THÉORIES LAGRANGIENNES A ZÉRO COMPOSANTE. APPLICATION A L'ÉTUDE DES POLYMÈRES EN SOLUTION (CHAÎNES AVEC VOLUME EXCLU) ET DES PROPRIÉTÉS D'ÉLECTRONS SOUMIS A UN POTENTIEL ALÉATOIRE

J. Des Cloizeaux

▶ **To cite this version:**

J. Des Cloizeaux. THÉORIES LAGRANGIENNES A ZÉRO COMPOSANTE. APPLICATION A L'ÉTUDE DES POLYMÈRES EN SOLUTION (CHAÎNES AVEC VOLUME EXCLU) ET DES PROPRIÉTÉS D'ÉLECTRONS SOUMIS A UN POTENTIEL ALÉATOIRE. Journal de Physique Colloques, 1976, 37 (C1), pp.C1-255-C1-264. 10.1051/jphyscol:1976139 . jpa-00216467

HAL Id: jpa-00216467
https://hal.science/jpa-00216467

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÉORIES LAGRANGIENNES A ZÉRO COMPOSANTE. APPLICATION A L'ÉTUDE DES POLYMÈRES EN SOLUTION (CHAÎNES AVEC VOLUME EXCLU) ET DES PROPRIÉTÉS D'ÉLECTRONS SOUMIS A UN POTENTIEL ALÉATOIRE

J. DES CLOIZEAUX

Service de Physique Théorique, Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay
BP n° 2, 91190 Gif-sur-Yvette, France

Résumé. — La théorie Lagrangienne des champs à n composantes peut être généralisée au cas où n n'est pas un entier positif et en particulier au cas $n = 0$. Cette généralisation repose sur la notion de *fonctions de Green ordonnées* que l'on commence par définir.

On montre ensuite comment la théorie Lagrangienne à zéro composante permet de décrire le comportement d'un polymère isolé ou de solutions de polymères, de masses moléculaires élevées.

On remarque enfin que, moyennant un prolongement analytique sur la constante de couplage, la même théorie devrait permettre d'étudier les propriétés d'électrons soumis à un potentiel aléatoire et peut-être de déterminer les caractéristiques des bords de mobilité.

Abstract. — The Lagrangian theory of a field with n components can be generalized for values of n which are not integers and in particular for $n = 0$. This extension is made by introducing *ordered Green's functions*.

It is shown how the zero components Lagrangian theory can be used to describe the behaviour of an isolated polymer or of a solution of polymers with large molecular masses.

It is remarked that by analytic continuation with respect to the coupling constant, it should be possible to study the properties of electrons in a random potential and perhaps the nature of the mobility edges.

1. **Généralités concernant la théorie Lagrangienne à zéro composante.** — Comme dans le cas usuel, nous commençons par considérer une fonction $\varphi_j(\mathbf{x})$ à n composantes ($j = 1, ..., n$) définie dans un espace à d dimensions. La loi de probabilité associée à cette infinité de variables est donnée par la fonctionnelle

$$\mathcal{P}\{\varphi\} = \exp(-A_0\{\varphi\} - A_I\{\varphi\})$$

$$A_0\{\varphi\} = \frac{1}{2}\sum_j \int d^dx((\nabla\varphi_j(\mathbf{x}))^2 + m_0^2\,\varphi_j^2(\mathbf{x}))$$

$$A_I\{\varphi\} = \frac{1}{8}\sum_{j,l} \int d^dx \int d^dy V(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,\varphi_j^2(\mathbf{x})\,\varphi_l^2(\mathbf{y})\,. \qquad (1.1)$$

Les fonctions de Green :

$$G^{(p)}_{j_1...j_p}(x_1, ..., x_p) = \langle \varphi_{j_1}(x_1), ..., \varphi_{j_p}(x_p) \rangle \qquad (1.2)$$

peuvent être représentées par des diagrammes correspondant aux divers termes du développement de $\mathcal{P}\{\varphi\}$ par rapport à $A_I\{\varphi\}$ (voir Fig. 1) (les moyennes d'ordre impair sont nulles).

A chaque ligne pleine ouverte ou fermée correspond un indice. Les indices relatifs aux lignes pleines fermées peuvent être sommés, ce qui conduit à associer un facteur n à chacune de ces lignes fermées. Par ailleurs, les indices relatifs aux lignes ouvertes n'apparaissent dans l'expression des fonctions de Green que sous forme de symboles de Kronecker.

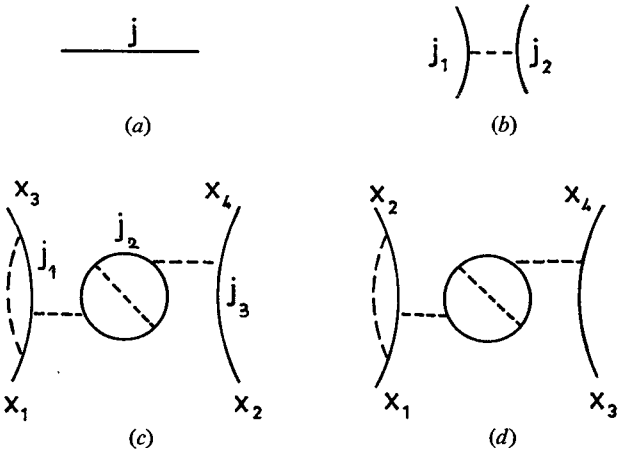


FIG. 1. — *a*) Propagateur du champ libre. *b*) Interaction. *c*) Diagramme contribuant à une fonction de Green d'ordre quatre. A chaque ligne correspond un indice. *d*) Diagrammes contribuant à la fonction de Green ordonnée d'ordre quatre. Les indices de ligne ont disparu. A chaque ligne pleine fermée est associé un facteur n.

Article published online by EDP Sciences and available at http://dx.doi.org/10.1051/jphyscol:1976139

Dans un but de généralisation et de simplification, il est commode d'introduire la notion de fonction de Green ordonnée [1]. La fonction de Green ordonnée d'ordre $2\mathcal{M}$ sera notée $G^{(2\mathcal{M})}(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{2\mathcal{M}})$. Les diagrammes qui contribuent aux fonctions de Green ordonnées sont de même nature que ceux qui représentent les fonctions de Green normales, à cela près que tous les indices j de composante sont effacés. Par définition, la fonction

$$G^{(2\mathcal{M})}(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{2\mathcal{M}})$$

est la somme de toutes les contributions associées aux diagrammes contenant $\mathcal{M}$ lignes ouvertes et un nombre quelconque de lignes fermées et tels que la p-ième ligne ouverte joigne le point $\mathbf{x}_{2p-1}$ au point $\mathbf{x}_{2p}$. Les contributions des diagrammes se calculent comme précédemment et, en particulier, à chaque ligne fermée est associé un facteur n. Par exemple, toute fonction de Green d'ordre quatre peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} G^{(4)}_{j_1 j_2 j_3 j_4}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) = {} & \delta_{j_1 j_2}\delta_{j_3 j_4} G^{(4)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) + \\ & + \delta_{j_1 j_3}\delta_{j_2 j_4} G^{(4)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_4) \\ & + \delta_{j_1 j_4}\delta_{j_2 j_3} G^{(4)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \,. \end{aligned} \quad (1.3)$$

De façon plus générale, nous pouvons remarquer :

1) que toutes les fonctions de Green normales peuvent s'exprimer à l'aide des fonctions de Green ordonnées mais que la réciproque n'est pas vraie ;

2) que dans la définition des fonctions de Green ordonnées, il n'est fait nulle référence aux indices j.

