La théorie du chauffage par courants induits de haute fréquence

G. Ribaud

LA THÉORIE DU CHAUFFAGE PAR COURANTS INDUITS DE HAUTE FRÉQUENCE

Par M. G. RIBAUD.

Conférence faite à la Société Française de Physique, le vendredi 13 mai 1932.

Sommaire. — L'auteur rappelle d'abord les équations fixant la propagation des courants induits dans un cylindre infiniment long placé dans un champ alternatif uniforme parallèle à son axe.

Dans le cas simple où le diamètre du cylindre est grand par rapport à l'épaisseur de la couche de peau les équations se simplifient et donnent aisément la densité de courant en tous les points du cylindre, ainsi que l'énergie dissipée. L'étude de la propagation des courants dans l'enroulement permet ensuite le calcul du rendement électrique limite du four et l'étude de ce rendement maximum en fonction de la résistivité de la substance.

Dans le cas plus général où l'épaisseur de peau n'est plus négligeable par rapport au diamètre, l'expression du rendement se présente sous une forme générale uu peu plus compliquée.

Un paragraphe est consacré à l'étude des caractéristiques d'une installation à alternateur destinée à porter à la fusion un cylindre de platine de petites dimensions.

L'auteur donne ensuite la théorie du chauffage d'une masse fragmentée, d'un cylindre d'épaisseur faible par rapport à l'épaisseur de peau et enfin du même cylindre contenant à son intérieur une charge conductrice.

Une place à part est consacrée aux installations à étincelles : étude oscillographique de la décharge, résistance du circuit de décharge et rendement de l'installation, amortissement des oscillations.

Enfin l'auteur donne le calcul de la hauteur du métal soulevé dans une charge liquide du fait des forces électromagnétiques ; l'étude théorique de la distribution des filets liquides dans la charge au cours du brassage reste encore à faire.

Notations.

H, valeur du champ magnétique à la distance x de l'axe du cylindre;
σ, valeur de la densité de courant à la distance x de l'axe du cylindre;
ω, pulsation; f, fréquence du courant;
μ, perméabilité de la substance;
ρ, résistivité de la substance; ρ' résistivité de l'enroulement;
ε, épaisseur de la couche de peau (skin), dans la substance; ε', même grandeur pour l'enroulement;
d, diamètre du cylindre constitué par la substance;
D, diamètre intérieur du solénoïde inducteur;
b, largeur des spires du solénoïde (fig. 2);
h, hauteur de la substance;
H, hauteur du solénoïde inducteur;
N, nombre de spires du solénoïde;
n, nombre de spires du solénoïde situées sur la hauteur de la substance;
p, profondeur dans la substance, à partir de la surface;
I, courant dans l'enroulement inducteur (I_{eff} intensité efficace);
i, courant total induit dans la substance;
W, énergie recueillie dans la substance;
r, résistance de la substance placée dans le four;
R_s, résistance du solénoïde inducteur;
R_e, résistance de l'étincelle;
l, self-induction de la substance;
L', self-induction du four en charge;
η, rendement électrique du four.

Le chauffage par courants induits semble devoir prendre une place de plus en plus importante dans les laboratoires, chaque fois que l'on se propose de porter une masse conductrice à température élevée; aussi nous a-t-il paru utile de résumer les bases du calcul des courants induits dans une telle masse et de préciser les directives générales auxquelles il convient de se rapporter chaque fois que l'on se trouve en présence d'un cas concret de chauffage d'une substance de dimensions données et de résistivité connue.

Le calcul complet n'est possible que si la substance se trouve placée dans un champ magnétique alternatif uniforme et si elle affecte la forme d'un cylindre de révolution très long, dont l'axe est parallèle aux lignes de force du champ ; les phénomènes sont alors de révolution autour de cet axe et le champ dans la substance, ainsi que la densité de courant, se trouvent dépendre uniquement de la distance x à l'axe.

Equations fixant le champ et la densité de courant dans la substance. — Nous supposerons que le champ à l'extérieur de la substance est sinusoïdal et de pulsation ω constante [1]; soit $H_0 \sin \omega t$.

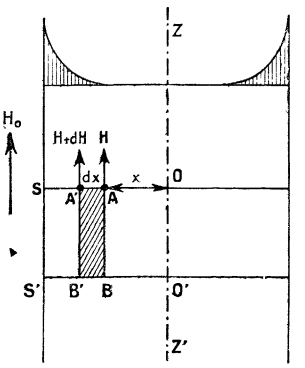

Fig. 1.

Soient H et $H + dH$ les valeurs du champ magnétique aux distances x et $x + dx$ de l'axe (fig. 1); si l'on considère une tranche de substance de hauteur AB égale à l'unité, le théorème d'Ampère fournit immédiatement pour le contour AA'B'B, en désignant par σ la densité de courant dans le rectangle en hachures :

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -4\pi\sigma. \tag{I}$$

En écrivant que la somme algébrique des circulations du vecteur champ électrique le long des circonférences de rayons OA' et OA est égale à la dérivée du flux entre ces deux circonférences du vecteur champ magnétique par rapport au temps, il vient, après simplifications :

$$-\mu \frac{\partial H}{\partial t} = \rho \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \rho \frac{\sigma}{x}. \tag{II}$$

L'élimination de σ entre les équations précédentes donne immédiatement.

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{4\pi\mu}{\rho}\frac{\partial H}{\partial t}. \tag{III}$$

[1] Ce champ sera obtenu, par exemple, en envoyant dans un solénoïde très long, le courant fourni par un alternateur de fréquence convenable.

L'intégration de cette équation complète nécessite l'emploi des fonctions de Bessel, nous y reviendrons plus loin ; nous allons nous limiter pour l'instant au cas où le diamètre d de la substance est suffisamment grand pour que les courants induits se propagent dans une couche d'épaisseur faible par rapport au diamètre. Comme dans le cas de la propagation longitudinale dans un conducteur, on est amené à considérer une épaisseur de peau équivalente ε, donnée par la relation :

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\rho}{2\pi\mu\omega}}.$$

On trouvera, dans le tableau I, les valeurs de ε (en cm) pour diverses fréquences et différentes résistivités correspondant aux divers cas pratiques de chauffage par courants induits.

TABLEAU I. — *Valeurs approximatives de la couche de peau ε (en cm) pour diverses substances et différentes fréquences.*

FRÉQUENCES	CUIVRE FROID $\rho = 2.10^3$ cgs	PLOMB SOLIDE ET Cu FONDU $\rho = 25\ 10^3$	MERCURE FROID $\rho = 100.10^3$	PLATINE ET FER FONDUS $\rho = 200.10^3$	GRAPHITE $\rho \cong 1\ 000.10^3$
50	1	4	8	11	26
500	0,4	1,2	2,4	4	8
2 000	0,2	0,6	1,2	2	4
10 000	0,1	0,3	0,6	0,8	2
100 000	0,03	0,1	0,2	0,3	0,6

Cas où l'épaisseur de la couche de peau est faible par rapport au diamètre de la substance. — Ce cas se présente le plus souvent dans la pratique; c'est en effet, nous le verrons, celui qui correspond au rendement maximum. Il a en outre l'avantage de se présenter sous un aspect théorique plus simple, l'équation générale III se réduisant alors à :

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{4\pi\mu}{\rho}\frac{\partial H}{\partial t}; \qquad \text{(III } bis\text{)}$$

l'intégration de cette équation est immédiate et fournit :

$$H = H_0\, e^{-p/\varepsilon} \sin(\omega t - p/\varepsilon), \qquad \text{(IV)}$$

p désignant la profondeur dans la substance, comptée à partir de la surface extérieure.

