



**HAL**  
open science

## DUALITE ET MODELES DUAUX

Michel Le Bellac, Daniel Treille

► **To cite this version:**

Michel Le Bellac, Daniel Treille. DUALITE ET MODELES DUAUX. Journal de Physique Colloques, 1970, 31 (C5), pp.C5-5-C5-30. 10.1051/jphyscol:1970501 . jpa-00213894

**HAL Id: jpa-00213894**

**<https://hal.science/jpa-00213894>**

Submitted on 4 Feb 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## DUALITE ET MODELES DUAUX.

Michel Le Bellac

Physique Théorique, Faculté des Sciences, 06.Nice.

Daniel Treille

Laboratoire de l'Accélérateur Linéaire, 91.Orsay

et C.E.R.N., Genève.

Sommaire

Nous discutons d'abord les hypothèses de base de la dualité, et leurs conséquences pour la dynamique des interactions fortes (dégénérescence d'échange). Nous introduisons ensuite les modèles duaux (Veneziano) et passons en revue les applications à la production multiple. Enfin nous examinons les développements théoriques récents relatifs à l'unitarisation des modèles duaux.

Abstract

We first discuss the basic assumptions of duality, and their consequences for strong interaction dynamics (exchange degeneracy). Then we introduce dual models (Veneziano) and review their applications to multiparticle reactions. Finally we examine the recent theoretical developments concerning the unitarization of dual models.

I. INTRODUCTION

En une dizaine d'années, nous avons accumulé une somme considérable de résultats théoriques et expérimentaux sur les réactions à 2 corps et quasi-deux corps

$$a + b \rightarrow a' + b' \text{ (éventuellement } a = a' \text{ et/ou } b = b')$$

à haute énergie. Il a été possible de dégager certaines caractéristiques fondamentales du comportement de ces réactions à haute énergie, et de les interpréter théoriquement, au moins de façon qualitative (1).

Les points les plus importants sont, semble-t-il, les suivants : (nous utilisons les notations habituelles)

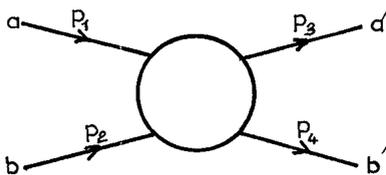


Fig. 1

$$s = (p_1 + p_2)^2$$

$$t = (p_1 - p_3)^2 \quad v = \frac{s - u}{4 m_b^2} \quad (\text{I,1})$$

$$u = (p_1 - p_4)^2$$

(a) Les sections efficaces totales  $\sigma_T$  et les sections efficaces différentielles  $d\sigma/dt$  à  $t$  fixé se comportent, lorsque  $s$  devient grand, comme  $s^\alpha$  ( $\alpha \leq 1$ ) ou comme la somme d'un petit nombre de termes de la forme  $s^\alpha$ . Ajoutons cependant qu'il n'est pas possible d'exclure des termes de la forme  $s^\alpha (\log s)^\beta$ , de même qu'il n'y a pour le moment aucune évidence purement expérimentale en faveur de tels termes.

(b) Les sections efficaces différentielles  $d\sigma/dt$  présentent des pics à l'avant ( $t \simeq 0$ ) ou à l'arrière ( $u \simeq 0$ ). En première approximation, les pics à  $t \simeq 0$  sont présents si et seulement si il est possible d'échanger dans la voie  $t$  des nombres quantiques bien définis, correspondant à des particules (ou résonances) bien établies; un résultat analogue est aussi valable pour la voie  $u$ . Il est hors de doute que les nombres quantiques de la voie  $t$  jouent un rôle prépondérant dans le compor-

tement à  $s \rightarrow \infty$ ,  $t \lesssim 0$ , et de même les nombres quantiques de la voie  $u$  pour  $s \rightarrow \infty$ ,  $u \lesssim 0$  (périphérisme).

(c) Il existe à  $t$  fixé (ou à  $u$  fixé) des structures remarquables dans  $d\sigma/dt$  : minima et pics secondaires, changements de pente, etc... De telles structures sont aussi visibles dans les polarisations, par exemple le double zéro à  $t \simeq -0,6(\text{GeV})^2$  dans la diffusion élastique  $\pi\pi$ .

Le modèle des pôles de Regge rend compte de façon qualitative des points (a), (b) et (c). Comme les pôles de Regge sont des objets définis initialement dans la voie  $t$ , nous dirons que l'amplitude de réaction  $A$  est décrite au moyen d'échanges de la voie  $t$ .

