



Sur le traitement relativiste de l'atome à plusieurs électrons

L. Goldstein

► To cite this version:

L. Goldstein. Sur le traitement relativiste de l'atome à plusieurs électrons. Journal de Physique et le Radium, 1930, 1 (8), pp.271-284. 10.1051/jphysrad:0193000108027100 . jpa-00233028

HAL Id: jpa-00233028

<https://hal.science/jpa-00233028>

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

SUR LE TRAITEMENT RELATIVISTE DE L'ATOME A PLUSIEURS ÉLECTRONS

par L. GOLDSTEIN.

Sommaire. — On a tâché de préciser la méthode qui permettrait de traiter le problème des atomes à plusieurs électrons dans la théorie relativiste de Dirac-Breit. On est amené à établir une analogie entre l'Univers à quatre dimensions et, ce que l'on peut appeler l'Univers de configuration, qui semble être un moyen nécessaire du traitement du problème. Cette analogie entre l'Univers réel et l'Univers de configuration abstraite est de même genre que celle existant entre leurs sous-espaces respectifs, l'espace ordinaire et l'espace de configuration. On est conduit à définir dans l'Univers de configuration un vecteur dont les composantes spatiales paraissent s'approcher des composantes du courant du problème à un corps et dont la composante de temps serait la densité électrique. La connaissance de cette densité électrique permet de calculer les éléments de la matrice « moment électrique » relative au problème.

I. La théorie relativiste de l'électron de Dirac se heurte, comme toute théorie relativiste de la matière, à des difficultés lors de son application au cas de plusieurs corps, de plusieurs électrons. Il est bien connu que la théorie de la relativité restreinte, qui devrait servir de base dans le présent problème, exclut le traitement canonique d'un système, d'un système d'électrons, par exemple. On pouvait donc s'attendre à ce que, dans une généralisation éventuelle de la mécanique relativiste au problème à plusieurs corps, certaines notions fondamentales seules gardent, assurent l'aspect relativiste de la méthode appliquée au problème. Si l'Univers à 4 dimensions, lieu réel des phénomènes, devait subir une généralisation et par suite perdre sa réalité, la notion relativiste de l'énergie devait rester invariante. Une première tentative, dans cet ordre d'idées, a été faite par Darwin⁽¹⁾ qui résout le problème relativiste de l'entraînement du noyau de l'hydrogène et établit la fonction de Lagrange du problème à deux (ou à n) électrons, tenant compte de la propagation finie de l'interaction des électrons (potentiels retardés), condition exigée par la théorie de la relativité. Le principe de la méthode de Darwin consiste à superposer les fonctions de Lagrange relatives à deux problèmes à un corps, dont chacun étudie le mouvement d'un électron dans le champ créé par le mouvement supposé connu de l'autre électron. On peut dire que tout se passe dans l'espace ordinaire que seule la variation de la masse avec la vitesse prête l'aspect relativiste au traitement.

Récemment Breit⁽²⁾, partant de l'Hamiltonien de Darwin, a été amené à une généralisation intéressante de la théorie de Dirac pour le cas de plusieurs électrons. On pouvait, naturellement, prévoir que dans la mécanique ondulatoire relativiste, l'Univers à quatre dimensions ne pouvait pas suffire au formalisme du problème. C'est une propriété fondamentale bien connue⁽³⁾ de la fonction totale du problème de ne pouvoir exister que dans un espace de configuration. L'onde de de Broglie dégénère dans le cas de plusieurs électrons en l'onde fictive de Schrödinger qui n'a pas de sens physique tangible. Ce n'est que le produit $\bar{\psi}\psi$ qui a une signification déterminée. C'est une probabilité d'état de l'ensemble et qui s'interprète simultanément dans l'espace ordinaire et dans l'espace de configuration qui lui est adjoint dans le problème considéré.

(1) C. G. DARWIN; *Phil. Mag.* [6], 39 (1920), p. 337.

(2) G. BREIT; *Phys. Rev.*, 34 (1929), 333.

(3) Cf. L. de BROGLIE; *J. Phys.* [6], 8 (1927), 225.

Dans une représentation relativiste, on devrait pouvoir interpréter le produit $\bar{\psi}\psi$, simultanément dans l'Univers à 4 dimensions et dans une multiplicité qui lui est adjointe comme l'est l'espace de configuration à l'espace réel. Dans ce but, on peut former avec l'espace de configuration comme sous-espace, et une dimension supplémentaire, que l'on peut considérer comme le temps, ce que nous proposons d'appeler l'Univers de configuration. De même que, dans l'Univers à 4 dimensions, l'axe du Temps est perpendiculaire au sous-espace, dans l'Univers de configuration (l' U_c) aussi l'axe des temps est perpendiculaire au sous-espace de configuration. On conçoit ainsi une correspondance géométrique, une sorte d'affinité entre l'Univers réel et l'Univers de configuration abstrait, qui lui est adjoint dans le problème à plusieurs corps. L'Univers de configuration n'est, par conséquent, qu'un moyen analytique nécessaire, semble-t-il, au traitement du problème envisagé par Breit, L'équation de Breit fait espérer d'atteindre la statique atomique, telle que la donne la théorie empirique.

2. Darwin ⁽¹⁾ a montré que si l'on tient compte de la propagation finie de l'interaction de deux électrons en mouvement, la fonction d'Hamilton du problème, jusqu'à des termes de l'ordre de $\left(\frac{v}{c}\right)^2$ inclus, s'écrit :

$$H(p, q^I; p^{II}, q^{II}) = \frac{\vec{p}^I}{2m_I} + \frac{\vec{p}^{II}}{2m_{II}} - \frac{\vec{p}^I}{8m_I c^3} - \frac{\vec{p}^{II}}{8m_{II} c^3} - e_I \Phi^I - e_{II} \Phi^{II} + \frac{e_I}{m_I c} (\vec{p}^I \vec{A}^I) \\ + \frac{e_{II}}{m_{II} c} (\vec{p}^{II} \vec{A}^{II}) + \frac{e_I e_{II}}{r} - \frac{e_I e_{II}}{2m_I m_{II} c^2} \left\{ \frac{(\vec{p}^I \vec{p}^{II})}{r} + \frac{(\vec{p}^I \vec{r})(\vec{p}^{II} \vec{r})}{r^3} \right\} \quad (1)$$

où — e est la charge de l'électron, m sa masse, c la vitesse de la lumière, $(\Phi^I, \vec{A}^I)$, $(\Phi^{II}, \vec{A}^{II})$ le potentiel du champ aux points où se trouve le premier (I) et le deuxième électron (II), respectivement. $\vec{p}$ est le vecteur quantité de mouvement et $\vec{r}$ le vecteur allant d'un électron à l'autre. Breit transforme l'Hamiltonien précédent en y introduisant les variables α et

les opérateurs $\vec{p}$ de Dirac pour les deux électrons respectivement. L'équation de propagation de l'onde $\psi_{I,II}$ ne peut être écrite que dans l'Univers de configuration qui, dans ce cas, a 6 dimensions spatiales et la dimension temps. On conviendra, avec Breit, de rapporter le premier indice au premier électron, le deuxième à l'autre électron. Comme $I, II = 1, 2, 3, 4$, la fonction ψ a 16 composantes ψ_{α} . L'équation de propagation de Breit est :

$$H_\psi \psi = \left\{ p + (\vec{x}^I \vec{p}^I) + (\vec{x}^{II} \vec{p}^{II}) + (z_I^I + \alpha_I^{II}) mc + \frac{e^2}{2c} \left[\frac{(\vec{x}^I \vec{x}^{II})}{r} + \frac{(\vec{x}^I \vec{r})(\vec{x}^{II} \vec{r})}{r^3} \right] \right\} \psi = 0 \quad (2)$$

où :

$$\left. \begin{aligned} p &= -\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{e}{c} (\Phi^I + \Phi^{II}) - \frac{e^2}{cr} \\ \vec{p} &= \vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A} \quad \vec{p} = (p_i) \quad (i = 1, 2, 3) \\ p_i^I &= p_i^I + \frac{e}{c} A_i^I = \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_i^I} + \frac{e}{c} A_i^I \end{aligned} \right\} \quad (2')$$

$$\vec{\alpha}^I = (\alpha_i^I); \quad \vec{\alpha}^{II} = (\alpha_i^{II}); \quad \alpha_i^I \text{ et } \alpha_i^{II} \text{ sont les matrices de Dirac } ^{(4)}.$$

