Classification
 Physics Abstracts
 72.15 — 72.20

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DE TRANSPORT PAR LINÉARISATION

J. C. MANIFACIER, J. JIMENEZ-LOPEZ, J. GASLOT, J. BONNAFE et J. P. FILLARD

Université des Sciences et Techniques du Languedoc, Centre d'Etudes d'Electronique des Solides (*),
 place E.-Bataillon, 34060 Montpellier Cedex, France

(Reçu le 24 avril 1978, révisé le 22 mai 1978, accepté le 29 mai 1978)

Résumé. — Les équations de transport classiques dans les semiconducteurs sont en général résolues au moyen d'hypothèses simplificatrices ou par des méthodes numériques spécifiques. Une troisième méthode, qui consiste à linéariser les équations de départ (méthode des petits signaux), permet d'obtenir les solutions sous forme analytique.

Nous donnons les résultats obtenus dans deux cas particuliers : (i) l'injection de porteurs minoritaires dans un semiconducteur ; (ii) l'effet Hall dans un échantillon de dimensions finies.

Les conséquences de cette analyse sont importantes pour l'interprétation des mesures électriques mettant en œuvre des contacts.

Abstract. — The transport relationships are generally solved by means of simplifying hypotheses or by using numerical analysis. A third method, within the framework of *small signal theory*, enables solutions to be obtained in closed form.

We give results for two particular cases : (i) minority carrier injection in semiconductors ; (ii) Hall effect in a sample of finite length.

The consequences of this analysis are believed to be of general importance in connection with the interpretation of electrical measurements on solids involving contacts.

1. Introduction. — Dans les dispositifs électroniques (diodes, transistors, structure MOS, etc...) les grandeurs physiques, telles que les densités d'électrons ou de trous, le champ électrique, etc..., sont reliées entre elles par l'intermédiaire des équations de transport. Ces équations sont la loi de Poisson (Eq. (1)), les équations du courant (Eqs. (2, 3)) et les équations de conservation des particules (Eqs. (4, 5)).

Nous nous sommes placés ici dans le cadre d'une analyse unidimensionnelle et en régime indépendant du temps. Si l'on considère la présence d'un centre recombinant dans la bande interdite obéissant au modèle de Shockley Read [1], l'équation (6) donne l'excès de charge positive ΔQ_i se trouvant sur ce piège en fonction des densités de charge libres en excès $\Delta n = n - n_e$ et $\Delta p = p - p_e$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{q}{\varepsilon} [\Delta p - \Delta n + \Delta Q_i] \quad (1)$$

$$J_n = q\mu_n nE + \mu_n kT \frac{\partial n}{\partial x} \quad (2)$$

$$J_p = q\mu_p pE - \mu_p kT \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = 0 = - \frac{np - n_e p_e}{\tau_{n0}(p + p_1) + \tau_{p0}(n + n_1)} + \left[\mu_n \frac{\partial(nE)}{\partial x} + \mu_n \frac{kT}{q} \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \right] \quad (4)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = 0 = - \frac{np - n_e p_e}{\tau_{n0}(p + p_1) + \tau_{p0}(n + n_1)} - \left[\mu_p \frac{\partial(pE)}{\partial x} - \mu_p \frac{kT}{q} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right] \quad (5)$$

(*) Associé au CNRS.

$$\Delta Q_i = m_e \frac{\Delta p \left(\frac{\tau_{n0}}{\tau_{p0}} \right) - \Delta n \left[n_1 + \frac{\tau_{n0}}{\tau_{p0}} p_e \right] / \left[n_e + \frac{\tau_{n0}}{\tau_{p0}} p_1 \right]}{n_e + n_1 \left(\frac{\tau_{n0}}{\tau_{p0}} \right) (p_e + p_1) + \Delta n + \frac{\tau_{n0}}{\tau_{p0}} \Delta p} \quad (6)$$

Dans ces équations n , p , n_e , p_e , μ_n , μ_p , E ont leur signification habituelle, et τ_{n0} , τ_{p0} , n_1 et p_1 sont des paramètres caractéristiques au centre recombinant [1], m_e étant la densité d'électrons dans ce centre à l'équilibre thermique. A ces six équations, il faut ajouter les conditions aux limites propres au problème particulier étudié.

