



HAL
open science

INTRODUCTION AUX DÉVELOPPEMENTS RÉCENTS DE LA THÉORIE EINSTEINIENNE DE LA GRAVITATION

H. Andrillat

► **To cite this version:**

H. Andrillat. INTRODUCTION AUX DÉVELOPPEMENTS RÉCENTS DE LA THÉORIE EINSTEINIENNE DE LA GRAVITATION. Journal de Physique Colloques, 1973, 34 (C7), pp.C7-5-C7-17. 10.1051/jphyscol:1973702 . jpa-00215348

HAL Id: jpa-00215348

<https://hal.science/jpa-00215348>

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INTRODUCTION AUX DÉVELOPPEMENTS RÉCENTS DE LA THÉORIE EINSTEINIENNE DE LA GRAVITATION

H. ANDRILLAT, 34060 Montpellier Cedex.

Laboratoire d'Astronomie, Université des Sciences et Techniques du Languedoc

Résumé. — L'application du principe d'équivalence à l'espace-temps de Schwarzschild conduit à deux familles de mouvements : la première est celle des mouvements orbitaux ; elle comporte, en première approximation, le mouvement orbital Keplerien mais prévoit en outre les avances périhéliques des orbites et la déviation des rayons lumineux au voisinage des masses. La seconde, celle des mouvements radiaux, conduit à la théorie récente des pièges noirs. La surface de Schwarzschild y apparaît à la fois comme membrane unidirectionnelle et comme un horizon des observables. Les coordonnées de Schwarzschild se prêtent mal à l'étude physique de l'intérieur du piège noir. C'est ainsi que l'étude d'un piège noir caractérisé par sa seule masse doit, pour être complète, être décrite en coordonnées de Kruskal, qui assurent l'extension analytique de la métrique. Cette méthode d'extension analytique maximale s'applique alors au piège noir le plus général, caractérisé par une masse, une charge et une rotation. Les diagrammes de Penrose-Carter illustrent cette méthode. Ils détaillent la topologie générale de l'espace-temps et débouchent sur d'importantes perspectives inhérentes à la physique interne des pièges noirs : l'existence de lignes d'univers acausales, l'existence de champs répulsifs et l'existence de singularités nues qui posent le problème du devenir de la matière lorsque la singularité est atteinte.

Abstract. — The Schwarzschild solution represents the spherically symmetric empty space outside a spherical massive body. Its geodesic lines describe two kinds of motions : the orbital motion with the well-known advance of the perihelion and the predicted deflection of light, and the radial motion related to the theory of the black holes. From the Schwarzschild metric, it is easy to show that the Schwarzschild surface is an horizon. But the other properties of the black holes are better studied in using a maximal analytic Schwarzschild extension, as described, for instance, by Kruskal coordinates. In the most general case of a black hole with mass, charge and rotation, the Penrose-Carter diagrams of the maximally extended metric show an infinite number of topologic regions. This topology raises intriguing possibilities : causality violation, regions with negative values of r and singularities without horizon.

1. Introduction. — Pour décrire les propriétés de la gravitation, la théorie de la relativité générale utilise un langage mathématique basé sur la notion d'espace-temps. Cette notion a l'avantage d'introduire une géométrisation de celle de mouvement. En effet, si un espace-temps est défini à partir d'une variété à quatre dimensions x, y, z, t où x, y, z sont trois variables à caractère spatial et t une variable à caractère temporel, toute courbe de l'espace-temps pourra être représentée par trois équations de la forme

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

qui ne sont autres que les équations d'un certain mouvement du point P de coordonnées x, y, z en fonction du temps t .

L'espace-temps est caractérisé par sa *métrique*, c'est-à-dire par le carré, ds^2 , de la distance entre deux de ses points. Par exemple, la métrique de Minkowski ou métrique de la relativité restreinte s'écrit en coordonnées cartésiennes :

$$ds^2 = - dx^2 - dy^2 - dz^2 + dt^2$$

ou en coordonnées sphériques :

$$ds^2 = - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + dt^2.$$

Elle définit un espace-temps sans courbure où les géodésiques sont des droites.

2. Le principe d'équivalence. — Ces courbes particulières que sont les géodésiques décrivent donc, puisque leurs équations sont linéaires en t , la famille des mouvements rectilignes et uniformes, c'est-à-dire la famille des mouvements des points libres. En effet, d'après le principe d'inertie de Galilée, tout point libre (non soumis à l'action d'une force) est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme dans un référentiel inertiel.

De plus, il existe des courbes de longueur nulle, puisque, par le jeu des signes des coefficients de la métrique, on peut avoir $ds = 0$. De telles courbes sont évidemment de longueur minimale ; ce sont donc des géodésiques particulières, constituant un sous-ensemble de la famille précédente. Elles décrivent les mouvements de points libres particuliers, les points

de vitesse égale à 1, puisque $ds = 0$ implique $v^2 = 1$. Si l'on convient alors de prendre égale à 1 la vitesse de la lumière dans le vide, les géodésiques de longueur nulle décriront le mouvement des photons.

On érige en principe ces deux propriétés fondamentales de la métrique de Minkowski. C'est le *principe d'équivalence* : dans tout espace-temps retenu pour décrire les propriétés de l'espace physique réel, les géodésiques décriront les mouvements du point libre et celles de longueur nulle le mouvement des photons.

Dès lors, l'explication relativiste de la gravitation se distingue nettement de celle de Newton. Par exemple, dans le cas du mouvement orbital d'une planète autour du soleil, dans la théorie de Newton, c'est la force d'attraction du soleil qui à chaque instant dévie la planète de sa trajectoire inertielle qu'elle poursuivrait en ligne droite dans la direction de sa vitesse, si le soleil disparaissait. En relativité générale, la planète est considérée comme un point libre, soumis à l'action d'aucune force. La présence de la masse solaire introduit seulement une courbure à la géométrie de l'espace-temps. Les géodésiques ne sont plus des droites. Elles définissent, pour la planète, un mouvement sur orbite courbe et fermée.

3. **La métrique de Schwarzschild.** — Les propriétés de l'espace vide autour de la masse M sont décrites par l'espace-temps de Schwarzschild, dont la métrique s'écrit en coordonnées sphériques à cause de l'évidente symétrie sphérique du problème :

$$ds^2 = \frac{-dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2$$

avec $m = GM/c^2$ $G = 6,67 \times 10^{-8}$ C. G. S. (coefficient de la gravitation),
 $c = 3 \times 10^{10}$ C. G. S. (vitesse de la lumière).

Lorsqu'on écrit les équations des géodésiques de cet espace-temps, on constate qu'on peut les diviser en deux familles, celle des mouvements orbitaux du point libre et celle de ses mouvements radiaux.

4. **Le mouvement orbital.** — La première famille de mouvements résulte d'une solution $\theta = \pi/2$ des équations des géodésiques. Cette solution montre que le mouvement orbital est alors plan (plan équatorial du système de coordonnées). L'intégration ultérieure des équations des géodésiques où l'on a fait $\theta = \pi/2$ conduit alors aux solutions

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = C$$

et

$$\frac{1}{r} = \frac{m}{C^2} \left[1 + e \cos \left(\varphi - \varphi_0 - \frac{3m^2}{C^2} \varphi \right) \right]$$

qui traduisent la loi des aires pour un mouvement orbital sur orbite keplerienne avec avance périhélique.

Par ailleurs, le mouvement des photons n'est plus rectiligne, puisque les géodésiques de longueur nulle ($ds = 0$) qui le décrivent sont des géodésiques d'un espace courbe. La trajectoire des photons présente donc une déviation au voisinage de la masse M et ce n'est que très loin de cette masse que le rayon lumineux peut à nouveau être considéré comme rectiligne (pour r infini, la métrique de Schwarzschild se confondant avec celle de Minkowski).

Est-il besoin de rappeler les vérifications de ces résultats par les observations (explication du résidu inexpliqué de l'avance périhélique de Mercure et observation de la déviation des rayons lumineux près du bord solaire lors des éclipses totales) ? Elles assurèrent un véritable triomphe à la théorie de la relativité générale. Mais ces questions sont aujourd'hui trop connues pour qu'on s'y attarde davantage. Par contre, le problème radial, décrit par la seconde famille des géodésiques, a fait récemment l'objet de développements importants.

5. **Le problème radial. Existence des trous noirs.** — Les solutions $\theta = \text{Cte}$ et $\varphi = \text{Cte}$ des équations des géodésiques conduisent à la description d'un mouvement radial ($r = f(t)$) qui n'est autre que la chute libre du point matériel sur la masse M .