L'équation I donne alors :

$$\sigma = \frac{H_0}{4\pi\varepsilon} e^{-p/\varepsilon} [\sin(\omega t - p/\varepsilon) + \cos(\omega t - p/\varepsilon)]. \qquad \text{(V)}$$

On remarquera que le champ et la densité de courant décroissent exponentiellement à partir de la surface extérieure et s'annulent au centre de la substance, pratiquement à une profondeur égale au triple ou quadruple de l'épaisseur de peau ε.

La densité superficielle σ_0 est, en particulier, donnée par l'équation :

$$\sigma_0 = \frac{H_0}{4\pi\varepsilon}(\sin\omega t + \cos\omega t) = \frac{H_0\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right),$$

elle est décalée de $\frac{\pi}{4}$, en avant, par rapport au champ inducteur.

La densité de courant est en phase avec le champ à une profondeur $p = \frac{\pi}{4}\varepsilon$; pour une profondeur plus grande le courant induit est en retard par rapport au champ.

Le courant total i induit dans la substance se calcule aisément : on peut l'avoir immédiatement par application du théorème d'Ampère au contour OSS'O' (fig. 1) ; pour une hauteur unité de la substance ce courant a pour valeur :

$$i = -\frac{H_0}{4\pi}\sin\omega t.$$

Ce courant est en opposition de phase avec le champ inducteur et sa valeur est évidemment telle que le champ induit compense le champ inducteur au centre de la substance.

On remarquera que le courant total i a pour valeur maximum $\frac{\sigma_0\varepsilon}{\sqrt{2}}$ et qu'il est décalé de $\frac{\pi}{4}$ en arrière par rapport à la densité superficielle de courant σ_0.

En général le champ inducteur sera fourni par un solénoïde (fig. 2) parcouru par un courant de fréquence convenable et d'intensité $I = I_0 \sin\omega t$ (en phase avec le champ); si n est le nombre de spires inductrices correspondant à la hauteur h de la substance, le courant total i induit dans cette hauteur de substance est fourni par la relation simple :

$$i = -nI, \tag{VI}$$

il est en opposition de phase avec le courant inducteur.

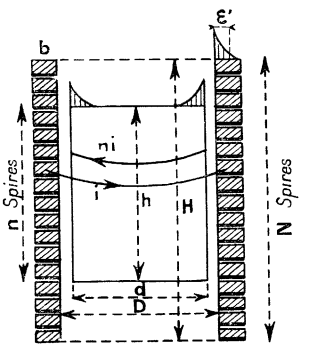

Fig. 2.

Energie recueillie dans la substance. — L'énergie recueillie dans la substance peut se calculer en l'égalant au flux du vecteur de Poynting à travers la surface extérieure du cylindre ; on peut l'obtenir également de façon immédiate en assimilant la substance à une couche d'épaisseur ε, c'est-à-dire à une résistance électrique :

$$r = \frac{\pi d\rho}{h\varepsilon}. \tag{VII}$$

L'énergie W recueillie par seconde s'écrit dès lors, en tenant compte de VI :

$$W = n^2 I^2_{\text{eff.}} \cdot r = n^2 I^2_{\text{eff.}} \cdot \frac{\pi d}{h}\sqrt{2\pi\rho\omega}. \tag{VIII}$$

On arrive ainsi aux conclusions [1] données dans notre mémoire de 1923 (**2**) : *L'énergie recueillie est proportionnelle au carré des ampères tours efficaces, proportionnelle au diamètre occupé par la substance dans le four, proportionnelle aux racines carrées de la résistivité et de la fréquence.*

La formule VIII peut s'interpréter de la façon suivante : la substance, placée à l'intérieur de l'enroulement, agit sur le circuit du four comme une résistance supplémentaire égale à n^2r, r désignant la résistance de la substance pour la fréquence utilisée et n le nombre de spires de l'enroulement situées sur la hauteur h de la substance ; dans la suite la quantité n^2r sera désignée par « résistance équivalente » de la substance.

Propagation des courants dans l'enroulement. Résistance de l'enroulement. — Par suite de l'influence des spires les unes sur les autres, il est tout à fait incorrect de supposer, comme l'ont fait certains auteurs, que les courants se propagent sur tout le pourtour du métal qui constitue l'enroulement : ces courants ont une tendance à ne se propager que sur la face intérieure de l'enroulement.

Le calcul complet ne peut être effectué que si l'on suppose des spires de section rectangulaire et jointives (fig. 2); ce cas a été étudié par Sommerfeld (**16**); on en trouvera le résumé dans un ouvrage de Bouasse (**17**). Le champ dans l'enroulement est encore donné, en fonction de la distance x à l'axe du solénoïde, par l'équation III; si la largeur b des spires est grande par rapport à l'épaisseur de peau ε' dans le métal de l'enroulement, l'équation se ramène à IV, le champ et la densité de courant décroissant alors exponentiellement à partir de la face *intérieure* du solénoïde. En ce qui concerne la phase, les conclusions sont encore les mêmes que pour le cylindre intérieur à l'enroulement, et, bien entendu, le courant total I est en phase avec le champ inducteur.

Tout se passe ici encore comme si les courants se propageaient uniformément dans une couche d'épaisseur ε' et la valeur de la résistance du solénoïde se calcule alors aisément :

$$R_s = \frac{N^2 \pi D \varepsilon'}{H \varepsilon'} \text{ [3]}. \qquad \text{(IX)}$$

Si la largeur b des spires n'est pas grande par rapport à ε', l'expression ci-dessus doit être multipliée par un facteur ψ toujours plus grand que l'unité et dont la valeur est donnée par la formule :

$$\psi = \frac{sh\frac{2b}{\varepsilon'} + \sin\frac{2b}{\varepsilon'}}{ch\frac{2b}{\varepsilon'} - \cos\frac{2b}{\varepsilon'}}.$$

Pour des valeurs de $\frac{b}{\varepsilon'}$ respectivement égales à 2,5 1 0,5 et 0,25, la quantité ψ prend les valeurs 1,02 1,1 2 et 4; en pratique, on le voit, il n'y a pas intérêt à prendre des épaisseurs b supérieures à deux fois l'épaisseur de peau ε'.

[1] Les conclusions obtenues antérieurement (**1**) étaient incorrectes.

[2] Nous verrons plus loin les formules valables dans le cas général; elles se ramènent à celle-ci dans le cas où d/ε est faible.

[3] Tout ce qui précède suppose l'enroulement constitué par une seule couche. Toutes les tentatives faites jusqu'ici pour employer plusieurs couches ont échoué en raison des pertes supplémentaires dues aux courants de Foucault produits dans les couches centrales qui se trouvent placées dans le champ des couches extérieures.

La formule IX représente la résistance minimum, dans le cas d'un enroulement très long; si les spires ne sont pas jointives, la résistance sera plus élevée ; si l'enroulement est très long, la présence de la charge, supposée également très longue, n'influe pas sur la résistance du solénoïde ; il n'en est plus de même si le solénoïde et la charge sont courts, les courants induits dans la charge produisant alors un champ dans la zone occupée par l'enroulement. Dans chaque cas particulier on pourra déterminer expérimentalement la résistance du solénoïde par une méthode calorimétrique ; si le solénoïde est fait d'un tube de cuivre, on aura sa résistance par une mesure de l'échauffement de l'eau de circulation (**3**; **4**).

Rendement électrique d'un four à haute fréquence. Rendement maximum. — Une des grandeurs les plus intéressantes à considérer, du point de vue pratique, est le *rendement électrique* du four à haute fréquence, c'est-à-dire le rapport entre l'énergie recueillie dans la substance et l'énergie fournie au four.

L'énergie rayonnée à distance par le four est négligeable, de sorte que les énergies entrant en jeu se réduisent à celles dissipées par effet Joule dans l'enroulement et la substance ; le rendement électrique η s'écrit alors immédiatement :

$$\eta = \frac{n^2 r}{R_s + n^2 r}$$

$n^2 r$ et R_s désignant respectivement, comme nous l'avons vu, la « résistance équivalente » de la substance et la résistance de l'enroulement.