Les relations fondamentales de Dirac que Breit donne

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{2\pi i}{\hbar} (F x_i - x_i F) = -c x_i$$

⁽⁴⁾ P.-A.-M. DIRAC; *Proc. Roy. Soc. (A)*, **117** (1928), 610.

s'écrivent ici :

$$\frac{dx_i^I}{dt} = -c x_i^I \quad \text{et} \quad \frac{dx_i^{II}}{dt} = -c x_i^{II}. \quad (3)$$

Ces expressions montrent que les x_i peuvent être considérés comme des variables intrinsèques, des variables d'existence de l'électron. On est alors conduit à écrire les relations suivantes valables à chaque instant :

$$|x_i^I| = |x_i^{II}|; \quad \alpha_k^I = \alpha_k^{II}. \quad (4)$$

Ceci est admis implicitement par Breit, mais il ne semble pas superflu de l'écrire explicitement, d'autant plus que, comme on le verra plus loin (4) intervient dans les lois de transformations des systèmes de coordonnées de l' U_c . Il est possible que si des variables de ce genre existent pour les protons aussi, (4) leur est encore applicable. Les matrices α_i sont :

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad (5)$$

Les 16 équations définissant les 16 $\psi_{\mu\nu}$ s'écrivent facilement, tenant compte des relations suivantes :

$$\langle \alpha_i^I \psi \rangle_{\mu\nu} = \sum_1^4 (\alpha_i^I)_{\mu\lambda} \psi_{\lambda\nu}; \quad \langle \alpha_i^{II} \psi \rangle_{\mu\nu} = \sum_1^4 (\alpha_i^{II})_{\mu\lambda} \psi_{\lambda\nu}; \quad \langle \alpha_i^I \alpha_i^{II} \psi \rangle_{\mu\nu} = \sum_1^4 (\alpha_i^I)_{\mu\lambda} (\alpha_i^{II})_{\nu\varrho} \psi_{\lambda\varrho}. \quad (6)$$

L'équation (2) contient l'équation d'Eddington ⁽⁵⁾ et de Gaunt ⁽⁶⁾ et doit fournir les niveaux de l'hélium avec une meilleure approximation que donne Gaunt. Gaunt a, déjà, le premier envisagé d'une façon générale, le problème relativiste des atomes à plusieurs électrons. Mais il part de l'équation qu'il donne pour l'He, négligeant le potentiel retardé, et s'écarte entièrement des propositions contenues dans ce travail qui sont basées sur l'équation de Breit ou sur une équation qui ne s'écarte pas beaucoup d'elle et qui exige nécessairement l'introduction des potentiels retardés.

3. Pour pouvoir calculer les probabilités de transitions dans l'atome considéré, on doit connaître l'expression de la densité électrique de Schrödinger. Pour la trouver, nous formons une fonction de Lagrange ⁽⁷⁾ qui exprime le couplage entre l'atome et le champ. Reprenons l'équation de Breit ou plutôt l'équation conjuguée :

$$F_B \psi = \left\{ p + (\vec{\alpha}^I \vec{p}^I) + (\vec{\alpha}^{II} \vec{p}^{II}) + mc(\alpha_k^I + \alpha_k^{II}) + \frac{e^2}{2c} \left[\frac{(\vec{\alpha}^I \vec{r}^{II})}{r} + \frac{(\vec{\alpha}^I \vec{r})(\vec{\alpha}^{II} \vec{r})}{r^3} \right] \right\} \psi = 0. \quad (\bar{2})$$

Multiplions cette équation par $\bar{\psi}$ et l'équation (2) par $\bar{\psi}$. Tenant compte de ce que tout produit de la forme $\psi \bar{\psi}$ signifie $\sum_1^4 \psi_{\mu\nu} \bar{\psi}_{\mu\nu}$, ajoutons les équations ainsi obtenues et intégrons dans l'espace de configuration. Intégrant par parties, ceci peut s'écrire comme la variation d'une fonction. Pour être plus complet, on devrait ajouter à cela l'intégrale de

⁽⁵⁾ A.-S. EDDINGTON; *Proc. Roy. Soc.*, (A) **122** (1929), 358.

⁽⁶⁾ J.-A. GAUNT; *Ibid.*, **122**, p. 513 et t. **124** (1929), 163.

⁽⁷⁾ C.-G. DARWIN; *Ibid.*, **118** (1928), 654.

l'énergie des champs $(\Phi^I, \vec{A}^I)$ et $(\Phi^{II}, \vec{A}^{II})$. Nous obtenons alors la fonction de variation suivante :

$$\mathcal{E} = \int d\tau^I d\tau^{II} dt \left\{ \bar{\psi} (f \psi) + \bar{\psi} (\vec{f} \vec{\psi}) + mc \bar{\psi} (\alpha_i^I + \alpha_i^{II}) \psi + \frac{e}{c} (V^I + V^{II}) \bar{\psi} \psi \right. \\ \left. + \bar{\psi} I \psi + \frac{e}{c} [(\vec{A}^I \cdot \vec{\psi} \alpha^I \psi) + (\vec{A}^{II} \cdot \vec{\psi} \alpha^{II} \psi)] \right\} \quad (7)$$

où l'on a posé :

$$f = -\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{\alpha}^I p^I) + (\vec{\alpha}^{II} p^{II})$$

$$V^I + V^{II} = \Phi^I + \Phi^{II} - \frac{e}{c r}$$

$$I = \frac{\rho^2}{2c} \left[\frac{(\vec{\alpha}^I \alpha^{II})}{r} + \frac{(\vec{\alpha}^I r) (\alpha^{II} r)}{r^3} \right].$$

Les variations de cette fonction donnent l'équation de Breit, l'équation conjuguée et en outre :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \vec{A}^I} &= \frac{e}{c} \vec{\psi} \alpha^I \psi; & \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \vec{A}^{II}} &= \frac{e}{c} \vec{\psi} \alpha^{II} \psi \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial V^I} &= \frac{e}{c} \bar{\psi} \psi & \text{et} & \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial V^{II}} = \frac{e}{c} \bar{\psi} \psi. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Nous formons à l'aide des grandeurs (8) les composantes d'un vecteur $\vec{J}(j_i^I, j_i^{II}, \rho)$

$$j_i^I = ce \cdot \bar{\psi} \alpha_i^I \psi; \quad j_i^{II} = ce \cdot \bar{\psi} \alpha_i^{II} \psi; \quad \rho = \rho^I + \rho^{II} = -2e \bar{\psi} \psi, \quad (9)$$

avec la condition de normalisation

$$\int d\tau^I d\tau^{II} \bar{\psi} \psi = \int d\tau^I d\tau^{II} \sum_{\mu, \nu}^4 \bar{\psi}_{\mu} \psi_{\mu} \psi_{\nu} = 1. \quad (10)$$

Le vecteur $\vec{J}$ semble avoir l'aspect d'un vecteur courant de l'Univers de configuration et paraît se rapprocher du vecteur courant du problème à un corps. On remarque la dissymétrie des coefficients de charge des composantes. En outre, si les dérivées de $\mathcal{E}$ par rapport aux potentiels vecteurs conduisent aux composantes spatiales du courant, la composante temporelle, la charge est une somme de deux dérivées. Cela tient au caractère purement abstrait de l'axe de temps de l' U_c . C'est un temps de configuration.