Par suite, ce sont de simples fonctions de n par l'intermédiaire des facteurs n associés aux lignes pleines fermées.

Ainsi, les fonctions de Green ordonnées peuvent être définies en perturbation pour toute valeur de n et en particulier pour $n = 0$. Dans ce dernier cas, les seuls diagrammes à prendre en considération sont ceux qui ne comportent aucune ligne pleine fermée, les contributions des autres étant nulles.

C'est cette dernière propriété qui permet d'appliquer la théorie Lagrangienne à l'étude des polymères et des électrons en mouvement dans des potentiels désordonnés.

La loi de probabilité ci-dessus (éq. (1.1)) décrit un système isolé, mais on peut aussi étudier ce qui se passe quand on applique un champ extérieur H couplé à la première composante du champ. Dans ce cas, il faut ajouter à la somme $A_0\{\varphi\} + A_I\{\varphi\}$ figurant dans $\mathcal{S}\{\varphi\}$, un terme supplémentaire $A_H\{\varphi\}$

$$A_H\{\varphi\} = H \int \mathrm{d}^d x \, \varphi_1(x) \,. \quad (1.4)$$

Les fonctions de Green correspondantes

$${}^H G_{j_1 ... j_p}(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_p)$$

se définissent comme précédemment (éq. (1.2)) et se développent facilement par rapport à H sous forme de séries dont les coefficients sont les anciennes fonctions de Green. On peut encore dans ce cas introduire des fonctions de Green ordonnées qui restent bien définies dans la limite $n = 0$, mais nous nous abstiendrons d'en donner ici une définition précise [1] qui nous emmènerait trop loin.

2. **Polymères.** — 2.1 PROPRIÉTÉS ASYMPTOTIQUES DES LONGUES CHAÎNES. — Le but poursuivi est l'étude des propriétés asymptotiques de longues chaînes dont tous les segments se repoussent. Il est généralement admis qu'à une transformation d'échelle près, ces propriétés sont indépendantes du modèle choisi : c'est le principe d'universalité.

Une image simple d'un polymère dans un bon solvant peut donc être donnée par le modèle suivant :

Sur un réseau carré à d dimensions, on considère toutes les chaînes de N maillons tracées sur le réseau à partir d'une origine 0 et telles qu'elles ne passent pas plus d'une fois au même point (voir Fig. 2). Soit Z_N

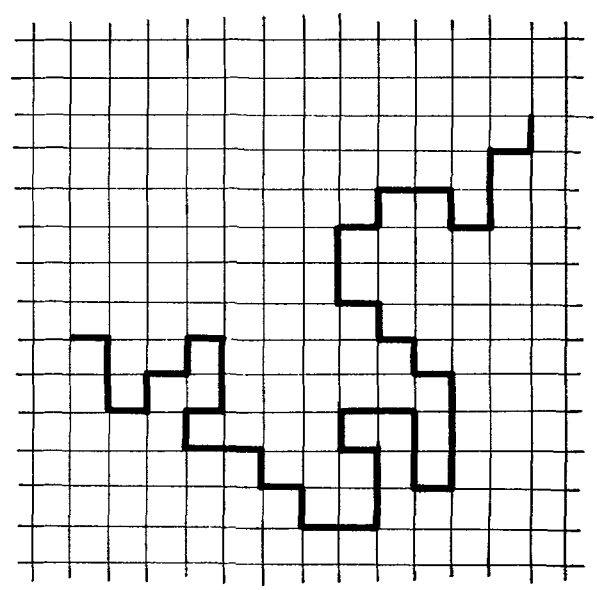


FIG. 2. — Chaîne avec volume exclu tracée sur un réseau.

leur nombre. Considérons aussi toutes les chaînes fermées de même espèce, partant de 0 et aboutissant en 0 ; soit u_N leur nombre. Hammersley [2] a prouvé que

$$\lim_{N\to\infty} (Z_N)^{1/N} = \lim_{N\to\infty} (u_N)^{1/N} = \mu \,. \quad (2.1)$$

Plus précisément, il est généralement admis que pour $N \gg 1$

$$\begin{aligned} Z_N &\simeq N^{\gamma-1}\,\mu^N \\ u_N &\simeq N^{\alpha-2}\,\mu^N \,. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Ce résultat n'a pas été démontré en dépit des efforts de plusieurs mathématiciens [3] mais il est corroboré par toutes les théories existantes [4].

De même, il apparaît que la valeur moyenne du carré

du vecteur $\mathbf{r}_N$ joignant l'origine à l'extrémité de la chaîne, doit, pour $N \gg 1$ être de la forme

$$< (\mathbf{r}_N)^2 > = AN^{2\nu} \qquad (2.3)$$

où $\frac{1}{2} < \nu < 1$ (la valeur $\nu = 1$ correspond à une chaîne toute droite et la valeur $\nu = \frac{1}{2}$ à une chaîne brownienne sans volume exclu).

On peut aussi s'intéresser à la loi de probabilité $P_N(\mathbf{r})$ à laquelle obéit le vecteur $\mathbf{r}_N$. On s'attend à trouver une loi d'échelle de la forme :

$$P_N(\mathbf{r}) = \frac{1}{N^{\nu d}} f(r/N^{\nu}) . \qquad (2.4)$$

Ainsi le nombre de chemins arrivant au point $\mathbf{r}$ est donné par le produit

$$Z_N(\mathbf{r}) = Z_N \, P_N(\mathbf{r})$$

dont la transformée de Fourier s'écrit sous la forme simple

$$\tilde{Z}_N(\mathbf{k}) \propto N^{\gamma-1} \, \mu^N \tilde{f}(kN^{\nu}) \qquad (2.5)$$

(avec $\tilde{f}(0) = 1$).

On pourrait aussi s'intéresser à des portions finies d'une chaîne infinie. Pour $N \to \infty$ et $n \gg 1$, on aurait

$$< (\mathbf{r}_{n+j} - \mathbf{r}_j)^2 > = Bn^{2\nu} . \qquad (2.6)$$

L'indice devrait être le même [5] que dans l'éq. (2.3) mais certainement B diffère de A.

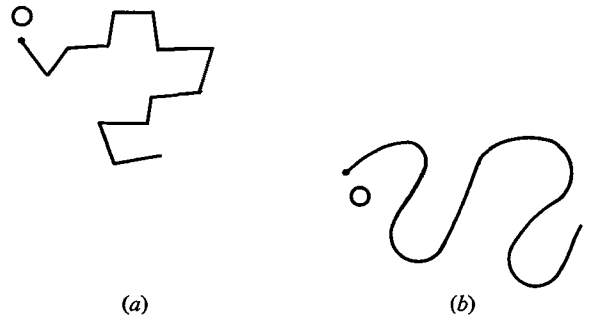
Le modèle peut être généralisé (voir Fig. 3*a*). On peut supposer que la probabilité associée à une configuration d'une chaîne de N points est donnée par une loi de Boltzmann

$$P(r_1, ..., r_N) \propto \exp \{ - \beta(U_0 + U_I) \} \qquad (2.7)$$

où le potentiel U_0 oblige les points à former une chaîne et où U_I représente l'interaction

$$\begin{aligned} \beta U_0 &= \sum_j u(\mathbf{r}_{j+1} - \mathbf{r}_j) \\ \beta U_I &= \sum_{j,l} V(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l) . \end{aligned} \qquad (2.8)$$

Le potentiel $V(\mathbf{r})$ est à courte portée et répulsif, et les points $\mathbf{r}_j$ peuvent occuper tout l'espace.



(*a*) (*b*)

FIG. 3. — *a*) Chaîne formée de points discrets dans l'espace. Tous les maillons n'ont pas nécessairement la même longueur. *b*) Chaîne continue.