Si l'on envisage le cas limite d'un four à spires rectangulaires jointives, dans lequel la substance occuperait tout le volume intérieur de l'enroulement ($h = H$, $d = D$), l'expression précédente s'écrit en tenant compte des équations VII et IX :

$$\eta = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{\rho'}{\rho}}}. \qquad \text{(X)}$$

on voit en particulier que les dimensions du four, le nombre de spires, ainsi que la fréquence, s'éliminent. *A partir de la fréquence pour laquelle* d/ε *est grand, le rendement reste pratiquement constant et maximum* ; ce rendement maximum sera le même pour des fours de quelques centimètres de diamètre ou pour des fours de plusieurs tonnes, il ne dépend que des résistivités relatives du métal de l'enroulement et de la substance [1].

Nous avons rassemblé dans le tableau II les rendements maxima calculés pour diverses substances. Pour le cuivre et l'argent à la température ordinaire, le rendement n'est que de 0,50, l'énergie se répartissant par moitié entre la charge et le métal de l'enroulement. Pour les métaux ou alliages de résistivités croissantes, ainsi qu'aux températures élevées, les rendements s'améliorent beaucoup; pour les métaux en fusion, ils se trouvent encore accrus.

TABLEAU II. — *Rendements théoriques maxima pour diverses substances (cylindres pleins de diamètres suffisants).*

	A 15° C	A 1 000° C	A LA FUSION
Cuivre, argent	0,50	0,70	0,75
Platine	0,70	0,80	0,90
Plomb	0,72		0,88
Mercure	0,87		
Fer ou acier		0,87	0,92
Graphite	0,97		

Pour le fer et les métaux ferromagnétiques, au-dessous du point de Curie, le rendement se trouve encore accru par suite des phénomènes d'hystérésis.

En pratique, le rendement se trouvera inférieur aux valeurs calculées plus haut, en raison de la nécessité de laisser un intervalle entre la charge et l'enroulement. Si la

[1] Ces conclusions, contenues dans notre mémoire de 1926 (3), sont encore valables, comme nous l'avons montré, dans le cas de fours faits de spires de forme quelconque, mais de même serrage et de même section droite.

substance n'occupe qu'une fraction du volume de l'enroulement, le rendement peut s'écrire :

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{D}{d} \cdot \frac{H}{h} \sqrt{\frac{\rho'}{\rho}}}. \qquad \text{(X } bis\text{)}$$

En admettant $\frac{D}{d}$ et $\frac{H}{h}$ égaux à 2, les rendements dans le cas du platine et du mercure à froid deviennent respectivement : 0,38 et 0,65.

Il reste entendu que la formule ci-dessus n'est qu'approximative et d'autant plus que la charge et l'enroulement sont plus courts.

Cas où d/ε n'est plus très grand. — Si l'épaisseur de peau n'est plus négligeable par rapport au diamètre de la substance, il importe d'effectuer l'intégration de l'équation complète III.

Le calcul a été donné par Strutt (7) et par Wever et Fischer (6); nous renverrons aux mémoires pour le détail des calculs. On peut traduire le résultat sous la forme suivante : l'énergie recueillie dans la substance est encore donnée par une expression analogue à VIII :

$$W = n^2 I^2_{\text{eff.}} \cdot \frac{\pi d \rho}{h \varepsilon} \times \Phi\left(\frac{d}{\varepsilon}\right); \qquad \text{(VIII } bis\text{)}$$

la fonction $\Phi\left(\frac{d}{\varepsilon}\right)$ est donnée par la figure 3 (courbe en trait plein); pour $\frac{d}{\varepsilon}$ très grand cette fonction est égale à 1 et l'on retrouve l'expression VIII donnée par le calcul élémentaire.

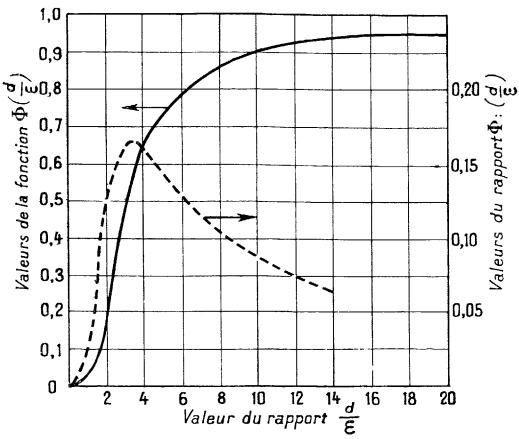

Fig. 3.

Ce qui précède revient à dire que la résistance équivalente de la charge a pour expression générale :

$$n^2 \frac{\pi d \rho}{h \varepsilon} \Phi\left(\frac{d}{\varepsilon}\right). \qquad \text{(VII } bis\text{)}$$

Dans chaque cas particulier, on aura le rendement au moyen de la formule :

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{D}{d} \cdot \frac{H}{h} \cdot \frac{\Psi}{\Phi} \sqrt{\frac{\rho'}{\rho}}}. \qquad \text{(X } ter\text{)}$$

L'expression ci-dessous, comme d'ailleurs les autres expressions de η données plus haut, supposent toujours la charge et l'enroulement très longs, c'est à-dire le champ pratiquement uniforme dans la substance et l'enroulement. En fait, l'expérience montre que, du moins, si la hauteur reste supérieure à deux fois le diamètre, la formule ci-dessus donne une approximation suffisante.

La figure 3 montre que l'on peut, sans diminuer sensiblement le rendement, choisir des fréquences telles que d/ξ ne dépasse pas 8 à 10; on en conclut d'ailleurs immédiatement que la fréquence minimum f à utiliser pour une substance donnée (cylindre plein) varie proportionnellement à la résistivité et en raison inverse du carré du diamètre (3). En pratique, on peut admettre l'expression :

$$f_{\min} = \frac{2\rho}{d^2};$$

le chauffage d'un cylindre de platine fondu, de diamètre 2 cm, nécessiterait une fréquence d'au moins 100 000 périodes, si l'on veut atteindre le maximum de rendement; un cylindre de diamètre 20 cm nécessiterait 1 000 périodes.

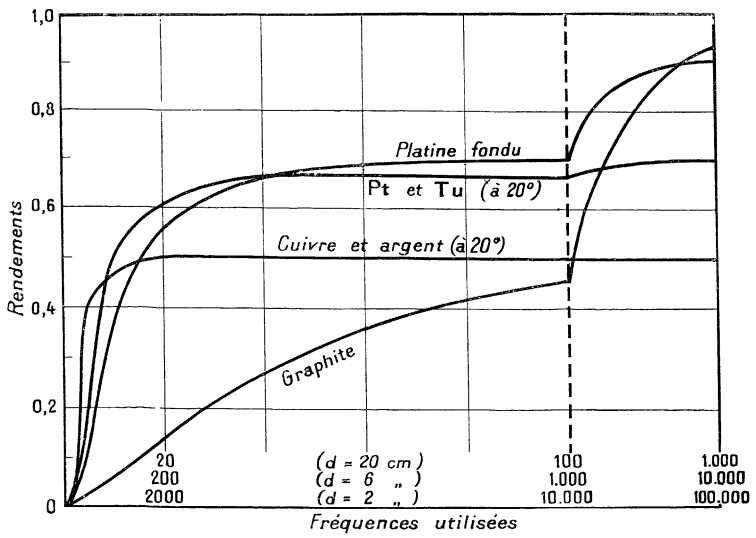

Fig 4.