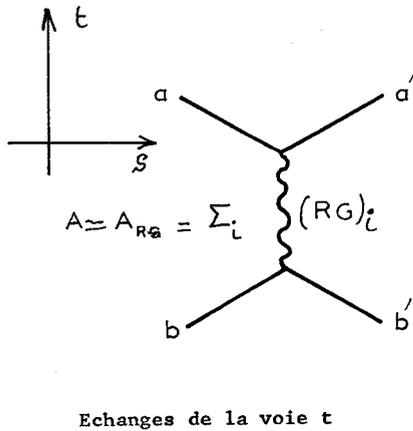


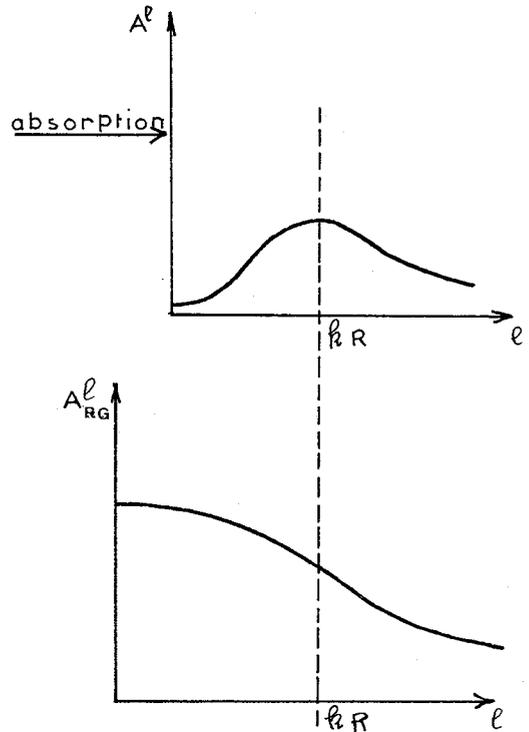
Fig. 2

Cependant nous avons appris, au cours des deux ou trois années passées, que le modèle de Regge, si on se contente uniquement de pôles, est certainement incorrect quantitativement (1). On doit introduire des coupures, ce qui a l'inconvénient de restreindre considérablement la puissance prédictive du modèle. On dispose heureusement d'une prescription semi-quantitative pour inclure les coupures, c'est le modèle de pôles de Regge absorbés, qui existe dans diverses variantes (utilisation de la fonction d'overlap, eikonale, prescription de Sopkovich, matrice K, etc...). Dans ces modèles on peut se représenter un processus non diffractif (ou la partie non diffractive

pour une réaction élastique) de la façon suivante: l'amplitude est représentée par un petit nombre de pôles de Regge,  $A \simeq A_{RG}$ , mais si on projette  $A_{RG}$  sur les ondes partielles :

$$A_{RG}^{\ell} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 A_{RG} P_{\ell}(\cos \theta) d(\cos \theta) \quad (I,2)$$

les ondes partielles  $\ell \lesssim kR$  ( $k$  est l'impulsion dans le centre de masse et  $R$  le rayon de la région d'interaction  $\simeq 1$  fermi) sont fortement absorbées:



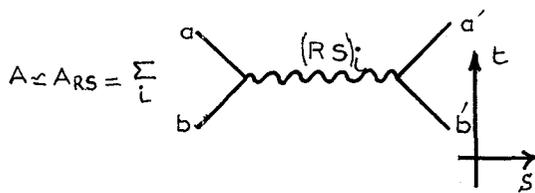
Pôles de Regge absorbés

Fig. 3

Ainsi, et cette remarque est essentielle pour la suite, la contribution importante vient des ondes partielles périphériques,  $\ell \simeq kR$ . Il est incontestable que le modèle pôles de Regge + absorption représente une amélioration sensible par rapport au modèle de pôles simples, mais sa formulation théorique demeure ambiguë et l'accord avec les résultats expérimentaux n'est pas toujours quantitatif. En particulier, l'absorption doit être renforcée dans les amplitudes de non-flip, alors qu'elle semble superflue, voire nuisible, pour

les amplitudes de spin-flip<sup>(2)</sup>.

A basse et surtout à moyenne énergie, la situation théorique (et parfois aussi expérimentale!) est beaucoup plus confuse. Toutefois il est clair qu'un rôle prépondérant est joué par les résonances, et que l'hypothèse selon laquelle l'amplitude est dans certains cas saturée par les seules résonances est en bon accord avec les résultats expérimentaux. Dans les processus où une analyse en déphasages est possible, l'amplitude de diffusion est souvent représentée très convenablement par une somme de résonances, jusqu'à un ou deux GeV. La description de l'amplitude que l'on obtient de cette façon est donc une description en termes d'échanges de la voie s.



Echanges de la voie s

Fig. 4

Les nombres quantiques de la voie s jouent un rôle prépondérant, et la section efficace est caractérisée par des bosses à des valeurs bien déterminées de s.

Le mérite de l'idée de dualité<sup>(3)</sup> est de relier entre elles les deux représentations : échanges de la voie t - échanges de la voie s, alors que ces deux représentations étaient à priori complètement disconnectées.

II. DUALITE GLOBALE.

A. Observations expérimentales et théoriques suggérant un schéma dual.

Avant de formuler de façon plus précise l'idée de dualité, il est intéressant de remarquer qu'un schéma dual est suggéré par un certain nombre d'observations expérimentales et théoriques.

Pour le moment nous nous bornerons à constater les faits, en remettant à plus tard leur interprétation.

(a) Egalité des pentes des trajectoires de Regge des mésons et des baryons : dans la diffusion  $\pi N \rightarrow \pi N$ , par exemple, les mésons échangés dans la voie t se trouvent sur des trajectoires de Regge de pente  $\sim 0,9$  (GeV)<sup>2</sup>. Les baryons qui existent comme résonances dans la voie s se trouvent aussi sur des trajectoires de Regge de pente  $\sim 0,9$  (GeV)<sup>2</sup>.

(b) Les nombres quantiques de la voie s sont importants à haute énergie.

Nous avons vu que les nombres quantiques de la voie t jouent un rôle fondamental à haute énergie, et que cela est naturel dans le modèle de Regge. Cependant il existe aussi des relations remarquables, trop remarquables pour être accidentelles, entre le comportement à haute énergie et les nombres quantiques de la voie s, et en particulier l'existence ou non de résonances indiscutables dans la voie s.

