LE JOURNAL DE PHYSIQUE-LETTRES

J. Physique Lett. **46** (1985) L-431 - L-436

15 MAI 1985, PAGE L-431

Classification
Physics Abstracts
47.25Q

Intermittence de phase au voisinage d'un accrochage de fréquences : une route vers le chaos ?

P. Bergé et M. Dubois

SPSRM, CEN Saclay, 91191 Gif sur Yvette Cedex, France

(Reçu le 21 février 1985, accepté le 28 mars 1985)

Résumé. — Au voisinage d'accrochages en fréquence d'un régime bipériodique, des intermittences de phase ont été mises en évidence expérimentalement dans la convection de Rayleigh-Bénard. On étudie l'analogie de ces intermittences, qui peuvent être chaotiques, avec celles présentées par le modèle de Curry et Yorke pour certaines valeurs des paramètres.

Abstract. — Periodic or chaotic phase intermittencies have been observed in Rayleigh-Bénard convection experiments near frequency lockings in a biperiodic regime. The intermittencies are found to be in close analogy with those present in the Curry-Yorke model (for particular values of the parameter).

On sait que l'attracteur d'un régime quasi périodique à deux fréquences f_1 et f_2 est un tore T^2 . Les trajectoires inscrites sur le tore coupent un plan S en des points successifs 1, 2, 3... qui constituent la section de Poincaré de l'attracteur T^2 par ce plan (Fig. 1a). Si le rapport f_2/f_1 des fréquences est rationnel, on dit que l'on est en présence d'un phénomène de synchronisation (ou accrochage de fréquences). Si, par exemple, $f_2/f_1 = 7$ cette synchronisation se traduit par la présence de 7 points sur la section de Poincaré, ces 7 points étant successivement visités par la trajectoire comme indiqué figure 1b. Au contraire, dans le cas général où f_2/f_1 est un nombre irrationnel (fréquences incommensurables) la trajectoire perce à chaque fois le plan S en un point différent comme l'indique la figure 1c. Revenons à la figure 1a pour décrire le comportement correspondant de la phase relative θ (mesurée dans le plan de coupe S) de l'oscillation à la fréquence f_1 par rapport à celle de fréquence f_2 . θ ne peut prendre qu'une ou quelques valeurs discrètes et indépendantes du temps dans le cas de la synchronisation alors qu'il varie continuellement dans le cas de l'incommensurabilité.

Partant des signaux expérimentaux bipériodiques, on peut reconstruire la section de Poincaré

Fig. 1. — Tore T^2 et sa section de Poincaré par un plan S. Les cercles C et c sont décrits respectivement avec les fréquences f_2 (rapide) et f_1 (lente). (a) 1, 2, 3, ... sont les intersections successives de la trajectoire avec le plan S dans le cas général ; (b) dans le cas particulier $f_2/f_1 = 7$ il y a seulement 7 intersections différentes, la 8^e intersection étant confondue avec la 1^{re}, etc... ; (c) dans le cas $f_2/f_1 \simeq 7$ on note un décalage progressif des points, la 8^e intersection étant au voisinage de la 1^{re}, etc...

[T^2 torus with its Poincaré section by a plane S. Circles C and c are swept with the frequencies f_2 (fast) and f_1 (slow), respectively. (a) 1, 2, 3, ... are the successive intersections of the trajectory with the plane S in the general case ; (b) in the particular case $f_2/f_1 = 7$ there are only 7 different intersection points, the 8th being superimposed with the 1st, etc... ; (c) in the case $f_2/f_1 \simeq 7$ one notices a progressive shift of the points, the 8th being neighbour of the 1st, etc.]

expérimentale correspondante [1, 6] à partir de laquelle il est possible de calculer la phase ⁽¹⁾ relative θ . Nous allons illustrer, dans ce qui suit, un comportement particulièrement frappant de cette phase au voisinage immédiat d'un accrochage en fréquences. En effet, au lieu de varier régulièrement dans le temps, cette phase évolue de manière intermittente, présentant de longs paliers de quasi-accrochage durant lesquels elle varie très peu alors que sa rotation, nécessaire puisque les deux fréquences sont incommensurables, s'opère ensuite en un court laps de temps.

