Sur la longueur critique d'un laser

G. Stephan

► To cite this version:

G. Stephan. Sur la longueur critique d'un laser. Journal de Physique Lettres, 1983, 44 (10), pp.361-368. 10.1051/jphyslet:019830044010036100 . jpa-00232204

HAL Id: jpa-00232204

<https://hal.science/jpa-00232204>

Submitted on 1 Jan 1983

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE-LETTRES

J. Physique — *LETTRES* 44 (1983) L-361 - L-368

15 MAI 1983, PAGE L-361

Classification

Physics Abstracts

42.55F — 42.60D — 42.60H

Sur la longueur critique d'un laser

G. Stephan

Laboratoire de Spectroscopie (*), Université de Rennes,
avenue du Général Leclerc, 35042 Rennes, France*(Reçu le 14 janvier 1983, accepté le 29 mars 1983)*

Résumé. — Le concept de longueur critique d'un laser a été introduit pour expliquer le changement de dissymétrie de la raie d'émission quand on fait varier la longueur de la cavité. Nous montrons sur le plan théorique que ce concept résulte de l'approximation du champ moyen qui n'est pas justifiée quand le milieu amplificateur remplit toute la cavité. Il en résulte que ce changement de dissymétrie est lié aussi à la longueur du tube amplificateur. Nous en donnons une vérification expérimentale.

Abstract. — The critical length of a laser has been introduced to explain a variation in the asymmetry of the line shape when the length of the cavity is varied. We theoretically show that this concept is a consequence of the mean field approximation which is not justified when the amplifying medium fills the entire cavity. It then appears that this variation of asymmetry is also related to the length of the amplifying tube. We give an experimental verification of this result.

Nous avons récemment publié une théorie du mode fondamental gaussien dans un laser à gaz [1]. Le modèle comportait une cavité avec un miroir plan et un miroir concave *remplie* d'un milieu amplificateur *homogène*; les phénomènes de *diffraction* par des diaphragmes n'étaient *pas considérés* et le but du calcul était d'étudier les conséquences de l'inhomogénéité de saturation induite par le champ, c'est-à-dire les effets d'autofocalisation ou défocalisation résonnants dans ce cas particulier. L'originalité de cette théorie résidait essentiellement en (a) la séparation du champ en ses deux composantes progressives et (b) la prise en compte de la variation selon l'axe z du laser de quatre quantités caractérisant le faisceau lumineux : deux paramètres transversaux (diamètre $2W_{(z)}$ et rayon de courbure $R_{(z)}$ du faisceau gaussien) et les deux paramètres longitudinaux usuels, l'amplitude et la phase. L'approximation du champ moyen y était donc complètement *absente*. Le calcul de la forme de raie montre alors que le « Lamb dip » est dissymétrique et que le maximum d'intensité se trouve du côté des basses fréquences, ceci quelle que soit la longueur du laser; on trouve aussi que la variation du diamètre du mode obéit à une forme de dispersion

(*) Equipe de recherche associée au CNRS n° 748.

avec son maximum du côté des hautes fréquences. Nous avons ensuite montré que ce modèle était suffisant pour expliquer des formes de raie expérimentales [2].

Cependant les résultats d'une expérience intéressante viennent par ailleurs d'être publiés [3] et l'interprétation de ces résultats semble infirmer nos conclusions.

Le laser étudié comporte aussi un miroir plan et un miroir concave. Un diaphragme permet de supprimer les modes transverses et peut être placé soit à une extrémité soit à l'autre du laser. Quand il se trouve du côté du miroir concave, les auteurs observent que la dissymétrie de la raie change avec la longueur du laser. Pour de petites longueurs, cette dissymétrie est en accord avec celle prévue par nos calculs. Pour de plus grandes longueurs elle est inversée et donc le maximum d'intensité se trouve du côté des grandes fréquences. Le changement de dissymétrie a lieu pour une longueur appelée « longueur critique » d_c liée au rayon de courbure R_m du miroir concave par la relation $d_c = 4 R_m / 5$. L'interprétation théorique utilise le formalisme des matrices ABCD [4] : l'action du milieu amplificateur sur les propriétés transversales du champ est représentée par une lentille mince dont la distance focale change avec la fréquence. Cette action est attribuée à l'inhomogénéité de saturation, c'est-à-dire précisément au même effet que nous avons étudié. Ensuite les variations d'intensité sont expliquées par l'effet Garside [5], c'est-à-dire la variation des pertes induites par le diaphragme quand le diamètre du mode change avec la fréquence. D'après les conclusions du calcul effectué, les variations du diamètre du mode n'ont pas le même signe sur le miroir plan ou sur le miroir concave quand la longueur du laser est supérieure à d_c ; ceci explique aussi dans ce cas le changement de forme de raie observé selon que l'on place le diaphragme de l'un ou de l'autre côté du laser.