La figure 4 donne la variation du rendement limite ($d = D$, $h = H$) d'un four donné lorsque l'on fait varier la fréquence; les fréquences sont indiquées pour quelques diamètres de substances, pour les autres diamètres on ferait aisément le changement d'échelle des abscisses; on remarquera que la difficulté qu'il y a à chauffer un cylindre de résistivité donnée augmente quand diminue le diamètre, autrement dit, les faibles quantités de substance dont on dispose au laboratoire nécessitent des fréquences beaucoup plus élevées que celles auxquelles a recours l'industrie; nous préciserons d'ailleurs plus loin ces ordres de grandeur à propos d'un exemple concret.

Résistance, self induction et cos φ du four en charge. Capacité nécessaire. — La résistance R' du four en charge est égale à la résistance de l'enroulement augmentée de la résistance équivalente de la charge :

$$R' = R_s + n^2 r\, \Phi\left(\frac{d}{\xi}\right).$$

Dans le cas général, le calcul de la self inductance L' du four en charge est assez complexe; Strutt, puis d'autres auteurs (**7**, **6**, **15**) en ont donné l'expression complète qui comporte : 1° la self de fuite correspondant à l'intervalle entre la face intérieure de l'enroulement primaire et la face extérieure de la charge; 2° un terme qui tient à ce que la compensation du flux primaire par le flux secondaire n'est qu'incomplète dans la zone qui part de la surface extérieure de la charge (1); 3° un troisième terme qui tient à la répartition en profondeur du courant primaire dans l'épaisseur de l'enroulement.

En général $\left(\frac{d}{\varepsilon}\text{ grand, } D - d \text{ non négligeable}\right)$ le premier terme (self de fuite) est le plus important; sa valeur peut s'écrire approximativement en supposant, ce qui n'est pas rigoureux, que les lignes de flux sont partout parallèles à l'axe de cylindre :

$$L' = \frac{\pi^2 n^2}{h^2}(HD^2 - hd^2) \text{ (2).} \qquad \text{(XI)}$$

Le calcul fournit alors des valeurs de $\operatorname{tg}\varphi = \frac{L'\omega}{R'}$ assez élevées, c'est-à-dire des valeurs de $\cos\varphi$ relativement faibles (souvent inférieures à 0,2); il est donc nécessaire, par addition d'une capacité C en série ou en dérivation sur le four, de ramener le courant débité par l'alternateur à être en phase avec la force électromotrice; cette capacité devra remplir la condition approchée $L'C\omega^2 = 1$ (3) :

Les caractéristiques de l'alternateur se calculent aisément comme nous allons le préciser sur un cas concret.

Caractéristiques d'une installation à alternateur destinée à fondre un cylindre de platine de diamètre 2 cm et de hauteur 5 cm. — Nous choisissons cet exemple qui se présente dans la réalisation d'un corps noir à la température de fusion du platine, appelé à servir comme repère pyrométrique ou photométrique; nous supposerons en outre que la masse de platine utilisée (300 gr. environ) doive être portée à la fusion en 15 minutes et nous adopterons respectivement pour le diamètre et la hauteur de l'enroulement les valeurs $D = 4$ cm, $H = 10$ cm (4).

Cherchons à nous faire une idée des rendements que fournirait une fréquence de l'ordre de 8 000.

Pour le métal froid ($\rho = 10^4$) on a :

$$\varepsilon = 0{,}2 \text{ cm}, \qquad \frac{d}{\varepsilon} = 10, \qquad \Phi = 0{,}9, \qquad \eta = \frac{1}{1 + \frac{4}{0{,}9}\sqrt{\frac{2}{10}}} = 0{,}35;$$

Pour le métal à 1 000° ($\rho = 4.10^4$) :

$$\varepsilon = 0{,}4, \qquad \frac{d}{\varepsilon} = 5, \qquad \Phi = 0{,}75, \qquad \eta = 0{,}45;$$

(1) Si d/ε est grand, ce terme conduit à ajouter 1 à la valeur de $\operatorname{tg}\varphi$ calculée en faisant état uniquement de la self de fuite.

(2) Cela revient à supposer que la substance a une self induction propre $\frac{\pi^2 d^2}{h}$, et une self induction équivalente $n^2\frac{\pi^2 d^2}{h}$ qui se retranche de celle de l'enroulement (**2**, **3**, **10**).

(3) Formule rigoureuse si la capacité est en série sur le four; dans le cas d'une capacité mise en parallèle, la formule complète est $C = \frac{L'}{L'^2\omega^2 + R'^2}$ (fig. 5). dans laquelle, en pratique, R'^2 est négligeable devant $L'^2\omega^2$.

(4) Cela correspond à une épaisseur latérale de calorifuge égale à 1 cm; nous ne discutons pas ici les valeurs optima à donner à l'épaisseur du calorifuge et à la hauteur de l'enroulement pour obtenir le meilleur rendement; ce qui importe ici est d'avoir une bonne uniformité de température dans la substance.

Pour le métal solide à la fusion 1 800° environ

$$(\rho = 8.10^4), \qquad \varepsilon = 0{,}55, \qquad \frac{d}{\varepsilon} = 3{,}5, \qquad \eta = 0{,}50;$$

Pour le métal liquide à la fusion

$$(\rho = 20.10^4), \qquad \varepsilon = 0{,}8, \qquad \frac{d}{\varepsilon} = 2{,}5, \qquad \eta = 0{,}45.$$

Les rendements ci-dessus ne sont pas notablement inférieurs à ceux que donnerait une fréquence très élevée, du moins pour le métal solide [1]; si nous remarquons que l'énergie nécessaire pour maintenir le métal à la fusion se réduit aux pertes calorifiques nous en concluons qu'il n'y a aucun inconvénient à adopter une fréquence 8 000.

L'énergie nécessaire pour échauffer les 300 grammes de platine (chaleur spécifique moyene 0,04 calorie) jusqu'à 1 800° est d'environ 105 Joules, ce qui correspond, pour une fusion en 15 minutes, à une puissance moyenne de 100 watts; les pertes calorifiques se calculent aisément en admettant que le cylindre, de surface extérieure 50 cm², est entouré d'une épaisseur de calorifuge de 1 cm; à 1 800°, température pour laquelle les pertes calorifiques sont maxima, et pour un calorifuge en poudre de conductibilité calorifique approximativement égale à 0,0005 calorie, la puissance dissipée est d'environ 200 watts.

La puissance à fournir à la substance doit donc être d'environ 300 watts; en tenant compte du rendement, voisin de 0,5, il faut donc fournir au four une puissance de 600 watts environ. En faisant état du rendement propre de l'alternateur, des pertes dans la capacité et les connexions, il y a lieu de prévoir un alternateur de puissance 1 KW au moins. Etudions ses caractéristiques et celles de l'enroulement.

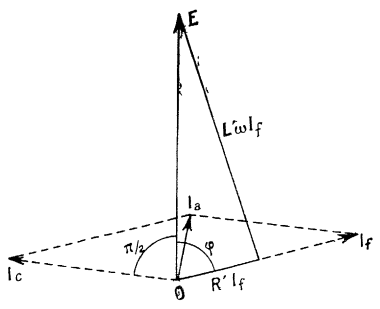

Fig. 5.