Pour vérifier que $\vec{J}$ peut bien être considéré comme un vecteur, on doit montrer que dans les transformations des systèmes de coordonnées de l'Univers de configuration, ses composantes se transforment comme les composantes d'un vecteur. On est ainsi conduit à étudier les lois de transformation dans l' U_c . Nous étudierons successivement les transformations laissant invariant l'axe des temps et les transformations comportant un changement d'axe de temps et de sous-espace. Ces dernières sont des transformations semblables aux transformations de Lorentz de l'Univers à 4 dimensions de Minkowski.

4. L'affinité géométrique de l'Univers de Minkowski et de l'Univers de configuration conduit à définir d'une manière univoque les changements d'axe de coordonnées de ce dernier Univers. Comme dans l'Univers réel, ici aussi, un vecteur $\vec{G}$ peut être décomposé en un vecteur $\vec{g}$, spatial, et g_0 sa composante de temps. On pourra alors traiter ici aussi, à part, les transformations purement spatiales et celles qui comportent un change-

ment d'axe de temps aussi. Nous définissons ces diverses transformations à partir de celles de l'Univers de Minkowski; car, comme on s'en assure aisément, toute transformation de système de coordonnées de l'Univers à 4 dimensions induit une et une seule transformation dans l' U_c . Ainsi, par exemple, la rotation des axes de l'espace ordinaire induit une rotation des axes dans l'espace de configuration. Le tableau des coefficients de cette rotation dans ce dernier sera :

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & x_1^I & x_2^I & x_3^I & x_1^{II} & x_2^{II} & x_3^{II} \\
 \hline
 x_1^{I'} & a_{11}^I & a_{12}^I & a_{13}^I & a_{11}^{II} & a_{12}^{II} & a_{13}^{II} \\
 x_2^{I'} & a_{21}^I & a_{22}^I & a_{23}^I & a_{21}^{II} & a_{22}^{II} & a_{23}^{II} \\
 x_3^{I'} & a_{31}^I & a_{32}^I & a_{33}^I & a_{31}^{II} & a_{32}^{II} & a_{33}^{II} \\
 x_1^{II'} & a_{11}^{II,I} & a_{12}^{II,I} & a_{13}^{II,I} & a_{11}^{II} & a_{12}^{II} & a_{13}^{II} \\
 x_2^{II'} & a_{21}^{II,I} & a_{22}^{II,I} & a_{23}^{II,I} & a_{21}^{II} & a_{22}^{II} & a_{23}^{II} \\
 x_3^{II'} & a_{31}^{II,I} & a_{32}^{II,I} & a_{33}^{II,I} & a_{31}^{II} & a_{32}^{II} & a_{33}^{II}
 \end{array} \quad (R)$$

Il est clair que les coefficients $a_{ik}^{I,II}$ et $a_{ik}^{II,I}$ sont tous nuls et que les coefficients a_{ik}^I et a_{ik}^{II} sont identiques. Le tableau précédent peut donc être réduit au tableau des a_{ik}^I ou a_{ik}^{II} et ce tableau réduit n'est autre que le tableau des coefficients de la rotation effectuée dans l'espace ordinaire. Dans le nouveau système de coordonnées, l'équation de Breit s'écrira :

$$F'_B \psi = \left\{ p' + (\vec{x}^{I'} \vec{p}^{I'}) + (\vec{x}^{II'} \vec{p}^{II'}) + (\alpha_i^{I'} + \alpha_i^{II'}) mc + \frac{e^2}{2c} \left[\frac{(\vec{x}^{I'} \vec{x}^{II'})}{r} + \frac{(\vec{x}^{I'} \vec{r}') (\vec{x}^{II'} \vec{r}')}{r^3} \right] \right\} \psi = 0 \quad (11)$$

où :

$$\vec{\alpha}^{I'} = (x_i^{I'}); \quad \vec{\alpha}^{II'} = (x_i^{II'}); \quad \alpha_i^{I'} = \alpha_i^{II}$$

$$p' = p; \quad \vec{p}' = \vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A}'; \quad p_i' = \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x'}$$

et ;

$$\alpha_i^{I'} = \sum_k^3 a_{ik}^I x_k^I; \quad \alpha_i^{II'} = \sum_k^3 a_{ik}^{II} x_k^{II}. \quad (12)$$

Si l'on veut appliquer une transformation indiquée par Dirac pour les α_i , à savoir :

$$\alpha_i' = \mathfrak{S}^{-1} \alpha_i \mathfrak{S} \quad (12a)$$

on doit se rappeler⁽⁸⁾ que les composantes d'une matrice susceptible de la représentation précédente sont des formes bilinéaires des composantes des matrices $\mathfrak{S}^{-1}$ et $\mathfrak{S}$. Pour obtenir cette transformation dans la rotation (R) envisagée, on doit exprimer celle-ci à l'aide des paramètres de Cayley-Klein. On sait, en effet, que si l'on passe aux coordonnées complexes⁽⁹⁾.

$$\begin{array}{ll}
 \xi_1 = x_1 + x_2 i & \xi'_1 = x'_1 + i x'_2 \\
 \xi_2 = -x_1 + i x_2 & \xi'_2 = -x'_1 + i x'_2 \\
 \xi_3 = -x_3 & \xi'_3 = -x'_3
 \end{array} \quad \text{et}$$

⁽⁸⁾ F. MÖGLICH ; *Z. Physik.*, **48** (1928), 852.

⁽⁹⁾ KLEIN-SOMMERFELD ; *Théorie des Kreisels*.

le tableau des coefficients relatif à la rotation $\mathcal{R}_{\varphi, \psi}$, où θ , φ , ψ désignent les angles d'Euler s'écrit :

	ξ_1	ξ_2	ξ_3
ξ'_1	α^2	γ^2	$\alpha\gamma$
ξ'_2	β^2	δ^2	$\gamma\delta$
ξ'_3	$2\alpha\beta$	$2\gamma\delta$	$\alpha\delta + \beta\gamma$

avec :

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \cos \frac{\theta}{2} e^{\frac{i}{2}(\varphi + \psi)} & \beta &= i \sin \frac{\theta}{2} e^{\frac{i}{2}(-\varphi + \psi)} \\ \gamma &= i \sin \frac{\theta}{2} e^{\frac{i}{2}(\varphi - \psi)} & \delta &= \cos \frac{\theta}{2} e^{\frac{i}{2}(-\varphi - \psi)} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Et en revenant aux coordonnées réelles, le tableau des coefficients sera :

	x_1	x_2	x_3
x'_1	$\frac{1}{2}(\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + \delta^2)$	$-\frac{i}{2}(\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 - \delta^2)$	$-\alpha\gamma + \beta\delta$
x'_2	$\frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2)$	$\frac{i}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)$	$-i(\alpha\gamma + \beta\delta)$
x'_3	$-\alpha\beta + \gamma\delta$	$i(\alpha\delta + \beta\gamma)$	$\alpha\delta + \beta\gamma$

$$\left. \right\} \quad (14)$$

Calculons les matrices α'_i tenant compte de (12) et du tableau précédent (14). On obtient après un calcul facile :

$$\left. \begin{aligned} \alpha'_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -(\alpha\gamma - \beta\delta) & -(\gamma^2 - \delta^2) \\ 0 & 0 & (x^2 - \beta^2) & (\alpha\gamma - \beta\delta) \\ -(\alpha\gamma - \beta\delta) & -(\gamma^2 - \delta^2) & 0 & 0 \\ (x^2 - \beta^2) & (\alpha\gamma - \beta\delta) & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\ \alpha'_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i(\alpha\gamma + \beta\delta) & -i(\gamma^2 + \delta^2) \\ 0 & 0 & i(x^2 + \beta^2) & i(\alpha\gamma + \beta\delta) \\ -i(\alpha\gamma + \beta\delta) & -i(\gamma^2 + \delta^2) & 0 & 0 \\ i(x^2 + \beta^2) & i(\alpha\gamma + \beta\delta) & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\ \alpha'_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & (\alpha\delta + \beta\gamma) & 2\gamma\delta \\ 0 & 0 & -2\alpha\beta & -(\alpha\delta + \beta\gamma) \\ (\alpha\delta + \beta\gamma) & 2\gamma\delta & 0 & 0 \\ -2\alpha\beta & -(\alpha\delta + \beta\gamma) & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