Le but de cette lettre est de faire la liaison entre cette expérience et nos calculs précédents en montrant que ce concept de longueur critique est lié aussi à la longueur du tube amplificateur dans la cavité.

Sur le plan théorique, nous montrons que l'une des approximations exigées pour l'utilisation de la méthode ABCD ne convient pas en général pour l'étude des effets d'autofocalisation ou défocalisation résonnants dans les lasers à gaz. Sur le plan expérimental, nous donnons le résultat d'une expérience qui montre que le changement de dissymétrie n'existe pas quand le milieu remplit toute la cavité. Nous donnons ensuite une interprétation qui tient compte d'une nouvelle théorie de la forme de raie dans les lasers à gaz que nous avons faite [6]. Cette théorie est une extension de la précédente [1] et inclut dans le modèle l'inhomogénéité transversale des atomes actifs dans le tube amplificateur, la distribution interne du champ diffracté par un diaphragme, la longueur et la position du tube amplificateur dans la cavité.

La méthode des matrices appliquée à la propagation des faisceaux gaussiens a été décrite par Kogelnik [4] dans le cas des milieux linéaires. Les auteurs cités [3] l'ont utilisée dans un milieu non linéaire en représentant l'action du gaz amplificateur sur le paramètre transversal q du champ par une matrice analogue à celle d'une lentille mince. Nous n'allons pas discuter ici toutes les hypothèses et simplifications nécessaires à cette représentation, nous en retiendrons seulement une : c'est l'hypothèse du champ moyen. L'intensité du champ est prise implicitement constante le long du laser. Nous allons montrer que c'est cette hypothèse qui est à l'origine du concept de longueur critique grâce à nos équations précédentes [1]. En effet, si le champ progressif « aller » est caractérisé par un paramètre transversal ${}^0q_a(z)$ pour une cavité passive, le milieu amplificateur perturbe ${}^0q_a(z)$ et on peut écrire que la nouvelle valeur $q_a(z)$ est telle que $\frac{1}{q_a(z)} = \frac{1}{{}^0q_a(z)} + \varepsilon_{qa}(z)$ où $\varepsilon_{qa}(z)$ représente la perturbation.

Les équations de Maxwell [1] permettent d'écrire l'équation différentielle à laquelle obéit $\varepsilon_{qa}(z)$:

$$d\varepsilon_{qa}/dz + 2 \varepsilon_{qa}/{}^0q_a = - \frac{a}{{}^0W_{(z)}^2} \left[\frac{\alpha_1}{\varepsilon_0} |E_a(z, 0)|^2 + \frac{\alpha_2}{\varepsilon_0} |E_r(z, 0)|^2 \right] \quad (1)$$

(Eq. (43a) de la réf. [1]).

Dans cette équation le second nombre est constitué par les polarisabilités non linéaires. $|E_a(z, 0)|^2$ et $|E_r(z, 0)|^2$ sont les intensités des deux champs progressifs sur l'axe en un point z du laser, a est un coefficient d'interpolation et ${}^0W_{(z)}$ le demi-diamètre du mode. Si on utilise l'hypothèse du champ moyen l'équation (1) s'écrit :

$$d\varepsilon_{qa}/dz + 2\varepsilon_{qa}/{}^0q_a = -E_m^2(\alpha_1 + \alpha_2)/(\varepsilon_0 W_m^2) \quad (2)$$

où E_m^2 et W_m^2 désignent des quantités « moyennes ». Cette équation est facile à intégrer analytiquement, puisque le second membre est indépendant de z . En faisant ce calcul et le même pour l'onde retour puis en appliquant les conditions aux limites sur les miroirs pour trouver les constantes d'intégration, on trouve $\varepsilon_{qa}(z)$. La partie imaginaire de $\varepsilon_{qa}(z)$ est liée à la variation $\Delta W(z)$ du diamètre du mode (1) et, tous calculs effectués, on trouve que sur le miroir plan ($z = 0$) :

$$\frac{\Delta W_{(0)}}{W_{(0)}^3} = + \frac{\pi}{\lambda} \frac{\alpha_1' + \alpha_2'}{12 \varepsilon_0} \frac{E_m^2}{W_m^2} d \frac{2d^2 - 4R_m d + 3R_m^2}{(d - R_m)\sqrt{d(R_m - d)}}, \quad (3)$$

et sur le miroir concave ($z = d$) :

$$\frac{\Delta W_{(d)}}{W_{(d)}^3} = \frac{\pi}{\lambda} \frac{\alpha_1' + \alpha_2'}{12 \varepsilon_0} \frac{E_m^2}{W_m^2} \sqrt{\frac{d}{R_m - d}} (4d - 3R_m). \quad (4)$$

Ici d est la longueur du laser.