Dans ce cas, le nombre de configurations $Z_N(\mathbf{r})$ ne peut plus être défini qu'à une constante multiplicative près : cette constante est infinie mais elle peut être éliminée et la difficulté est inessentielle. On peut même passer à la limite d'une chaîne continue (voir Fig. 3*b*) et ce modèle a été popularisé par S. F. Edwards [5]. Dans ce cas, la position d'un point d'abscisse λ mesurée à partir de l'origine le long de la chaîne, est donnée par la fonction $\mathbf{r}(\lambda)$ et la probabilité est une fonctionnelle de $\mathbf{r}(\lambda)$

$$P \{ \mathbf{r}(\lambda) \} \propto \exp \left\{ - \int_0^L \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\lambda} \right)^2 \mathrm{d}\lambda - \right.$$

$$\left. - \int_0^L \mathrm{d}\lambda' \int_0^L \mathrm{d}\lambda'' \, V(r(\lambda') - r(\lambda'')) \right\} . \qquad (2.9)$$

Les indices γ, ν et α définis ci-dessus (éq. (2.2) et (2.3)) sont naturellement supposés indépendants du modèle, de même que la fonction $f(x)$ (voir éq. (2.4)) et le problème consiste à les calculer. Ensuite, on pourra généraliser le problème en considérant des ensembles de chaînes avec volume exclu.

2.2 CALCULS NUMÉRIQUES. — Les valeurs des indices critiques ne sont pas très faciles à mesurer en général, Aussi est-il souvent préférable de comparer la théorie aux résultats d'expériences machine effectuées sur des réseaux. Les résultats obtenus par l'école anglaise sont les suivants [6] :

pour $d = 2$:

$$\gamma \simeq 4/3 , \quad \alpha \simeq 1/2 , \quad \nu \simeq 3/4$$

pour $d = 3$:

$$\gamma \simeq 5/6 , \quad \alpha \simeq 1/4 , \quad \nu \simeq 3/5 .$$

Aucune signification particulière ne doit être attribuée au fait que les indices soient donnés sous forme de fractions. La précision semble bonne mais peut être illusoire surtout à trois dimensions.

En effet des calculs exacts ne peuvent être effectués que pour des chaînes relativement courtes et l'extrapolation des résultats aux grandes valeurs de N dépend dans une certaine mesure de la forme analytique choisie *a priori* pour les quantités que l'on cherche à représenter. Par ailleurs, la structure du réseau se manifeste par des oscillations qui empêchent d'améliorer la convergence en utilisant des développements du type Padé.

Ces inconvénients disparaissent si l'on utilise de très longues chaînes construites pas à pas, par la méthode dite de Monte Carlo. Malheureusement, dans ce cas toutes les chaînes ne sont pas obtenues avec la même probabilité (voir Fig. 4). Théoriquement, on peut corriger cet effet en attribuant un poids à chaque chaîne. Cependant, une difficulté subsiste car on est conduit à attribuer un poids faible aux chaînes qui apparaissent le plus souvent.

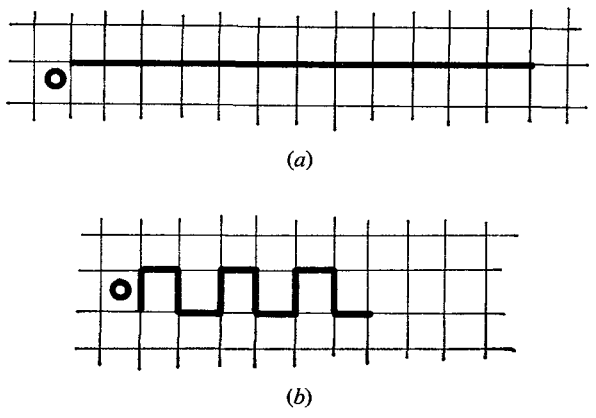


FIG. 4. — Deux chaînes de $2N$ maillons, susceptibles d'être obtenues par la méthode de Monte Carlo. La probabilité de production de la chaîne (*a*) est très inférieure à celle de la chaîne (*b*). Pour corriger la statistique, il faut attribuer respectivement aux chaînes (*a*) et (*b*) les poids $4(3)^{2N-1}$ et $4(3)^{N}(2)^{N-1}$ (sur la figure $N = 12$).

On risque alors de se trouver en face du dilemme suivant :

1) ou bien la chaîne a peu d'occasion de se recouper et les corrections statistiques sont mineures, mais alors il est douteux que la limite asymptotique soit atteinte ;

2) ou bien la chaîne interagit très fortement avec elle-même et la limite asymptotique est atteinte mais alors les corrections statistiques deviennent si importantes que la plupart des chaînes construites ont un poids trop faible pour contribuer réellement au résultat et la statistique devient mauvaise.

Ainsi les résultats de calculs numériques doivent dans tous les cas être interprétés avec précaution.

2.3 THÉORIES ANCIENNES. — Etudiés depuis plus de vingt ans, en particulier par P. Flory [7], les problèmes posés par l'existence du volume exclu ont fait l'objet de nombreuses publications.

Cependant, nous pensons qu'en dépit des apparences et de certains accords quantitatifs, aucune des théories anciennes (antérieures à 1972) n'est *qualitativement* correcte :

Les indices ne dépendent que de la dimension d. Pour $d = 1$, on peut montrer que $\gamma = \nu = 1$ et, pour $d > 4$, il est admis que, pour γ et ν, on obtient les valeurs caractéristiques de la chaîne brownienne à savoir $\gamma = 1$ et $\nu = \frac{1}{2}$. Dans l'intervalle, les théories anciennes prédisent pour, soit la valeur

$$\nu_F = \frac{3}{d+2} \text{ (Flory)} \quad \text{pour} \quad 1 < d < 4 ,$$

résultat en très bon accord avec l'expérience, soit la valeur $\gamma_s = 2/d$ (Stockmaier) trop grande pour être acceptable.

La méthode classique d'approche consiste à définir l'état de la chaîne à l'aide d'un certain nombre de paramètres, comme par exemple le gonflement de la chaîne, puis à calculer l'énergie libre en fonction de ces paramètres et à les déterminer par minimisation de l'énergie libre.

Ainsi un calcul grossier [4] conduit à écrire l'énergie libre en fonction du nombre de maillons, sous la forme

$$F_N = aN + bN^{2\nu-1} + cN^{2-\nu d} . \qquad (2.10)$$

Le premier terme est le terme fondamental et c'est celui qu'il conviendrait de minimiser, les deux autres termes sont des termes correctifs liés à l'existence du volume exclu. Le deuxième terme provient de l'entropie et le troisième de l'énergie.

La méthode de Flory équivaut à minimiser la somme de ces deux derniers termes, ils doivent donc être du même ordre de grandeur, ce qui conduit immédiatement au résultat

$$\nu = \nu_F = \frac{3}{d+2}$$

qui fournit une excellente approximation.

Cependant la méthode est mathématiquement et physiquement incorrecte. Par ailleurs, dans le cas où la chaîne est tracée sur un réseau, l'énergie libre est de nature purement entropique et de l'éq. (2.2), on tire l'égalité

$$F_N = -\ln Z_N = -N \ln \mu - (\gamma - 1) \ln N \qquad (2.11)$$

qui est en contradiction avec l'éq. (2.10).

