Navier-Stokes et quanta

J. Yvon

► To cite this version:

J. Yvon. Navier-Stokes et quanta. Journal de Physique Lettres, 1978, 39 (21), pp.363-364.
10.1051/jphyslet:019780039021036300 . jpa-00231517

HAL Id: jpa-00231517

<https://hal.science/jpa-00231517>

Submitted on 1 Jan 1978

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE-LETTRES

Classification
Physics Abstracts
05.30

NAVIER-STOKES ET QUANTA

J. YVON

Commissariat à l'Energie Atomique, 31, rue de la Fédération, 75015 Paris, France

(Reçu le 5 juillet 1978, révisé le 15 septembre 1978, accepté le 18 septembre 1978)

Résumé. — Les équations traditionnelles de la mécanique des fluides sont beaucoup plus proches de la théorie quantique qu'on ne le croit généralement. C'est du moins une première esquisse de cette affirmation qui est présentée ici. La procédure consiste à substituer à la transformation de Fourier de la représentation de Wigner un développement en série entière.

Abstract. — The traditional equations of fluid mechanics are much nearer the quantum theory than is generally believed. At least we present here a first outline of this assertion. The method consists in replacing the Fourier transformation of the Wigner representation by a series development.

1. **Les données.** — Considérons un ensemble de particules ponctuelles. Ce sont des bosons sans spin. Elles sont identiques. Il n'existe aucune interaction entre elles. Limitons-nous à un problème à une dimension. Les abscisses sont tout d'abord désignées par r, r' . Les particules sont soumises à un potentiel appliqué $V(r)$ indépendant du temps. En théorie quantique non relativiste la matrice densité réduite $M(r, r', t)$ évolue suivant l'équation de von Neumann

$$i\hbar \frac{\partial M}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{\lambda m} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\partial^2}{\partial r'^2} \right) M + (V(r) - V(r')) M. \quad (1)$$

La matrice M est self-adjointe, ce qui s'écrit :

$$M(r', r, t) = M^*(r, r', t).$$

Ses valeurs propres sont toutes positives. La densité numérique

$$n(r, t) = M(r, r, t)$$

est non négative. Elle est normalisée par la condition

$$\int n \, dr = N$$

N étant le nombre de particules présentes.

2. **La méthode.** — Suivant l'exemple de Wigner [1] nous prenons maintenant comme coordonnées, au lieu de r et r' , les quantités

$$x = \frac{1}{2}(r + r'), \quad X = r' - r.$$

L'équation de von Neumann devient maintenant :

$$i\hbar \frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{m} \frac{\partial^2}{\partial x \partial X} M + \left\{ V\left(x - \frac{X}{2}\right) - V\left(x + \frac{X}{2}\right) \right\} M, \quad (2)$$

avec

$$M = M(x, X, t), \quad n = M(x, 0, t).$$

Ici, la technique adoptée par Wigner consiste à procéder à une transformation de Fourier sur l'abscisse X . Elle a été généralisée, consécutivement à l'utilisation intense de la matrice densité, par bien des théoriciens. Je cite essentiellement H. S. Green [3]. J'ai l'ambition ici de montrer qu'un simple développement en série entière par rapport à X est instructif.

Nous posons donc

$$M = n - iM_x X - \frac{1}{2} M_{xx} X^2 + \dots, \quad (3)$$

$$V = V(x) - XF_x + \dots$$

$M_x, M_{xx}, \dots$, la force F_x sont des fonctions de x . $M_x, M_{xx}, \dots$, dépendent aussi du temps. Ce sont des grandeurs réelles. Le signe négatif qui les précède est destiné à mieux mettre en évidence leur signification physique.

En nous arrêtant au premier ordre, nous déduisons de l'équation de von Neumann, en première approximation, les équations suivantes :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\hbar}{m} \frac{\partial M_x}{\partial x} = 0, \quad \hbar \frac{\partial M_x}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{m} \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} = nF_x.$$

Posons :

$$\hbar M_x = mn v_x \quad \frac{\hbar^2}{m} M_{xx} = mn v_x^2 + P_{xx}.$$

ce qui introduit une vitesse v_x et une pression P_{xx} .
Il vient :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n v_x}{\partial x} = 0.$$

Soulignons que le développement en série (3) a des chances d'être efficace si le potentiel appliqué est monotone. Si le système comporte des parois, la convergence pourrait poser des problèmes.

3. Conclusion. — Nous obtenons donc, sur cet exemple extrêmement simpliste, un cas particulier des équations générales de la mécanique des fluides. Le titre que j'ai adopté a, il faut l'avouer, un caractère publicitaire. Il est peu convenable de mettre en exergue Navier et Stokes : le formalisme patronné par ces deux savants précisait la nature de la pression et faisait apparaître la viscosité. Il ne saurait bien entendu être question de viscosité dans un système de particules sans interaction ! Il ne s'agit ici que d'un coup d'envoi.

La petite étude ci-dessus a laissé de côté le problème de la positivité des valeurs propres de la matrice

densité. Il importe de souligner qu'elle suppose implicitement que la suite des valeurs propres de cette matrice est pratiquement continue. S'il existait par exemple une valeur propre macroscopique, il faudrait traiter à part la fonction propre correspondante, en gros, dans le style de l'équation de Schrödinger : c'est le cas, apparemment, pour l'hélium suprafluide.

On peut s'étonner que quelqu'un comme Navier [2] ait pu avoir la prémonition d'une théorie qui s'adapte dans une certaine mesure aux conceptions quantiques ; il faut noter que, d'une part, il avait conscience, à l'école de Laplace, de l'existence des molécules, mais qu'il ignorait la mécanique statistique classique qui, à l'initiative de Maxwell, de Boltzmann, a permis de donner en son temps une interprétation provisoirement satisfaisante des propriétés des gaz. Sans le savoir, il n'était pas bridé par les conceptions classiques.

Une généralisation bitemporelle [4] de l'équation de von Neumann, qui associe au jeu de coordonnées r, r' deux paramètres temps, t et t' , permet d'envisager un développement en série plus général où interviendrait aussi l'intervalle de temps $t' - t$.

La méthode proposée ici a des points communs avec le traitement de l'équation de Schrödinger par Madelung [5]. Fondée sur la matrice densité, elle est adaptée aux études de mécanique statistique et de thermodynamique.

Bibliographie

- [1] WIGNER, E., *Phys. Rev.* **40** (1932) 749.
- [2] NAVIER, H., Mémoires de l'Académie des Sciences, 18 mars 1822.
- [3] GREEN, H. S., *Struktur der Flüssigkeiten*, Handbuch der Physik, Band 10 (Springer Verlag Berlin) 1960.
- [4] YVON, J., *J. Physique Radium* (1948) 184.
- [5] MADELUNG, E., *Z. Phys.* **40** (1926) 322.