L'enroulement sera fait, par exemple, de 20 tours de tube de cuivre d'épaisseur 1 mm. La self induction L' du four (form. XI) est voisine de 5 500 cgs; la capacité nécessaire pour réaliser la résonance sera d'environ 70 microfarads. Pour des raisons accessoires il est préférable de disposer cette capacité en dérivation sur le four; le diagramme est indiqué sur la figure 5. Lorsque l'intensité dans l'alternateur (I_a) est en phase avec la tension E aux bornes de l'alternateur, l'intensité dans le four (I_f) est donnée par $I_a = I_f \cos\varphi$ ou, en tenant compte du fait que $\operatorname{tg}\varphi$ a une valeur grande par rapport à l'unité, on a

$$I_f = I_a \times \operatorname{tg}\varphi = \text{sensiblement } I_a \times 13.$$

Pour le métal à la fusion, la résistance ohmique du four se compose de celle de

[1] Une fréquence très élevée fournirait des rendements égaux respectivement à : 0,35, 0,50, 0,60, 0,70. (Ces rendements sont plus faibles que ceux de la figure 4 parce que nous admettons ici $\frac{H}{h}$ et $\frac{D}{d}$ égaux à 2).

l'enroulement (form. IX, $N = 20$) voisine de 0,011 ohm, et de celle de la charge (form. VIII *bis*, $n = 10$, $\Phi = 0,3$) voisine de 0,007 ohm, au total $R' = 0,018$ ohm. Si l'on veut que la puissance dépensée dans le four soit de 1 000 watts, cela entraîne $I_f = 235$ ampères, et l'intensité maximum débitée par l'alternateur, treize fois plus petite, sera d'environ 18 ampères; la tension E aux bornes de l'alternateur sera prise égale à 55 volts.

Avec un enroulement fait de 40 tours I' et R' seraient multipliées par 4, tg φ conserverait la valeur 13, I et I_a seraient divisées par 2 et, par suite, la tension E multipliée par 2.

On voit, par cet exemple, que, pour un alternateur de caractéristiques (tension et intensité) données, il importe de réaliser, pour chaque substance à chauffer, un enroulement comportant un nombre de spires adapté aux caractéristiques de l'alternateur; à ce point de vue une installation à alternateur se montre beaucoup moins souple qu'une installation à étincelles.

Chauffage d'une substance fragmentée. — Souvent la substance à chauffer ne se présentera pas sous forme d'un cylindre plein, mais sous forme de morceaux plus ou moins réguliers.

On peut se faire une idée des phénomènes en admettant que l'on dispose côte à côte N cylindres de diamètre d remplissant le volume de la charge. Si ce dernier volume est fixé on a sensiblement Nd^2 = constante. D'autre part l'énergie recueillie dans chacun des cylindres est donnée par l'expression :

$$W = n^2 I^2_{\text{eff.}} \frac{\pi d \rho}{h \varepsilon} \Phi\left(\frac{d}{\varepsilon}\right); \qquad \text{(VIII } bis\text{)}$$

pour l'ensemble des cylindres cette énergie peut s'écrire :

$$W' = A \frac{\Phi\left(\frac{d}{\varepsilon}\right)}{\left(\frac{d}{\varepsilon}\right)}$$

A étant une fonction de ρ et ε. La valeur du quotient est représentée en pointillé sur la figure 3; avec une fréquence donnée l'énergie recueillie (et par suite le rendement), faible pour des grains de substance de faible diamètre, croît ensuite, passe par un maximum pour d voisin de $3,6\,\varepsilon$ et décroît ensuite (**2, 3, 12, 14**). L'énergie maximum recueillie peut d'ailleurs être notablement plus élevée que pour un cylindre plein.

Chauffage d'un cylindre de faible épaisseur (e). — Supposons le diamètre d du cylindre grand par rapport à ε, supposons en outre l'épaisseur e faible par rapport à ε; dans ces conditions on peut admettre que le cylindre est parcouru par une densité de courant uniforme, la résistance ohmique r, la self induction l du cylindre et le décalage φ sont donnés respectivement par les relations :

$$r = \frac{\pi d \rho}{he}, \qquad l = \frac{\pi^2 d^2}{h}, \qquad \operatorname{tg} \varphi = \frac{l\omega}{r} = \frac{\pi d \omega e}{\rho}.$$

Le décalage φ est faible; dès lors le cylindre, de section S, placé dans un champ sinusoïdal $H = H_0 \sin \omega t$, est parcouru par une intensité totale i donnée par la relation :

$$i = \frac{H_0 S \omega}{\sqrt{r^2 + l^2 \omega^2}} \cos(\omega t - \varphi), \qquad \text{(XII)}$$

ou sensiblement :

$$i = \frac{H_0 S \omega}{r} \left(\cos \omega t + \frac{\pi d \omega e}{\rho} \sin \omega t\right).$$

On remarquera que la partie importante de ce courant i est en quadrature avec le champ; seul le second terme intervient dans l'énergie absorbée.

Si l'épaisseur tend vers zéro, la densité de courant σ ne tend pas vers zéro, mais vers la valeur :

$$\sigma = \frac{H_0 d\omega}{4\rho} \cos \omega t;$$

cette densité de courant est finie, mais elle est en quadrature avec le champ ce qui explique pourquoi l'énergie recueillie tend vers zéro.

On retrouve ainsi, par une méthode plus rapide, tous les résultats indiqués antérieurement par J.-J. Thomson (**18**) dans le cas du creuset mince.

L'énergie W recueillie dans la substance peut s'écrire :

$$W = n^2 I_{\text{eff.}}^2 \frac{r \cdot l^2 \omega^2}{r^2 + l^2 \omega^2};$$

si l'épaisseur du cylindre change, cette énergie est maximum lorsque l'on a : $r = l\omega$; autrement dit il existe une épaisseur optimum du cylindre donnée par la relation :

$$e_{\text{opt.}} = \frac{\rho}{\pi d \omega} = \frac{2\varepsilon^2}{d} \cdot (\mathbf{12}, \mathbf{14}).$$

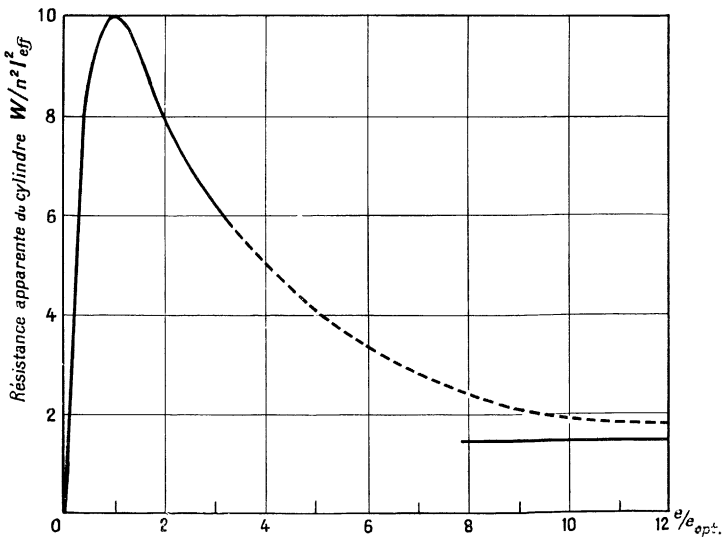

Fig. 6.

On remarquera que, si d est grand par rapport à ε, l'épaisseur optimum ainsi calculée est notablement plus faible que ε, ce qui justifie la seconde hypothèse faite au début des calculs.

Si l'on compare l'énergie W_m, recueillie dans le cas de l'épaisseur optimum, à l'énergie W' recueillie dans un cylindre plein de même substance, on a immédiatement :

$$\frac{W_m}{W'} = \frac{\varepsilon}{2e} = \frac{d}{4\varepsilon},$$

relation qui montre que, pour une intensité donnée dans l'enroulement, l'énergie recueillie

dans un cylindre creux convenablement choisi, peut être notablement plus élevée que dans un cylindre plein.

Envisageons, par exemple, le cas d'un cylindre de tungstène, de diamètre 4 cm, au voisinage de la température ordinaire ($\rho = 10^4$); pour une fréquence égale à 10 000 on a : $\varepsilon = 1{,}6$ mm; $e_{opt} = 0{,}14$ mm; le rapport W_m/W' est ici égal à 6. La résistance apparente d'un cylindre d'épaisseur optimum est 6 fois plus élevée que pour un cylindre plein de tungstène de même diamètre.

