FONCTIONS DE RÉFLEXION DANS LES TUYAUX SONORES CONIQUES : APPLICATION AUX INSTRUMENTS DE MUSIQUE

J. KERGMARD, J. GILBERT, X. MEYNIAL et J.D. POLACK

*Laboratoire d'Acoustique, CNRS URA 1101, Université du Maine, BP. 535,
F-72017 Le Mans Cedex, France*

Résumé - On discute les avantages et les inconvénients de fonctions de réflexion sphériques pour calculer les oscillations d'un instrument à vent conique. Pour les cônes convergents, on discute la présence d'exponentielles croissantes, sans Transformée de Fourier.

Abstract - The advantages and disadvantages of spherical reflection functions in order to compute the oscillations of conical wind instruments are discussed. Concerning convergent cones, the existence of growing exponentials, without Fourier Transform, is discussed.

1 - INTRODUCTION

Le calcul ab initio d'oscillations des instruments à vent a été effectué pour la première fois il y a dix ans par Schumacher /1/ à propos de la clarinette. La résolution pas à pas de ces équations à partir de conditions initiales suppose la prise en compte à chaque instant de toute la mémoire du système. Outre la rapidité des moyens de calcul, ce qui a permis à Schumacher de mener à bien les calculs numériques a été la découverte d'une méthode permettant de réduire cette mémoire. Plutôt que de considérer la fonction de Green à l'entrée du résonateur, transformée de Fourier inverse de l'impédance d'entrée (rapport de la pression au débit acoustique), Schumacher utilise la "fonction de réflexion" $r(t)$, c'est-à-dire la réponse en pression du résonateur à une onde plane incidente impulsionnelle. Ceci revient à considérer la fonction de Green de l'instrument prolongé en amont par un tube cylindrique infini. Pour un cylindre simple (ouvert ou fermé), $r(t)$ se réduit à un seul pic, dont la forme, liée aux effets visco-thermiques dans le tube, a été calculée et mesurée par J.D. Polack et coll /2/.

Dans leur article de synthèse traitant à la fois les instruments à vent et les instruments à cordes frottées, Mc Intyre et coll. /3/ simplifient le modèle précédent pour en tirer les propriétés essentielles ; Maganza et coll. /4/ en proposent une solution graphique.

Dans notre communication, nous discutons la question de l'extension de cette méthode pour des instruments coniques (hautbois, basson, saxophone), ainsi que les problèmes originaux posés par cette extension, et soulevés par J. Agullo et ses collaborateurs /5,6,7/.

2 - FONCTION DE REFLEXION DANS LES TUYAUX CONIQUES

X. Meynial /6/, suivant une idée de F. Laloe /9/, a montré que l'on pouvait définir une fonction de réflexion sphérique, et non plane, qui permet de réduire à un seul pic la réflexion sur un tronc de cône parfait. On obtient alors une équation qui n'est pas compliquée à résoudre numériquement, mais qui fait intervenir l'intégrale de la pression depuis l'origine des temps. Un autre inconvénient de cette fonction est que si elle semble bien adaptée à un cône pur, elle n'est pas meilleure que la fonction de réflexion plane pour un instrument réel, qui comporte à son entrée, un volume plus large que le début du tronc de cône (par exemple le bec du saxophone), provoquant des réflexions multiples.

Il n'en reste pas moins que cette démarche est conceptuellement intéressante. Elle a été étudiée systématiquement par Agullo et coll [5], qui soulèvent par ailleurs l'existence d'un intéressant problème : supposons que le résonateur soit constitué de deux cônes divergents d'angle différent (fig.1), le second, semi-infini, ayant un angle inférieur à celui du premier.

Fig. 1 - Réflexion à la jonction de deux cônes divergents

On s'intéresse à la fonction de réflexion sphérique dans le cône 1 sur l'entrée du cône 2. Le coefficient de réflexion vaut :

$$R(\omega) = -\alpha(j\omega + \alpha)^{-1} \quad \text{où} \quad \alpha = -\frac{c}{2} \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right) \text{ est négatif} \quad (1)$$

La transformée de Fourier inverse de $R(\omega)$ est une fonction non causale :

$$r(t) = \alpha \varepsilon(-t) e^{-\alpha t} \quad (2)$$

où $\varepsilon(t)$ est la fonction échelon d'Heaviside.

Ceci est l'inconvénient majeur de la fonction de réflexion sphérique dans un cône divergent. L'interprétation est évidemment due au caractère non physiquement réalisable de cette fonction : il n'est pas possible de produire une impulsion incidente car l'onde réfléchie sur la discontinuité (ici le changement de conicité) se réfléchit à nouveau sur le sommet du cône 1, etc ... Evidemment, le problème ne se pose pas pour la fonction de réflexion dans un cylindre ou un cône convergent.

Ce comportement de tuyaux coniques peut en outre poser un autre problème intéressant : l'existence de portions d'exponentielles croissantes dans la fonction de réflexion, ainsi que l'ont découvert, Lee et Ayers [10]. Nous discutons ce problème à partir d'un exemple.