On voit alors facilement que $\Delta W_{(0)}$ a la forme d'une courbe de dispersion négative du côté des basses fréquences (signe contraire de celui de α_1' et α_2'). C'est le cas également pour $\Delta W_{(d)}$ quand $d < \frac{3}{4} R_m$. Par contre on observe un *changement de signe de $\Delta W_{(d)}$* pour une valeur « critique » $d_c' = \frac{3}{4} R_m$. Nous attribuons la différence entre d_c et d_c' au fait que d_c se rapporte à une lentille mince et d_c' à un effet réparti. Notre conclusion essentielle est donc que le concept de longueur critique est lié à l'hypothèse du champ moyen. Mais cette hypothèse est-elle justifiée ? Sur le plan physique, le membre de droite de (1) comporte des termes qui varient beaucoup avec z : dans le cas du laser de l'expérience [3] citée : $d = 57$ cm, $R_m = 60$ cm et on a $W_{(d)}^2 = W_{(0)}^2 \times \frac{R_m}{R_m - d} = 20 W_{(0)}^2$: l'aire du mode gaussien varie d'un facteur 20 du miroir plan au miroir concave ; l'effet de cette augmentation de $W_{(z)}^2$ dans le membre de droite de (1) est encore amplifié par une diminution de $|E_a(z, 0)|^2$ ou $|E_r(z, 0)|^2$ qui varient (au gain près) comme $1/W_{(z)}^2$: d'un bout à l'autre du laser, les termes en E^2/W^2 varient donc environ d'un facteur 400 ! Par conséquent, sur le plan physique, il n'est pas justifié de remplacer le membre de droite de (1) par une constante si le milieu amplificateur remplit la cavité. Par contre, le formalisme ABCD sera plus justifié quand le membre de droite de (1) sera approximativement constant : ce sera le cas d'un tube amplificateur assez court placé dans la cavité laser comme nous allons le voir maintenant.

La figure 1 représente l'intensité en fonction de la fréquence, mesurée dans le cas d'un laser monomode fonctionnant sur la raie $3,39 \mu$ du Ne et possédant les mêmes caractéristiques que celui décrit dans (1) : longueur 57 cm, cavité quasi hémisphérique comportant un miroir concave de rayon 60 cm. Les figures 1a et 1b correspondent respectivement à deux tubes amplificateurs de 29 et 50 cm de longueur utile placés au centre de la cavité, le diaphragme se trouvant du côté du miroir concave. Le diamètre intérieur des tubes est 6,5 mm et 7,5 mm respectivement. On constate un changement de dissymétrie entre les deux formes de raie. Dans le cas de la cavité quasi pleine, on observe la forme prévue par notre calcul précédent (1). Dans le cas du tube court, on retrouve les résultats référencés [3]. Il apparaît donc que les résultats utilisant l'approximation du champ moyen soient applicables dans le second cas, non dans le premier. Nous avons voulu vérifier cela par le calcul en utilisant les résultats d'une théorie *ab initio* [6] concernant un modèle

Fig. 1. — Intensité totale de sortie à $\lambda = 3,39 \mu$, d'un laser quasi hémisphérique de longueur 57 cm, ayant un miroir concave de rayon de courbure de 60 cm pour deux longueurs du tube amplificateur placé au centre de la cavité : (a) Longueur de la décharge $l = 29$ cm, pression totale 0,6 T, diamètre du tube 6,5 mm, courant de décharge 10 mA ; (b) $l = 50$ cm, pression 0,5 T, diamètre du tube 7,5 mm, courant 12,5 mA. Le diaphragme de diamètre 3 mm est placé du côté du miroir concave. Le rapport $\text{He} : \text{Ne}^{20} = 5$. Les fréquences sont croissantes de la gauche vers la droite. La dissymétrie des raies est due essentiellement à l'effet Garside. Le résultat (a) confirme les conclusions de la référence [3], le résultat (b) celles de la référence [1]. Nous avons vérifié que l'augmentation du diamètre du diaphragme s'accompagne d'une diminution de la dissymétrie.