On voit que ces matrices se décomposent dans les matrices du 2° rang suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \alpha'_1 &= \begin{pmatrix} -(\alpha\gamma - \beta\delta) & -(\gamma^2 - \delta^2) \\ (\alpha^2 - \beta^2) & (\alpha\gamma - \beta\delta) \end{pmatrix}; & \alpha'_2 &= \begin{pmatrix} -i(\alpha\gamma + \beta\delta) & -i(\gamma^2 + \delta^2) \\ i(\alpha^2 + \beta^2) & i(\alpha\gamma + \beta\delta) \end{pmatrix}; \\ \alpha'_3 &= \begin{pmatrix} (\alpha\delta + \beta\gamma) & 2\gamma\delta \\ -2\alpha\beta & -(\alpha\delta + \beta\gamma) \end{pmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Si nous formons à partir des α_i (5) de Dirac les matrices du 2° rang, donc les matrices de Pauli :

$$\underline{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \underline{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \underline{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (17)$$

alors les matrices de rotation $\mathcal{R}^{-1}$ et $\mathcal{R}$ doivent satisfaire aux équations suivantes :

$$\underline{\alpha}'_1 = \mathcal{R}^{-1} \alpha_1 \mathcal{R}; \quad \underline{\alpha}'_2 = \mathcal{R}^{-1} \alpha_2 \mathcal{R} \quad \text{et} \quad \underline{\alpha}'_3 = \mathcal{R}^{-1} \alpha_3 \mathcal{R} \quad (18)$$

avec

$$\underline{\mathcal{R}^{-1}} \underline{\mathcal{R}} = 1.$$

On trouve alors facilement pour ces matrices

$$\underline{\mathcal{R}^{-1}} = \begin{pmatrix} \delta & -\gamma \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}. \quad (19)$$

On en forme alors les matrices de 4^e rang $\mathcal{R}^{-1}$ et $\mathcal{R}$ qui s'écrivent :

$$\mathcal{R}^{-1} = \begin{pmatrix} \delta & -\gamma & 0 & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta & -\gamma \\ 0 & 0 & -\beta & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{R} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma & 0 & 0 \\ \beta & \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \gamma \\ 0 & 0 & \beta & \delta \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Connaissant ces matrices de rotation, nous pouvons remplacer en (11) les α'_i par

$$\alpha'_i = \mathcal{R}^{-1} \alpha_i \mathcal{R}.$$

Faisant cela et mettant $\mathcal{R}^{-1}$ en facteur et $\mathcal{R}$ après l'opérateur transformé de Breit F'_B et sachant que

$$\mathcal{R}^{-1} \alpha_i \mathcal{R} = \alpha_i$$

nous obtenons :

$$\mathcal{R}^{-1} F'_B \mathcal{R} \psi = \mathcal{R}^{-1} \left\{ p + (\vec{\alpha}^I \vec{p}^I) + (\vec{\alpha}^{II} \vec{p}^{II}) + (\alpha_i^I + \alpha_i^{II}) mc + \frac{e^2}{2c} \left[\frac{\vec{\alpha}^I \vec{\alpha}^{II}}{r} + \frac{(\vec{\alpha}^I r)(\vec{\alpha}^{II} r)}{r^3} \right] \right\} \mathcal{R} \psi = 0. \quad (21)$$

Comme $\mathcal{R}^{-1}$ n'est pas nul, nous pouvons écrire (10) :

$$F'_B \mathcal{R} \psi = \left\{ p + (\vec{\alpha}^I \vec{p}^I) + (\vec{\alpha}^{II} \vec{p}^{II}) + (\alpha_i^I + \alpha_i^{II}) mc + \frac{e^2}{2c} \left[\frac{(\vec{\alpha}^I \vec{\alpha}^{II})}{r} + \frac{(\vec{\alpha}^I r)(\vec{\alpha}^{II} r)}{r^3} \right] \right\} \mathcal{R} \psi = 0. \quad (22)$$

Dans le nouveau système de coordonnées, on remplacera ψ par $\psi' = \mathcal{R} \psi$ indifféremment on pourra écrire :

$$\psi'_{\mu\nu} = \sum_{\lambda}^4 \mathcal{R}_{\lambda\lambda} \psi_{\lambda\lambda} \quad (S') \quad \text{et} \quad \psi''_{\mu\nu} = \sum_{\lambda}^4 \mathcal{R}_{\lambda\lambda} \psi_{\mu\nu} \quad (S'').$$

Au premier abord, il semblerait qu'une ambiguïté s'introduit et que l'on obtient 32 équations pour déterminer les 16 composantes $\psi_{\mu\nu}$ dans le nouveau système.

Cette ambiguïté n'est qu'apparente, car si l'on explicite les équations dans le nouveau système, pour les $\psi'_{\mu\nu}$ et $\psi''_{\mu\nu}$ on voit qu'elles sont équivalentes. On passe de l'un des systèmes (en ψ') à l'autre (en ψ'') en interchangeant les indices $\mu\nu$ et appliquant les opérations (II) eu lieu des (I) et inversement. Cette équivalence des deux systèmes est indispensable et résulte d'une simple considération sur la transformation. En effet, nous repérons les deux électrons par rapport au même système de référence dans l'espace ordinaire. Lorsqu'on fait une rotation ou une transformation quelconque de ce système, il est clair que ce même changement se présente d'une manière équivalente pour les deux électrons. La transformation agit de la même façon sur leurs coordonnées ainsi que sur une fonction quelconque de ces coordonnées. On conçoit, d'ailleurs, que s'il n'en était pas ainsi, une théorie des atomes à plusieurs électrons débarrassée des hypothèses de la théorie du modèle ne serait guère possible.

Nous faisons une application, en prenant comme exemple l'une des 16 équations qui définissent les $\psi_{\mu\nu}$.

(10) Cf MÖGLICH; *loc. cit.*

Dans le système original (S), nous aurons, par exemple :

$$(p + 2mc)\psi_{12} + b^I\psi_{12} + c^I\psi_{32} + a^II\psi_{13} - c^II\psi_{14} + \frac{e^2}{cr}(2\psi_{13} - \psi_{31}) = 0$$

où :

$$a = p_1 + \mathbf{i}p_2; \quad b = p_1 - \mathbf{i}p_2 \quad \text{et} \quad c = p_3.$$

Ecrivons cette équation dans le nouveau système des coordonnées. Nous désignerons les opérateurs transformés par A, B, C respectivement.