Réaction a+b → a+b	$\pi^+ p$	$\pi^- p$	$K^+ p$	$K^- p$	$K^+ n$	$K^- n$
Résonances voie s	oui	oui	non	oui	non	oui
$\sigma_T^+$ avec s	oui	oui	non	oui	non	oui
Structure d $\sigma/dt$	oui	oui	non	oui	-	-

pp	$\bar{p}p$	pn	$\bar{p}n$
non	oui	non	oui
non	oui	non	oui
non	oui	-	-

(c) Certaines propriétés caractéristiques de la voie t sont reproductibles par des échanges de la voie s.

Une somme de résonances dans la voie s peut très bien donner un pic avant "caractéristique" d'un processus périphérique : par exemple Harari montre comment cinq résonances  $\ell = 0, 1, 2, 3, 4$  donnent un remarquable pic avant dans la diffusion  $\pi - \pi$ <sup>(3)</sup>.

De même il est parfaitement possible d'obtenir des structures à une valeur fixée de  $t$ . Supposons par exemple que les résonances dominantes se trouvent dans les ondes périphériques  $l \sim kR$ ; le premier zéro de la distribution angulaire provenant d'une de ces résonances sera dû au premier zéro de  $P_l(\cos \theta)$ ; si  $l$  est grand et  $\theta$  petit :

$$P_l(\cos \theta) \sim J_0(l \sin \theta) \sim J_0(kR \frac{\sqrt{-t}}{k})$$

$$= J_0(R \sqrt{-t}) \quad (II,1)$$

Le premier zéro sera donc donné par le zéro de la fonction de Bessel

$$R \sqrt{-t} \sim 2,40$$

et se produira donc à  $t$  fixé. Cette remarque ne reste pas purement théorique, mais correspond à la réalité. En effet

- dans la diffusion  $\pi\pi$  les trois résonances  $\rho$ ,  $f^0$ , et  $g$  ont le premier zéro de leur distribution angulaire à  $t = -0,25, -0,31$  et  $-0,29$  (GeV)<sup>2</sup> respectivement,

- dans l'échange de charge  $\pi^- p \rightarrow \pi^0 n$ , les résonances proéminentes  $N_{1520}^*(3/2^-)$ ,  $N_{1688}^*(5/2^+)$ ,  $\Delta_{1920}(7/2^+)$  ont toutes leur premier zéro dans l'amplitude  $\nu B^{(-)}$  (4) à  $t \sim -0,5$  (GeV)<sup>2</sup>, ce qui reproduit la structure bien connue associée en général au fait que la trajectoire du  $\rho$  passe par zéro à  $t \sim -0,5$  (GeV)<sup>2</sup> :  $\alpha_\rho(t \sim -0,5(\text{GeV})^2) = 0$ . De même ces résonances contribuent avec le même signe à  $\nu B^{(-)}$ , et avec des signes alternés à  $A^{(-)}$  : ceci entraîne que  $\nu B^{(-)} \gg A^{(-)}$  et explique l'arrondi du pic avant vers  $t \sim -0,1(\text{GeV})^2$ .

(d) Les échanges de la voie t peuvent reproduire des propriétés caractéristiques de la voie s.

Par exemple le prolongement de l'amplitude de Regge  $A_{RG}^{(-)}$  à des petites valeurs de  $\nu$  montre que l'amplitude à basse énergie (qui est bien représentée par une somme de résonances) est aussi représentée en moyenne par  $A_{RG}^{(-)}$

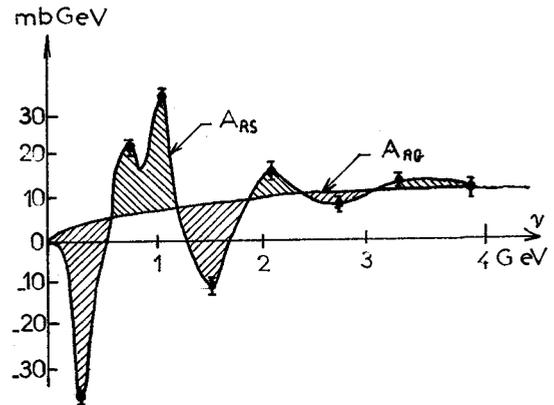


Fig. 5

De même, si l'on projette une amplitude  $A_{RG}$  sur les ondes partielles, on trouve sur le diagramme d'Argand des cercles (5) tout à fait analogues à ceux attribués normalement à une résonance. Bien que la signification théorique de ces "boucles de Schmidt" soit controversée, elles n'en n'indiquent pas moins une autre relation entre échanges de la voie s et échanges de la voie t.

B. Les hypothèses de base de la dualité.

Après ces remarques qualitatives, il convient d'essayer de donner une formulation plus quantitative à l'idée de dualité. Il faut dire immédiatement qu'il n'existe pas de formulation mathématique précise, sauf dans le cas des modèles duaux, que nous examinerons plus loin, et qui sont certainement beaucoup trop restrictifs. Une difficulté supplémentaire vient du fait que le contenu de la dualité varie d'un auteur à un autre, et il est nécessaire de vérifier les définitions, quand on affirme par exemple que tel ou tel résultat expérimental "est en contradiction avec la dualité". Dans un tel cas il est évidemment important d'essayer de repérer l'hypothèse susceptible d'être responsable du désaccord entre la théorie et l'expérience.

Le schéma usuel de la dualité repose sur cinq hypothèses principales.

(1) Analyticité + dominance des pôles de Regge, qui conduit aux règles de somme à énergie finie (RSEF), par exemple pour une amplitude impaire par croisement ( $A^{(-)}$  ou  $vB^{(-)}$ ).

$$\int_0^N \text{Im } A(v,t) dv = \sum_i \beta_i(t) \frac{\alpha_i(t)+1}{\alpha_i(t)+1} \quad (\text{II},2)$$

où  $\alpha_i(t)$  et  $\beta_i(t)$  sont les trajectoires et les résidus des pôles de Regge échangés.