[Total intensity of a quasi-hemispheric, 57 cm long laser, with a concave mirror having a curvature radius of 60 cm, for two lengths of an amplifying tube centred in the cavity : (a) Discharge length $l = 29$ cm, total pressure 0.6 T, tube diameter 6.5 mm, discharge current 10 mA ; (b) $l = 50$ cm, total pressure 0.5 T, tube diameter 7.5 mm, discharge current = 12.5 mA. A diaphragm (diameter 3 mm) is set on the concave mirror side. The ratio $\text{He} : \text{Ne}^{20} = 5$. Frequencies increase from left to right. Line asymmetries arise essentially from Garside's effect (2). Result (a) confirms conclusions of reference [3] and result (b) those of reference [1].]

Fig. 2. — (a) Intensité sur l'axe et sur le miroir concave; (b) Variations de $W_{(0)}^2 - {}^0W_{(0)}^2$ sur le miroir plan et (c) $W_{(d)}^2 - {}^0W_{(d)}^2$ sur le miroir concave calculées en fonction de la fréquence. ${}^0W_{(0)}^2$ et ${}^0W_{(d)}^2$ sont les valeurs au centre de la raie, quasiment égales à celles d'une cavité vide. Le laser a 57 cm de longueur et les données suivantes : miroir concave de rayon 60 cm, de pouvoir réflecteur 0,8, miroir plan de pouvoir réflecteur 1, diaphragme placé devant le miroir concave de diamètre $2b$ tel que $b/{}^0W_{(d)} = 1,3$ soit $b = 2,2$ mm. Le rapport de la largeur naturelle de la raie à la largeur Doppler est $\gamma/kv_M = 0,3$. Une inhomogénéité de population transversale parabolique proportionnelle à $1 - r^2/r_0^2$ est utilisée avec $r_0 = 3$ mm. Le gain pour l'amplitude par aller-retour est 1,3. La longueur amplificatrice, placée au centre de la cavité est de 30 cm. Ces résultats sont en accord avec l'expérience de la figure 1a et les conclusions de la référence [3]. On remarque que l'existence d'une faible inhomogénéité de population fait que la variation du diamètre du mode ne s'annule pas en limite de raie.

[(a) Intensity on the laser axis and on the concave mirror; (b) Variation $W_{(0)}^2 - {}^0W_{(0)}^2$ vs. reduced frequency on the plane mirror and (c) $W_{(d)}^2 - {}^0W_{(d)}^2$ on the concave mirror. ${}^0W_{(d)}$ is the value at the centre of the line, almost equal to that of an empty cavity. Input parameters of the program code are : laser length 57 cm; amplifying length at the centre of the cavity : 30 cm; concave mirror : curvature radius 60 cm, reflectance 0.8; plane mirror : reflectance 1; diaphragm on the concave mirror, with a diameter $2b$ such as $b/{}^0W_{(d)} = 1.3$, i.e. $b = 2.2$ mm. The ratio $\gamma/kv_M = 0.3$ where γ and kv_M are half values of the natural width and Doppler width of the line respectively. A transverse population inhomogeneity, proportional to $(1 - r^2/r_0^2)$, is used with $r_0 = 3$ mm. The amplitude gain for a round trip is 1.3. These results are in agreement with the experiment of figure 1a and conclusions of reference [3]. The variations of $W_{(0)}^2$ and $W_{(d)}^2$ do not cancel at line limits thanks to the existence of a weak population inhomogeneity.]

Fig. 3. — Mêmes grandeurs que celles de la figure 2, mais pour un laser rempli d'un milieu amplificateur homogène. On observe le changement de dissymétrie de la raie et des variations des diamètres des modes par rapport à la figure précédente. Dans ce cas les variations de $W_{(0)}^2$ et $W_{(d)}^2$ s'annulent en limite de raie. Ces résultats sont en accord avec l'expérience de la figure 1b et les conclusions de la référence [1]. On observe un changement par rapport à une forme de dispersion simple dans le cas (c).

[Same quantities as those in figure 2 but for a laser filled with a homogeneous amplifying medium. Line asymmetry and diameter variations are opposite to those of figure 2. Moreover, in this case $W_{(0)}^2$ and $W_{(d)}^2$ variations cancel at line limits. These results are in agreement with those of figure 1b and conclusions of reference [1]. Notice curve 3(c) which has not a simple dispersion shape such as figures 2b, 2c or 3b.]