En remplaçant les $\psi_{\mu\nu}$ par $\psi'_{\mu\nu} = \sum_k \mathcal{R}_{k\mu} \psi_{k\nu}$ (système S'), nous obtenons tenant compte de (20) :

$$(p + 2mc)(\alpha\psi_{12} + \gamma\psi_{22}) + B^I(\beta\psi_{32} + \delta\psi_{42}) + C^I(\alpha\psi_{12} + \gamma\psi_{42}) \\ + A^{II}(\alpha\psi_{13} + \gamma\psi_{23}) - C^{II}(\alpha\psi_{14} + \gamma\psi_{24}) + \frac{e^2}{cr}[2(\beta\psi_{33} + \delta\psi_{43}) - (\alpha\psi_{34} + \gamma\psi_{44})] = 0.$$

Considérons ensuite l'équation suivante du système original (S) :

$$(p + 2mc)\psi_{21} + b^II\psi_{24} + c^II\psi_{23} + a^I\psi_{31} - c^I\psi_{41} + \frac{e^2}{cr}(2\psi_{34} - \psi_{43}) = 0.$$

On en forme une équation dans le nouveau système de coordonnées en y remplaçant $\psi_{\mu\nu}$ par $\psi'_{\mu\nu}$ ou $\psi''_{\mu\nu}$. Remplaçons ces derniers, ce qui conduit à une équation du système (S'), et l'on obtient, tous calculs faits :

$$(p + 2mc)(\alpha\psi_{21} + \gamma\psi_{22}) + B^{II}(\beta\psi_{23} + \delta\psi_{24}) + C^{II}(\alpha\psi_{23} + \gamma\psi_{24}) \\ + A^I(\alpha\psi_{31} + \gamma\psi_{32}) - C^I(\alpha\psi_{41} + \gamma\psi_{42}) + \frac{e^2}{cr}[2(\beta\psi_{33} + \delta\psi_{43}) - (\alpha\psi_{34} + \gamma\psi_{44})] = 0.$$

Pour trouver l'équation correspondante à celle-ci dans le système (S'), il suffit de permuter les indices $\mu\nu$ et remplacer les opérateurs (II) et (I) par (I) et (II) respectivement ; ce faisant, on trouve :

$$(p + 2mc)(\alpha\psi_{12} + \gamma\psi_{22}) + B^I(\beta\psi_{32} + \delta\psi_{42}) + C^I(\alpha\psi_{32} + \gamma\psi_{42}) \\ + A^{II}(\alpha\psi_{13} + \gamma\psi_{23}) - C^{II}(\alpha\psi_{14} + \gamma\psi_{24}) + \frac{e^2}{cr}[2(\beta\psi_{33} + \delta\psi_{43}) - (\alpha\psi_{34} + \gamma\psi_{44})] = 0.$$

qui n'est autre que l'équation du système (S') écrite plus haut.

On vérifie alors aisément que cette transformation laisse invariant le produit $\bar{\psi}\psi$. On est donc conduit à prendre aussi pour la densité électrique

$$\rho = \rho^I + \rho^{II} = -2e\bar{\psi}\psi \quad (9a)$$

la normalisation étant faite par (10). Il est clair que dans une transformation qui comportera un changement d'axe de temps ρ ne sera plus invariant, mais doit se transformer comme la composante de temps d'un vecteur, compte tenu toujours de sa structure précédente (9a).

Nous tenons à remarquer que l'on est conduit à un traitement analogue des transformations des coordonnées si on part de l'Univers de configuration au lieu de l'Univers de Minkowski. Supposons, en effet, que l'on fasse une transformation des axes x_1^I et x_2^I dans l'espace de configuration, ce qui est toujours possible dans une telle multiplicité. Les composantes x_1^I et x_2^I se transforment d'après (12). Or, la relation (4) entre les α des divers électrons étant indépendante du système de référence, se conserve et par conséquent α_1^{II} et α_2^{II} se transforment comme α_1^I et α_2^I ; ceci veut dire que les axes x_1^{II} et x_2^{II} se transforment aussi, nécessairement. Par conséquent, nous aurons symboliquement :

$$(x_1^I, x_2^I, x_1^{II}, x_2^{II}) \rightarrow (x_1^{I'}, x_2^{I'}, x_1^{II'}, x_2^{II'}),$$

ce qui est équivalent à la transformation $(x_1, x_2) \rightarrow (x_1', x_2')$ dans l'espace ordinaire. Nous

sommes conduits ainsi à dire que : toute transformation de système de coordonnées de l'Univers de configuration induit une et une seule transformation dans l'Univers de Minkowski.

5. Le caractère vectoriel de $\vec{\mathcal{J}}$ se manifeste particulièrement dans les transformations analogues aux transformations de Lorentz de l'Univers à 4 dimensions. Or, quel changement de système de coordonnées de l' U_c correspond à une transformation de Lorentz de l'Univers à 4 dimensions. Une définition simple semble être la suivante : on appellera transformation de Lorentz de l' U_c , la transformation induite dans cet Univers par une transformation de Lorentz effectuée dans l'Univers réel ; ou inversement : toute transformation de l'Univers de configuration qui induit dans l'Univers réel une transformation de Lorentz, s'appelle transformation de Lorentz de l' U_c .

Au lieu de traiter de la transformation de Lorentz la plus générale, nous prendrons successivement les sous-groupes L_1 , L_2 , L_3 . La transformation L_1 correspond à :

$(x_1, -ct) \rightarrow (x'_1, -ct')$ dans l'Univers réel et à $(x_1^I, x_1^{II}, -ct) \rightarrow (x_1^{I'}, x_1^{II'}, -ct')$ dans l' U_c .

Posons :

$$\text{ch } \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad \text{sh } \varphi = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{où} \quad \beta = \frac{v}{c}. \quad (23)$$

Le tableau de la transformation L_1 sera :

		x_1^I	x_1^{II}	x_2^I	x_2^{II}	x_3^I	x_3^{II}	$-ct$
		x_1		x_2		x_3		
$x_1^{I'}$	x'_1	ch φ		0		0		ch φ
$x_1^{II'}$	x'_1							
$x_2^{I'}$	x'_2	0		1		0		0
$x_2^{II'}$	x'_2							
$x_3^{I'}$	x'_3	0		0		1		0
$x_3^{II'}$	x'_3							
	$-ct'$	sh φ		0		0		ch φ

(L_1)

L'équation de Breit dans le nouveau système sera :

$$F'_B \psi = \left\{ p' + (\vec{x}' p') + (\vec{x}'' p'') + (\alpha_i^{I'} + \alpha_i^{II'}) mc + \frac{e^2}{2c} \left[\frac{(\vec{x}' p')}{r} + \frac{(\vec{x}'' p'')}{r^3} \right] \right\} \psi = 0.$$

Un raisonnement analogue à celui que nous avons fait plus haut conduit à l'équation suivante :

$$F'_B \mathcal{E}_1 \psi = \left\{ p' + (\vec{x}' p') + (\vec{x}'' p'') + (\alpha_i^{I'} + \alpha_i^{II'}) mc + \frac{e^2}{2c} I \right\} \mathcal{E}_1 \psi = 0 \quad (24)$$

où $\mathcal{E}_1$ est la matrice de transformation adjointe à L_1 . Nous rappelons que tout ce qui a été dit au sujet de la matrice $\mathcal{R}$ et la transformation correspondante, s'applique rigoureusement ici aussi.