(2) Saturation de la partie imaginaire de l'amplitude par des résonances (dans le membre de gauche de la RSEF).

$$\text{Im } A(v,t) \simeq \text{Im } A_{RS}$$

(1) + (2) constitue la dualité globale; plus précisément, s'il existe un domaine de valeurs de  $N$  tel que pour  $v \gtrsim N$  l'approximation de Regge soit une bonne approximation, et que pour  $v \lesssim N$  la saturation de l'amplitude par les résonances soit aussi une bonne approximation, la RSEF est l'expression mathématique de la relation entre échanges de la voie  $s$  et de la voie  $t$ . Cette relation peut être exprimée de façon intuitive en disant que la moyenne des résonances sur l'intervalle  $(0,N)$  est égale à l'amplitude de Regge (cf.fig.5):

$$\langle \text{Im } A_{RS} \rangle \simeq \text{Im } A_{RG}$$

La remarque suivante est fondamentale : la RSEF (II,2) donne une relation linéaire entre les paramètres des résonances et ceux des pôles de Regge : la théorie que nous allons développer est une théorie linéaire.

La puissance prédictive de la dualité globale est considérablement accrue si l'on ajoute les deux hypothèses suivantes :

(3) Il n'existe pas d'amplitudes exotiques (ni résonances exotiques, ni échanges exotiques).

(4) L'amplitude d'un processus diffractif peut être décomposée suivant la conjecture de Harari-Freund :

$$\begin{aligned} \text{voie } t : A &= A_P + A_{RG} \\ \text{voie } s : A &= A_{FNR} + A_{RS} \end{aligned}$$

où  $A_P$  est l'amplitude provenant de l'échange du Pomeron ( $P$ ) et  $A_{FNR}$  est l'amplitude non résonante.

$A_P$  est dual au fond non résonant (FNR) de la voie  $s$ , tandis que  $A_{RG}$  est dual aux résonances de la voie  $s$ .

$$A_P \leftrightarrow A_{FNR} \quad A_{RG} \leftrightarrow A_{RS}$$

(5) Enfin il existe une hypothèse plus ou moins implicite, mais en fait fondamentale si l'on veut que la dualité soit un schéma utile : la description dans les voies  $s$  et  $t$  doit rester "simple".

Les hypothèses (1) à (5) méritent quelques commentaires.

(1) Comme nous l'avons déjà remarqué, l'hypothèse de dominance des pôles de Regge est certainement incorrecte. Nombre de "prédictions incorrectes de la dualité" sont directement reliées à la propriété de factorisation des pôles, propriété qui n'est pas vraie pour les coupures. Malheureusement il n'existe pas à l'heure actuelle de formulation convaincante de la dualité, qui soit capable d'inclure les coupures de Regge. Cette carence est vraisemblablement reliée à l'absence d'un modèle entièrement satisfaisant pour les coupures : nous ne savons même pas si les coupures sont "fortes" (Michigan) ou "faibles" (Argonne)<sup>(1)</sup>. Cela dit, il n'existe pas à notre connaissance de contradiction a priori entre la notion de dualité et les coupures.

(2) Il faut insister sur le fait que l'hypothèse de saturation par les résonances ne saurait être raisonnable que pour la partie imaginaire de l'amplitude. En effet, à la position de la résonance, la partie réelle de l'amplitude résonante (du moins pour une forme de Breit et Wigner simple) est nulle, de même que son intégrale sur un intervalle  $v_{RS} - v_0, v_{RS} + v_0$ . De plus, si on écrit une relation de dispersion à  $t$  fixé pour la partie réelle d'une amplitude comme  $A(K_P^+ \rightarrow K_P^+)$  :

$$\text{Re } A(v,t) = \frac{P}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Im } A(v',t) dv'}{v' - v} \quad (\text{II},3)$$

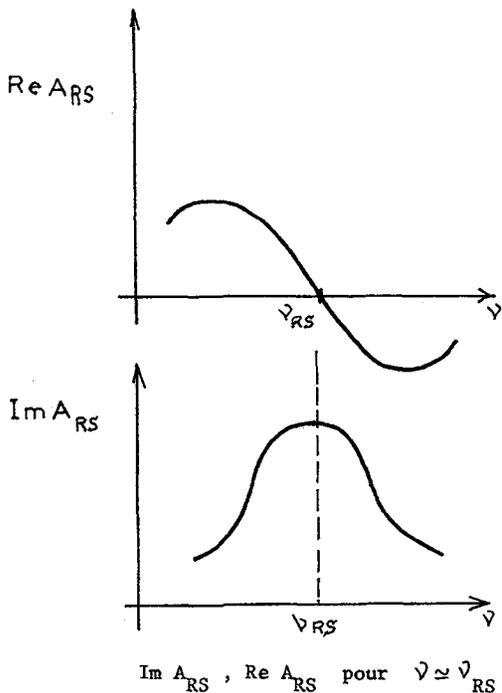


Fig. 6

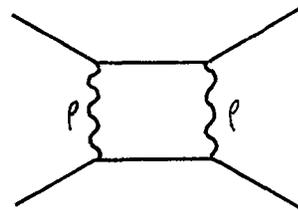
on constate que la partie réelle de l'amplitude  $K^+p$  reçoit une contribution des résonances de la voie  $K^-p$  (il est facile de se convaincre que l'argument n'est pas valable si on écrit une relation de dispersion pour la partie imaginaire, parce que la partie réelle change de signe à  $v = v_{RS}$ , et sa contribution à l'intégrale de dispersion est pratiquement nulle).