3 - EXPONENTIELLES CROISSANTES DANS LES FONCTIONS DE REFLEXION

Considérons la fonction de réflexion (plane) dans un cylindre sur un tronc de cône de longueur l , débouchant par exemple sur une impédance nulle (fig.2). Le paramètre α défini par l'éq.3 vaut ici : $\alpha = c/2x_2$ (où x_2 est négatif). Le problème serait le même pour la réflexion dans un cône convergent sur un cône convergent d'angle plus grand, le paramètre caractéristique étant le paramètre α , négatif dans ce cas.

Fig. 2 - Fonction de réflexion (plane) dans un cylindre sur l'entrée d'un cône convergent

a) Géométrie b) Résultat théorique

Cette fonction de réflexion comporte un seul pic de Dirac, identifié comme la première réflexion sur l'extrémité du tronc de cône 2, et des exponentielles croissantes : celles-ci peuvent être identifiées comme les réflexions successives aux extrémités du tronc de cône 2, et retransmises dans le cylindre. On imagine bien en effet que le changement de conicité cylindre-tronc de cône est une discontinuité qui provoque une réflexion des ondes. Mais cette réflexion ne peut pas être isolée des réflexions ultérieures en augmentant la longueur l , car le cône 2 est convergent : comme la fonction de réflexion sphérique, elle est fictive, non réalisable physiquement isolément, au contraire de ce qui se passerait si le cône 2 était divergent.

L'identification des exponentielles croissantes avec ce type de réflexion n'est pas immédiate ; on peut montrer que la fonction de réflexion $r(t)$ peut se mettre sous la forme /voir ref.11/ :

$$r(t) = -\delta(t-2l/c) + \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t_n) e^{-\alpha t_n} \varepsilon(t_n) \quad (3)$$

où $t_n = t - 2nl/c$ et $f_n(t_n)$ est un polynôme.

Il est clair que chaque terme de cette série n'a pas de transformée de Fourier. Autrement dit $r(t)$, qui elle a une TF (le coefficient de réflexion $R(\omega)$), est décomposée sous la forme d'une série de fonctions $r_n(t)$ très particulières. Elles ne peuvent être obtenues en développant $R(\omega)$, mais elles peuvent l'être en développant la transformée de Laplace $R(\omega - j\beta)$ de $r(t)$, où $\beta > \alpha$, en une série de fonctions dont on prend alors la transformée de Laplace inverse. Le même développement de $R(\omega)$ donne, lui, quand on prend la T.F. inverse, une série d'exponentielles croissantes non causales, comme celle définie par l'éq.2. Cette série converge bien vers le même résultat (causal !), $r(t)$, comme on peut le vérifier numériquement, mais comporte pour chaque instant positif un nombre infini de termes, dont bien entendu il est exclu de trouver une interprétation physique.

Plusieurs conclusions peuvent être tirées de l'analyse de ce problème :

- la fonction de réflexion peut être calculée indifféremment comme une série (finie) d'exponentielles croissantes causales ou comme une série (infinie) d'exponentielles non causales (croissantes pour $t < 0$, nulles pour $t = 0$) ;
- formellement, nous avons justifié la procédure proposée par Agullo et coll /6/, de décomposition de $R(\omega)$ en une série de fonctions de la fréquence comme celle de l'éq.1, et de faire comme si la transformée de Fourier de ces fonctions était une exponentielle causale croissante obtenue en changeant $\varepsilon(-t)$ en $\varepsilon(t)$.
- la décomposition de l'éq.3 est une décomposition en problèmes fictifs, comme l'était la recherche d'une fonction de réflexion sphérique dans le cas présenté par la figure 1.

REFERENCES

- /1/ Schumacher, R.T., *Acustica* **48** (1981), 71.
- /2/ Polack, J.D., Meynial, X., Kergomard, J., Cosnard, C., Bruneau, M., *Revue Phys. Appl.* **22** (1987), 331.
- /3/ McIntyre, M.E., Schumacher, R.T., Woodhouse, J., *J. Acoust. Soc. Am.* **74**, (1983), 1325.
- /4/ Maganza, C., Caussé, R., Laloe, F., *Europhysics Letters* **1** (1986), 195.
- /5/ Agullo, J., Barjau, A., Martinez, J., *J. Acoust. Soc. Am.* **84** (1988), 1606.
- /6/ Martinez, J., Agullo, J., *J. Acoust. Soc. Am.* **84** (1988), 1613.
- /7/ Martinez, J., Agullo, J., Cardona S., *J. Acoust. Soc. Am.* **84** (1988), 1620.
- /8/ Meynial, X., Thèse de Docteur Ingénieur, Université du Maine, 1987.
- /9/ Laloe, F., Communication privée.
- /10/ Lee, S. and Dean Ayers R., *J. Acoust. Soc. Am.* **80** (1986) S87.
- /11/ Gilbert, J. et al., à paraître dans *J. Acoust. Soc. Am.*, 1990.