Mais physiquement, ce problème radial ne peut pas être dissocié de l'effet Einstein de décalage spectral d'origine gravitationnelle. On rappelle que ce décalage spectral, z , observé sur le rayonnement d'un atome situé à la distance radiale r de la masse M est donné par

$$1 + z = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}}$$

Ce décalage spectral vers le rouge est dû à la seule présence de la masse M . Il devient infini quand r tend vers la valeur $2m$. Cette circonstance peut se réaliser à la surface d'un astre en écroulement gravitationnel. L'astre disparaît alors à la vue de l'observateur extérieur. C'est l'*implosion* de l'astre, le phénomène de *trou noir*. Dans l'espace de Riemann décrit par la métrique, la surface $r = 2m$ est celle d'une sphère, appelée sphère de Schwarzschild. Elle apparaît comme un horizon des observables qui élude le problème du devenir de la matière en $r = 0$, à la limite ultime de l'écroulement gravitationnel de l'astre. Ce problème restait par contre posé dans la théorie de Newton, où entre deux points matériels qui s'attirent, rien n'interdit le contact en $r = 0$, avec d'ailleurs une vitesse infinie.

6. **Les courbes d'univers de l'espace radial.** — Dans l'espace-temps de Minkowski, tout mouvement radial se traduit par une courbe dans le plan r, t .

C'est la courbe d'univers de la particule. En particulier, les géodésiques radiales sont les droites du plan, cependant que les géodésiques de longueur nulle sont les droites parallèles aux bissectrices des axes, car $ds = 0$ entraîne que dr/dt soit égal à ± 1 . Ce sont les courbes du genre nul ou du genre lumière, car ces géodésiques décrivent le mouvement des photons. Le mouvement d'une particule matérielle (dont la vitesse est inférieure à la vitesse de la lumière) correspond à une courbe le long de laquelle dr^2 est toujours inférieur à dt^2 . Son ds^2 est donc positif. On dit que c'est une courbe du genre temps, par analogie avec le terme temporel qui est positif dans l'expression de la métrique. Au contraire, la courbe d'univers d'un tachyon dont la vitesse serait supérieure à celle de la lumière correspond à un ds^2 négatif (ds imaginaire). Elle est dite du genre espace, les termes spatiaux de la métrique étant négatifs. Une courbe typique du genre temps est une courbe $r = \text{Cte}$; une courbe typique du genre espace est une courbe $t = \text{Cte}$.

7. Changement de la variable directrice à l'intérieur du trou noir. — En portant attention à l'expression de la métrique de Schwarzschild réduite à ses termes représentant seulement l'espace-temps radial, on remarquera que, pour $r < 2m$, le terme en dr^2 $\left(-dr^2/\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\right)$ devient positif, donc du genre temps, cependant que le terme en dt^2 $\left(dt^2\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\right)$ devient du genre espace.

A l'extérieur du trou noir, c'est le temps t qui joue le rôle de variable directrice. Quelle que soit l'énergie dont on dispose, on ne peut faire revenir un système matériel à ses états antérieurs ou stopper son évolution temporelle. Le temps s'écoule inéluctablement du passé au futur.

A l'intérieur du trou noir, c'est au contraire la variable r qui devient variable directrice et tend inéluctablement vers zéro. Quelle que soit l'énergie dont on dispose, on ne peut faire alors qu'une particule matérielle reste en un point $r = \text{Cte}$ ou s'éloigne de la singularité $r = 0$. L'écroulement de la matière sur elle-même n'est plus un mouvement de celle-ci dans un espace statique comme à l'extérieur de la surface de Schwarzschild, c'est l'écroulement de toute la géométrie jusqu'en $r = 0$, entraînant avec elle toute la matière qu'elle peut contenir. Ce caractère *dynamique* de la géométrie du trou noir est une notion importante. Le trou noir pourrait être ainsi un véritable univers pulsant entre la valeur $r = 0$ et la valeur $r = 2m$ de la variable radiale.

8. Aspects mathématiques de la discontinuité de Schwarzschild. — On parle souvent improprement de la singularité de Schwarzschild en $r = r_0 = 2m$. Au sens de la géométrie de Riemann, le terme singularité a une signification précise : le déterminant

des coefficients de la métrique s'y annule et la courbure n'y est plus continue.

Ici les coefficients de la métrique constituent une matrice carrée dont seuls les éléments diagonaux ne sont pas nuls. Le déterminant est donc simplement le produit de ces termes, soit :

$$g = - \frac{1}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} \cdot r^2 \cdot r^2 \sin^2 \theta \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \\ = - r^4 \sin^2 \theta .$$

Il ne s'annule pas pour $r = 2m$. L'invariant de courbure se déduit aussi des coefficients de la métrique. C'est :

$$R^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{48 m^2}{r^6} .$$

Il reste fini et continu en $r = 2m$. Les racines du déterminant sont $r = 0$ et $\theta = 0$ ou π . Elles font apparaître la *singularité intrinsèque* de la géométrie de cet espace-temps, $r = 0$, qui annule g et rend infini l'invariant de courbure. Par contre la condition $\theta = 0$ ou π ne fait apparaître qu'une singularité apparente (sans incidence sur la courbure) due seulement à un mauvais choix de coordonnées. $\theta = 0$ ou π représentent les pôles du système de coordonnées sphériques. Ces points sont évidemment arbitraires. De même, la discontinuité en $r = 2m$ introduit une singularité seulement apparente, due au choix des coordonnées, mathématiquement inadéquates à bien décrire l'espace-temps, mais physiquement imposées à l'observateur extérieur à la masse à cause de la symétrie sphérique autour de M .

On découvrira mieux cette pathologie des coordonnées de Schwarzschild sur la figure 1 qui montre dans le plan r, t une géodésique radiale du genre temps (particule ordinaire) et deux géodésiques radiales $t = \text{Cte}$, toutes étant décrites arbitrairement dans le sens des flèches. Toutes ces géodésiques sont

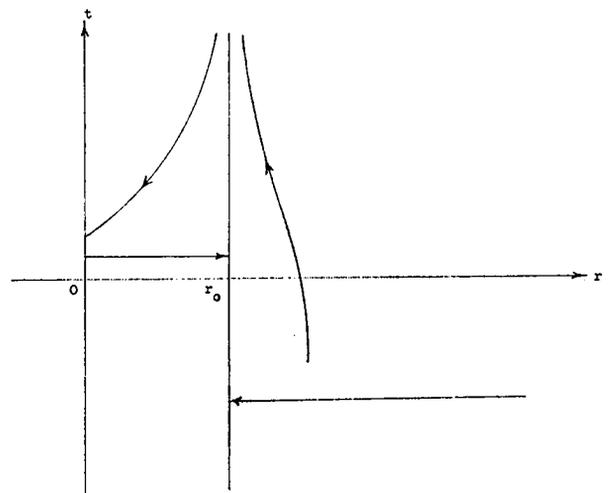


FIG. 1. — Géodésiques radiales de l'espace-temps de Schwarzschild.

incomplètes. La géodésique du genre-temps est séparée en 2 parties, dissociées l'une de l'autre par l'asymptote $r = 2m$. Les géodésiques $t = \text{Cte}$ sont bornées en $r = 2m$. Autrement, elles seraient des courbes d'univers d'une particule ordinaire qui deviendrait tachyon en $r = 2m$ ou vice versa, puisque de telles droites sont du genre-espace pour $r > 2m$ et du genre-temps pour $r < 2m$. Une telle représentation de l'espace-temps est dite *géodésiquement incomplète*. En général, une telle incomplétude géodésique peut provenir soit d'un mauvais choix des coordonnées (c'est le cas le plus fréquent), soit d'une propriété intrinsèque de l'espace-temps. Par opposition à une telle situation, un espace-temps sera dit *géodésiquement complet* si à partir d'un point arbitraire chaque géodésique peut y être prolongé jusqu'à une longueur propre infinie ($\int_c ds$) dans les 2 sens.

Si l'espace-temps présente une singularité intrinsèque (par exemple $r = 0$ pour l'espace-temps de Schwarzschild), il ne peut être géodésiquement complet. On dira seulement qu'il est *maximal* si chaque géodésique issue d'un point arbitraire s'y prolonge jusqu'à une longueur propre infinie dans les deux sens, ou bien se termine à la singularité.

Si un espace-temps, décrit par un certain système de coordonnées, se révèle géodésiquement incomplet, on essaiera de trouver un autre système de coordonnées qui réalise sa complétude géodésique ou, s'il existe une ou plusieurs singularités, son extension analytique maximale.

Cette extension analytique n'est pas toujours possible ; elle n'est pas non plus toujours unique s'il elle existe.