On peut calculer $\mathcal{E}_1$ directement par une méthode analogue à celle que l'on a employée pour les calculs des matrices $\mathcal{R}^{-1}$ et $\mathcal{R}$, mais pour cela on devrait se servir des matrices différentes des α_i , satisfaisant toujours aux relations

$$\beta_i^2 = 1 \quad \text{et} \quad \beta_\alpha \beta_i + \beta_i \beta_\alpha = 0.$$

Au lieu de faire cela, nous faisons un calcul indirect conduisant aux expressions suivantes des nouvelles composantes :

$$\left. \begin{aligned} j_1^{I'} &= ce(\bar{\lambda}_1 \alpha_1^I \lambda_1) = \text{ch } \varphi j_1^I + \text{sh } \varphi \rho^I \\ j_1^{II'} &= ce(\bar{\lambda}_1 \alpha_1^{II} \lambda_1) = \text{ch } \varphi j_1^{II} + \text{sh } \varphi \rho^{II} \\ \rho^{I'} &= -e(\bar{\lambda}_1 \lambda_1)^I = \text{ch } \varphi \cdot \rho^I + \text{sh } \varphi j_1^I \\ \rho^{II'} &= -e(\bar{\lambda}_1 \lambda_1)^{II} = \text{ch } \varphi \cdot \rho^{II} + \text{sh } \varphi j_1^{II} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

où l'on a posé :

$$\mathcal{E}_1 \psi = \lambda_1 \quad \text{et} \quad (\lambda_1)'_{\mu\lambda} = \sum_1^4 (\mathcal{E}_1)_{\mu\nu} \psi_{\nu\lambda}; \quad (\lambda_1)''_{\mu\lambda} = \sum_1^4 (\mathcal{E}_1)_{\lambda\nu} \psi_{\mu\nu}.$$

On trouve pour la matrice $\mathcal{E}_1$:

$$\mathcal{E}_1 = \begin{vmatrix} \text{ch } \frac{\varphi}{2} & 0 & 0 & \text{sh } \frac{\varphi}{2} \\ 0 & \text{ch } \frac{\varphi}{2} & \text{sh } \frac{\varphi}{2} & 0 \\ 0 & \text{sh } \frac{\varphi}{2} & \text{ch } \frac{\varphi}{2} & 0 \\ \text{sh } \frac{\varphi}{2} & 0 & 0 & \text{ch } \frac{\varphi}{2} \end{vmatrix} \quad (26_1)$$

On vérifie ensuite facilement que l'on a :

$$\left. \begin{aligned} ce(\bar{\lambda}_1 \alpha_2^I \lambda_1) &= j_2^{I'} = j_2^I & ce(\bar{\lambda}_1 \alpha_2^{II} \lambda_1) &= j_2^{II'} = j_2^{II} \\ ce(\bar{\lambda}_1 \alpha_3^I \lambda_1) &= j_3^{I'} = j_3^I & ce(\bar{\lambda}_1 \alpha_3^{II} \lambda_1) &= j_3^{II'} = j_3^{II} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Explicitons certaines composantes de J . Nous aurons d'après (9) :

$$\left. \begin{aligned} j_1^I &= ce(\bar{\psi} \alpha_1^I \psi) = ce \sum_{\mu\nu\lambda}^4 \bar{\psi}_{\mu\lambda} (\alpha_1^I)_{\mu\nu} \psi_{\nu\lambda} \\ &= ce \sum_{\lambda}^4 (\bar{\psi}_{1\lambda} \psi_{4\lambda} + \bar{\psi}_{2\lambda} \psi_{3\lambda} + \bar{\psi}_{3\lambda} \psi_{2\lambda} + \bar{\psi}_{4\lambda} \psi_{1\lambda}) \\ &= ce [\bar{\psi}_{11} \psi_{41} + \bar{\psi}_{12} \psi_{42} + \bar{\psi}_{13} \psi_{43} + \bar{\psi}_{14} \psi_{44} + \bar{\psi}_{21} \psi_{31} + \bar{\psi}_{22} \psi_{32} + \bar{\psi}_{23} \psi_{33} + \bar{\psi}_{24} \psi_{34} \\ &\quad + \bar{\psi}_{31} \psi_{21} + \bar{\psi}_{32} \psi_{22} + \bar{\psi}_{33} \psi_{23} + \bar{\psi}_{34} \psi_{24} + \bar{\psi}_{41} \psi_{11} + \bar{\psi}_{42} \psi_{12} + \bar{\psi}_{43} \psi_{13} + \bar{\psi}_{44} \psi_{14}]. \\ \rho^I &= -e \bar{\psi} \psi \\ &= -e \sum_{\mu\nu}^4 \bar{\psi}_{\mu\nu} \psi_{\mu\nu} \\ &= -e (\bar{\psi}_{11} \psi_{11} + \bar{\psi}_{12} \psi_{12} + \dots + \bar{\psi}_{44} \psi_{44}). \end{aligned} \right\} \quad (28_1) \quad (29_1)$$

Nous aurons en outre pour j_1^{II} :

$$\left. \begin{aligned} j_1^{II} &= ce(\bar{\psi} \alpha_1^{II} \psi) = ce \sum_{\mu\nu\lambda}^4 \bar{\psi}_{\mu\lambda} (\alpha_1^{II})_{\mu\nu} \psi_{\nu\lambda} \\ &= ce \sum_{\lambda}^4 (\bar{\psi}_{\lambda 1} \psi_{\lambda 4} + \bar{\psi}_{\lambda 2} \psi_{\lambda 3} + \bar{\psi}_{\lambda 3} \psi_{\lambda 2} + \bar{\psi}_{\lambda 4} \psi_{\lambda 1}) \\ &= ce [\bar{\psi}_{11} \psi_{14} + \bar{\psi}_{21} \psi_{24} + \bar{\psi}_{31} \psi_{34} + \bar{\psi}_{41} \psi_{44} + \bar{\psi}_{12} \psi_{13} + \bar{\psi}_{22} \psi_{23} + \bar{\psi}_{32} \psi_{33} + \bar{\psi}_{42} \psi_{43} \\ &\quad + \bar{\psi}_{13} \psi_{12} + \bar{\psi}_{23} \psi_{22} + \bar{\psi}_{33} \psi_{32} + \bar{\psi}_{43} \psi_{42} + \bar{\psi}_{14} \psi_{11} + \bar{\psi}_{24} \psi_{21} + \bar{\psi}_{34} \psi_{31} + \bar{\psi}_{44} \psi_{41}]. \end{aligned} \right\} \quad (30_1)$$

$$\left. \begin{aligned} \rho^{\text{II}} &= -e \bar{\psi} \psi \\ &= -e \sum_{\mu, \nu}^4 \bar{\psi}_{\mu\nu} \psi_{\mu\nu} \\ &= -e (\bar{\psi}_{11} \psi_{11} + \bar{\psi}_{12} \psi_{12} + \dots \bar{\psi}_{44} \psi_{44}). \end{aligned} \right\} \quad (29_2)$$

Les autres composantes de $\mathcal{J}$ sont, nous ne les explicitons pas complètement :

$$\left. \begin{aligned} j_2^{\text{I}} &= ce (\bar{\psi} \alpha_2^{\text{I}} \psi) = ce \sum_{\mu, \nu}^4 \bar{\psi}_{\mu\lambda} (\alpha_2^{\text{I}})_{\mu\nu} \psi_{\nu\lambda} \\ &= i ce \sum_{\lambda}^4 (-\bar{\psi}_{1\lambda} \psi_{4\lambda} + \bar{\psi}_{2\lambda} \psi_{3\lambda} - \bar{\psi}_{3\lambda} \psi_{2\lambda} + \bar{\psi}_{4\lambda} \psi_{1\lambda}) \end{aligned} \right\} \quad (28_2)$$

et

$$j_3^{\text{I}} = ce \sum_{\lambda}^4 (\bar{\psi}_{1\lambda} \psi_{3\lambda} - \bar{\psi}_{2\lambda} \psi_{4\lambda} + \bar{\psi}_{3\lambda} \psi_{1\lambda} - \bar{\psi}_{4\lambda} \psi_{2\lambda}) \quad (28_3)$$

et enfin

$$j_2^{\text{II}} = i ce \sum_{\lambda}^4 (-\bar{\psi}_{\lambda 1} \psi_{\lambda 4} + \bar{\psi}_{\lambda 2} \psi_{\lambda 3} - \bar{\psi}_{\lambda 3} \psi_{\lambda 2} + \bar{\psi}_{\lambda 4} \psi_{\lambda 1}) \quad (30_2)$$

$$j_3^{\text{II}} = ce \sum_{\lambda}^4 (\bar{\psi}_{\lambda 1} \psi_{\lambda 3} - \bar{\psi}_{\lambda 2} \psi_{\lambda 4} + \bar{\psi}_{\lambda 3} \psi_{\lambda 1} - \bar{\psi}_{\lambda 4} \psi_{\lambda 2}). \quad (30_3)$$