Les difficultés de la résolution du système d'équations proviennent du fait que ces équations ne peuvent pas être résolues explicitement même si les conditions aux limites sont connues (ce qui n'est pas souvent le cas en pratique).

Les deux méthodes utilisées à ce jour ont été :

(A) L'introduction d'hypothèses simplificatrices (neutralité électrique, absence de pièges, courants de diffusion négligeables devant les courants de conduction ou réciproquement, etc...).

(B) L'utilisation de méthodes de calcul numérique, les conditions aux limites manquantes étant déterminées par une technique itérative sur la base de tests self consistants [2]. La première méthode est dangereuse car les conséquences exactes des différentes approximations sont difficiles à prévoir, la deuxième est longue et spécifique du cas particulier étudié.

(C) Une troisième méthode [3, 4] a été récemment explorée, elle consiste à linéariser les équations (1)-(6) sans aucune hypothèse simplificatrice. La validité des résultats est alors restreinte au cas des courants faibles, mais les conclusions sont en dehors de cela générales. L'analyse même sous forme linéarisée est complexe et les détails en sont donnés par ailleurs [3, 4], nous nous proposons simplement ici de donner un aperçu des possibilités de cette analyse.

2. Résolution des équations de transport par linéarisation. — A partir des seules hypothèses $\Delta p < p_e$ et $\Delta n < n_e$, on peut montrer [3] que les équations (1)-(6) se réduisent à un couple d'équations différentielles du deuxième ordre à coefficients constants, reliant entre elles $\Delta p(x)$ et $\Delta n(x)$: dans le cas particulier où la densité de pièges est nulle, $m_e = 0$ on obtient :

$$\frac{d^2 \Delta p}{dx^2} - \Delta p \left(\frac{q^2 p_e}{\epsilon k T} + \frac{q n_e}{k T \mu_p \tau_0 (n_e + p_e)} \right) + \Delta n \left(\frac{q^2 p_e}{\epsilon k T} - \frac{q p_e}{k T \mu_p \tau_0 (n_e + p_e)} \right) = 0 \quad (7)$$

$$\frac{d^2 \Delta n}{dx^2} - \Delta n \left(\frac{q^2 n_e}{\epsilon k T} + \frac{q p_e}{k T \mu_n \tau_0 (n_e + p_e)} \right) + \Delta p \left(\frac{q^2 n_e}{\epsilon k T} - \frac{q n_e}{k T \mu_n \tau_0 (n_e + p_e)} \right) = 0. \quad (8)$$

Les solutions obtenues sont dans le cas général où $m_e \neq 0$ de la forme :

$$\Delta n(X) = M \exp(\sqrt{\eta} X) + N \exp(-\sqrt{\eta} X) + R \exp(\sqrt{A} X) + S \exp(-\sqrt{A} X) \quad (9)$$

avec des expressions identiques pour $\Delta p(X)$ et à partir de l'équation (1) pour $E(X)$.

On a normalisé x à la longueur de Debye $X = x/L_D$; $A = L_D^2/\tau_0 D_a$. D_a étant la longueur de diffusion ambipolaire; η étant un paramètre caractéristique du centre recombinant X .

Les figures 2, 3, 4 correspondent au cas particulier où la densité de pièges est nulle : $m_e = 0$; $\eta = 1$.

Les résultats précédents sont établis dans le cas général, nous allons donner les résultats correspondant à deux cas particuliers : (i) l'injection dans un échantillon semi-infini ; (ii) l'étude de l'effet Hall dans un échantillon de dimension finie.

3. Injection dans un semiconducteur. — L'injection de porteurs minoritaires est à la base du fonctionnement des composants électroniques tels que transistors ou diodes électroluminescentes.