L'allure générale de la courbe qui donne la résistance apparente du cylindre, en fonction de son épaisseur, est donnée par la figure 6; pour les grandes valeurs de l'épaisseur on doit, dans tous les cas, retrouver ce que donnerait un cylindre plein, toujours en supposant le diamètre grand par rapport à ε. On peut se proposer d'utiliser le cylindre ci-dessus à la réalisation de températures élevées; à 2 000° C la résistivité du tungstène est environ $7{,}10^4$ ($\varepsilon = 4{,}5$ mm); l'épaisseur optimum serait ici d'environ 1 mm. Pour la pratique du chauffage on adoptera une épaisseur de cylindre de 0,5 mm par exemple; à la température ordinaire l'énergie recueillie dans ce cylindre sera 3 fois plus élevée que dans un cylindre plein ; à 2000°C elle sera 2 fois plus élevée. Les rendements, que l'on calculerait aisément, sont tout-à-fait satisfaisants.

Chauffage d'un cylindre mince contenant à son intérieur un cylindre plein conducteur. — Le cas envisagé ici serait, par exemple, celui d'un cylindre mince de graphite contenant à son intérieur un métal en fusion (cuivre). Nous désignerons respectivement par ρ_1 et ρ_2, ε_1 et ε_2, les résistivités et les épaisseurs de peau dans le cylindre extérieur et dans le cylindre plein intérieur. Soient e l'épaisseur du cylindre extérieur (faible par rapport à ε_1), σ_1 et σ_2 les valeurs des densités de courant dans les deux cylindres, à leur contact. La force électromotrice d'induction est évidemment la même pour les deux substances, à l'endroit où elles sont en contact; cela entraîne immédiatement $\rho_1\sigma_1 = \rho_2\sigma_2$. Nous admettrons que dans le cylindre extérieur la densité de courant est partout égale à σ_1; le courant total dans le cylindre extérieur est alors égal à $e\,\sigma_1$ par unité de hauteur de la substance; le courant total dans le cylindre intérieur (dont on suppose le diamètre grand par rapport à ε_2) est égal à $\frac{\varepsilon_2\,\sigma_2}{\sqrt{2}}$ et décalé de $\frac{\pi}{4}$ par rapport au précédent. Le champ total au centre de la substance, résultant du courant inducteur I_0 et des courants induits dans les deux cylindres doit être nul; par application de la règle de Fresnel, et s'aidant de la relation donnée plus haut, on en déduit aisément σ_1 et σ_2 en fonction des ampères tours primaires.

L'énergie W recueillie dans l'ensemble des deux cylindres s'écrit alors :

$$W = n^2 I_{\text{eff.}}^2 \frac{\pi d \rho_2}{h} \frac{\varepsilon_2 + 2e\dfrac{\rho_2}{\rho_1}}{\varepsilon_2^2 + 2e\varepsilon_2\dfrac{\rho_2}{\rho_1} + 2e^2\left(\dfrac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2}.$$

A la fréquence 10 000, dans le graphite on a $\varepsilon_1 = 2$ cm; dans le cuivre fondu $\varepsilon_2 = 0{,}3$ cm; pour des épaisseurs e qui vont jusqu'à 2 cm l'énergie recueillie est pratiquement la même que si le creuset de graphite n'existait pas; il faut arriver à des épaisseurs e dépassant notablement ε_1 pour que l'on ait un gain de rendement; bien entendu à partir d'une épaisseur suffisante tout se passera comme si la charge centrale n'existait pas et l'énergie recueillie sera la même que dans un cylindre plein de graphite.

Installations à étincelles.

Au laboratoire, la production des courants de haute fréquence nécessaires au chauffage peut être obtenue au moyen d'alternateurs dont nous avons précisé plus haut les caractéristiques; pour certaines applications particulières, on peut envisager l'emploi

d'installations à lampes sur lesquelles nous ne nous étendrons pas ici; dans la pratique courante du laboratoire, les installations à étincelles restent les plus commodes et les plus souples, nous allons en étudier la théorie.

De telles installations comportent comme parties essentielles un transformateur survolteur dont le secondaire est relié à une batterie de condensateurs; cette dernière est susceptible de se décharger dans un circuit comprenant un éclateur (fixe ou tournant) et l'enroulement du four.

Il semble bien difficile de se faire une idée nette du fonctionnement d'une installation particulière si l'on n'en fait pas une étude oscillographique complète. Nous allons donner quelques-uns des résultats fournis par une telle étude dans le cas d'une installation à éclateur tournant, établie en vue de mesures systématiques.

Etude oscillographique du fonctionnement d'une installation à étincelles. — L'éclateur était constitué par un disque comportant 8; 16 ou 24 pointes, calé sur l'arbre d'un moteur asynchrone à 4 pôles, synchronisé en envoyant du courant continu dans l'une des bagues; la phase pouvait être modifiée grâce à un régulateur d'induction disposé sur le circuit d'alimentation du moteur (1).

L'utilisation de disques à 8; 16 ou 24 pointes fournissait un nombre de passages devant les plots fixes respectivement égal à 2; 4; 6 par alternance du secteur d'alimentation.

L'oscillographe utilisé était un oscillographe Blondel, modèle Siemens, à deux boucles plongées dans l'huile. Le courant primaire dans le transformateur d'alimentation était enregistré grâce à un transformateur d'intensité dont le primaire était parcouru par le courant à étudier et le secondaire branché sur l'une des boucles de l'oscillographe, convenablement shuntée; on pouvait enregistrer le voltage primaire ou le voltage aux bornes de la capacité par un dispositif analogue.

Les figures 7; 8; 9 et 11 donnent simultanément le voltage aux bornes de la capacité (courbes chiffrées) et l'intensité primaire; la figure 10 donne le voltage aux bornes d'entrée de l'installation (courbe E) et l'intensité primaire (courbe I). Sur ces figures, les temps vont en croissant vers la droite.

Dans la figure 7 (8 pointes), la phase était réglée de façon à obtenir une étincelle au moment du maximum de tension du secteur; la tension aux bornes de la capacité monte jusqu'à sa valeur maximum, puis tombe à zéro au moment où l'étincelle éclate (2); on remarquera que l'intensité et la tension étaient jusqu'alors sensiblement en quadrature. Le voltage et l'intensité remontent ensuite brusquement pour se mettre à nouveau en quadrature; sans toutefois que le voltage soit suffisant pour qu'il éclate une seconde étincelle à mi distance entre les points marqués 1 sur la figure.

Dans la figure 8 (8 pointes), la phase a été réglée de façon à obtenir deux étincelles dans chaque alternance; les courbes prennent ici une allure nettement plus complexe; on y retrouve toutefois la chute brusque de la tension aux bornes de la capacité au moment où l'étincelle éclate, avec ensuite une remontée brusque de l'intensité et de la tension.

La figure 9 correspond à un disque muni de 16 pointes et à 3 étincelles par alternance; le point marqué O correspond à un passage sans étincelle; la figure 11 est relative à un disque muni de 24 pointes et à 5 étincelles par alternance.

Pour un grand nombre d'étincelles la courbe d'intensité primaire prend simplement une forme sinusoïdale, un peu ondulée, avec une remontée du courant après chaque étincelle.

Sur toutes les courbes précédentes, un étalonnage préalable permet d'avoir le voltage V aux bornes de la capacité C au moment où chaque étincelle éclate; la puissance mise en jeu par la décharge de la capacité peut alors se calculer par la relation $\Sigma\, 1/2\, C V^2$; elle

(1) Nous sommes heureux de pouvoir remercier ici M. J. Meyer professeur à l'Ecole Technique de Strasbourg, dont la collaboration nous a été très précieuse pour la prise de cas oscillogrammes.