En fait, l'idée physique de gonflement global de la chaîne introduite par P. Flory se traduit de manière plus correcte au moyen de l'approximation gaussienne (à ne pas confondre avec l'approximation brownienne !) développée par S. F. Edwards [8] et l'auteur [4]. La méthode consiste à approximer la loi de probabilité par l'exponentielle d'une forme quadratique arbitraire que l'on détermine en minimisant l'énergie libre. Dans ce cas, l'énergie libre peut être calculée presque exactement pour une chaîne annulaire et le résultat a la forme indiquée dans l'éq. (2.10). Toutefois, pour des raisons subtiles, la minimisation du terme proportionnel à N, ne conduit pas à la valeur

$$\nu = \frac{3}{d+2}$$

mais à la valeur trop grande $\nu = 2/d$. Par ailleurs, dans l'éq. (2.10), le coefficient b s'annule identiquement et le dernier terme se réduit à une constante, si bien que le résultat devient maintenant compatible avec l'éq. (2.11).

Ainsi les résultats seraient satisfaisants si la théorie ne conduisait pas à un gonflement trop important de la chaîne. Cependant, nous remarquons que la perte d'entropie résultant du gonflement est, dans le cadre de cette approximation, calculée de manière exacte. Il faut donc admettre que l'énergie moyenne due à la répulsion entre chaînes a été surestimée. Or, cette énergie

est liée à la probabilité de contact entre deux éléments de la chaîne, c'est-à-dire grosso modo à la probabilité de retour à l'origine. Ainsi l'énergie d'interaction peut être en gros considérée comme proportionnelle à $f(0)$ (voir éq. (2.4)). Dans l'approximation gaussienne $f(0) \neq 0$ mais l'expérience montre (et la théorie Lagrangienne également) qu'en réalité $f(x)$ s'annule pour $x = 0$ comme une puissance de x. Ce fait qui n'est jamais pris en considération dans les théories anciennes montre pourquoi l'approximation gaussienne conduit à un gonflement trop grand. Quant à la théorie de Flory, elle ne peut conduire à une valeur acceptable que par le jeu d'erreurs qui se compensent.

La méthode du champ self-consistent introduite par S. F. Edwards [9] et développée par plusieurs auteurs conduit également à la valeur

$$\nu = \nu_F = \frac{3}{d+2},$$

mais cette théorie souffre aussi de défauts rédhibitoires [1]. En effet, le potentiel à un corps choisi pour simuler l'interaction décroît comme une puissance à partir de l'origine. Il en résulte que la chaîne a tendance à suivre les lignes de force. Axialement, elle croît comme N^{ν} mais latéralement, elle fluctue comme $N^{1/2}$. Ainsi pour de grandes valeurs de N, la chaîne devient filiforme et une asymétrie choquante s'instaure entre l'origine et l'extrémité. Le calcul montre ainsi qu'il est irréaliste de vouloir approximer les interactions entre segments de chaîne par un potentiel extérieur. Ici encore les interactions sont à la fois sous-estimées et surestimées. Elles sont sous-estimées car le potentiel est calculé en supposant que la chaîne s'étale également dans toutes les directions, ce qui pour ce modèle est grossièrement inexact. Par ailleurs, elles sont surestimées car les corrélations fines existant entre les positions des maillons (liées au fait que $f(0) = 0$) sont ignorées.

Ces quelques exemples illustrent les insuffisances des théories anciennes et montrent qu'il est nécessaire de se former une image plus exacte de la configuration des chaînes. C'est ce but qui peut être atteint (d'une manière encore malaisée et incomplète), à l'aide de la théorie Lagrangienne des champs.

2.4 Représentation Lagrangienne des interactions entre chaînes. — Considérons $\mathcal{M}$ chaînes en interaction, possédant respectivement $N_1, ..., N_{\mathcal{M}}$ maillons. Supposons fixées l'origine $\mathbf{r}_{2M-1}$ et l'extrémité $\mathbf{r}_{2M}$ de la chaîne d'ordre M ($M = 1, ..., \mathcal{M}$) et ceci pour tout M. Soit alors $\mathcal{C}$ l'une des configurations possibles des $\mathcal{M}$ chaînes soumises à ces restrictions.

On peut alors définir les fonctions de partition :

$$Z(N_1, ..., N_{\mathcal{M}}\ ; \mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_{2\mathcal{M}}) = \sum_{\mathcal{C}} \exp\{ -\beta U_0 - \beta U_I \}$$

$$Z(N_1, ..., N_{\mathcal{M}}) = \sum_{\mathbf{r}_j (j \neq 1)} Z(N_1, ..., N_{\mathcal{M}}\ ; \mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_{2\mathcal{M}}). \tag{2.12}$$

Sur un réseau, ces quantités sont bien définies mais lors du passage au continu, elles cessent de l'être et il est alors commode d'introduire les rapports

$$S(N_1, ..., N_{\mathcal{M}}\ ; \mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_{2\mathcal{M}}) = \frac{Z(N_1, ..., N_{\mathcal{M}}\ ; \mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_{2\mathcal{M}})}{Z^0(N_1, ..., N_{\mathcal{M}})} \tag{2.13}$$

(l'indice zéro se réfère à l'absence d'interactions).

Nous pouvons maintenant définir des fonctions de Green ordonnées en posant

$$G^{(2)}(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_{2\mathcal{M}}) = l^{(d+2)-d} \sum_{N} \mathrm{e}^{-m_0^2 l^2 (N_1 + \cdots + N_{\mathcal{M}})} \times$$

$$\times\ S(N_1, ..., N_{\mathcal{M}}\ ; \mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_{2\mathcal{M}}) \tag{2.14}$$

(la longueur arbitraire l est introduite pour des raisons de dimensionalité).

En particulier, ces fonctions de Green ordonnées peuvent être définies dans la limite continue en associant à chaque configuration un poids convenable. Pour une chaîne unique, l'expression de ce poids apparaît au deuxième membre de l'éq. (2.9), et la généralisation au cas où plusieurs chaînes sont présentes et interagissent, est immédiate.

Il est alors possible de développer $G^{(2\mathcal{M})}(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_{2\mathcal{M}})$ en puissances de l'interaction et, en procédant de cette manière, on obtient exactement les mêmes diagrammes et les mêmes règles de calcul qu'en partant de la théorie Lagrangienne et en passant à la limite $n = 0$. (Comme les chaînes ne se recoupent pas, il n'y a pas de lignes pleines fermées, ce qui équivaut à l'égalité $n = 0$.)

Cette identité n'est d'ailleurs pas fortuite et peut se généraliser dans le cas discret (chaîne sur un réseau) comme l'a récemment montré G. Sarma [10] de manière très élégante.

L'analogue peut maintenant être exploitée en remplaçant le potentiel $V(\mathbf{r})$ par $g\delta(\mathbf{r})$ et en utilisant les résultats obtenus en théorie Lagrangienne grâce aux processus de renormalisation [11].

2.5 Polymère isolé. — L'analogie formelle existant entre la théorie statistique d'un polymère isolé et la théorie Lagrangienne sans champ extérieur ($H = 0$) a été établie pour la première fois de manière précise, par P. G. de Gennes [12] en 1972.

Cette découverte a permis des prédictions concernant la valeur des indices critiques. Mais tout d'abord, il a fallu identifier les indices γ et ν qui interviennent dans la théorie des polymères avec les indices correspondants définis pour des matériaux magnétiques.