(1) + (2) : on peut modifier la dualité globale en faisant l'hypothèse plus faible que la dualité entre voies s et t n'est vraie que pour les ondes partielles périphériques : ces ondes partielles sont dominées par les pôles de Regge pour  $v \gg N$ , et par les résonances pour  $v \ll N$ . Ceci pourrait s'appeler "dualité globale périphérique". Cette forme de dualité est certainement en meilleur accord avec l'expérience. En effet, d'une part la dominance des pôles de Regge est sûrement une mauvaise approximation pour les ondes centrales, à cause de l'absorption, et d'autre part il est vraisemblable que la saturation par les résonances est une meilleure approximation pour les ondes partielles périphériques. Ce schéma est assez

séduisant a priori, mais il est difficile de lui donner une formulation mathématique précise et sa puissance prédictive reste faible.

(3) L'absence de résonances exotiques + l'hypothèse de saturation par les résonances entraîne l'absence d'amplitudes exotiques dans la voie s. Il est clair que s'il existe des résonances exotiques faiblement couplées, ou apparaissant dans des ondes partielles centrales, cela n'affectera pas le schéma général de la dualité.

Dans la voie t, l'absence de pôles exotiques et l'absence d'échanges doubles :



Echanges doubles

Fig. 7

entraîne l'absence d'amplitudes exotiques.

Expérimentalement, il semble que les amplitudes correspondant à ces échanges exotiques peuvent atteindre 20 à 30% des amplitudes "normales". Ces amplitudes ont été mesurées par interférence<sup>(6)</sup>, et directement dans les réactions  $\bar{P}P \rightarrow \bar{E} + E$ <sup>(7)</sup> et  $K^-p \rightarrow pK^-$  (7a).

On peut comprendre aisément pourquoi l'absence d'amplitudes exotiques est riche de conséquences dans un schéma dual : en effet si l'amplitude A est exotique,  $Im A = 0$ , et le membre gauche de la RSEF s'annule<sup>(8)</sup>, les équations de la dualité sont alors faciles à analyser et conduisent à des résultats très importants (cf. section I,C).

(4) L'hypothèse de Harari-Freund est imposée par le fait que la contribution du Pomeron est la même par exemple pour  $K^+p \rightarrow K^+p$  et  $K^-p \rightarrow K^-p$ ; une des voies possède des résonances, l'autre non.

Une autre façon de voir est de remarquer que le Pomeron a isospin zéro dans la voie t,  $I_t = 0$ ; si l'on passe dans la voie s à l'aide de la matrice de croisement d'isospin, on trouve une contribution identique pour les différents isospins dans la voie s, par exemple  $I_s = 0, 1, 2$  dans le cas de la diffusion  $\pi\pi$ . Le Pomeron ne peut donc pas être dual aux résonances. En relation avec la dualité périphérique, il est aussi intéressant de remarquer que l'amplitude  $A_P$  est construite avant tout par les ondes partielles  $l \leq kR$ , et non par les ondes partielles  $l \sim kR$  (diffusion d'ombre).

Une démonstration expérimentale précise de l'hypothèse de Harari-Freund est impossible à donner, à cause de l'ambiguïté de la séparation entre amplitude résonance et fond non résonant. Cependant Harari et Zarmi<sup>(9)</sup> ont donné une justification qualitative de cette hypothèse en examinant les ondes partielles  $\pi$ -nucléon dans les voies  $I_t = 0$  et  $I_t = 1$  (au lieu des voies  $I_s = 1/2$  et  $I_s = 3/2$  habituelles). Il est clair que pour  $I_t = 0$  les résonances se superposent à un fond non résonant, tandis que pour  $I_t = 1$  les ondes partielles semblent être purement résonantes. De même une analyse de la diffusion  $\pi$ -nucléon à l'aide d'un modèle de Regge avec échange du P, du P' et du  $\rho$  permet de montrer qualitativement que l'extrapolation à basse énergie de  $A_P$  est approximativement égale au fond non résonant.

Par la suite, lorsqu'il sera question d'amplitude de diffusion, on doit comprendre qu'il s'agit de  $A_{RG}$  et que la contribution du Pomeron  $A_P$  a été soustraite.

Une analyse du même type a été refaite par Harari et Zarmi<sup>(10)</sup> utilisant la conservation de l'hélicité de la voie s dans l'échange du Pomeron: les amplitudes correspondant à un renversement d'hélicité dans la voie s doivent être complètement saturée par les résonances.

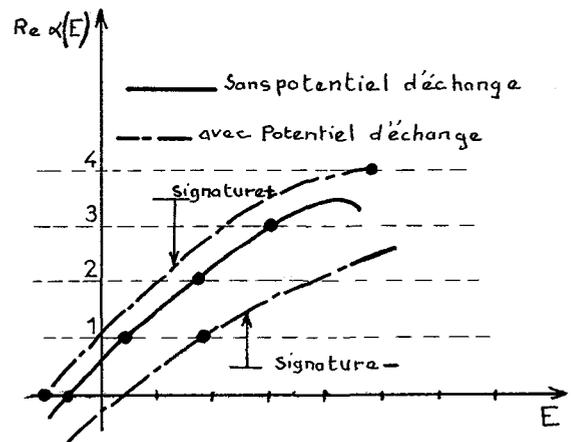
(5) Enfin l'hypothèse plus ou moins implicite d'une description "simple" est nécessaire si l'on veut que la dualité ait une quelconque utilité. Il est nécessaire d'interdire les schémas mathématiquement possibles, mais sans signification physique, comme une description du  $N_{1236}^*$  par

un échange de 20 à 30 pôles de Regge dans la voie t. Naturellement cette exigence de "simplicité" ne peut pas se formuler de façon mathématique, et seule l'intuition physique peut lui donner un contenu! De même les modèles d'interférences généralisés, où une amplitude à peu près nulle est décrite comme la somme d'une amplitude résonante grande et d'un fond de signe opposé, ne peuvent pas être exclus par des considérations purement mathématiques, mais sur des bases physiques.