Ici, dans la description de l'espace-temps du vide autour de la masse M , l'espace-temps, en coordonnées de Schwarzschild, présente une incomplétude géodésique qui résulte visiblement d'une pathologie de ces coordonnées en $r = 2m$ (puisque $r = 2m$ n'est pas une singularité intrinsèque). Par contre, il présente en outre la singularité intrinsèque $r = 0$. On peut donc au plus espérer trouver un système de coordonnées qui réalise son extension analytique maximale. Les systèmes des coordonnées de Kruskal assurent cette extension de la représentation de l'espace-temps.

9. Les coordonnées de Kruskal. — La considération des géodésiques nulles radiales, décrivant le mouvement des photons vers l'intérieur ou vers l'extérieur du trou noir, avaient déjà conduit Eddington d'abord, puis Finklestein aux coordonnées dites de « temps avancé » et de « temps retardé ». En effet, ces géodésiques ($ds = 0, d\theta = d\varphi = 0$) ont pour équation différentielle :

$$-\frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} + \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 = 0$$

ou

$$\pm dt = \frac{dr}{1 - \frac{2m}{r}} = \frac{r dr}{r - 2m}$$

mais

$$\frac{r}{r - 2m} = 1 + \frac{2m}{r - 2m} = 1 + \frac{1}{\frac{r}{2m} - 1}$$

et une primitive du second membre de l'équation est donc

$$r + 2m \cdot \ln\left(\frac{r}{2m} - 1\right).$$

Le mouvement de photons radiaux *vers l'extérieur* correspond au signe + de l'équation différentielle (r croît avec t). Il est donc défini par l'équation

$$t = r + 2m \cdot \ln\left(\frac{r}{2m} - 1\right) + U$$

où U désigne la constante d'intégration.

De façon analogue, le mouvement des photons radiaux *vers l'intérieur* correspond au signe - de l'équation différentielle (r décroît quand t croît) et se trouve défini par l'équation

$$t = -\left[r + 2m \cdot \ln\left(\frac{r}{2m} - 1\right)\right] + V$$

où V désigne une constante d'intégration.

L'ensemble des géodésiques radiales nulles correspond donc à l'ensemble des valeurs de U et de V .

Par un point du plan (r, t) , point $A_1(r_1, t_1)$ d'émission du photon, passe *une* géodésique de mouvement extérieur correspondant à une certaine valeur U_1 de la constante U et *une* géodésique de mouvement intérieur correspondant à une certaine valeur V_1 de la constante V .

Réciproquement, toute géodésique U coupe une géodésique V en un point r et t du plan (r, t) (voir Fig. 2).

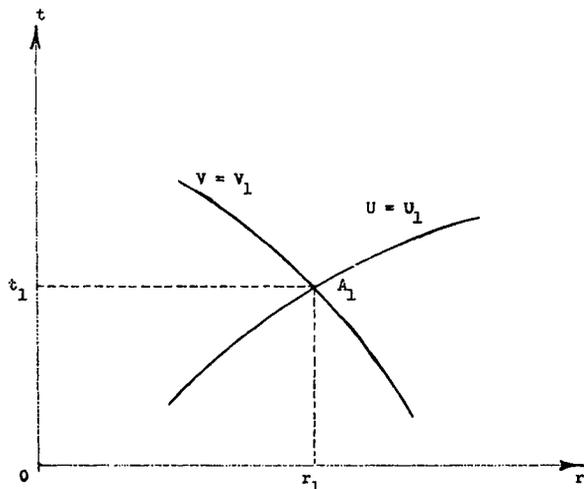


FIG. 2. — Géodésiques radiales nulles de l'espace-temps de Schwarzschild.

Les (U, V) constituent donc un système de coordonnées de l'espace-temps radial de Schwarzschild ($d\theta = d\varphi = 0$) et les formules de transformation entre les r, t et les U, V sont :

$$U = t - \left[r + 2m \cdot \ln \left(\frac{r}{2m} - 1 \right) \right]$$

$$V = t + \left[r + 2m \cdot \ln \left(\frac{r}{2m} - 1 \right) \right]$$

U est appelée coordonnée de temps retardé ($t - \dots$).

V est appelée coordonnée de temps avancé ($t + \dots$).

La métrique de Schwarzschild peut s'exprimer alors à l'aide de ces nouvelles coordonnées. Elle reste malheureusement pathologique en $r = 2m$ (le déterminant de ces coefficients possède le terme $\left(1 - \frac{2m}{r}\right)$ en facteur).

En effet,

$$V - U = 2 \left[r + 2m \cdot \ln \left(\frac{r}{2m} - 1 \right) \right]$$

et

$$V + U = 2t$$

$$d(V - U) = dV - dU = 2 \cdot \frac{dr}{1 - \frac{2m}{r}}$$

(il suffit de se souvenir de l'intégration précédente) et

$$d(V + U) = dV + dU = 2 dt$$

$$ds^2 = - \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2$$

s'écrit :

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left[dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^2} \right] - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \\ &= \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left[\left(\frac{dV + dU}{2}\right)^2 - \left(\frac{dV - dU}{2}\right)^2 \right] - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \\ &= \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dV \cdot dU - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \end{aligned}$$

où r est fonction implicite de V et de U , CQFD.

Kruskal eut l'idée de choisir un nouveau système de coordonnées utilisant les exponentielles de U et V (pour éliminer le facteur $1 - \frac{2m}{r}$ dans le détermi-

nant), de la forme générale $x = \alpha \cdot e^{\beta \cdot U}$ $y = \alpha' \cdot e^{\beta' \cdot V}$

Le choix des coefficients $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ étant dicté par la forme finale de la métrique qui doit être la plus simple possible. Kruskal trouve alors :

$$x = - e^{-U/4m} = - \left(\sqrt{\frac{r}{2m} - 1} \right) \cdot e^{r/4m} e^{-t/4m}$$

$$y = e^{V/4m} = \left(\sqrt{\frac{r}{2m} - 1} \right) \cdot e^{r/4m} e^{t/4m}$$

(pour $r > 2m$). La métrique de Schwarzschild prend ainsi la forme (il suffit de calculer $dx dy$ puis $\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dU dV$) :

$$ds^2 = + \left(\frac{32 m^3}{r}\right) e^{-r/2m} \cdot dx dy - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

(les coordonnées décrivant l'espace-temps sont x, y, θ, φ , car dans le second membre, r est une fonction implicite de x et de y).

Mais pour que la métrique soit exprimée à l'aide des carrés des différentielles des variables et non à l'aide de termes « rectangle » comme $dx \cdot dy$, Kruskal prend comme coordonnées définitives

$$(I) \begin{cases} u = \frac{1}{2}(y - x) = \left(\sqrt{\frac{r}{2m} - 1} \right) \cdot e^{r/4m} \cdot \text{ch} \frac{t}{4m} \\ v = \frac{1}{2}(y + x) = \left(\sqrt{\frac{r}{2m} - 1} \right) \cdot e^{r/4m} \cdot \text{sh} \frac{t}{4m} \end{cases}$$

Alors comme $dy dx = dv^2 - du^2$ la métrique de Schwarzschild prend la forme de Kruskal :

$$ds^2 = \frac{32 m^3}{r} \cdot e^{-r/2m} \cdot (dv^2 - du^2) - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

Les coordonnées sont v, u, θ, φ . La coordonnée v est du genre temps, u du genre-espace ; r est une fonction implicite de u et v que l'on explicite aisément à partir des relations (I) de définition de u et de v :

$$\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$$

alors

$$u^2 - v^2 = \left(\frac{r}{2m} - 1\right) e^{r/2m}$$

On remarquera que la métrique n'a plus de singularité apparente en $r = 2m$ mais présente toujours évidemment la singularité intrinsèque $r = 0$. Pour $r < 2m$, les relations (I) conduisent à des valeurs imaginaires de u et de v (à cause de la racine carrée).

On préfère reprendre toute l'intégration dans le

cas $r < 2m$ et définir alors les coordonnées de Kruskal à partir de r et de t , dans le cas $r < 2m$, par :

$$(II) \begin{cases} u = \left(\sqrt{1 - \frac{r}{2m}} \right) \cdot e^{r/4m} \cdot \text{sh} \frac{t}{4m} \\ v = \left(\sqrt{1 - \frac{r}{2m}} \right) \cdot e^{r/4m} \cdot \text{ch} \frac{t}{4m} \end{cases}$$

mais il va de soi que ce sont toujours les mêmes coordonnées u et v décrivant toujours la même métrique. Il est clair aussi que cette métrique est encore décrite, par les valeurs symétriques $u' = -u, v' = -v$ des valeurs de u et de v définies par (I) et (II). Cette situation de choix multiples entre les transformations qui font passer de r et t à u et v ne doit pas nous surprendre. Les coordonnées de Schwarzschild r et t donnent une représentation géodésiquement incomplète de l'espace-temps ; elles ne le décrivent que localement ; elles constituent une *carte locale* de coordonnées. Les coordonnées u et v de Kruskal, elles, décrivent complètement l'espace-temps et réalisent l'extension analytique maximale de la métrique. Elles sont donc plus générales que les coordonnées de Schwarzschild et il faut plus d'une transformation pour définir les u, v à partir des r, t .