Supposons un semiconducteur de type n, muni d'un contact injectant métallique (Fig. 1). Les conditions aux limites seront prises en $X = 0$ où le champ électrique $E = 0$, à l'infini où $\Delta n = 0$ et $\Delta p = 0$,

FIG. 1. — Schéma de bande d'un contact métal-semiconducteur de type n, polarisé dans le sens direct, régime d'injection

$$\gamma(X=0) > \gamma_0.$$

[Band scheme at a metal-(n-type) semiconductor interface, with a positive voltage applied to the metal : injection regime

$$\gamma(X=0) > \gamma_0.]$$

on introduit de plus un taux d'injection $\gamma(X)$ qui est le rapport entre le courant des porteurs minoritaires et le courant total, la valeur de $\gamma(0) = \gamma$ étant fixée arbitrairement (dans le cas de l'injection, γ varie entre $\gamma_0 = \gamma(\infty)$ et 1).

Il est couramment admis que l'injection de porteurs minoritaires dans un semiconducteur du type à durée de vie [5] (défini comme étant un semiconducteur pour lequel la durée de vie τ_0 est très supérieure au temps de relaxation diélectrique $\tau_D = \epsilon/\sigma$) diminue la résistance totale du système. En fait cela est vrai, mais seulement pour des densités de courant suffisamment importantes. Pour des densités de courant faibles une augmentation de la résistance peut être observée, associée à un maximum du champ électrique, voir figure 2. Cette figure correspond au cas d'un semiconducteur intrinsèque

$$p_e = \frac{p_e}{n_e} = 1, \quad b = \frac{\mu_n}{\mu_p} = 2.$$

FIG. 2. — $\Delta N(X)$, $\Delta P(X)$, $E(X)$ dans le cas de l'injection dans un semiconducteur à durée de vie,

$$\Delta P = \frac{p - p_e}{n_e}, \quad \Delta N = \frac{n - n_e}{n_e}.$$

L'encadré montre les variations des concentrations et du champ E près de l'origine. E est normalisé à kT/qL_D , X à L_D et

$$J = jL_D/\mu_p kT(n_e + p_e)$$

où j est la densité de courant.

[$\Delta N(X)$, $\Delta P(X)$, $E(X)$ for injection in a lifetime semiconductor

$$\Delta P = \frac{p - p_e}{n_e}, \quad \Delta N = \frac{n - n_e}{n_e}.$$

Insert shows the variations of field E and carrier concentrations in the vicinity of $X = 0$. E is normalized to kT/qL_D , X to L_D and $J = jL_D/\mu_p kT(n_e + p_e)$ where j is the current density.]

L'origine physique de ce maximum du champ électrique s'explique facilement; l'augmentation de la densité des porteurs minoritaires $\Delta P(X)$ est neutralisée par un excès de porteurs majoritaires $\Delta N(X) \simeq \Delta P(X)$, les gradients étant ainsi sensiblement égaux

$$(d \Delta N/dX \simeq d \Delta P/dX).$$

Le courant de diffusion des électrons s'oppose au courant de conduction lorsque la mobilité des élec-

trons est supérieure à celle des trous ($b > 1$), l'effet des gradients de concentration peut dominer l'effet de l'augmentation de la densité de porteurs et conduire ainsi à une augmentation de la résistance du système.

Dans le cas des semiconducteurs à relaxation, définis par Van Roosbroeck [6, 7] comme ceux pour lesquels $\tau_0 \ll \tau_D$, c'est le cas en général des isolants, l'injection de porteurs minoritaires se traduit par un appauvrissement de la densité des porteurs majoritaires ainsi que l'on peut l'observer sur la figure 3.

FIG. 3. — $\Delta N(X)$, $\Delta P(X)$ et $E(X)$ dans le cas de l'injection dans un semiconducteur à relaxation (voir figure 2 pour les conditions de normalisation).

[$\Delta N(X)$, $\Delta P(X)$, $E(X)$ for injection in a relaxation semiconductor (see figure 2 for the normalization conditions).]