Considérons la transformée de Fourier de $G^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

$$\tilde{G}^{(2)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}')\, G(k) \tag{2.15}$$

utilisant les éq. (2.13), (2.5) et (2.2), nous pouvons écrire

$$S^{(2)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \frac{\tilde{Z}_N(k)}{Z_N^0}$$

$$= \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}')\, (\mu/\mu_0)^N N^{\gamma - 1} \tilde{f}(kN^{\nu}). \tag{2.16}$$

Utilisant la notation

$$\mu/\mu_0 = e^{m_{0c}^2} \tag{2.17}$$

nous tirons alors des éq. (2.15), (2.16) et (2.14)

$$G(k) = l^2 \sum_N e^{-N(m_0^2 - m_{0c}^2)l^2} N^{\gamma-1} \tilde{f}(kN^\nu) . \tag{2.18}$$

Le comportement de longues chaînes est obtenu pour de petites valeurs de $(m_0^2 - m_{0c}^2)$ (qui joue le rôle de $(T - T_c)$ en théorie du magnétisme). La somme peut être remplacée par une intégrale et nous trouvons

$$G(k) = \frac{l^{2-2\gamma}}{(m_0^2 - m_{0c}^2)^\gamma \, h\left(\dfrac{kl^{1-2\nu}}{(m_0^2 - m_{0c}^2)^\nu}\right)} \tag{2.19}$$

où $h(x)$ s'exprime en fonction de $f(x)$. Cette formule permet alors immédiatement de se rendre compte que la définition des indices γ et ν donnée pour les polymères coïncident avec les définitions usuelles rencontrées en théorie du magnétisme.

Suivant les idées de K. Wilson sur la renormalisation, Brézin, Le Guillou, Zinn-Justin et Nickel [13] ont calculé les valeurs de γ et ν jusqu'au troisième ordre par rapport à $\varepsilon = 4 - d$. Il suffit de poser $n = 0$ dans leurs résultats pour trouver :

$$\gamma = 1 + \frac{\varepsilon}{8} + \frac{13\,\varepsilon^2}{256} + \left(\frac{97}{4\,096} - \frac{33}{256}T\right)\varepsilon^3 + \cdots$$

$$\nu = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\varepsilon}{8} + \frac{15\,\varepsilon^2}{256} + \left(\frac{135}{4\,096} - \frac{33}{256}T\right)\varepsilon^3 + \cdots\right) \tag{2.20}$$

où $T = 0{,}601\,03$.

Ces valeurs doivent être considérées comme asymptotiquement exactes et nous pouvons remarquer que les valeurs de ν obtenues anciennement (à savoir ν_F et ν_S) diffèrent de la vraie valeur dès le premier ordre

$$\nu_F = \frac{3}{d+2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\varepsilon}{6} + \cdots\right)$$

$$\nu_S = \frac{2}{d} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\varepsilon}{4} + \cdots\right) . \tag{2.21}$$

Les valeurs obtenues au deuxième ordre en utilisant les formules asymptotiques ci-dessus sont très acceptables et, en particulier, les valeurs de ν sont très voisines de celles de Flory.

Pour $d = 2$ on trouve :

$$\gamma = 1{,}453 , \qquad \nu = 0{,}742 .$$

Pour $d = 3$ on trouve :

$$\gamma = 1{,}175 , \qquad \nu = 0{,}592 .$$

Malheureusement, comme en théorie du magnétisme, le troisième ordre ne permet pas d'améliorer les résultats, bien au contraire. La série diverge sans doute pour $\varepsilon = 1$ et $\varepsilon = 2$ et peut-être même pour tout ε. D'ailleurs même si la série asymptotique pouvait être complètement resommée, on ne pourrait être assuré *a priori* qu'elle représente exactement [14] la fonction $\nu(\varepsilon)$.

La théorie Lagrangienne fournit également d'autres résultats [15] très intéressants. On vérifie que pour de grandes valeurs de N, la probabilité $P_N(\mathbf{r})$ est donnée par une loi d'échelle

$$P_N(\mathbf{r}) = \frac{1}{N^{\nu d}} f(r/N^\nu) .$$

La fonction $f(x)$ est, à une transformation d'échelle près, une fonction universelle qui ne dépend que de la dimension d. Ses propriétés ont été étudiées pour de petites et de grandes valeurs de x (voir Fig. 5).

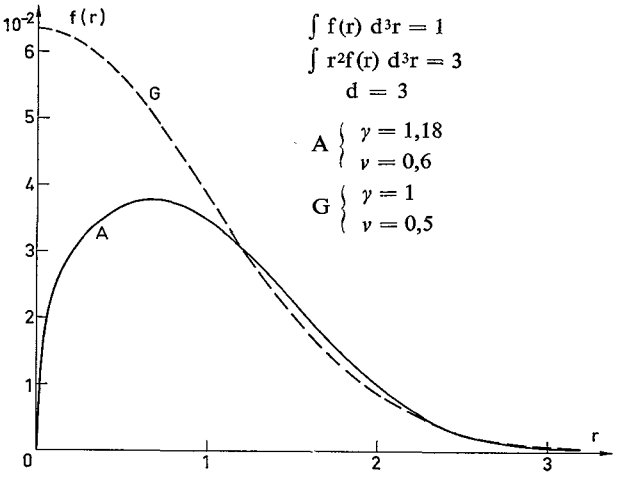


FIG. 5. — La figure représente $f(r)$ de manière approximative et sous une forme normalisée pour la dimension $d = 3$. L'approximation consiste à poser $f(r) = Cr^{(\nu-1)/\gamma} \exp(-Br^{1/(1-\nu)})$; les coefficients C et B sont fixés par les conditions de normalisation et les valeurs γ et ν choisies sont fournies par la théorie et l'expérience. La courbe en pointillés correspond au cas gaussien (ou brownien)

Pour de petites valeurs de x, $f(x)$ se comporte comme une puissance :

$$f(x) \simeq Dx^{(\gamma-1)/\nu} \tag{2.22}$$

et cet intéressant phénomène a été observé expérimentalement [16] (expériences machines) assez récemment, avant d'être expliqué.

L'explication de cet effet est lié au fait que les champs en interaction, peuvent avoir des dimensions anormales et que la dimension anormale du champ φ^2, n'est pas nécessairement le double de celle du champ φ. En fait la théorie donne pour ces dimensions anormales les valeurs suivantes

$$d_{a_2} = d - \frac{1}{\nu}$$

$$2\,d_{a_1} = d - \frac{\gamma}{\nu} \tag{2.23}$$

et la différence

$$d_{a_2} - 2\, d_{a_1} = \frac{\gamma - 1}{\nu} \tag{2.24}$$

est juste l'exposant qui figure dans l'éq. (2.22).

La valeur de α (éq. (2.22)) peut ainsi être déterminée théoriquement. Nous avons vu que

$$Z_N(\mathbf{r}) = \mu^N N^{\gamma-1} P_N(\mathbf{r}) = \mu^N N^{\gamma-1-\nu d} f\left(\frac{r}{N^\nu}\right) . \tag{2.25}$$

En principe, on devrait écrire $U_N = Z_N(0)$. Cependant ceci ne donnerait rien ici puisque $f(0) \simeq 0$, il faut donc poser

$$\begin{aligned} U_N \propto Z_N(1) &= \mu^N N^{\gamma-1-\nu d} f\left(\frac{1}{N^\nu}\right) \\ &\simeq D N^{-\nu d} \mu^N . \end{aligned} \tag{2.26}$$

En comparant ce résultat avec (2.2), nous trouvons $\alpha = 2 - \nu d$ (cette égalité est classique et justifie la définition que nous avons donnée de α à travers l'éq. (2.2)).