C. Conséquences de la dualité.

1) Dégénérescence d'échange.

La conséquence la plus importante de la dualité est la dégénérescence d'échange. Ce concept n'est pas nouveau et date même du tout début de la théorie de Regge : en théorie du potentiel, et en l'absence de potentiel d'échange, les trajectoires de Regge produisent des états liés ou des résonances chaque fois qu'elles passent par un entier pair (signature +) ou par un entier impair (signature -).



Dégénérescence d'échange, théorie du potentiel

Fig. 8

En théorie relativiste, l'absence de forces dans certaines voies peut aussi conduire à la dégénérescence d'échange; elle y conduit

nécessairement dans un schéma linéaire comme celui de la dualité (mais pas nécessairement dans un schéma de bootstrap basé sur la méthode N/D, à cause des voies couplées par l'unitarité). D'autre part, le fait que les forces soient absentes dans certaines représentations de SU(2) ou de SU(3) entraîne la dégénérescence d'échange entre trajectoires de nombres quantiques (par exemple isospin) différents.

Considérons par exemple la diffusion  $\pi^+\pi^+ \rightarrow \pi^+\pi^+$  où le  $\rho$  et le  $f^0$  peuvent être échangés

$$A(\pi^+\pi^+ \rightarrow \pi^+\pi^+) = \beta_\rho(t) \frac{1-e^{-i\pi\alpha_\rho(t)}}{\sin \pi\alpha_\rho(t)} s^{\alpha_\rho(t)} + \beta_{f^0}(t) \frac{1+e^{-i\pi\alpha_{f^0}(t)}}{\sin \pi\alpha_{f^0}(t)} s^{\alpha_{f^0}(t)} \quad (II,4)$$

Comme la voie  $s$  est exotique,  $\text{Im } A = 0$ , ce qui implique :

$$\alpha_\rho(t) = \alpha_{f^0}(t) \quad (\text{dégénérescence faible}) \quad (II,5a)$$

$$\beta_\rho(t) = \beta_{f^0}(t) \quad (\text{dégénérescence forte}) \quad (II,5b)$$

La deuxième égalité donne le résultat important que dans un schéma dual le  $\rho$  choisit le non sens à  $\alpha = 0$ , c'est à dire en pratique que la contribution du  $\rho$  à toutes les amplitudes d'hélicité a un zéro simple à  $\alpha_\rho(t) = 0$ .

Comme conséquence de la dégénérescence d'échange faible, on peut citer l'égalité des sections efficaces de réactions reliées par "renversement de ligne" :

$$\frac{d\sigma}{dt} (K^-p \rightarrow \bar{K}^0 n) = \frac{d\sigma}{dt} (K^0 p \rightarrow K^+ n) \quad (II,6a)$$

$$\frac{d\sigma}{dt} (K^-p \rightarrow \pi^- \Sigma^+) = \frac{d\sigma}{dt} (\pi^+ p \rightarrow K^+ \Sigma^+) \quad (II,6b)$$

(a) est bien vérifié dès que l'on atteint une énergie de 5 GeV, et l'égalité est impressionnante à 12 GeV<sup>(11)</sup>. Un désaccord d'un facteur 2 persiste jusqu'à 16 GeV dans (b) : la réaction induite par un pion est deux fois plus faible que celle induite par un kaon. Toutefois, il y a toujours la possibilité d'erreurs de normalisation.

On doit remarquer que (a) peut rester vrai si les résonances sont duales à l'ensemble pôles + coupures, tandis que (b) fait appel à la factorisation et suppose donc des pôles simples. D'autre part (a) est dominé par le spin-flip, où les coupures sont faibles. Il serait très intéressant d'isoler les amplitudes de spin-flip dans (b) pour savoir si elles sont en accord avec la dégénérescence d'échange.

Dans l'ensemble, et malgré quelques difficultés analogues à celle discutée plus haut, la dégénérescence d'échange apporte une simplification considérable de la paramétrisation de Regge. Le schéma pôles de Regge + dégénérescence d'échange + coupures engendrées par l'absorption donne une description semi-quantitative de la plupart des résultats expérimentaux.

## 2) Bootstrap dual<sup>(12)</sup>.

Généralisant l'exemple donné plus haut de la diffusion  $\pi^+ - \pi^+$ , on obtient le bootstrap dual. Considérons la diffusion de mésons pseudo-scalaires (P) et pseudo-vecteurs (V) dans le cadre de SU(3) :

$$M_1 + M_2 \rightarrow M_1 + M_2'$$

en admettant que les trajectoires de Regge échangées appartiennent à des singlets ou des octets de SU(3). Si  $X_{st}^{a,b}$  est la matrice de croisement  $t \rightarrow s$  et  $a$  une représentation exotique (10,  $\bar{10}$ , 27) nous aurons :

$$0 = \sum_{b=1,8} X_{st}^{a,b} \text{Im } A_{RG}^b \quad (II,7)$$

Ces équations donnent des relations entre différentes trajectoires de Regge; en les résolvant pour :

$$P + P \rightarrow P + P \quad P + V \rightarrow P + V$$

on montre que :

- les mésons vecteurs et tenseurs obéissent à la dégénérescence d'échange et forment des nonets

