évaluation de quelques intégrales typiques.

Posons

$$\begin{aligned} (\Phi_{\sigma; \gamma\delta}, \Phi_{\varrho; \alpha\beta}) &= U \\ (\Phi_{\sigma; \gamma\delta}, P_{(23)} \Phi_{\varrho; \alpha\beta}) &= V. \end{aligned}$$

En utilisant les relations (4) et (6), on trouve

$$\begin{aligned} (\Phi_{\sigma; \gamma\delta}, P_{(34)} P_{(23)} \Phi_{\varrho; \alpha\beta}) &= P_{(34)} (\Phi_{\sigma; \gamma\delta}, P_{(23)} \Phi_{\varrho; \alpha\beta}) \\ &= -P_{(34)} (\Phi_{\sigma; \gamma\delta}, P_{(23)} \Phi_{\varrho; \alpha\beta}) = -V \end{aligned}$$

car avec (4) on vérifie aisément que

$$P_{(34)} \Phi = -\Phi.$$

De la même manière, on trouve

$$\begin{aligned} (\Phi_{\sigma; \gamma\delta}, P_{(12)} P_{(23)} \Phi_{\varrho; \alpha\beta}) &= -V \\ (\Phi_{\sigma; \gamma\delta}, P_{(12)} P_{(34)} P_{(23)} \Phi_{\varrho; \alpha\beta}) &= V. \end{aligned}$$

Posons enfin

$$(\Phi_{\sigma; \gamma\delta}, P_{(14)} P_{(23)} \Phi_{\varrho; \alpha\beta}) = U'$$

où  $U'$  est une intégrale semblable à  $U$ . On a donc pour (8) en vertu des formules précédentes et de la formule (3) :

$$(\Psi_{\sigma; \gamma\delta}, \Psi_{\varrho; \alpha\beta}) = U + U' - 4V. \quad (9)$$

Avant d'écrire explicitement les expressions pour  $U$ ,  $U'$  et  $V$ , nous y introduisons un nouveau système de variables par la substitution

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= u & x_2 - x_4 &= w \\ x_3 - x_4 &= v & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= z \end{aligned}$$

La variable  $z$  représente les coordonnées du centre de gravité du système entier et n'apparaîtra pas dans les fonctions à intégrer ; on peut donc supprimer l'intégration par rapport à  $z$ . On trouve maintenant

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{4} \int C_{\sigma}^* (u - v + 2w) \\ & C_{\varrho} (u - v + 2w) \psi_{\gamma}^* (u) \psi_{\delta}^* (v) \psi_{\alpha} (u) \psi_{\beta} (v) du dv dw. \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} U' &= \frac{1}{4} \int C_{\sigma}^* (u - v + 2w) \\ & C_{\varrho} (-u + v - 2w) \psi_{\gamma}^* (u) \psi_{\delta}^* (v) \psi_{\alpha} (v) \psi_{\beta} (u) du dv dw. \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{4} \int C_{\sigma}^* (u - v + 2w) \\ & C_{\varrho} (u + v) \psi_{\gamma}^* (u) \psi_{\delta}^* (v) \psi_{\alpha} (u - v + w) \psi_{\beta} (w) du dv dw. \end{aligned} \quad (12)$$

La dernière intégrale surtout nous intéresse; elle correspond aux intégrales d'échange dans la théorie de la structure moléculaire, mais dans notre cas nous n'avons pas besoin de spécialiser la force d'interaction.

**3. Cas limite.** — Examinons d'abord le cas où les dimensions des hélions sont petites par rapport aux dimensions du mouvement des centres de gravité. On peut alors remplacer  $2w + u - v$  par  $2w$  dans l'argument de  $C$  dans (10) et (11); on obtient

$$U = \frac{1}{4} \delta_{\rho\sigma} \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta}$$

$$U' = \frac{1}{4} \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} \int C_{\sigma}^*(2w) C_{\rho}(-2w) dw.$$

S'il n'y a pas de forces extérieures agissant sur le système, les fonctions  $C$  seront, ou des fonctions paires, ou des fonctions impaires. On aura donc

$$U' = \pm \frac{1}{4} \delta_{\sigma\rho} \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}$$

où le signe supérieur est valable pour les fonctions paires et le signe inférieur pour les fonctions impaires. Pour l'intégrale (12), on peut approximativement écrire :

$$V = \frac{1}{4} C_{\sigma}^*(0) C_{\rho}(0)$$

$$\int \psi_{\gamma}^*(u) \psi_{\delta}^*(v) \psi_{\alpha}(u-v+w) \psi_{\beta}(w) du dv dw. \quad (13)$$

Si les dimensions de  $C$  sont grandes par rapport à celles des  $\psi$ , les valeurs  $C(0)$  deviennent petites à cause de la condition de normalisation

$$\int C(w)^2 dw = 1$$

et les intégrales d'échange  $V$  deviennent petites. Dans ce cas, la formule (9) donne donc approximativement

$$(\Psi_{\sigma;\gamma\delta}, \Psi_{\rho;\alpha\beta}) = \frac{1}{2} \delta_{\rho\sigma} (\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} \pm \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma})$$

où pour les fonctions symétriques par rapport aux centres de gravité, qui nous intéressent surtout, on utilise le signe supérieur. Le système de fonctions est donc orthogonal dans le cas limite.