Regroupons les 4 transformations qui définissent 4 régions dans le plan des u, v :

$$(I) \begin{cases} u = \left(\sqrt{\frac{r}{2m} - 1} \right) \cdot e^{r/4m} \cdot \text{ch} \frac{t}{4m} \\ v = \left(\sqrt{\frac{r}{2m} - 1} \right) \cdot e^{r/4m} \cdot \text{sh} \frac{t}{4m} \end{cases} r > 2m$$

$$(II) \begin{cases} u = \left(\sqrt{1 - \frac{r}{2m}} \right) \cdot e^{r/4m} \cdot \text{sh} \frac{t}{4m} \\ v = \left(\sqrt{1 - \frac{r}{2m}} \right) \cdot e^{r/4m} \cdot \text{ch} \frac{t}{4m} \end{cases} r < 2m$$

$$(III) \begin{cases} u = - \left(\sqrt{\frac{r}{2m} - 1} \right) \cdot e^{r/4m} \cdot \text{ch} \frac{t}{4m} \\ v = - \left(\sqrt{\frac{r}{2m} - 1} \right) \cdot e^{r/4m} \cdot \text{sh} \frac{t}{4m} \end{cases} r > 2m$$

$$(IV) \begin{cases} u = - \left(\sqrt{1 - \frac{r}{2m}} \right) \cdot e^{r/4m} \cdot \text{sh} \frac{t}{4m} \\ v = - \left(\sqrt{1 - \frac{r}{2m}} \right) \cdot e^{r/4m} \cdot \text{ch} \frac{t}{4m} \end{cases} r < 2m$$

Les régions (I) et (III) d'une part, (II) et (IV) d'autre part, sont symétriques. Les régions (I) et (III) correspondent à $r > 2m$, les régions (II) et (IV) à $r < 2m$.

Inversement, r et t sont définis par

$$(V) \left(\frac{r}{2m} - 1 \right) e^{r/2m} = u^2 - v^2$$

dans (I), (II), (III) et (IV)

$$(VI) \begin{cases} \frac{t}{4m} = \arg \text{th} \frac{v}{u} & \text{dans (I) et (III)} \\ \frac{t}{4m} = \arg \text{th} \frac{u}{v} & \text{dans (II) et (IV)}. \end{cases}$$

La symétrie générale de l'espace-temps, décrit ainsi par l'extension analytique maximale que réalise la métrique de Kruskal, se traduit notamment par l'existence d'une double singularité $r = 0$. En effet $r = 0$ dans (V) implique $-1 = u^2 - v^2$ et par suite deux solutions $v = \pm \sqrt{1 + u^2}$.

10. **Le diagramme de Kruskal.** — La description de l'espace-temps du vide autour d'une masse M , à l'aide des coordonnées de Kruskal u, v présente l'avantage d'une traduction immédiate en coordonnées, r, t de Schwarzschild (qui sont dotées, elles, de signification physique), tout en nous assurant de l'extension analytique maximale de l'espace-temps. Nous nous bornons aux mouvements radiaux dans l'étude de l'écroulement gravitationnel et par conséquent nous nous limitons à l'étude de l'espace-temps radial ($d\theta = d\varphi = 0$) c'est-à-dire du plan des u, v .

La relation (V) nous montre alors que les courbes $r = \text{Cte}$ sont les hyperboles

$$u^2 - v^2 = \text{Cte}$$

dont les asymptotes sont les bissectrices des axes (droites d'équations $v = \pm u$). On notera le cas particulier de $r = 2m$. La relation (V) montre alors que l'on a

$$u^2 - v^2 = 0 \quad \text{soit} \quad v = \pm u$$

l'hyperbole est dégénérée et réduite à ses 2 asymptotes. On remarquera aussi que pour $r > 2m, |u|$ est $> |v|$ et pour $r < 2m, |u|$ est $< |v|$.

La relation (VI) montre que les courbes $t = \text{Cte}$ sont des droites passant par l'origine ($v/u = \text{Cte}$).

Enfin, les géodésiques radiales nulles (décrivant les trajectoires des photons radiaux) ont pour équation différentielle

$$dv^2 - du^2 = 0$$

(faire $ds = 0$ et $d\theta = d\varphi = 0$ dans la métrique de Kruskal).

Soit $dv/du = \pm 1$. Ce sont les droites parallèles aux bissectrices des axes. Dans le diagramme de Kruskal, le cône de lumière est le même que dans le diagramme de Minkowski.

On se souviendra aussi que, *quelle que soit* la valeur de r positive ($r < 2m$ ou $r > 2m$), la variable v reste du *genre-temps* et on remarquera que les 2 bissectrices séparent les 4 régions (I), (II), (III), (IV) où les coordonnées u et v de Kruskal sont définies par quatre transformations différentes à partir des coordonnées r et t de Schwarzschild. Le diagramme de Kruskal

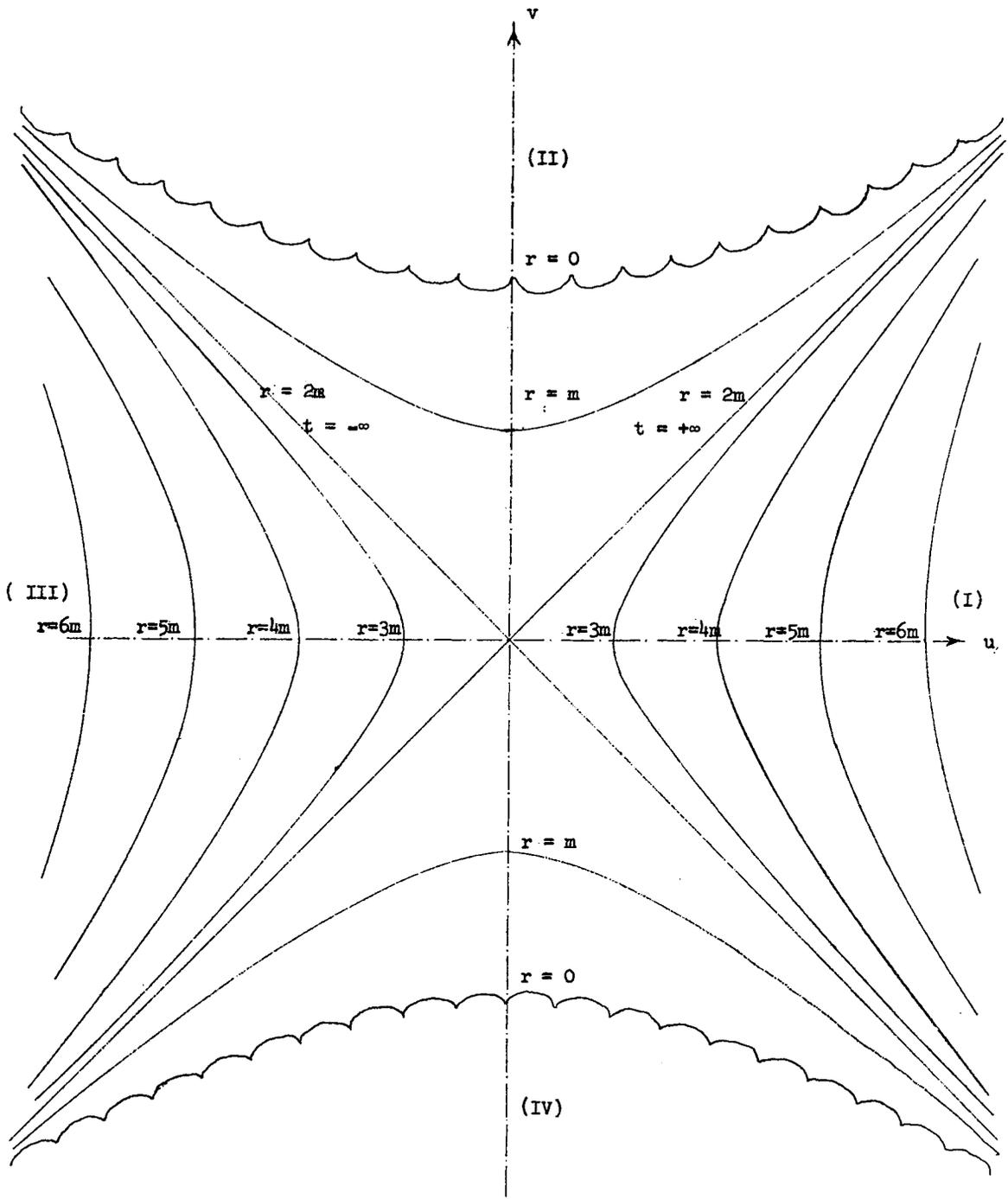


FIG. 3. — Diagramme de Kruskal.