La matrice $\mathcal{L}_2$ correspondant au sous-groupe L_2 se calcule comme $\mathcal{L}_1$, sachant que si l'on pose

$$\lambda_2 = \mathcal{L}_2 \psi$$

on doit avoir :

$$\left. \begin{aligned} j_2^{\text{I}'} &= ce (\bar{\lambda}_2 \alpha_2^{\text{I}} \lambda_2) = \text{ch } \varphi j_2^{\text{I}} + \text{sh } \varphi \cdot \rho^{\text{I}} \\ j_2^{\text{II}'} &= ce (\bar{\lambda}_2 \alpha_2^{\text{II}} \lambda_2) = \text{ch } \varphi j_2^{\text{II}} + \text{sh } \varphi \cdot \rho^{\text{II}} \\ \rho^{\text{I}'} &= -e (\bar{\lambda}_2 \lambda_2)^{\text{I}} = \text{ch } \varphi \cdot \rho^{\text{I}} + \text{sh } \varphi \cdot j_2^{\text{I}} \\ \rho^{\text{II}'} &= -e (\bar{\lambda}_2 \lambda_2)^{\text{II}} = \text{ch } \varphi \cdot \rho^{\text{II}} + \text{sh } \varphi \cdot j_2^{\text{II}} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

les autres composantes devant rester invariantes. On trouve aisément :

$$\mathcal{L}_2 = \begin{vmatrix} -i \text{ch } \frac{\varphi}{2} & 0 & 0 & -\text{sh } \frac{\varphi}{2} \\ 0 & -i \text{ch } \frac{\varphi}{2} & \text{sh } \frac{\varphi}{2} & 0 \\ 0 & -\text{sh } \frac{\varphi}{2} & -i \text{ch } \frac{\varphi}{2} & 0 \\ \text{sh } \frac{\varphi}{2} & 0 & 0 & -i \text{ch } \frac{\varphi}{2} \end{vmatrix} \quad (26_2)$$

et un calcul analogue donne pour $\mathcal{L}_3$.

$$\mathcal{L}_3 = \begin{vmatrix} \text{ch } \frac{\varphi}{2} & 0 & \text{sh } \frac{\varphi}{2} & 0 \\ 0 & \text{ch } \frac{\varphi}{2} & 0 & -\text{sh } \frac{\varphi}{2} \\ \text{sh } \frac{\varphi}{2} & 0 & \text{ch } \frac{\varphi}{2} & 0 \\ 0 & -\text{sh } \frac{\varphi}{2} & 0 & \text{ch } \frac{\varphi}{2} \end{vmatrix} \quad (26_3)$$

On voit par conséquent que dans les transformations de Lorentz de l' U_c , les composantes de $\vec{\mathcal{J}}$ se transforment comme les composantes d'un vecteur. La loi de transformation de la composante temporelle est conforme à sa définition (9) et provient du caractère hétérogène de la dimension temps de l'Univers de configuration, qui, comme nous l'avons vu, est aussi une dimension de configuration. Pour que $\vec{\mathcal{J}}$ puisse être pris comme le vecteur courant de l' U_c , il faut que sa divergence prise dans cet U_c soit nulle.

6. A cause de la dissymétrie des coefficients de charge des composantes spatiales et de la composante temporelle, la divergence n'est nulle que si l'on écrit d'abord séparément :

$$\left. \begin{aligned} \sum_i^3 \left(\frac{\partial j_i^I}{\partial x_i^I} + \frac{\partial j_i^{II}}{\partial x_i^{II}} \right) + \frac{\partial \rho^I}{\partial t} &= 0 \\ \sum_i^3 \left(\frac{\partial j_i^I}{\partial x_i^I} + \frac{\partial j_i^{II}}{\partial x_i^{II}} \right) + \frac{\partial \rho^{II}}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (32a)$$

ou en ajoutant membre à membre et divisant l'équation ainsi obtenue par 2 *ce*, après avoir remplacé j_i^I, j_i^{II}, ρ^I et ρ^{II} par leurs expressions données par (9), nous aurons :

$$\sum_k^3 \left[\frac{\partial}{\partial x_k^I} (\bar{\psi} \alpha_k^I \psi) + \frac{\partial}{\partial x_k^{II}} (\bar{\psi} \alpha_k^{II} \psi) \right] - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \bar{\psi} \psi = 0. \quad (32)$$

Pour démontrer cela, multiplions cette équation par $\frac{h}{2\pi i}$, ajoutons et retranchons l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \frac{e}{c} [(\vec{A}^I \cdot \vec{\psi} \alpha^I \psi) + (\vec{A}^{II} \cdot \vec{\psi} \alpha^{II} \psi)] + \frac{e}{c} (V^I + V^{II}) \bar{\psi} \psi \\ + mc \bar{\psi} (\alpha_k^I + \alpha_k^{II}) \psi + \frac{e^2}{2c} \bar{\psi} \left[\frac{(\vec{\alpha}^I \vec{\alpha}^{II})}{r} + \frac{(\vec{\alpha}^I r)(\vec{\alpha}^{II} r)}{r^3} \right] \psi. \end{aligned}$$

Il vient, effectuant les dérivations indiquées en (32) :

$$\left. \begin{aligned} & \sum_k^3 \left[\left(\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_k^I} \alpha_k^I \psi + \bar{\psi} \alpha_k^I \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial x_k^I} \right) + \left(\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_k^{II}} \alpha_k^{II} \psi + \bar{\psi} \alpha_k^{II} \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial x_k^{II}} \right) \right] \\ & + \frac{e}{c} \sum_k^3 (A_k^I \cdot \bar{\psi} \alpha_k^I \psi + A_k^{II} \cdot \bar{\psi} \alpha_k^{II} \psi) + \frac{e}{c} (V^I + V^{II}) \bar{\psi} \psi + mc \bar{\psi} (\alpha_k^I + \alpha_k^{II}) \psi \\ & + \frac{e^2}{2c} \bar{\psi} \mathcal{J} \psi - \left\{ \frac{e}{c} \sum_k^3 (A_k^I \cdot \bar{\psi} \alpha_k^I \psi + A_k^{II} \cdot \bar{\psi} \alpha_k^{II} \psi) + \frac{e}{c} (V^I + V^{II}) \bar{\psi} \psi + mc \bar{\psi} (\alpha_k^I + \alpha_k^{II}) \psi + \frac{e^2}{2c} \bar{\psi} \mathcal{J} \psi \right\} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

où l'on a posé

$$\mathcal{J} = \frac{(\vec{\alpha}^I \vec{\alpha}^{II})}{r} + \frac{(\vec{\alpha}^I r)(\vec{\alpha}^{II} r)}{r^3}.$$

Comme les α permutent avec les $\vec{A}$, nous aurons en groupant les termes ayant comme facteur $\bar{\psi}$, tenant compte de (2) :

$$\bar{\psi} \left\{ -\frac{h}{2\pi i} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + e\Phi^I + e\Phi^{II} - \frac{e^2}{cr} + mc(\alpha_k^I + \alpha_k^{II}) + (\vec{\alpha}^I \vec{p}^I) + (\vec{\alpha}^{II} \vec{p}^{II}) + \frac{e^2}{2c} \mathcal{J} \right\} \psi = \bar{\psi} F_B \psi$$

et groupant les termes ayant ψ comme facteur, nous obtenons, sachant que

$$\mathcal{J} = \bar{\mathcal{J}} \quad \text{et} \quad \bar{\psi} \cdot \alpha_i \psi = \psi \cdot \overline{\alpha_i \psi}$$

$$-\psi \left\{ \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + e\Phi^I + e\Phi^{II} - \frac{e^2}{cr} + mc(\alpha_s^I + \alpha_s^{II}) + (\vec{\alpha}^I \vec{p}^I) + (\vec{\alpha}^{II} \vec{p}^{II}) + \frac{e^2}{2c} \mathcal{J} \right\} \bar{\psi} = -\psi \cdot \overline{F_B \psi}$$

ou finalement

$$\bar{\psi} \cdot F_B \psi - \psi \cdot \overline{F_B \psi} = 0$$

car

$$F_B \psi = \overline{F_B \psi} = 0$$

ce sont, en effet, les équations (2), l'équation conjuguée et, par conséquent, la divergence (32) est nulle.