Le système expérimental étudié est la convection de Rayleigh-Bénard en régime instationnaire. La cellule de dimensions $2,5 \times 1,5 \times 1,25 \text{ cm}^3$ (l'épaisseur de la couche de fluide est $d = 1,25 \text{ cm}$) est remplie d'huile aux silicones de nombre de Prandtl $Pr = 38$. Le fait d'étudier la convection instationnaire de R.B. sur des fluides à haut nombre de Prandtl ouvre la possibilité d'identifier les oscillateurs thermoconvectifs, voir par exemple référence [2]. On peut alors placer les détecteurs

⁽¹⁾ Dans tout ce qui suit le mot « phase » doit être compris comme phase relative θ au sens où elle est définie ci-dessus.

de telle manière que les signaux correspondants soient particulièrement adaptés à la construction de la coupe de Poincaré. Une façon efficace de procéder consiste à mesurer simultanément deux signaux dont chacun est principalement enrichi par la contribution de l'un des deux oscillateurs. Ainsi, le signal principalement sensible à l'oscillateur rapide (f_2) constituera une excellente base de temps pour « stroboscooper » l'autre signal, sensible, lui, à l'oscillateur plus lent (f_1). D'où l'obtention de la coupe de Poincaré.

La structure convective est ici constituée de deux rouleaux principaux avec un courant montant au centre de la cellule. L'oscillateur thermoconvectif rapide (f_2) est localisé, de type « plume » [2], l'autre oscillateur f_1 étant plus diffus et situé dans la zone médiane de la structure. Dans tout le domaine de nombres de Rayleigh Ra exploré, le rapport f_2/f_1 reste voisin de 7, avec accrochage d'ordre 7 pour $Ra/Ra_c \sim 320,2$. Si l'on est au voisinage d'un accrochage d'ordre 7, entre deux intersections consécutives dans le plan de Poincaré, la rotation de phase est voisine de $2\pi/7$; la variation de phase intéressante — car représentative de l'écart à l'accrochage — est évidemment celle qui s'obtient en ne considérant qu'un point sur sept (donc celle qui est relevée avec une période $7/f_2$) voir figure 1b. C'est la raison pour laquelle, dans le but de simplifier les diagrammes, on présentera soit la phase moyenne (la moyenne étant prise sur 7 valeurs successives de θ), soit la phase relevée avec une période $7/f_2$. De cette façon, l'accrochage en fréquence d'ordre 7 sera représenté en fonction du temps par un palier à une valeur unique de la phase alors qu'il se révélerait normalement par l'existence de 7 valeurs de phase constantes si θ était relevé à chaque intersection. Près de l'accrochage ($Ra/Ra_c = 320$, $f_2/f_1 = 6,91\dots$) le comportement expérimental montré figure 2a illustre particulièrement bien l'existence d'une variation irrégulière de la phase; la présence de pseudo-paliers, interrompus par des variations plus rapides de rotation de la phase, contraste avec la variation linéaire observée plus loin de l'accrochage (en effet, en absence de toute influence d'accrochage, on trouve une variation parfaitement linéaire de la phase relative). L'existence de paliers de phase au sens strict du terme peut même s'observer si l'on est au voisinage immédiat de l'accrochage, voir figure 2b pour $f_2/f_1 = 6,99$.

Fig. 2. — Evolution temporelle de la phase pour deux valeurs différentes de l'écart à l'accrochage d'ordre 7 (Rayleigh-Bénard) : (a) phase moyenne pour $f_2/f_1 = 6,91$; (b) phase relevée 1 fois sur 7 pour $f_2/f_1 = 6,99$.

[Temporal evolution of the phase for two different values of the distance to the locking of order 7 (Rayleigh-Bénard) : (a) mean value of the phase for $f_2/f_1 = 6,91$; (b) phase measured every seventh points for $f_2/f_1 = 6,99$.]

Cette évolution « intermittente » de la phase déjà notée précédemment [1-3] dans une autre situation convective au voisinage d'un accrochage d'ordre 3 ne semble pas avoir été décrite par d'autres auteurs. Ceci est probablement dû à ce que les méthodes d'études de l'espace des phases sont encore peu utilisées alors que les autres types d'analyse des régimes instationnaires ne permettent pas de révéler ce phénomène. Pourtant, ce comportement particulier de la phase est aussi présent dans les modèles numériques classiques décrivant les régimes quasi périodiques et chaotiques subséquents (Refs. [4, 5] par exemple).