Par ailleurs, il y a une dizaine d'années, Fisher [17], en raisonnant directement sur un réseau, a pu montrer que pour de grandes valeurs de x, $f(x)$ doit avoir le comportement suivant

$$f(x) \propto \exp\{ - B x^{1/(1-\nu)} \} . \tag{2.27}$$

Ce résultat a été retrouvé à partir de la théorie Lagrangienne [15] et celle-ci a permis de préciser la forme asymptotique de $f(x)$

$$\begin{aligned} f(x) &\simeq C x^\sigma \exp\{ - B x^{1/(1-\nu)} \} \\ \sigma &= \frac{1 - \gamma + \nu d + d/2}{1 - \nu} . \end{aligned} \tag{2.28}$$

2.6 POLYMÈRES EN SOLUTION. — Les polymères en solution peuvent s'étudier de manière très analogue. Il suffit pour cela de remarquer [1] que de même que la théorie Lagrangienne en champ nul ($H = 0$) à zéro composante décrit un polymère isolé, la théorie Lagrangienne à zéro composante avec champ extérieur ($H \neq 0$) peut être utilisée pour représenter un grand ensemble de polymères.

Cet ensemble est caractérisé par le fait que ni le nombre de polymères ni le nombre de maillons dans chaque polymère ne sont exactement fixés ; ils ne sont déterminés qu'en moyenne grâce à deux potentiels chimiques à savoir H et m_0^2.

A un ensemble de polymères en solution, on peut associer la grande fonction de partition

$$Z(H, m_0^2) = \frac{\int \mathrm{d}\Omega\{\varphi\} \exp(-A_0\{\varphi\} - A_I\{\varphi\} - A_H\{\varphi\})}{\int \mathrm{d}\Omega\{\varphi\} \exp(-A_0\{\varphi\})} . \tag{2.29}$$

$Z(H, m_0^2)$ peut être développé en puissance de H et s'exprime à l'aide des transformées de Fourier des fonctions de Green ordonnées $\tilde{G}^{(2\mathcal{M})}(k_1, \ldots, k_{2\mathcal{M}})$. Moyennant des normalisations convenables $Z(H, m_0^2)$ peut s'écrire sous la forme

$$Z(H, m_0^2) = 1 + \sum_{\mathcal{M}=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\mathcal{M}}\, \mathcal{M}\,!} H^{2\mathcal{M}}\, \tilde{G}^{(2\mathcal{M})}(0, \ldots, 0) . \tag{2.30}$$

Nous pouvons maintenant définir :

$$\Phi(H, m_0^2) = \frac{1}{V} \ln Z(H, m_0^2) \tag{2.31}$$

$\Phi(H, m_0^2)$ se développe de manière simple en puissances de H

$$\Phi(H, m_0^2) = \sum_{\mathcal{M}=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\mathcal{M}}\, \mathcal{M}\,!} H^2\, \tilde{G}_c^{(2\mathcal{M})}(0, \ldots, 0) \tag{2.32}$$

l'indice c indiquant que les coefficients du développement sont des fonctions de Green ordonnées et connexes.

La pression osmotique s'exprime immédiatement en fonction de $\Phi(H, m_0^2)$

$$\frac{P}{KT} = \Phi(H, m_0^2) \tag{2.33}$$

de même que les concentrations C_p et C_m en polymères et monomères (les mailles des chaînes).

$$\begin{aligned} C_p &= \frac{H}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial H}(H, m_0^2) \\ C_m &= - \frac{\partial}{l^2\, \partial m_0^2} \Phi(H, m_0^2) . \end{aligned} \tag{2.34}$$

Le nombre moyen de maillons par polymère est évidemment donné par le rapport $N = C_m/C_p$.

Il suffit maintenant d'utiliser le formalisme de la théorie des champs pour trouver une expression de la pression osmotique en fonction de C_p et N. Les fonctions de Green connexes sont encore des objets complexes, aussi est-il commode d'introduire les fonctions de vertex qui ont une structure plus simple. Une transformation de Legendre permet alors d'exprimer P, C_p et C_m à partir d'une fonction $\Gamma(M, m_0^2)$ dont le développement en M fait directement intervenir les fonctions de vertex (M peut être considéré comme le moment magnétique associé à H et $\Gamma(M, m_0^2)$ comme la fonction génératrice des fonctions de vertex). Afin de trouver le comportement asymptotique de la pression osmotique, nous devons renormaliser les fonctions de vertex. En fin de compte, on montre que la pression osmotique obéit à une loi d'échelle :

$$\frac{P}{KTC_p} = F(C_p N^{\nu d}) \tag{2.35}$$

résultat qui n'avait pas été antérieurement prévu [1-5].

La fonction $F(\lambda)$ peut se développer en fonction de λ

$$F(\lambda) = 1 + F_1 \lambda + F_2 \lambda^2 + \cdots \qquad (2.36)$$

et les coefficients F_1 et F_2 ont été approximativement calculés [1] ($F_2/F_1^2 \simeq 0{,}362$ pour d = 3).

Pour de grandes valeurs de λ, on s'attend à un comportement du type

$$F(\lambda) \simeq F\lambda^{1/(\nu d-1)} \qquad (2.37)$$

ce qui donne

$$\frac{P}{KT} \simeq F C_{\mathrm{m}}^{\nu d/(\nu d-1)} . \qquad (2.38)$$

Dans tous les cas, la concentration C_{m} en monomères est supposée petite. Le paramètre

$$\lambda = C_{\mathrm{p}} N^{\nu d} = C_{\mathrm{m}} N^{\nu d-1}$$

représente la portion d'espace qui serait occupée par les polymères s'ils ne se recouvraient pas. Les petites valeurs de λ ($\lambda \ll 1$) correspondent à des solutions suffisamment diluées pour que les chaînes restent presque isolées. Au contraire, pour de fortes valeurs de λ, les polymères se recouvrent largement. Dans ce cas, comme nous l'avons indiqué, la pression osmotique ne doit dépendre que de la concentration en monomères et le comportement des chaînes doit être brownien.

Pour des chaînes très longues à des températures peu supérieures à la température Θ de Flory, on peut définir sur la chaîne trois échelles. Considérons une portion de chaîne, formée de n maillons. Pour $n \ll n_0$, la chaîne possède un comportement brownien, l'effet du volume exclu est peu sensible et l'effet des autres chaînes est négligeable. La distance entre extrémités du segment varie comme $n^{1/2}$. Pour $n_0 \ll n \ll n_1$, l'effet de volume exclu domine et le recouvrement entre chaînes est encore trop faible pour modifier le comportement d'un segment de chaîne. La distance entre extrémités du segment varie comme n^{ν}. Pour $n \gg n_1$, la chaîne redevient brownienne, on doit alors considérer que la chaîne est formée de quasi-maillons indépendants de longueur $(n_1)^{\nu}$ et la distance entre extrémités du segment redevient proportionnelle à n. Ainsi la valeur moyenne du carré de la distance entre extrémités de la chaîne, peut s'écrire

$$< r_N^2 > \simeq A(n_1)^{2\nu} \left(\frac{N}{n_1}\right) . \qquad (2.39)$$

Il reste à évaluer n_1. Il paraît logique d'admettre l'égalité

$$C_{\mathrm{m}}(n_1)^{\nu d-1} = 1 \qquad (2.40)$$

(et non pas, par exemple, $C_{\mathrm{p}}(n_1)^{\nu d} = 1$) mais cette conjecture n'a pas encore été rigoureusement démontrée. On obtient ainsi :

$$< r_N^2 > = A C_{\mathrm{m}}^{-(2\nu-1)/(\nu d-1)} N$$

formule qui traduit à la fois le caractère brownien des chaînes et le gonflement résultant des effets de volume exclu.

L'interprétation de la théorie a fait récemment l'objet d'une large discussion [10] et il semble qu'elle permette une bonne compréhension des résultats expérimentaux. Cependant, il reste à étudier théoriquement les corrélations existant entre extrémités d'un même polymère ou de deux polymères différents.