(2) Les oscillations de la courbe autour de la ligne de zéro tiennent à un amortissement un peu insuffisant de l'équipage mobile; les pointillés, faits à la main, donnent l'allure des courbes rectifiées. Les mêmes remarques s'appliquent aux clichés suivants.

coïncide de façon satisfaisante avec la puissance mesurée au wattmètre à l'entrée de l'installation, en tenant compte des pertes dans le transformateur d'alimentation et la self.

La figure 10, à rapprocher de la figure 9, donne l'intensité et le voltage primaires; de cette courbe on déduit aisément la valeur du cos φ primaire, ici voisine de 0,9.

Résistance du circuit de décharge. — La résistance R' du circuit de décharge comprend la résistance équivalente de la charge (n^2r), la résistance du solénoïde inducteur et la résistance R_e de l'étincelle (1). La résistance de l'étincelle est toujours importante et il importe de ne pas la négliger dans les calculs numériques comme l'ont fait certains auteurs; en fait cette résistance existe bien et, du moins pour un bon éclateur tournant, se trouve être indépendante de l'intensité qui la traverse (2); par contre elle dépend de la capacité et de la self du circuit de décharge. Sa valeur atteint fréquemment trois à quatre fois la résistance de l'enroulement primaire (2).

En pratique les résistances du solénoïde inducteur et de la charge peuvent se calculer (form. IX et VII *bis*) si l'on connaît la fréquence des oscillations; on peut également les mesurer calorimétriquement, la première par l'échauffement de l'eau de circulation, la seconde au moyen d'un calorimètre en verre sans argenture; ces mesures impliquent, bien entendu, la connaissance de l'intensité efficace dans le circuit de décharge. La résistance de l'étincelle peut être mesurée si l'éclateur est disposé dans une enveloppe avec refroidissement par eau de circulation; on l'aura également, de façon moins sûre il est vrai, par différence entre la résistance totale du circuit de décharge (2) et la somme des résistances de l'enroulement et de la charge.

La self induction L' du circuit de décharge se calculera comme dans le cas d'une installation à alternateur (form. XI et texte correspondant); on pourra également la calculer si l'on connaît la valeur de la capacité et la fréquence des oscillations.

Rendement d'une installation à étincelles. — Le rendement électrique d'une installation à étincelles se calculera par la relation suivante :

$$\eta = \frac{n^2 r}{n^2 r + R_s + R_e + R_c};$$

on tiendra compte des pertes dans le transformateur d'alimentation en multipliant η par le rendement du transformateur, toujours voisin de l'unité, on pourra également tenir compte des pertes dans la self de réglage.

Le rendement d'une installation à étincelles est, toutes choses égales, toujours inférieur au rendement d'une installation à alternateur, du fait de la présence de la résistance d'étincelle R_e, dont l'importance relative est d'ailleurs d'autant plus grande que la résistance équivalente de la charge est plus faible. Dans le cas du chauffage par induction directe de substances très conductrices, les rendements se trouvent donc nettement plus faibles que pour une installation à alternateur; pour du cuivre ou de l'argent à froid, alors que l'alternateur fournit un rendement maximum égal à 0,5, une installation à étincelles dans laquelle l'étincelle a une résistance trois fois supérieure à celle de l'enroulement, fournira un rendement voisin de 0,2. Par contre, pour les substances de haute résistivité et pour de bons couplages, le rendement d'une installation à étincelles sera du même ordre que celui donné par un alternateur.

(1) On peut y ajouter un autre terme R_c pour tenir compte des pertes dans la capacité; en général faibles par rapport aux précédentes.

(2) Puissance mesurée à l'entrée de l'installation divisée par le carré de l'intensité efficace dans le circuit de décharge. De la puissance mesurée il y a lieu de retrancher les pertes dans le transformateur d'alimentation, dans le self de réglage et dans la capacité.

Amortissement des oscillations. — L'équation des oscillations dans le circuit de de décharge

$$L' \frac{d^2 i}{d t^2} + R' \frac{d i}{d t} + \frac{i}{C} = 0$$

permet l'étude du régime de décharge et de l'amortissement des oscillations.

Pour que le régime soit oscillatoire il faut que la condition suivante

$$CR'^2 < 4 L'$$

se trouve remplie; le décrément logarithmique des oscillations est alors donné par la relation :

$$\lambda = \frac{R'}{2L'} \cdot \frac{T}{2} = \frac{\pi R'}{2 L' \omega} = \text{sensiblement} \frac{\pi R' C \omega}{2}.$$

On se fera une idée des ordres de grandeur par l'exemple expérimental suivant, correspondant au chauffage d'un cylindre de mercure $d = 6$ cm, $h = 10$ cm, dans un solénoïde $D = 7$ cm, $H = 13$ cm, comportant 20 spires; la capacité est 0,1 microfarad. L'expérience fournit $R' = 1$ ohm, $\omega = 10^6$ ($L' = 10^4$ cgs). Le décrément logarithmique des oscillations est ici $\lambda = 0,15$. Avec un cylindre de graphite de mêmes dimensions l'expérience donne $R' = 2$ ohms, et par suite $\lambda = 0,3$; après 10 oscillations l'intensité dans l'enroulement est réduite à 1/25 de sa valeur.

Propriétés accessoires des installations à étincelles. — Du point de vue pratique, pour des installations appelées à un service prolongé, il importe que le décalage entre le courant primaire dans le transformateur d'alimentation et le voltage primaire reste faible; les éclateurs fixes ont un cos φ qui reste toujours faible (**9**) et souvent voisin de 0,5; les éclateurs tournants présentent à ce point de vue l'avantage de donner des valeurs de cos φ toujours supérieures à 0,75 et souvent voisines de 0,9 (fig. 10), si l'on a soin de choisir convenablement le nombre des étincelles et les constantes de l'installation (**10**).

Pour les applications courantes de laboratoire les installations à étincelles ont le grand mérite d'une grande robustesse et d'une très grande facilité d'emploi. En particulier, la question du nombre de spires à donner à l'enroulement ne se pose pas ici, alors que, dans le cas de l'alternateur, elle doit être étudiée dans chaque cas particulier de façon à correspondre assez exactement à la tension de l'alternateur dont on dispose; avec une installation à étincelles, on peut, dans de très larges limites, utiliser des enroulements de serrages variés sans changer pratiquement le rendement qui se trouve ne dépendre que des diamètres relatifs et des hauteurs relatives du solénoïde inducteur et du cylindre à chauffer.

Toutefois, dans le cas de substances en morceaux de faibles dimensions il pourra y avoir intérêt à adopter un faible nombre de spires de façon à réaliser des fréquences élevées favorables à un bon rendement.

Brassage dans une substance conductrice liquide.

Lorsqu'on dispose une substance conductrice liquide (mercure, métal en fusion) dans l'enroulement inducteur, on constate, surtout aux basses fréquences, un phénomène de brassage caractérisé par un soulèvement du métal au centre de la charge, le métal arrivant par la partie centrale et se déversant sur les bords (fig. 12).

Du point de vue purement statique, le calcul de la hauteur soulevée ne présente aucune difficulté. En un point M où le champ magnétique est H et la densité de courant δ, pour une épaisseur radiale dp, la force pressante F, dirigée vers l'axe de cylindre, est, par unité de surface latérale, $H \delta \, dp$. En tenant compte des relations IV et V qui fixent la réparti-

PLANCHE.

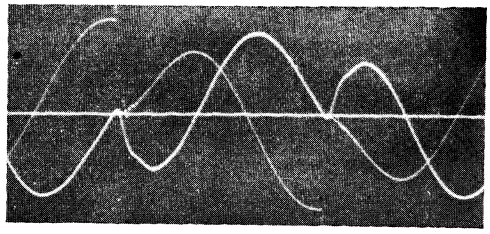

Fig. 7.