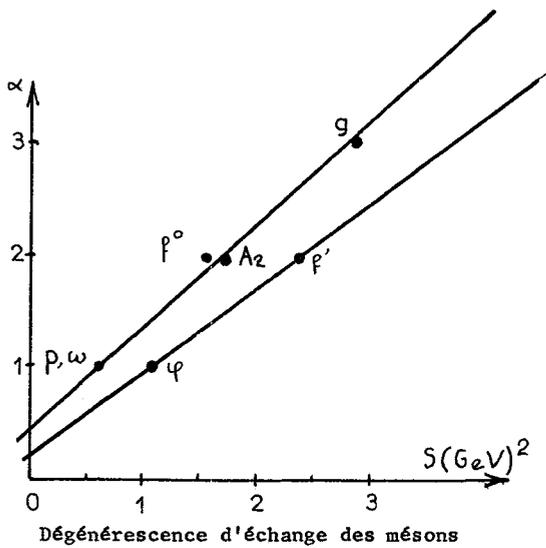


Fig. 9

- l'angle de mélange  $\omega - \phi$  et  $f - f^*$  est l'angle canonique :  $\phi \neq \rho\pi$ ,  $f^* \neq \pi\pi$ .

Ces résultats sont remarquables, d'abord parce qu'ils sont en excellent accord avec l'expérience (figure) et ensuite parce que ce sont des résultats typiques du modèle des quarks, alors que jamais les quarks n'ont été introduits explicitement (évidemment l'hypothèse de l'absence d'amplitudes exotiques n'est pas totalement indépendante d'un modèle de quarks!).

Si l'on ajoute les relations provenant de  $VV \rightarrow VV$ , les résultats sont beaucoup moins bons : on obtient la dégénérescence d'échange de nonets de mésons ayant une parité antinaturelle. La seule symétrie d'isospin implique :

$$m_\pi = m_\eta$$

résultat très désagréable, et qui rend obscur le rôle que jouent les mésons pseudoscalaires en général, et le pion en particulier, dans un schéma dual.

La solution des équations du bootstrap dual pour la diffusion méson-baryon :

$$P + B \rightarrow P' + B' \quad B \quad 8 \text{ ou } 10$$

conduit au résultat suivant

$$(a) \quad 8_{1/2}(1/2^+, 5/2^+, \dots) \Leftrightarrow 1 \otimes 8_{1/2}(3/2^-, 7/2^-, \dots)$$

$$(b) \quad 10 \otimes 8_{-1/2}(3/2^+, 7/2^+, \dots) \Leftrightarrow 8_{-1/2}(5/2^-, 9/2^-, \dots)$$

où  $\Leftrightarrow$  indique la dégénérescence d'échange, et l'indice des octets le rapport F/F+D. Dans l'ensemble il y a une assez bonne évidence expérimentale pour certaines des dégénérescences prédites par (a) et (b)

o Singlet  $\text{---} 8(5/2^-, \dots) \Leftrightarrow 10(3/2^+, 7/2^+, \dots)$

o Octet  $\text{---} 8(1/2^+, 5/2^+, \dots) \Leftrightarrow 8(3/2^-, 7/2^-, \dots)$

v Décuplet  $\text{---} 10(3/2^-, 7/2^-, \dots)$

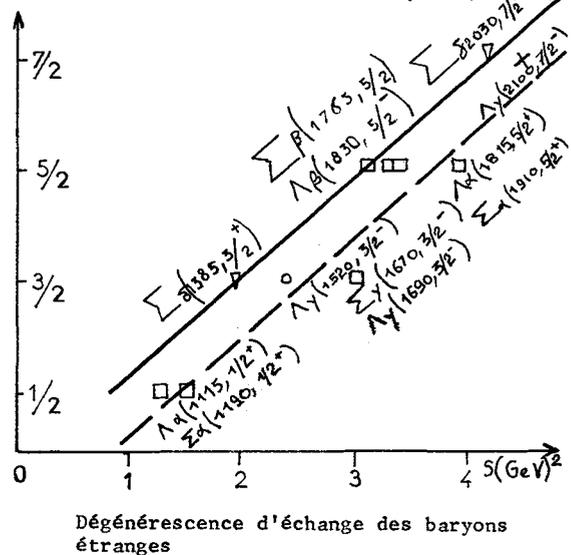


Fig. 10

et les rapports F/D des octets  $3/2^-$ ,  $5/2^-$  et  $5/2^+$  sont en accord raisonnable avec l'expérience. La prédiction d'un zéro du résidu de la trajectoire du  $\Delta$  à  $\alpha = 1/2$  (zéro d'Igi) est aussi la bienvenue. Cependant dans certains cas la dégénérescence d'échange est assez mal vérifiée ( $N_\alpha - N_\gamma$  par exemple), et l'octet  $3/2^+$  n'a pas l'air d'exister du tout. La considération des constantes de couplage permet d'expliquer, assez vaguement, ces désaccords.