Le modèle que nous avons étudié — et qui nous a paru le plus adapté quant à la comparaison avec les sections de Poincaré expérimentales — est celui proposé par Curry et Yorke [6] sous la forme de l'application itérée de R^2 dans lui-même, qui s'exprime :

$$\Psi = \Psi_1 \circ \Psi_2 \quad \text{avec} \quad \Psi_1 \begin{cases} \rho_{n+1} = \varepsilon \operatorname{Log}(1 + \rho_n) \\ \theta_{n+1} = \theta_n + \theta_0 \end{cases}, \quad \Psi_2 \begin{cases} X_{n+1} = X_n \\ Y_{n+1} = Y_n + X_n^2 \end{cases}$$

ρ et θ étant les coordonnées polaires, X et Y les coordonnées cartésiennes du point dans le plan. Le graphe de cette application est l'équivalent de la section de Poincaré de trajectoires tridimensionnelles. Pour des valeurs de ε inférieures à une certaine valeur critique ε_c dépendant de θ_0 , ces trajectoires correspondent à celles d'un régime quasi périodique dont les deux fréquences f_1 et f_2 sont dans le rapport $f_2/f_1 = 2\pi/\theta_0$. Classiquement, le modèle de Curry et Yorke est considéré pour la seule valeur $\theta_0 = 2$ ce qui entraîne l'obtention d'une synchronisation d'ordre 3 ($f_2/f_1 \simeq 3$). Dans le but d'obtenir un phénomène semblable, mais d'ordre 7 comme dans le cas présenté figure 2, nous adoptons $\theta_0 = 1,1$. Dans ce cas, il existe un palier d'accrochage d'ordre 7 pour $1,319 < \varepsilon < 1,33$. Le comportement « temporel » de θ est illustré figure 3. On y note une ressemblance frappante avec les résultats expérimentaux : ici aussi, la phase relative évolue par succession de paliers et de rotations rapides, les paliers étant d'autant plus longs que l'on est plus proche de l'accrochage. L'appellation « intermittences de phase » va au-delà d'une simple caractérisation qualitative. En effet, à partir de la carte de retour $\theta_{n+N} = f(\theta_n)$ où θ représente la phase et N l'ordre d'accrochage, on décrit l'évolution de la phase de manière semblable à celle adoptée pour l'amplitude dans les intermittences de Pomeau et Manneville [7].

Fig. 3. — Modèle de Curry-Yorke : variation de θ_n en fonction du nombre n d'itérations au voisinage d'un accrochage d'ordre 7 ; $\theta_0 = 1,1$, $\varepsilon = 1,3185$. Noter l'existence de 7 paliers dans l'intervalle $0-2\pi$.

[Variation of θ_n versus the number of iteration steps n , near a locking of seventh order in the Curry-Yorke model ; $\theta_0 = 1,1$, $\varepsilon = 1,3185$. Note the presence of 7 plateaus in the interval $0-2\pi$.]

Il est important de noter qu'il existe — aussi bien dans les modèles que dans les observations expérimentales — deux types de comportements bien tranchés : a soit les rotations rapides interviennent de façon régulière et périodique avec une période $1/\delta f = 1/(\text{écart à l'accrochage})$; b soit, au contraire, elles interviennent de façon aléatoire (longueurs des paliers réparties selon une distribution). Dans le modèle de Curry et Yorke, et tout au moins pour la valeur canonique $\theta_0 = 2$, le domaine a, périodique, correspond à $\varepsilon < \varepsilon_{p_1}$ et le domaine b, chaotique, à $\varepsilon > \varepsilon_{p_2}$ où ε_{p_1} et ε_{p_2} désignent respectivement les limites inférieure et supérieure du palier d'accrochage.

Notons toutefois que si les intermittences de phase chaotiques sont dominantes très près du décrochage ($\theta_0 = 2$, $\varepsilon > \varepsilon_{p_2}$) — montrant ainsi l'importance de ce phénomène dans la naissance du chaos — le comportement dynamique devient plus complexe lorsque ε croît du fait du cou-

plage amplitude-phase et donne lieu à des attracteurs étranges dont la densité de points devient de plus en plus homogène sur l'attracteur.

L'étude plus générale des comportements dynamiques donnés par le modèle de Curry et Yorke dans le plan (θ_0, ε) permet une meilleure compréhension des résultats observés expérimentalement. En ce qui concerne la zone d'accrochage 3, elle occupe un large domaine du plan (θ_0, ε) ($1,998 < \theta_0 < 2,35$ pour $\varepsilon = 1,35$) ; le comportement rapporté en [6] ($\theta_0 = 2$) et, en particulier les intermittences chaotiques de phase, se situent dans une bande étroite, tangente à ce domaine, comme montré schématiquement figure 4. Dans une situation expérimentale, toute évolution du paramètre de contrôle entraîne *ipso facto* une variation du nombre de rotation (analogue à θ_0) ; aussi, le chemin suivi peut-il être celui indiqué par la flèche sur la figure 4 : c'est ce qui correspond aux observations expérimentales que nous avons faites où les intermittences (légèrement) chaotiques de phase ont toujours été observées par augmentation du nombre de Rayleigh entre un régime bipériodique pouvant présenter des intermittences de phase périodiques et un régime d'accrochage.