**4. Cas général. Equations du mouvement.** — La formule (13) permet d'estimer la grandeur de l'intégrale  $V$  et par conséquent la valeur des produits scalaires (9), aussi pour le cas général où la restriction du paragraphe précédent n'est plus valable. Si pour  $(\alpha, \beta) \neq (\gamma, \delta)$  nous négligeons les expressions  $U$  et  $U'$ , nous pouvons écrire (9) approximativement :

$$(\Psi_{\sigma;\gamma\delta}, \Psi_{\rho;\alpha\beta}) = -C_{\sigma}^*(0) C_{\rho}(0)$$

$$\int \psi_{\gamma}^*(u) \psi_{\delta}^*(v) \psi_{\alpha}(u-v+w) \psi_{\beta}(w) du dv dw. \quad (14)$$

Dans le cas général, cette expression représentera une fraction inférieure à l'unité, mais comparable à celle-ci, pourvu que les dimensions des  $C$  soient du même ordre de grandeur que celles des  $\psi$ .

Nous allons maintenant comparer notre système de fonctions approximatives ( $\Psi_{\nu}$ , avec un seul indice  $\nu$  pour abrégier) aux fonctions propres exactes,  $\omega_n$ , de notre système de 4 particules. On posera

$$\omega_n = \sum_{\nu} c_{\nu}^n \Psi_{\nu}. \quad (15)$$

Soit  $H$  l'opérateur hamiltonien exact, et soit

$$H \Psi_{\nu} = \sum_{\mu} h_{\mu\nu} \Psi_{\mu}.$$

Si les  $\Psi_{\nu}$  étaient orthogonales, on aurait  $h_{\mu\nu} = \Psi_{\mu} (H \Psi_{\nu})$ . Si les  $\Psi_{\nu}$  étaient peu différentes des  $\omega_n$ , la matrice  $h_{\mu\nu}$  serait une matrice presque diagonale, mais ceci est impossible en général, car la non-orthogonalité des  $\Psi_{\nu}$  montre que ces fonctions doivent être assez différentes des  $\omega_n$ , ces dernières étant orthogonales. Il aura donc dans le développement (15) un assez grand nombre de termes de grandeur considérable. On peut déduire les équations de mouvement de la manière connue (1) :

$$W_n c_{\nu}^n = \sum_{\nu} c_{\nu}^n h_{\mu\nu}.$$

La matrice  $h_{\mu\nu}$ , n'étant point diagonale, on voit aussi qu'un grand nombre de coefficients  $c$  devra être sensiblement différent de zéro. Le fait que dans le développement (15) il faut tenir compte de plusieurs termes, se traduit physiquement par l'existence d'une probabilité considérable d'activation (ou dissociation) d'un hélion.

**5. Action du spin.** — Si nous attribuons un spin aux particules primitives, le type de symétrie des fonctions propres peut être différent du type considéré jusqu'ici. Déterminons l'action de ce changement sur les expressions (12) ou (14) qui mesurent la non-orthogonalité du système des fonctions  $\Psi$ . L'introduction du spin dédouble évidemment le nombre des fonctions  $\Psi$  représentant l'état intérieur des hélions, en donnant naissance à un système de fonctions  $\psi$  paires intercalées entre les fonctions  $\psi$  impaires. L'état normal sera aussi représenté par une fonction paire. Or, on peut remarquer que les considérations des paragraphes 1 et 2 subsistent dans ce cas, puisque nous n'avons fait usage nulle part du caractère antisymétrique des fonctions  $\Psi$ . Quelques-unes des intégrales d'échange, contenant si-

(1) Le développement selon un système de fonctions non orthogonales étant univoque, pourvu seulement qu'il n'y a pas de dépendance linéaire entre les fonctions.

multanément des fonctions paires et impaires peuvent devenir petites. Mais les intégrales correspondant à l'activation d'un hélion en des états pairs seront du même ordre de grandeur que les intégrales discutées plus haut. Les résultats du paragraphe précédent ne seront donc pas sensiblement modifiés lors de l'introduction du spin.