7 L'étude précédente conduit à la densité électrique de Schrödinger

$$\rho = -2e\bar{\psi}\psi.$$

Sa connaissance ou plutôt celle de l'expression normalisée permet d'évaluer les éléments de la matrice « moment électrique ». Appelons $\psi(n)$ l'amplitude relative à la configuration électronique n , $\psi(n')$ celle relative à n' .

Si le changement de configuration $n \rightarrow n'$ (ou $n' \rightarrow n$) accompagnée de l'émission (ou absorption) de la raie de fréquence ν (nn') est due à l'un des électrons, le carré du moment électrique de transition sera :

$$\mathcal{M}_{nn'}^2 = 4e^2 \frac{\sum_i^3 \left\{ \int x_i \sum_{\mu,\nu}^4 \bar{\psi}_{\mu\nu}(n) \psi_{\mu\nu}(n') d\tau^I d\tau^{II} \right\}^2}{\int \sum_{\mu,\nu}^4 \bar{\psi}_{\mu\nu}(n') \psi_{\mu\nu}(n') d\tau^I d\tau^{II} \cdot \int \sum_{\mu,\nu}^4 \bar{\psi}_{\mu\nu}(n) \psi_{\mu\nu}(n) d\tau^I d\tau^{II}} \quad (34)$$

où $x_i^{I,II}$ intervient dans l'intégration suivant l'un des indices μ, ν , les $\psi_{\mu\nu}$ étant normalisés d'après (10). Ou si l'on se borne à l'approximation de Breit, qui paraît suffisante, $\mu, \nu = 3, 4$ seulement.

Il est clair que tout ce que nous venons de dire au cas de deux électrons se généralise immédiatement au cas de n électrons. L'univers de configuration aura dans ce cas $3n + 1$ dimensions. L'équation de Breit, la fonction de Lagrange du problème, le vecteur $\vec{\mathcal{J}}$ s'écrivent aisément dans cet U_c .

Nous avons tâché, dans ce qui précède, de préciser le problème des n corps dans la mécanique ondulatoire relativiste. Nous avons mis en évidence un rapprochement possible entre l'Univers à 4 dimensions et un Univers construit à partir de l'espace de configuration et que l'on peut appeler l'Univers de configuration. Comme il est probable que le traitement du problème des n corps dans la mécanique ondulatoire est lié à un espace de configuration, il nous semblait nécessaire, dans le traitement relativiste du problème, d'adjoindre à l'Univers réel cet Univers abstrait de configuration, qui ne servirait que pour aborder le problème d'une manière univoque. Si, ici et là on n'a pas atteint une précision suffisante, il nous semble que le traitement relativiste exact de la statique atomique ne s'écartera pas beaucoup de celui que nous avons envisagé ici.

En terminant, je remercie M. L. de Broglie pour ses précieuses critiques et pour les conseils qu'il m'a fournis au cours de discussions sur divers sujets relatifs à ce travail.

Note ajoutée à la correction. — Le traitement simultané de la statique (structure des niveaux) et de la dynamique atomique (transitions) a été l'objet des récentes recherches de Heisenberg et Pauli et d'Oppenheimer ⁽¹⁾. Leur but était de montrer jusqu'à quel point on peut aller dans la fusion des champs d'onde, le champ d'onde de de Broglie et le champ électromagnétique, à l'aide des moyens dont on dispose actuellement dans la théorie des quanta. Comme cette théorie unitaire comprend l'équation de Breit, nous voudrions faire quelques remarques au sujet de ces recherches.

Nous avons vu que la théorie de Breit a pour base une équation relativiste du 2° ordre exacte jusqu'à des termes de l'ordre de $\left(\frac{v}{c}\right)^2$, comprenant les termes de cet ordre. Nous avons remarqué que la théorie correspondant à l'équation de Breit était une généralisation de la théorie de Dirac relative au problème à un corps. Comme cette dernière ne tient pas compte des processus de transition mais cherche surtout à donner les niveaux, la théorie de Breit en fait autant pour le cas de plusieurs électrons. A part la difficulté fondamentale de Dirac (énergie intrinsèque négative) cette généralisation n'en contient pas beaucoup d'autres.

La théorie unitaire des champs d'onde, au contraire, contient des difficultés qui conduisent à des résultats inadmissibles. Ceci non seulement pour le cas de plusieurs électrons mais, déjà, dans le problème à un corps et la théorie appliquée à l'hydrogène conduit à des niveaux contrares à l'expérience.

Certes, le traitement unitaire des champs d'onde reste l'idéal à approcher ⁽²⁾. Mais dans l'approximation successive de cet idéal, le choix parmi les problèmes fondamentaux actuels — principe d'exclusion entre corpuscules du champ d'onde de de Broglie, principe d'association ⁽³⁾ entre les photons, problème des masses électronique et protonique, etc. — reste un arbitraire gênant.

En ce qui concerne le problème de la statique atomique, il nous semble que ces problèmes peuvent être rangés suivant leur ordre d'importance. On conçoit que dans un problème à plusieurs corps, la structure intrinsèque absolue des individus (corpuscules) importe moins que leur structure dite d'interaction.

L'amortissement des états excités — les valeurs propres de l'équation des ondes de la théorie unitaire relatives aux états stationnaires excités étant complexes — comme dû à l'interaction quasi-classique des champs d'onde et la théorie de la largeur des raies spectrales qui en résulte, restent presque des hypothèses que l'on ne peut faire soumettre au contrôle expérimental. Dans cet état de chose, d'autres hypothèses non moins plausibles peuvent être introduites. Telle une hypothèse originale de Schrödinger ⁽⁴⁾ sur l'élargissement des raies du spectre de *valeurs propres* de l'équation des ondes.

En ce qui concerne les remarques d'Oppenheimer relatives aux résultats possibles que peut former la solution de l'équation de Breit, nous pensons qu'il est difficile de prédire quoi que ce soit sans regarder de très près les équations explicites. Comme l'équation est exacte à $\left(\frac{v}{c}\right)^2$ près et, comme la solution ne peut être qu'approximative, on ne peut guère s'attendre à une solution numérique exacte à cet ordre.

Il semble que le résultat fondamental des recherches de Heisenberg et Pauli, complétées par Oppenheimer, consiste à affirmer que la théorie classique assujettie aux conditions quantiques ne peut pas donner des éclaircissements nouveaux sur le dynamique atomique.

⁽¹⁾ W. HEISENBERG et W. PAULI. *Z. Physik.*, **56**, p. 1 et **59** (1929), p. 468; R. OPPENHEIMER. *Phys. Rev.*, **35**, (1930), p. 461.

⁽²⁾ P. JORDAN. *Phys. Z.*, **30** (1929), p. 700.

⁽³⁾ L. BRILLOUIN. *Les statistiques quantiques*, Paris (1930).

⁽⁴⁾ E. SCHRÖDINGER. *Sitzberichte*, Berlin (1929), p. 668.