3. Electrons en mouvement dans un potentiel aléatoire. — 3.1 GÉNÉRALITÉS. — Dans un article célèbre paru il y a plus de quinze ans, P. W. Anderson [18] a montré que dans un potentiel aléatoire, les électrons pouvaient être localement piégés et que les niveaux correspondants ne devaient pas être conducteurs. Le Hamiltonien de ce modèle s'écrit :

$$\mathcal{H} = \sum_p \varepsilon_p C_p^+ C_p + \sum_{pq} T(p-q) C_q^+ C_p \qquad (3.1)$$

où les p représentent des sites sur un réseau. $T(p-q)$ est une fonction bien définie et les ε_p sont des variables aléatoires indépendantes obéissant à une loi de probabilité $P(\varepsilon)$.

Depuis l'idée a été reprise en particulier par Mott [19] qui a insisté sur le fait que de part et d'autre de la bande d'énergie associée à l'Hamiltonien doivent exister des bords de mobilité (voir Fig. 6). Par suite, la question a suscité de nombreux travaux (dont Thouless [20] a donné récemment une revue critique) et même un essai de solution exacte [21]. Cependant, en dépit de ces efforts, les comportements de la densité de niveaux, de la polarisabilité des niveaux localisés et de la conductivité des états étendus, au voisinage du bord de mobilité, restent obscurs.

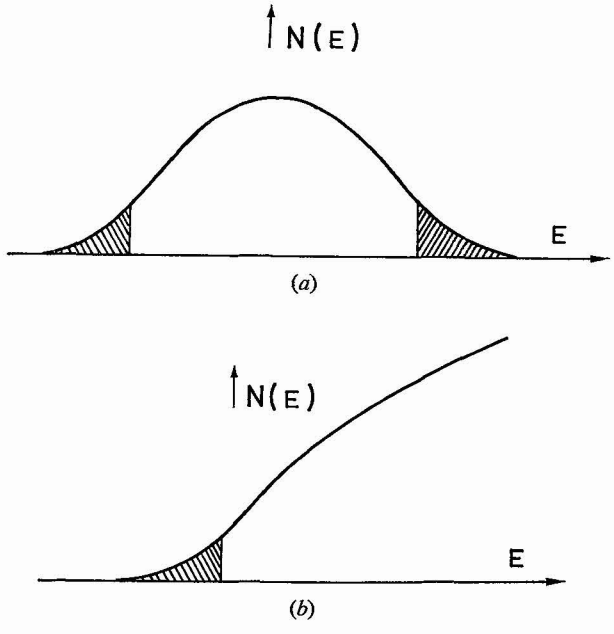


FIG. 6. — Bords de mobilité : *a*) Modèle de bande d'Anderson. *b*) Electron libre dans un potentiel aléatoire. Les états non conducteurs correspondent aux zones hachurées.

On a affaire à une véritable transition de phase et plusieurs modèles sont possibles. Il nous semble que l'approche la plus simple consiste à étudier le mouvement d'un électron dans un potentiel aléatoire Gaussien ainsi que l'a suggéré Edwards [22]. Nous allons maintenant expliquer pourquoi, mais auparavant notons que cette hypothèse a l'avantage d'être assez réaliste puisque tout potentiel de la forme :

$$U(\mathbf{r}) = \sum_j W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \tag{3.2}$$

(où les $\mathbf{r}_j$ représentent les positions de centres d'impuretés) peut être approximé par un potentiel Gaussien dans la limite où les centres sont nombreux et le potentiel $W(\mathbf{x})$ faible.

3.2 MOUVEMENT D'UN ÉLECTRON DANS UN POTENTIEL ALÉATOIRE GAUSSIEN ET THÉORIE LAGRANGIENNE. — Soit l'Hamiltonien à un corps

$$\mathcal{H} = - \Delta + U(\mathbf{r}) \tag{3.3}$$

où $U(x)$ est un potentiel aléatoire dans un espace à d dimensions (avec $< U(x) > = 0$). A une réalisation de ce potentiel nous pouvons associer la fonction de Green

$$\mathcal{G}(x, y) = \left\langle \mathbf{x} \left| \frac{1}{\mathcal{H} - E} \right| \mathbf{y} \right\rangle . \tag{3.4}$$

Les propriétés globales du système seront déterminées par les *fonctions de Green ordonnées* qui seront ici définies comme valeurs moyennes de produits de fonctions $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

$$G(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_{2\mathcal{M}-1}, \mathbf{x}_{2\mathcal{M}}) = \\ = < \mathcal{G}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \ldots, \mathcal{G}(\mathbf{x}_{2\mathcal{M}-1}, \mathbf{x}_{2\mathcal{M}}) > \tag{3.5}$$

On peut développer chaque fonction $\mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ par rapport à U ($\mathcal{H}_0 = - \Delta$)

$$\frac{1}{\mathcal{H} - E} = \frac{1}{\mathcal{H}_0 - E} + \frac{1}{\mathcal{H}_0 - E} U \frac{1}{\mathcal{H}_0 - E} + \cdots . \tag{3.6}$$

On effectue les produits des divers termes entre eux et il ne reste plus qu'à calculer les valeurs moyennes de produits de la forme $< U(\mathbf{x}_1), \ldots, U(\mathbf{x}_N) >$.

Le développement prend une forme particulièrement simple lorsque l'ensemble des variables constituant $U(\mathbf{x})$ est Gaussien, car alors le produit s'exprime à l'aide du théorème de Wick en fonction de la valeur moyenne

$$< U(x)\, U(y) > = g_0\, V(x - y) \tag{3.7}$$

où g_0 est un coefficient arbitraire positif qui mesure la force du potentiel et $V(x - y)$ est une fonction supposée à courte portée et essentiellement positive.

Nous remarquons alors que la transformée de Fourier de $G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ s'écrit :

$$G_0(k) = \frac{1}{k^2 - E} . \tag{3.8}$$

Par ailleurs, nous voyons immédiatement que les diagrammes représentant les fonctions de Green ordonnées coïncident exactement avec les diagrammes relatifs à la théorie Lagrangienne (voir Fig. 7) à zéro composante. Les contributions associées coïncideraient si l'on posait :

$$E = - m_0^2 , \qquad g_0 = - 1 \tag{3.9}$$

ce qui est impossible car g_0 doit être positif.

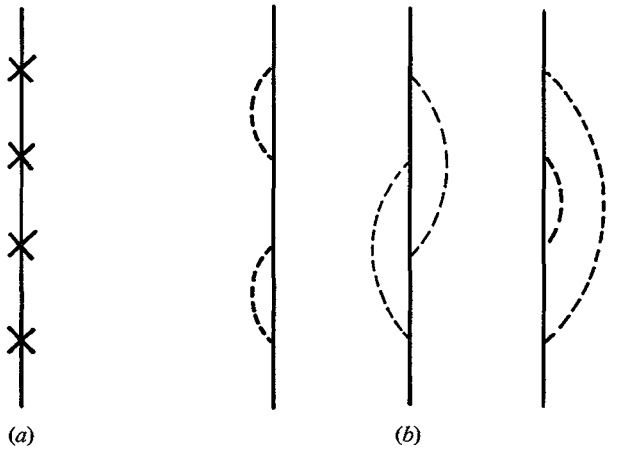


FIG. 7. — *a*) Représentation diagrammatique d'un terme de $\mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. *b*) Représentation diagrammatique des termes correspondant de $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ pour un potentiel Gaussien.