FIG. 4. — Rapport V_H/V_{H0} en fonction de $a/\sqrt{\tau_0 D_a}$ pour différentes valeurs de $S = S_n/S_p$ et $b = \mu_n/\mu_p$, $a_n = a/L_D$, $B_n = B\mu_p$. B étant le champ magnétique (voir figure 2 pour les conditions de normalisation).

[Ratio V_H/V_{H0} versus $a/\sqrt{\tau_0 D_a}$ for different values of $S = S_n/S_p$ and $b = \mu_n/\mu_p$, $a_n = a/L_D$ and $B_n = B\mu_p$. B is the magnetic field (see figure 2 for the normalization conditions).]

4. Etude de l'effet Hall. — L'analyse simplifiée traite le specimen en supposant qu'il est en tout point à l'équilibre (durée de vie $\tau_0 = 0$). En écrivant que le courant total $J = J_n + J_p$ dans la direction du champ de Hall (axe OZ) est nul et en ajoutant la composante des courants due à la force de Laplace dans les équations (2) et (3) on obtient l'expression classique de la tension de Hall

$$V_{H0} = -2 a B E_c \frac{\mu_n^2 n_e - \mu_p^2 p_e}{\mu_n n_e + \mu_p p_e} \quad (10)$$

$2a$ étant la dimension latérale de l'échantillon dans la direction OZ, le champ magnétique B étant appliqué dans la direction OY et le courant circulant dans la direction OX. Les équations de transport linéarisées permettent de traiter le problème sans les hypothèses simplificatrices qui conduisent à l'équation (10).

Les conditions aux limites font intervenir les vitesses de recombinaisons S_n et S_p des électrons et des trous en $Z = \pm a$.

On obtient ainsi [4] la tension de Hall qui s'écrit sous la forme :

$$V_H = V_{H0} + \Delta V_H \quad (11)$$

dans laquelle ΔV_H est un terme correctif faisant intervenir la dimension de l'échantillon et la nature des surfaces, ainsi que le mécanisme de recombinaison.

La figure 4 donne V_H/V_{H0} en fonction de $a/\sqrt{\tau_0 D_a}$. $\sqrt{\tau_0 D_a}$ qui est la longueur de diffusion ambipolaire est le paramètre important, si $a \gg \sqrt{\tau_0 D_a}$, alors $V_H \simeq V_{H0}$.

Dans l'autre cas, celui d'un semiconducteur à durée de vie importante, le terme correctif peut devenir important; de plus il peut être positif ou négatif et conduire ainsi à une interprétation totalement erronée des résultats expérimentaux.

D'une manière identique, les équations linéarisées peuvent être appliquées à d'autres mécanismes de conduction par exemple l'exclusion [8], définie par $\gamma(0) < \gamma_0$, ou à des structures finies du type P-I-N. Ces courbes sont en accord complet avec les solutions exactes obtenues numériquement [2, 9] correspondant au domaine de validité de la méthode des petits signaux.

Bibliographie

- [1] SCHOCKLEY, W. and READ, W. T., *Phys. Rev.* **77** (1952).
- [2] POPESCU, C. and HENISCH, H. K., *Phys. Rev. B* **11** (1975) 1563.
- [3] MANIFACIER, J. C. and HENISCH, H. K., to be published, *Phys. Rev. B* **15**.
- [4] MANIFACIER, J. C. and HENISCH, H. K., to be published, *Phys. Rev. B* **17**.
- [5] SCHOCKLEY, W., *Electrons and Holes in Semiconductors* (Van Nostrand Company, New York) 1950.
- [6] VAN ROOSBROECK, W., *Phys. Rev.* **123** (1961) 474.
- [7] VAN ROOSBROECK, W. and CASEY Jr., H. C., *Phys. Rev. B* **5** (1972) 2154.
- [8] LOW, G. G. E., *Proc. Phys. Soc. London* **B 68** (1955) 310.
- [9] POPESCU, C. and HENISCH, H. K., *Phys. Rev. B* **14** (1976) 517.