(Fig. 3) fait apparaître les hyperboles $r = \text{Cte}$ d'abord dans les régions symétriques (I) et (III) où r est $> 2m$, et l'on voit bien le caractère asymptotiquement plat de l'espace-temps, la courbure de chaque branche d'hyperbole diminuant avec r croissant et devenant à l'infini une droite verticale du diagramme, puis dans les régions symétriques (II) et (IV) où l'espace-temps est limité par la singularité physique intrinsèque $r = 0$ (cette dernière hyperbole est figurée en trait ondulé). Les bissectrices représentent l'hyperbole

dégénérée $r = 2m$ mais aussi, pour la première bissectrice, $t = +\infty$ et pour la seconde $t = -\infty$ (relation (VI) pour $v/u = 1$ ou $v/u = -1$).

On notera d'abord que l'incomplétude géodésique de cette représentation est néanmoins maximale et se trouve seulement limitée par la singularité intrinsèque $r = 0$.

En effet, une géodésique $t = \text{Cte}$ est une droite passant par l'origine. Ou bien elle est étendue dans les deux sens à une longueur propre infinie (droite D

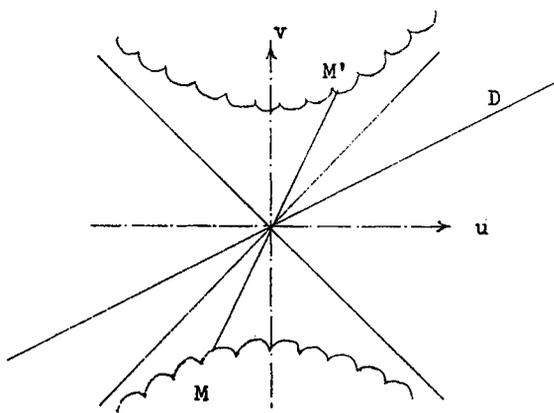


FIG. 4. — Géodésiques du genre espace de l'espace-temps de Kruskal.

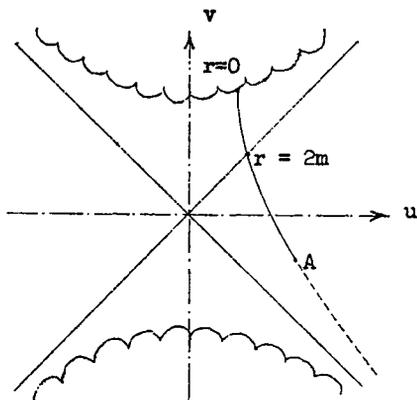


FIG. 5. — Géodésiques du genre temps de l'espace-temps de Kruskal.

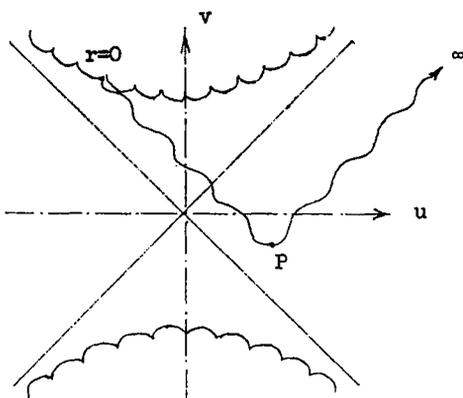


FIG. 6. — Géodésiques du genre lumière de l'espace-temps de Kruskal.

de la figure 4) ou bien elle est limitée à la singularité $r = 0$ (segment MM'). Il n'y a aucune discontinuité ou limite en $r = 2m$ (ici à l'origine du système d'axes).

Une géodésique de genre-temps (décrivant la chute d'une particule par exemple sur la masse M) prend naissance en A , à un certain instant t et à une certaine valeur de la coordonnée radiale r (voir Fig. 5). Elle

se poursuit jusqu'en $r = 0$ sans discontinuité à la traversée de $r = 2m$ (traversée de la bissectrice).

Mais le point origine A peut être reculé aussi loin que l'on veut dans l'espace ou dans le passé (partie pointillée de la géodésique). La géodésique n'est donc bornée que par la singularité intrinsèque $r = 0$. Il en va de même des géodésiques radiales du genre lumière (voir Fig. 6), parallèles aux bissectrices (photon radial émis par le point P et se propageant extérieurement à la masse M , indéfiniment, ou émis vers l'intérieur du trou noir et limité à $r = 0$, avec toute la géométrie).

Le point P peut aussi évidemment être reculé à l'infini dans l'espace ou le passé.

L'extension analytique est donc bien maximale.

11. Les propriétés du trou noir. — Très laborieusement obtenues à l'aide de calculs compliqués sur la métrique de Schwarzschild, elles se lisent immédiatement sur cette extension analytique maximale de l'espace-temps, parce que toute la physique en $r = 2m$ que la représentation de Schwarzschild rejetait à l'infini (en $t = \pm \infty$) est étalée ici sur les 2 bissectrices ($r = 2m, t = + \infty$ et $r = 2m, t = - \infty$).

On se souviendra que $r = \text{Cte}$ représente une hypersurface tridimensionnelle de l'espace-temps ou encore une surface bidimensionnelle de sa partie spatiale.

Une géodésique radiale du genre-temps AA' (voir Fig. 7), est décrite physiquement dans le sens de A vers A' car v est variable du genre-temps.

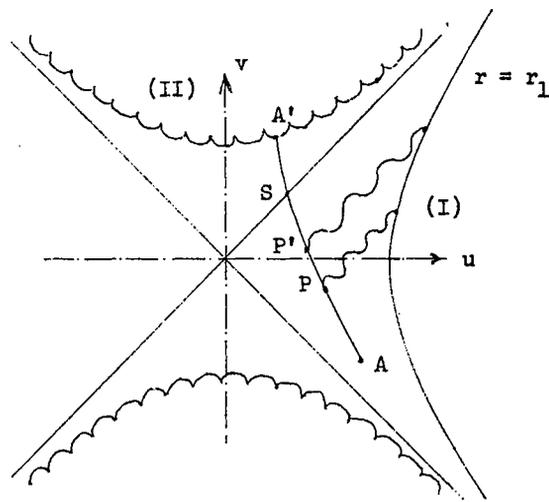


FIG. 7. — Observation d'un écoulement gravitationnel par un observateur fixe dont la courbe d'univers est la branche d'hyperbole $r = r_1$.

Cette géodésique rencontre successivement toute la suite continue des surfaces $r = \text{Cte}$ à valeurs de r décroissantes jusqu'à $r = 0$. Elle décrit l'écroulement gravitationnel de la surface d'une sphère homogène de masse M (exactement le cas d'une étoile qui n'aurait ni charge ni rotation).

On retrouve les propriétés de la surface $r = 2m$,

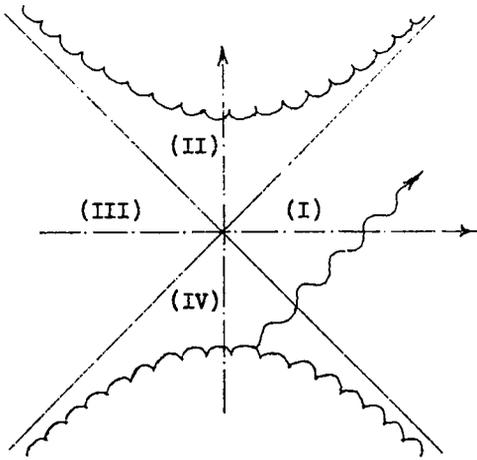


FIG. 8. — Des 4 régions topologiques de l'espace-temps, seules les régions (II) et (III) sont géodésiquement invisibles de la région (I) de l'observateur.