Fig. 4. — Modèle de Curry-Yorke : représentation schématisée des régimes dynamiques dans le plan (θ_0, ε) au voisinage de $\theta_0 = 2$. Le trajet représenté par la flèche correspond à des séquences observées expérimentalement.

[Schematic situation of the dynamical regimes observed in the (θ_0, ε) plane around $\theta_0 = 2$ in the Curry-Yorke model. The arrow corresponds to paths followed experimentally in Rayleigh-Bénard convection.]

Nous en donnons deux exemples : le premier se rapporte au régime dynamique correspondant à la figure 2a ; la longueur des paliers n'est pas tout à fait constante et introduit un léger bruit dans le spectre du signal ; la présence de ce chaos se manifeste par ailleurs par de légères corrugations dans la section de Poincaré — voir figure 5a. Le deuxième exemple, encore plus caractéristique, a été observé au cours d'une autre expérience, au voisinage d'un accrochage $1/3$ (même géométrie de cellule, $Pr = 130$, $Ra/Ra_c = 563$, $f_2/f_1 = 2,94$). La section de Poincaré expérimentale (Fig. 5b), typique d'un attracteur étrange, est semblable à certains attracteurs du modèle Curry et Yorke. De plus, la distribution des longueurs des paliers entre deux rotations rapides de la phase, représentée en encart, est tout à fait compatible avec celle obtenue à partir du modèle pour certaines valeurs de ε [9].

En conclusion, à travers modèle et expériences, il apparaît que le mécanisme d'intermittences de phase dans un régime bipériodique au voisinage d'un accrochage en fréquence, est un phénomène très puissant. Il peut être soit périodique, soit chaotique ; dans ce dernier cas, il permet de comprendre un des mécanismes d'instauration du chaos [10, 11] qui peut se généraliser à des accrochages d'ordre élevé.

Remerciements.

Nous tenons à remercier tout particulièrement Christine Poitou pour sa participation active au traitement informatique des résultats ainsi que B. Ozenda, V. Croquette, Y. Pomeau, C. Tresser et P. Manneville pour diverses aides et discussions.

Fig. 5. — Sections de Poincaré expérimentales : (a) pour le régime correspondant au voisinage de l'accrochage d'ordre 7 ($f_2/f_1 = 6,91$, voir Fig. 2a) (1 000 points); (b) pour un régime correspondant au voisinage d'un accrochage d'ordre 3 (1 500 points); en encart est présenté l'histogramme de la longueur des paliers de pseudo-accrochage. On remarque sur les deux sections de Poincaré la présence de structurations caractéristiques d'attracteurs étranges.

[Experimental Poincaré sections : (a) corresponding to the behaviour shown in figure 2a ($f_2/f_1 = 6.91$) (1 000 points); (b) corresponding to R.B. experiment with a dynamical behaviour near a locking of third order (1 500 points); the repartition of the lengths of the pseudo-locking phases is presented in the inset. We can remark local structurations on these Poincaré sections which are characteristic of strange attractors.]

Bibliographie

- [1] DUBOIS, M., BERGÉ, P., CROQUETTE, V., *J. Physique Lett.* **43** (1982) L-295.
- [2] DUBOIS, M., BERGÉ, P., *Phys. Lett. A* **76** (1980) 53.
- [3] DUBOIS, M., « Stability of Thermodynamic Systems », *Lecture Notes in Physics* n° **164**, Barcelone 1981 (Springer-Verlag), p. 177.
- [4] ARNOLD, V., *Trans. Am. Soc. 2nd Ser.* **46** (1965) 213.
- [5] NEWHOUSE, S., PALIS, J., TAKENS, F., *Publ. IHES* **57** (1983) 5.
- [6] CURRY, J., YORKE, J. A., *Lecture Notes in Mathematics* **688** (1977) 48.
- [7] POMEAU, Y., MANNEVILLE, P., *Commun. Math. Phys.* **74** (1980) 189.
- [8] BERGÉ, P., POMEAU, Y., VIDAL, C., *L'ordre dans le chaos* (Hermann, Paris) 1984.
- [9] DUBOIS, M., BERGÉ, P., Communication au séminaire *Traitement numérique des attracteurs étranges*, Grenoble 1985, à paraître (Editions du CNRS).
- [10] COULLET, P., TRESSER, C., ARNEODO, A., *Phys. Lett.* **77** (1980) 327.
- [11] MACKEY, R. S., TRESSER, C., *J. Physique Lett.* **45** (1984) 295.