qui se rapproche plus que le précédent (1) de la réalité expérimentale puisqu'il prend en compte les phénomènes de diffraction (le faisceau n'est pas exactement gaussien), l'inhomogénéité transversale des atomes amplificateurs, la longueur et la position du tube amplificateur dans la cavité. Les figures 2 et 3 représentent les grandeurs fondamentales que sont la forme de raie sur l'axe ainsi que les variations des diamètres du mode sur les deux miroirs dans les deux cas précédents, tube amplificateur court (Fig. 2) et long (Fig. 3). La variation des diverses grandeurs confirme celle prévue par la théorie du champ moyen dans le cas de la figure 2 mais non dans le cas de la figure 3. D'autres résultats nous ont montré le passage progressif de l'un à l'autre cas. Dans le cas de la figure 3 on ne tient pas compte d'une inhomogénéité de population : si la densité des atomes amplificateurs est plus grande sur l'axe que sur les bords du tube, il en résulte un effet lentille supplémentaire qui, dans ce cas, augmente l'intensité du côté des basses fréquences. Il n'est pas exclu que malgré le grand diamètre intérieur des tubes utilisés, cet effet intervienne dans les résultats expérimentaux ci-dessus. Par contre nous avons inclus dans le cas de la figure 2 une

Fig. 4. — Distribution le long de l'axe de l'intensité du champ pour la fréquence centrale et pour les données correspondant à celles de la figure 2. Le champ est décomposé sur une base formée par les 100 premiers modes de Laguerre-Gauss et les coefficients de cette décomposition trouvés par la condition de résonance [6]. On observe une variation notable de cette distribution par rapport au champ gaussien habituel [1] : en particulier on voit que le maximum d'intensité se trouve en avant du miroir plan ce qui est dû à l'action focalisatrice du diaphragme. Cette figure a une forme qui correspond à la figure de diffraction habituelle d'un faisceau gaussien par un diaphragme mais « repliée » sur elle-même par l'action du miroir plan. Cette figure montre aussi que l'hypothèse du champ moyen, qui permet l'utilisation du formalisme des matrices, a d'autant plus de chance d'être bonne que le tube amplificateur, placé au centre de la cavité, est plus court.

[Distribution of the resonant diffracted field intensity along the laser axis for the central frequency and for data corresponding to those of figure 2. The field is expanded on a basis made of the 100 first Laguerre-Gauss modes and its coefficients found by the resonance condition method [6]. One observes a significant variation of this distribution compared to the usual Gaussian field [1]. One notes particularly that the maximum of intensity is ahead of the plane mirror. This is due to the focusing effect of the diaphragm. This diffraction pattern looks like those usually obtained when a Gaussian beam is diffracted by a circular aperture, but « folded » by the plane mirror. This figure also shows that the shorter the amplifying tube placed at the centre of the cavity the better the mean field approximation which allows the ABCD matrix formalism.]

inhomogénéité de population proportionnelle à $1 - r^2/r_0^2$ (avec $r_0 = 3$ mm) pour montrer que ce phénomène, bien que n'ayant pas d'influence notable ici sur la forme de raie, doit pouvoir être détecté par les variations $\Delta W(0)$ ou $\Delta W(d)$: en effet, s'il existe, il conduit à une valeur non nulle de ces grandeurs en limite de raie quand l'intensité tend vers zéro. La figure 4 représente l'intensité le long de l'axe, pour la fréquence centrale, des ondes progressives aller et retour dans le laser pour le cas correspondant aux données de la figure 2. Il s'agit d'une figure de diffraction résonnante calculée selon une méthode numérique exposée dans [6] : la différence entre les deux ondes est remarquable sauf dans la région centrale où elles sont approximativement égales. Ceci permet donc de justifier l'utilisation d'un champ moyen dans le cas d'un tube court.

En conclusion, on voit donc que lorsque le milieu amplificateur remplit toute la cavité la variation de dissymétrie en fonction de la longueur n'existe pas, mais qu'à une longueur de cavité donnée $d > d_c$, il existe une longueur de tube amplificateur pour laquelle on observe cette variation.

La théorie *ab initio* [1-6] que nous avons faite permet de calculer ces phénomènes contrairement à la théorie *ad hoc* [3] des matrices ABCD utilisées en général sans justification suffisante [7].

Bibliographie

- [1] STEPHAN, G. et TALEB, H., *J. Physique* **42** (1981) 1623.
 - [2] STEPHAN, G., TALEB, H., PESTY, C. et LEGROS, F., *J. Physique* **43** (1982) 255.
 - [3] LE FLOCH, A., LE NAOUR, R., LE NORMAND et TACHE, J. P., *J. Physique Lett.* **43** (1982) L-493.
 - [4] KOGELNIK, H., *Appl. Opt.* **4** (1965) 1562.
 - [5] GARSIDE, B. K., *I.E.E.E. J. Quantum Elect.* **QE 4** (1968) 940.
 - [6] STEPHAN, G. et TRÜMPER, M., Accepté pour publication à *Phys. Rev. A*.
 - [7] HARDY, A., *Appl. Opt.* **19** (1980) 3830.
-