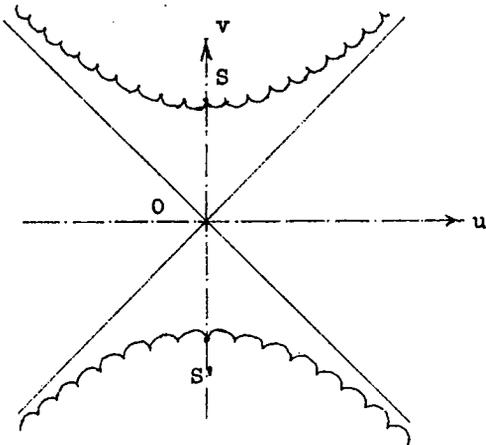


FIG. 9. — La double singularité de l'espace-temps.

qu'elle rencontre en S . Entre A et S , tout photon émis par la surface de l'astre rejoint en un temps fini l'observateur dont la ligne d'univers est l'hyperbole $r = r_1 = \text{Cte}$. Le photon émis en P' met plus de temps à rejoindre l'observateur que le photon émis en P (décalage spectral vers le rouge). En S la géodésique du photon suit la bissectrice, asymptote de toutes les hyperboles $r = \text{Cte}$. Le photon ne rejoint jamais l'observateur (décalage spectral infini et disparition de l'astre à la vue de l'observateur).

Par ailleurs, toute géodésique radiale de genre-temps ou du genre-lumière issue d'un point de la région (II) ne sort pas de l'angle des bissectrices. La surface de la sphère de Schwarzschild $r = 2m$ est *membrane unidirectionnelle*. Une particule matérielle ou un photon peuvent y pénétrer mais non en sortir. Le trou noir est un piège noir.

Mais on lit sur le diagramme une autre propriété essentielle. Le *temps propre* d'écrasement de l'astre sur lui-même est la longueur de l'arc AA' de sa géodésique, $\int_A^{A'} ds$ (puisque ds mesure le temps propre).

Ce temps est fini, comme d'ailleurs le temps mis pour atteindre la sphère de Schwarzschild qui est $\int_A^S ds$.

Un observateur comobile avec l'écrasement gravitationnel de la surface de l'astre, constaterait que le rayon de Schwarzschild est atteint en un temps fini, que l'écrasement se poursuit au-delà, que le passage par le rayon de Schwarzschild n'a rien de plus particulier que le passage par toute autre valeur de $r > 0$.

Par contre, pour l'observateur extérieur à la sphère qui s'écroute, la sphère de Schwarzschild est un *horizon absolu*, atteint en un temps *infini* (le point S est un point de la bissectrice, lieu des points $r = 2m$ et $t = +\infty$). On notera bien sur le diagramme cet effet de perspective du temps.

C'est un horizon parce que c'est une limite des observables. Aucune particule ni aucun photon ne peut sortir de l'intérieur de la sphère $r = 2m$ pour atteindre l'observateur et c'est un horizon absolu car c'est un horizon quel que soit l'observateur extérieur considéré.

On remarquera que parce qu'on a choisi l'hyperbole d'univers de l'observateur dans la région (I), et que l'écrasement considéré est un phénomène physique concernant un objet matériel (un astre par exemple), observé par un observateur matériel, toute la description du phénomène n'utilise que les régions (I) et (II) du diagramme de Kruskal. On aurait pu tout aussi bien le décrire symétriquement dans les régions (III) et (IV) (mais alors t croît quand v décroît, ce qui n'ôte pas à v son caractère de variable du genre-temps).

On notera en effet que la courbe d'univers d'un observateur ne peut être située que dans la région (I) ou la région (III). Mais de la région (I) par exemple, l'observateur ne peut rien voir de la région (II), ni de la région (III) situées derrière l'horizon absolu $r = 2m$.

L'existence physique des régions (III) et (IV) symétriques des régions (I) et (II) est un problème d'ordre philosophique. Supposons en effet en dehors de tout phénomène d'écrasement gravitationnel, que l'espace-temps du vide soit décrit par la métrique de Kruskal qui en réalise l'extension analytique maximale. Ou bien, les régions (III) et (IV) sont des images mathématiquement symétriques des régions (I) et (II) et représentent physiquement le même univers, ou bien deux univers physiques, de même métrique, existent parallèlement. Les équations du champ d'Einstein déterminent bien la métrique de l'espace-temps mais elles ne fixent pas sa *topologie*. C'est ainsi que la région (IV) n'est pas « géodésiquement » invisible pour la région (I) (Fig. 8) mais des photons tels que celui dont la géodésique est représentée sur la figure 8, émergeraient dans (I) avec un très grand décalage spectral *vers le bleu*. Ils n'ont jamais été observés.

La géométrie du vide apparaît comme la juxtaposition en O des deux régions (I) et (III) d'abord. Comme O appartient aux bissectrices $r = 2m$, la géométrie apparaît comme celle d'un double univers : deux univers statiques identiques et symétriques, asymptotiquement plats (à l'infini) et doublement connectés, à l'infini par l'univers plat de Minkowski auquel ils sont asymptotiques et en O par la gorge de Schwarzschild $r = 2m$. Cette deuxième connexion est encore appelée « pont d'Einstein-Rosen ». La géométrie du vide est donc ici un pont d'Einstein entre deux univers isométriques asymptotiquement plats. Cette gorge de Schwarzschild relie aussi entre elles les régions (II) et (IV) tout en reliant ces régions au double univers, assurant ainsi sa connexion avec la double singularité $r = 0$. Mais alors que les régions (I) et (III) sont toutes deux entièrement du genre-espace, ce qui montre que le double univers d'Einstein est statique (comme la partie spatiale d'une métrique où l'on fait $dt = 0$), les régions symétriques (II) et (IV) sont toutes deux du genre temps, donc dynamiques. On rappelle que, dans (II), r est variable temporelle directrice et varie inexorablement de $r = 2m$ à $r = 0$. On peut alors interpréter la juxtaposition de (II) et (IV) comme la pulsation d'un univers entre $r = 0$ et $r = 2m$. Sur la figure 9, suivant l'axe du temps v , on voit que cet univers se dilate de $r = 0$ en S' à $r = 2m$ en O puis se contracte à nouveau pour revenir à la valeur $r = 0$ en S .

Ce cycle de pulsations peut se reproduire indéfiniment si on assimile S à nouveau avec S' . Cet univers pulsant est clos et n'a de connexion avec l'univers statique asymptotiquement plat de l'observateur que

par la sphère de Schwarzschild. Il est pour celui-ci tout entier derrière l'horizon absolu.

Pour illustrer cette description de la géométrie de l'espace-temps de Kruskal, nous rappellerons le fameux diagramme de Flamm, obtenu à partir de la métrique de Schwarzschild. Nous nous proposons de mettre en évidence la courbure de cet espace-temps. A voir l'expression de la métrique, la courbure de la partie spatiale ne porte que sur la variable r . Effectuons dans cette partie spatiale à 3 dimensions, une coupe $\theta = \text{Cte} = \pi/2$. Dans la métrique de Minkowski, on obtiendrait ainsi le plan des $x, y \perp$ à Oz . Dans celle de Schwarzschild, c'est une autre surface, qui est évidemment de révolution autour de Oz (voir Fig. 10).

Elle est engendrée par la rotation autour de Oz de la génératrice G dont on peut calculer l'équation. En effet le plan (Oz, Or) est défini par une certaine valeur de φ . L'élément PP' de G est ds , défini (puisque $dt = d\theta = d\varphi = 0$) par

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}}$$

et dans l'espace euclidien où nous voulons représenter la courbure de l'espace de Schwarzschild, c'est

$$ds^2 = dr^2 + dz^2.$$

Donc,

$$dz^2 + dr^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}}$$

est l'équation différentielle de la génératrice.