**6. Existence des hélions dans des systèmes complexes.** — Précisons encore un peu le sens de l'énoncé de l'existence des hélions à l'intérieur d'un système du genre considéré. En mécanique quantique, à chaque question que l'on peut poser, correspond un opérateur, de sorte que l'espérance mathématique <sup>(1)</sup> de cet opérateur est la valeur moyenne de la grandeur physique représentée par l'opérateur. A chaque fonction  $\Psi$ , de notre système approximatif, nous faisons correspondre l'opérateur <sup>(2)</sup>.

$$Q = \Psi, \int \Psi,^* dv \dots$$

où le signe d'intégration opère sur les fonctions qui le suivent. L'espérance mathématique de  $Q$  par rapport à une fonction propre exacte,  $\omega$ , de notre système de quatre particules est donné par

$$(\omega, Q\omega) = |(\Psi, \omega)|^2 \quad (16)$$

et nous interprétons cette grandeur comme la probabilité de trouver l'état  $\Psi$ , réalisé dans un système dont l'état est représenté par  $\omega$ . Introduisons l'opérateur

$$Q' = \sum_{\xi} \Psi, \int \Psi,^* dv \dots$$

où la sommation s'étend à toutes les fonctions  $C_{\xi}$  du mouvement des centres de gravité, en laissant fixe l'état d'activation de chaque hélion. L'espérance mathématique de  $Q'$  donne la probabilité totale de l'existence de chacun des deux hélions dans un certain état intérieur. Or, dans le cas où la probabilité de trouver les hélions dans l'état normal est environ l'unité et la probabilité de les trouver dans un état activé presque zéro, on peut parler d'un système composé d'hélion, et non autrement. On constatera d'ailleurs la ressemblance de ce problème avec celui qui se présente lors de l'application de la méthode de Heitler-London aux liaisons chimiques, cas où l'on utilise aussi un système

<sup>(1)</sup> « Erwartungswert ».

<sup>(2)</sup> Cf. v. NEUMANN, *Göttinger Nachrichten*, 1927, 4.

de fonctions non orthogonales et où par conséquent surgissent des complications du même type qu'ici <sup>(1)</sup>.

Comme nous venons de le voir, la grandeur critique est le rapport entre les dimensions d'un hélion et la distance moyenne de deux hélions. Si les dimensions des hélions sont petites comparées à leur distance, on trouvera que le système sera approximativement composé d'hélions. On n'hésitera pas à appliquer le même critère pour le cas où il y a plus de deux hélions dans le système. Il faut donc connaître les dimensions des noyaux. Quant aux noyaux lourds, on connaît leurs dimensions par les calculs de Gamow sur la désintégration  $\alpha$  et par les sections efficaces lors des chocs avec des neutrons <sup>(2)</sup>. On trouve que les rayons varient comme la racine cubique du nombre des particules composantes, de sorte que la densité des particules reste constante. On ne peut pas être sûr d'abord, que le rayon de l'hélion se range aussi en cette régularité. Mais ceci est rendu très probable par les expériences de choc des particules  $\alpha$  et les calculs <sup>(3)</sup> entrepris sur la base de ces expériences. Ces calculs montrent que le rayon d'un hélion ne s'écarte pas beaucoup de la valeur de  $3.10^{-13}$  cm. Avec un assez haut degré de probabilité, on peut dire que la distance moyenne de deux hélions dans un noyau est sensiblement de la même grandeur que le diamètre d'un hélion. Par conséquent, les considérations ci-dessus nous renseignent qu'il ne peut guère être question d'une existence stationnaire des hélions dans le noyau, que la probabilité des états dissociés d'un hélion n'est nullement négligeable par rapport à la probabilité de l'état normal. On peut se demander, quelle est l'influence de ce fait sur les calculs de Gamow lors de la désintégration  $\alpha$ . Evidemment, la probabilité d'émission d'une particule  $\alpha$  sera à multiplier par un facteur du type (16), donnant la probabilité de formation d'un hélion dans le mélange de protons et de neutrons qui constitue le noyau. Si ce facteur ne s'écarte pas trop de l'unité, son influence sur le calcul des rayons nucléaires sera petite, puisqu'il entre dans ces calculs par son logarithme seulement <sup>(4)</sup>.

Je remercie M. L. Nordheim pour des discussions et pour sa très précieuse critique.

<sup>(1)</sup> Cette remarque est due à M. F. Perrin.

<sup>(2)</sup> Cf. RABI, *Phys. Rev.*, 1933, 43, 785.

<sup>(3)</sup> TAYLOR, *Proc. roy. Soc.*, 1931, 43, 103.

<sup>(4)</sup> Dans un travail antérieur (*J. Phys.*, 1933, 4, 549), l'auteur avait supposé que cette probabilité de formation des hélions était parfois très petite, hypothèse qui ne semble pas exacte.