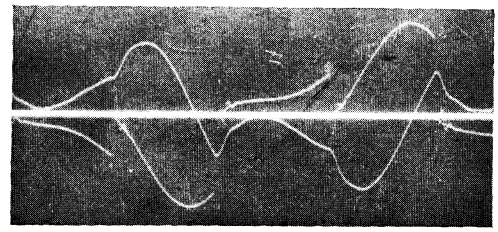

Fig. 8.

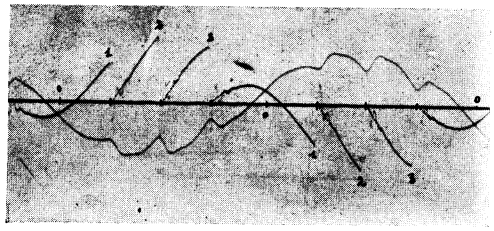

Fig. 9.

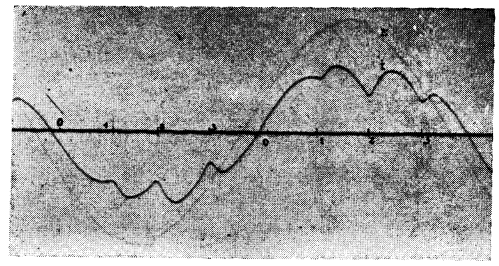

Fig. 10.

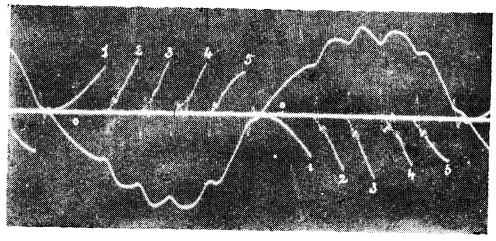

Fig. 11.

G. RIBAUD.

tion en profondeur du champ et de la densité de courant, on trouve aisément pour la force pressante moyenne en M au cours d'une période :

$$\frac{1}{2}\frac{H_0^2}{4\pi\varepsilon}\, e^{-2p/\varepsilon}\, dp.$$

En intégrant depuis $p = 0$ jusqu'à $p = \infty$, l'expression de la pression totale P qui s'exerce sur le pourtour du cylindre s'écrit, dans le cas où $\frac{d}{\varepsilon}$ est grand :

$$P = \frac{H_0^2}{16\pi}. \qquad \text{(XIII)}$$

Si l'on remarque qu'au voisinage du sommet A du dôme soulevé, la force électromagnétique n'a pas de composante normale, on en déduit que la hauteur l soulevée est égale au quotient de la valeur P ci-dessus par δg (δ, masse spécifique du liquide). On peut même aisément se faire une idée de la forme de la courbe méridienne; il est toutefois impossible de pousser jusqu'au bout les calculs, la loi de variation du champ inducteur dans la région BA est en effet difficile à préciser. On peut néanmoins prévoir, en B et C, un raccordement tangentiel du liquide avec la paroi. Bien que cette disposition tangentielle rende difficiles les mesures expérimentales directes de l, l'expérience nous a montré un accord satisfaisant avec le calcul.

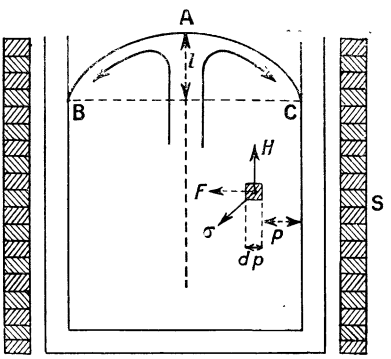

Fig. 12.

On remarquera que la hauteur soulevée dépend uniquement du champ H_0 dans la solénoïde inducteur; si l'on se reporte à l'expression VIII on voit qu'à puissance égale dissipée dans une substance de dimensions données, le carré du champ inducteur varie en raison inverse de la racine carrée de la fréquence d'alimentation; la formule XIII montre alors que la hauteur soulevée varie en raison inverse de la racine carrée de la fréquence, elle sera dix fois plus grande à 50 périodes qu'à 5 000 périodes. Pour les basses fréquences cette hauteur dépasse souvent 10 cm; aux fréquences élevées (de l'ordre de 100 000) que fournit une installation à étincelles branchée sur un four de faibles dimensions ($D = 5$ cm; $H = 10$ cm) la hauteur soulevée est imperceptible.

Un examen plus complet de la formule VIII montre en outre que si l'on s'astreint, dans des fours de dimensions variées, à dissiper dans la substance une puissance proportionnelle au volume, la hauteur du ménisque doit se trouver proportionnelle au diamètre du four. On peut en conclure que, si le phénomène de brassage peut prendre dans les fours industriels une allure vraiment frappante, par contre pour des fours de laboratoire ce phénomène ne semble pas avoir l'importance que lui attribuent certains auteurs. Toutefois si l'on

veut se trouver dans les circonstances les plus favorables, pour une installation à étincelles il conviendra d'utiliser des enroulements à spires serrées fournissant des fréquences relativement basses; si le chauffage se fait par alternateur on sacrifiera au besoin le rendement en adoptant une fréquence aussi faible que possible.

Si, comme nous venons de le voir, le phénomène électromagnétique se présente sous un aspect assez simple du point de vue statique, il n'en est pas de même du point de vue hydrodynamique; il n'existe pas à notre connaissance d'explication satisfaisante de la circulation du métal, permettant en particulier de fixer la forme et la profondeur des filets liquides dans la masse. Les courants de convection dus à des inégalités de température ne jouent certainement aucun rôle, la circulation cesse en effet immédiatement dès que l'on supprime le courant dans l'enroulement, la surface du métal reprenant aussitôt un aspect calme et parfaitement plan.

Si nous rappelons que ce brassage présente l'avantage de fournir une grande homogénéité dans la masse en fusion, aussi bien du point de vue de la composition que de la température, si nous ajoutons qu'une étude purement expérimentale se heurte à d'assez sérieuses difficultés, l'intérêt d'une étude théorique du phénomène n'échappera certainement pas.

Institut de Physique de Strasbourg.

Manuscrit reçu le 17 juin 1932.

BIBLIOGRAPHIE

(1) Northrup. *Génér. Electr. Rev.* (1922), p. 656.
(2) Ribaud. *J. Phys.*, **4** (1923), p. 185.
(3) Ribaud. *J. Phys.*, **7** (1926), p. 250.
(4) Sackmann. *Diplôme Etudes supérieures.* Strasbourg (1927).
(5) Burch et Davis. *Phil. Mag.* (1926), p. 768.
(6) Wever et Fischer. *Communication du Kaiser Wilhelm Institut fur eisenforschung* (1926), p. 153. Fas. **69**.
(7) Strutt. *Ann. der Phys.*, **82** (1927), p. 605.
(8) Bunet. *Bull. Soc. Franç. Electr.*, **7** (1927), p. 814.
(9) Dufour *J. Phys.*, **8** (1927), p 508.
(10) Gutmann. *Soc Franç. Electriciens.* Séance du 27 octobre 1928.
(11) Ribaud-Bunet-Boucherot. *Bull. Soc. Franç. Electr.*, **8** (1928), p. 331.
(12) Strutt. *Archiv für Elektrotechnik.*, **19** (1928), p. 424.
(13) Bunet *Bull Soc Franç Electr.*, **8** (1928), p. 972.
(14) Ribaud. *Techn. Moderne*, **21**, avril-mai (1929).
(15) Radulet *Thèse de doctorat.* Zurich (1931). Ce travail contient une intéressante étude du cas d'un cylindre court placé dans un solénoïde infiniment long; l'auteur donne les valeurs du facteur de correction

MÉMOIRES ACCESSOIRES

(16) Sommerfeld. *Ann. der Phys.*, **15** (1904), p. 677.
(17) Bouasse. *Ondes Hertziennes* (1925), p. 149.
(18) J.-J. Thomson. *Recent Researches*, p. 323.