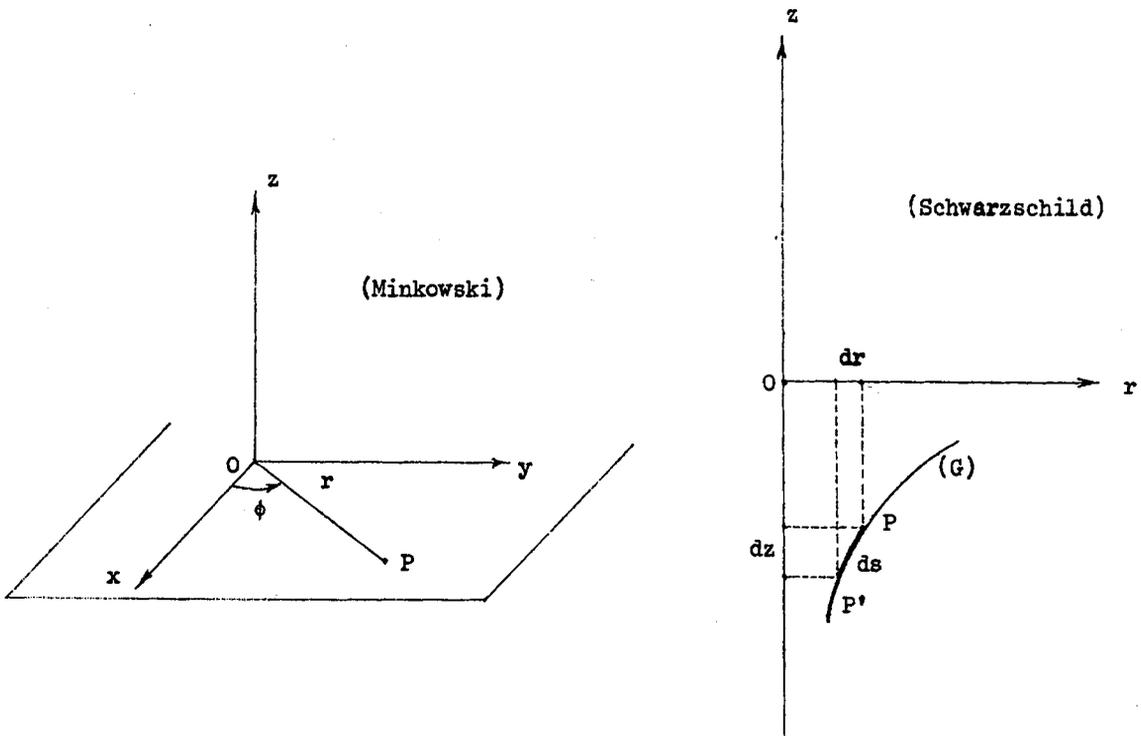


FIG. 10. — La courbure de l'espace-temps de Schwarzschild représentée dans le plan $\varphi = \text{Cte}$ de l'espace sans courbure de Minkowski.

Soit

$$dz^2 = dr^2 \left[\frac{1}{1 - \frac{2m}{r}} - 1 \right] = \frac{2m}{r - 2m} dr^2$$

ou

$$\pm dz = \frac{dr}{\sqrt{\frac{r}{2m} - 1}}$$

En intégrant :

$$\pm (z - z_0) = 4m \sqrt{\frac{r}{2m} - 1}$$

Choisissons l'origine sur l'axe des z , telle que $z = 0$ pour $r = 2m$. Alors $z_0 = 0$ et l'équation s'écrit

$$\left(\frac{z}{4m}\right)^2 = \frac{r}{2m} - 1$$

C'est une parabole d'axe Or et de sommet A

$$(z = 0, r = 2m)$$

(voir Fig. 11).

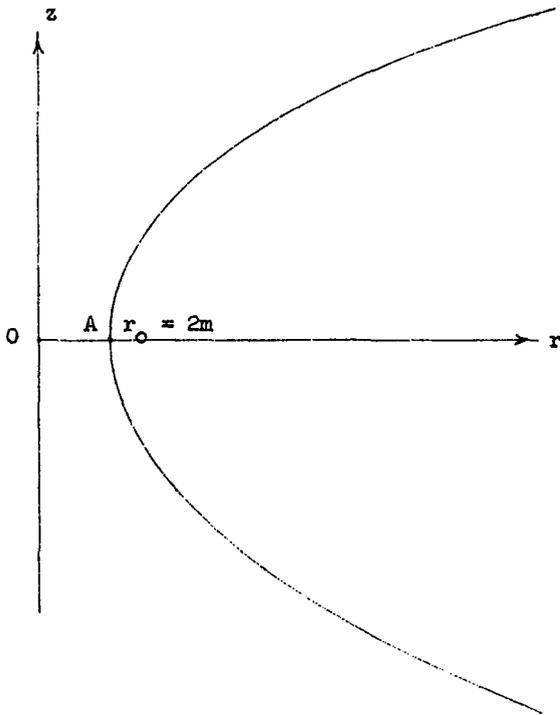


FIG. 11. — La génératrice de la coupe $\theta = \pi/2$ de la partie spatiale de l'espace-temps de Schwarzschild.

Elle engendre par rotation autour de Oz le parabolôide de Flamm qui évoque bien la gorge de Schwarzschild en $r = 2m$ et ce pont d'Einstein entre les 2 univers asymptotiquement plat (voir Fig. 12). L'univers pulsant ($r < 2m$) ne peut se représenter que symboliquement (en pointillés ici) par la sphère de centre O et de rayon $r = 2m$. Ses pôles sur Oz

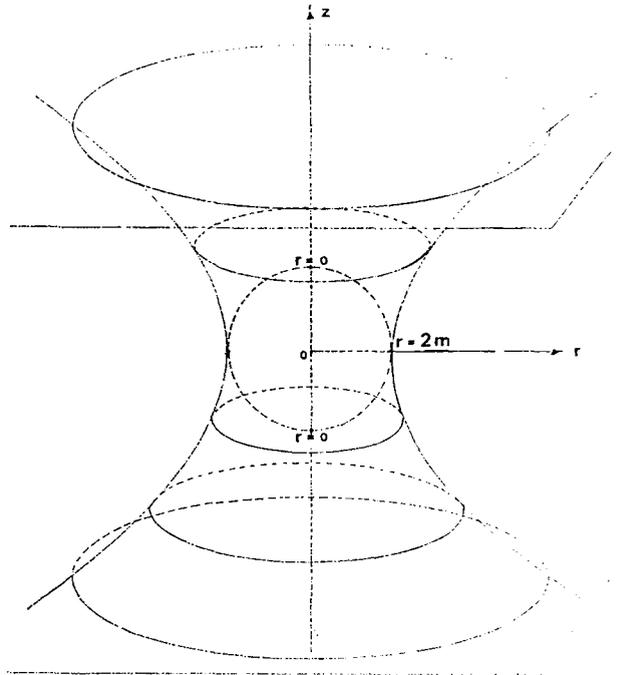


FIG. 12. — Représentation bidimensionnelle de la partie spatiale de l'espace-temps de Schwarzschild.

représentent alors la double singularité $r = 0$. Mais c'est un univers dynamique, non représentable sur un schéma statique ; c'est une pulsation entre le cercle de rayon $r = 2m$ et son centre, le point O ($r = 0$). Avec une dimension de plus (supprimée dans la représentation de Flamm pour voir la courbure), c'est la pulsation de la surface d'une sphère.

12. Le cas général. Les blocs de Walker. Les diagrammes de Penrose-Carter. — Jusqu'ici, nous avons caractérisé le trou noir par sa seule masse. Wheeler, Israël, Carter et Hawking ont montré que le trou noir le plus général était seulement caractérisé par une masse M , une charge Q et un moment angulaire a .

La métrique de Reissner-Nordström, la métrique de Kerr, celle de Kerr-Newman généralisent la métrique de Schwarzschild respectivement aux cas où interviennent la masse et la charge, la masse et la rotation, la masse, la charge et la rotation.

Ces métriques, réduites à la partie radiale de l'espace temps, se présentent sous la forme générale

$$ds^2 = - \frac{dr^2}{F(r)} + F(r) dt^2$$

où l'équation $F(r) = 0$ est une équation du second degré.

Si l'équation a deux racines réelles, il existe deux surfaces horizon ($r = r_1$) et ($r = r_2$). L'extension analytique maximale de l'espace-temps fait apparaître alors 3 types de régions topologiques

$$\begin{aligned} 0 &< r < r_1 \\ r_1 &< r < r_2 \\ r_2 &< r < \infty \end{aligned}$$