L'interaction correspondant à notre modèle n'est donc pas répulsive mais *attractive* ainsi que l'ont remarqué Abram et Edwards [22]. Il est alors clair que la loi de probabilité $\mathcal{F}\{\varphi\}$ associée n'a plus aucun sens. Ce fait n'est pas surprenant. Nous savons que dans le plan complexe des E, la fonction $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ doit avoir une coupure tout le long de l'axe réel. Il faut donc définir deux fonctions $G^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, l'une pour $\operatorname{Im} E > 0$ l'autre pour $\operatorname{Im} E < 0$. Nous sommes ainsi conduits à transformer le modèle Lagrangien en redéfinissant la fonction $\varphi(\mathbf{x})$ afin de donner un sens à la loi de probabilité. Supposons $\operatorname{Im} E > 0$. Nous poserons

$$\varphi(\mathbf{x}) = \mathrm{e}^{i\pi/4}\, \psi(\mathbf{x}) . \tag{3.10}$$

Les fonctions de Green s'exprimeront alors en fonction des ψ, par exemple

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = i < \psi(x)\, \psi(y) > \tag{3.11}$$

et $\{\varphi\}$ est remplacé par $\hat{\mathcal{F}}\{\psi\} \propto \mathcal{F}\{\varphi\}$

$$\hat{\mathcal{F}}\{\psi\} \propto \exp(- A_0\{\psi\} - g_0 \hat{A}_I\{\psi\})$$

$$\hat{A}_0\{\psi\} = \frac{i}{2} \sum_j \int \mathrm{d}^d x ((\nabla \psi_j(\mathbf{x}))^2 - E \psi_j^2(\mathbf{x}))$$

$$\hat{A}_I\{\psi\} = \frac{1}{8} \int \mathrm{d}^d x \int \mathrm{d}^d y V(\mathbf{x} - \mathbf{y})\, \varphi_j^2(\mathbf{x})\, \varphi_l^2(\mathbf{y}) \tag{3.12}$$

(avec la condition $x = 0$).

Ce changement de variable rend l'interaction répulsive mais autrement rien n'est changé et les développements restent invariants dans la transformation.

Maintenant, il faut examiner les rapports qui existent entre cette nouvelle théorie Lagrangienne et la théorie initiale définie par

$$\mathcal{F}\{\varphi\} = \exp(-A_0\{\varphi\} - gA_1\{\varphi\}) \quad (3.13)$$

avec $g > 0$. Tout d'abord posons $E = -m_0^2$ puis effectuons sur le prolongement analytique défini par la transformation

$$g = e^{-i\alpha} g_0\,, \quad \varphi = e^{i\alpha/4}\psi\,, \mathcal{F}\{\varphi\} \propto \mathcal{F}_\alpha\{\psi\}\,. \quad (3.14)$$

L'interaction reste répulsive au cours de la transformation et par conséquent, on s'attend à ce que $\mathcal{F}_\alpha\{\psi\}$ garde un sens pour tout α. En particulier, nous aurons

$$\mathcal{F}_\pi\{\varphi\} = \mathcal{F}\{\psi\}\,. \quad (3.15)$$

Ainsi, la théorie des électrons dans un potentiel aléatoire Gaussien peut être obtenue à partir de la théorie Lagrangienne usuelle à zéro composante, par prolongement analytique par rapport à la constante de couplage.

Cette remarque peut permettre d'approcher le problème du mouvement des électrons dans des potentiels désordonnés de manière tout à fait nouvelle. Trop récente, cette méthode n'a pas encore été exploitée mais dans un proche avenir, on peut s'attendre à des développements intéressants dans cette direction en particulier en ce qui concerne les comportements au voisinage des bords de mobilité.

4. **Conclusion.** — En résumé, la théorie Lagrangienne à zéro composante se révèle un outil intéressant pour l'étude des polymères en solutions, diluées ou non, et pour l'étude des électrons soumis à des potentiels désordonnés.

La théorie des polymères est assez développée et d'assez nombreux résultats ont été obtenus mais il reste encore beaucoup à faire.

La théorie des électrons dans des potentiels désordonnés est encore peu avancée mais des progrès importants semblent possibles à court terme.

Quant aux questions de dynamique critique, elles n'ont pas encore été abordées de manière satisfaisante dans le cadre des théories précitées.

Bibliographie

[1] Des Cloizeaux, J., *J. Physique* **36** (1975) 281.

[2] Hammersley, J. M., *Q. J. Math.* (Oxford) (2) **12** (1961) 250 ; *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **53** (1957) 642 ; *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **57** (1961) 516.

[3] Hammersley, J. M., *Q. J. Math.* (Oxford) **12** (1961) 250 ; *Sankhya : The Indian Journal of Statistics A* **25** (1963) 29, 269.
Kesten, H., *J. Math. Phys.* **4** (1963) 960 and **5** (1964) 1118 ;
Kasteleyn, P. W., *Physica* **29** (1963) 1329.

[4] Des Cloizeaux, J., *J. Physique* **31** (1970) 715.

[5] Edwards, S. F., *Proc. Phys. Soc.* **88** (1966) 265.

[6] Martin, J. L., Sykes, M. F., Hioe, F. T., *J. Chem. Phys.* **46** (1967) 3478 ;
Sykes, M. F., Guttman, A. J., Watts, M. G. and Roberts, P. D., *J. Phys. A* **5** (1972) 653 ;
Sykes, M. F., McKenzie, D. S., Watts, M. G. and Martin, J. L., *J. Phys. A* **5** (1972) 661 ;
Fisher, M. E. and Sykes, M. F., *Phys. Rev.* **114** (1959) 45.

[7] Flory, P. J., *Principles of Polymer Chemistry* (Cornell University Press) 1969.

[8] Edwards, S. F. (1968, unpublished).

[9] Edwards, S. F., *Proc. Phys. Soc.* **85** (1965) 613.

[10] Daoud, M., Cotton, J. P., Farnoux, B., Jannink, G., Sarma, G., Benoit, H., Duplessix, C., Picot, C. et de Gennes, P. G., Preprint DPh-G/PSRM/CEN-Saclay.

[11] Wilson, K. G. and Kogut, J., *Phys. Rep.* **12C** (1974) 2 ;
Brezin, E., Le Guillou, J. C. and Zinn-Justin, J., *Phys. Rev.* **D8** (1973) 434.
Zinn-Justin, J., Cours à l'Ecole d'Eté de Cargèse (1973).

[12] De Gennes, P. G., *Phys. Lett.* **38A** (1972) 339.

[13] Brezin, E., Le Guillou, J. C., Zinn-Justin, J. and Nickel, B. G., *Phys. Lett.* **44A** (1973) 227.

[14] Ainsi le développement de McLaurin de $\exp(-1/x^2)$ autour de la valeur $x = 0$, est identiquement nul et ne représente en aucune façon la fonction considérée.

[15] Des Cloizeaux, J., *Phys. Rev. A* **10** (1974) 1665.

[16] Renardy, J. F., Saclay preprint DPh-T/71 (non publié) ; McKenzie, D. S., *J. Phys. A* **6** (1973) 338.

[17] Fisher, M. E., *J. Chem. Phys.* **44** (1966) 616.

[18] Anderson, P. W., *Phys. Rev.* **109** (1958) 1492.

[19] Mott, N. and Davis, E. A., *Electronic Processes in Non-Crystalline Materials* (Clarendon Press, Oxford) 1971.

[20] Thouless, D. J., *Phys. Rep.* **13C**, n° 3 (1974).

[21] Lloyd, P., *J. Phys. C* **2** (1969) 1717.

[22] Abram, R. A. and Edwards, S. F., *J. Phys. C* **5** (1972) 1183, 1196.