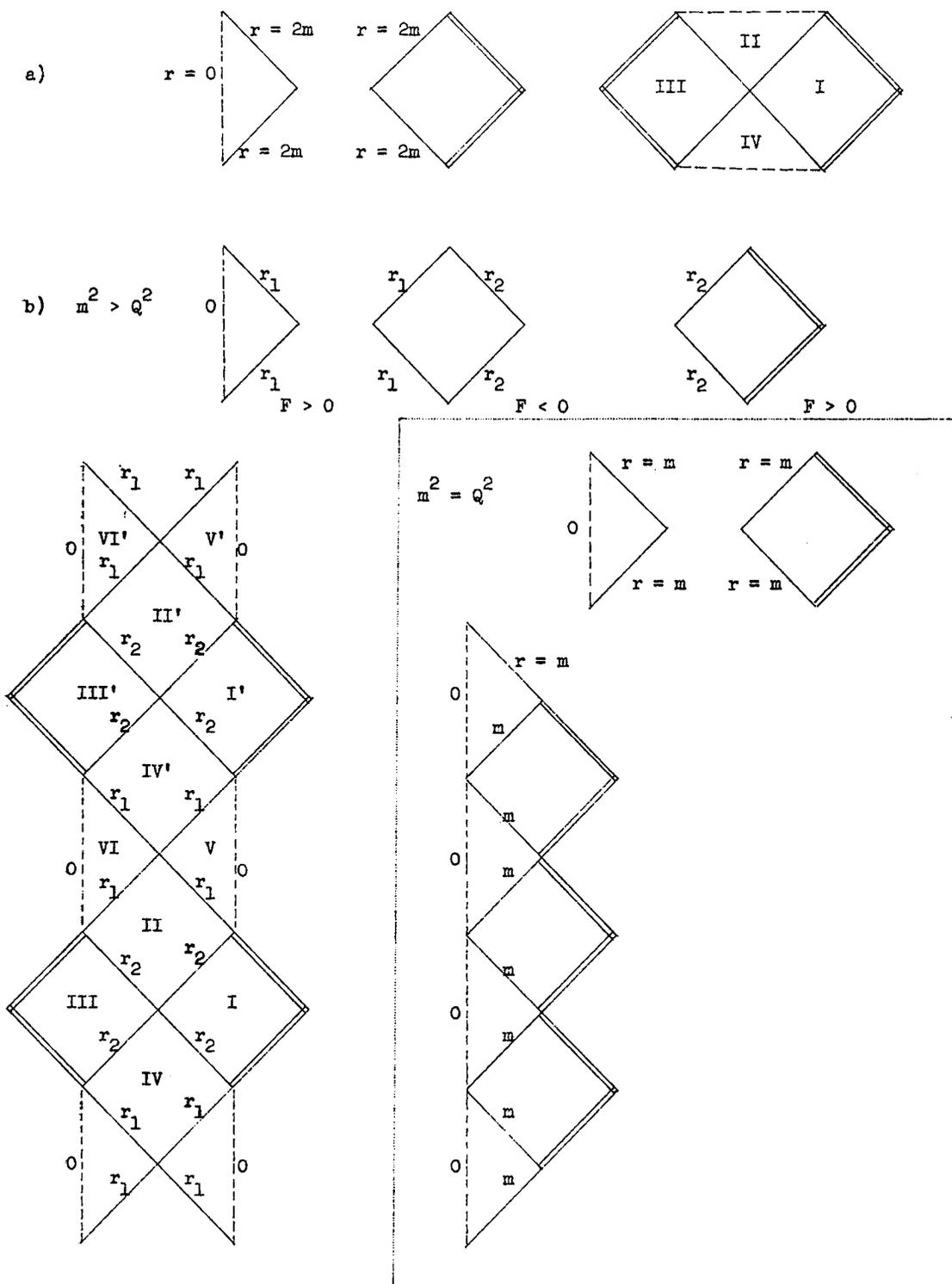


FIG. 13. — Les blocs de Walker et les diagrammes de Penrose-Carter représentant la topologie générale de l'espace-temps radial du piège noir.

symbolisées par les blocs de Walker. La topologie générale de l'espace-temps résulte alors de la juxtaposition, de toutes les manières possibles de ces 3 types de blocs en nombre fini ou infini, avec les règles d'exclusion suivantes :

- 1) un bloc ne peut être assemblé avec lui-même (à cause du point de rebroussement qui serait alors introduit dans la courbe représentant la courbure),
- 2) deux blocs ne peuvent être assemblés par leur frontière singulière ou infinie ($r = 0$ ou $r = \infty$),

3) on choisira l'orientation de chaque bloc pour que l'axe de sa variable directrice (t si $F(r)$ est > 0 ou r si $F(r)$ est < 0) soit par exemple toujours vertical.

La figure 13 montre :

en *a*) la topologie de l'extension analytique de la métrique de Schwarzschild ($F(r)$ a une seule racine $r = 2m$) où l'on retrouve symboliquement les quatre régions du diagramme de Kruskal ;

en *b*) la topologie de la métrique de Reissner-Nordström, dans le cas où $F(r)$ a deux racines ($m^2 > Q^2$) et dans le cas d'une racine double

$$(m^2 = Q^2).$$

Une telle topologie débouche sur d'importantes conclusions : Que représente l'infinité des régions extérieures au trou noir (régions de l'observateur) telles que I, I', \dots ? On notera que des courbes du genre temps peuvent les relier entre elles, sans jamais passer par la singularité intrinsèque $r = 0$. Alors, ou bien ces régions sont autant d'espaces identiques au nôtre, ayant leur existence physique propre et nous devrions pouvoir les observer comme l'exacte réplique de notre univers, ou bien ces régions ne sont qu'une infinité d'images mathématiques d'un seul univers physique. Mais, dans ce dernier cas, une courbe du genre temps pourrait raccorder, dans le sens du temps propre de la particule matérielle qu'elle repré-

sente, le futur d'une de ces régions avec le passé de l'autre, ce qui, dans l'espace physique représenté par la multiplicité de ces régions, signifierait la disparition d'une particule matérielle, suivie de sa résurgence dans son propre passé. Une telle violation de la causalité ne pourrait être évitée que dans le cas où la fonction $F(r)$ n'a pas de racines réelles. Mais, comme il n'existe alors plus aucune surface horizon, le problème du devenir de la matière à la singularité $r = 0$ se retrouve posé. La singularité prend alors le nom de singularité nue. Cependant dans le cas où il existe une rotation (métrique de Kerr ou de Kerr-Newman), seul « l'axe de symétrie » de l'espace-temps ($\theta = 0$ ou π) est justiciable de la méthode d'extension analytique précédente. Mais Carter a montré que la topologie de l'espace-temps tout entier est la même que celle de son axe de symétrie. Pour ce dernier, $r = 0$ n'est plus une singularité et les régions topologiques doivent être étendues aux valeurs négatives de r , ce qui ne peut s'interpréter physiquement qu'en termes de m/r négatifs, c'est-à-dire par l'existence de champs répulsifs ($m < 0$).

De telles prédictions théoriques ont des répercussions sur l'ensemble de la physique. Ainsi les développements ultimes de la relativité générale consacrés à la physique des trous noirs semblent devoir révéler dans un très proche avenir des résultats de toute première importance.

Bibliographie

- [1] LANDAU, L. et LIFCHITZ, R., Théorie des champs, Editions Mir (Moscou), 1970.
- [2] MISNER, C. W., THORNE, K. S. et WHEELER, J. A., « Gravitation », University of Utah (à paraître chez Freeman), 1972.
- [3] RUFFINI, R. et WHEELER, J. A., Introducing the black hole, *Physics to-day* **24** (1971) 30.
- [4] PENROSE, R., Relativity theory and astrophysics. I. Relativity and cosmology. Volume 8 des « Lectures in applied mathematics », American Mathematical Society, éditeur J. Ehlers 1967, 147.
- [5] PENROSE, R., « Relativity, group and topology ». Les Houches-Summer school of theoretical physics de 1963. Gordon and Breach 1964, 563.
- [6] THORNE, K., « Relativistic stars, black holes and gravitational waves ». Proceeding of the international school of physics « Enrico Fermi », Varenna, course XLVII. « General Relativity and Cosmology » Academic Press, 1971, 237.
- [7] SORLET, N., Introduction mathématique à la physique des Black holes. Mémoire de Licence préparé sous la direction de MM. Ledoux et Démaret. Institut d'Astrophysique de Liège, 1972.
- [8] WALKER, M., *J. Math. Phys.* **11** (1970) 2280.
- [9] KRUSKAL, M. D., *Phys. Rev.* **119** (1960) 1743.
- [10] FINKLESTEIN, D., *Phys. Rev.* **110** (1968) 965.
- [11] EINSTEIN, A. et ROSEN, N., *Phys. Rev.* **48** (1935) 73.
- [12] PENROSE, R., « Structure of space-time » dans *Baltelle rencontres*, éditeurs EM Dewitt et J. A. Wheeler Benjamin 1968.
- [13] CARTER, B., *Phys. Rev.* **121** (1966) 423 ; **141** (1966) 1242 ; **174** (1968) 1559.
- [14] ISRAEL, W., *Common. Math. Phys.* **8** (1968) 245.
- [15] CARTER, B., *Phys. Rev. Lett.* **8** (1971) 331.
- [16] HAWKING, S. W., *Comm. Math. Phys.* **25** (1972) 152.
- [17] PENROSE, R., *Nature* **236** (1972) 377.
- [18] THORNE, K. S., « Relativistic Stellar structure and dynamics ». Hautes Energies en Astrophysique. Cours d'été des Houches de 1966, vol. III-Gordon and Breach 1967.