Enfin le bootstrap dual conduit à la

"catastrophe  $\overline{B}\overline{B}$ " : les hypothèses (1) à (5) du paragraphe A impliquent que l'amplitude  $A(\overline{B}\overline{B} \rightarrow B\overline{B}) = 0!$

Si  $B$  et  $\overline{B} \in 8$ , il faut tenir compte explicitement de l'absence d'exotiques dans  $B\overline{B}$ , de la factorisation, etc... pour arriver à ce résultat (ou plutôt cette impasse). Mais dans le cas du décuplet, il suffit d'avoir les RSEF et l'absence d'amplitudes exotiques dans les voies  $\Delta\Delta$  et  $\overline{\Delta}\overline{\Delta}$   $Q = 2$ . En effet dans la réaction :

$$\Delta^{++} \overline{\Delta}^0 \rightarrow \overline{\Delta}^+ \Delta^+$$

on ne peut échanger que des pôles de Regge ayant  $L_t = 1(\rho, A_2)$ . Les voies  $u$  et  $s$  sont exotiques, donc le membre de gauche de la RSEF est nul, le  $\rho$  et le  $A_2$  se découplent de façon triviale. Il n'existe pas à l'heure actuelle de solution convaincante à cette catastrophe  $\overline{B}\overline{B}$ .

3) Diagrammes de dualité.

L'analogie entre le schéma dual et le modèle des quarks est explicitée dans les diagrammes de dualité. Ces diagrammes sont en gros équivalents à  $SU(3) +$  factorisation, mais dans certains cas ils peuvent être plus restrictifs.

Pour dessiner un diagramme de dualité, on explicite le contenu en quarks de chaque particule. Un diagramme légal doit correspondre à des annihilations  $q\overline{q}$  et ne doit pas contenir d'états intermédiaires autres que  $q\overline{q}$  et  $3q$ . Par exemple pour  $MM \rightarrow MM$  :

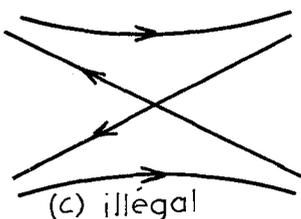
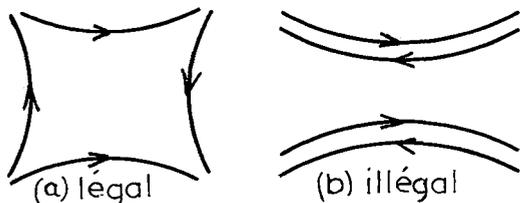
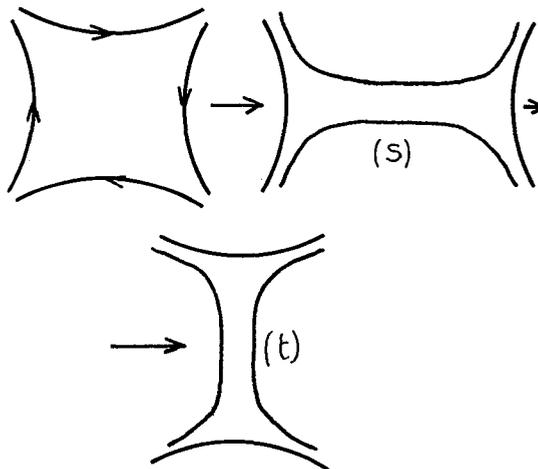


Diagramme de dualité pour  $MM \rightarrow MM$

Fig. 11a

(b) correspond à des diffusions  $qq$  ou  $q\overline{q}$ , et donc à un processus diffractif (échange de  $\mathbb{P}$ ). Le diagramme de dualité légal représente commodément le fait que les échanges se font dans la voie  $t$  ou la voie  $s$  : ceci se voit en déformant le diagramme sans changer sa topologie :



Déformation d'un diagramme de dualité légal

Fig. 11b

Quand on ne peut tracer qu'un diagramme de dualité illégal, la partie imaginaire de l'amplitude doit s'annuler. Par exemple pour  $\pi^+ \pi^+ \rightarrow \pi^+ \pi^+$  le seul diagramme possible est :

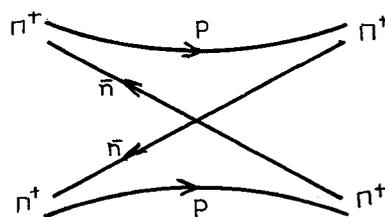


Diagramme de dualité  $\pi^+ \pi^+ \rightarrow \pi^+ \pi^+$

Fig. 12

qui est illégal; ce résultat était déjà connu, car la voie  $\pi^+ - \pi^+$  est exotique. Mais les diagrammes de dualité donnent aussi des résultats pour des voies non exotiques, par exemple :

$\text{Im } A(K^- p \rightarrow \pi^- \Sigma^+) = 0, s \rightarrow \infty, t \text{ petit } < 0$

En effet tous les diagrammes possibles sont illégaux (a)

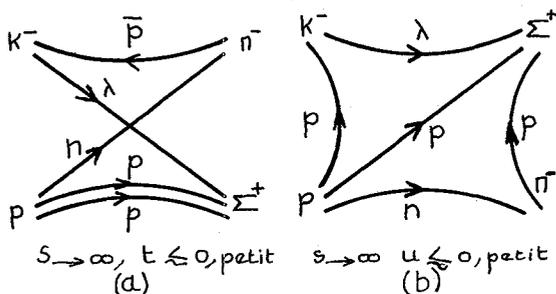


Diagramme de dualité pour  $K^- p \rightarrow \Sigma^+ \pi^-$

Fig. 13

Par contre le diagramme de dualité pour la même réaction, mais vers l'arrière :

$$K^- p \rightarrow \Sigma^+ \pi^-$$

est parfaitement légal (b).

La catastrophe  $B\bar{B}$  se comprend aisément si l'on constate qu'il est impossible de tracer des diagrammes légaux :

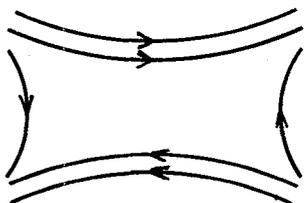


Diagramme de dualité pour  $B\bar{B} \rightarrow B\bar{B}$

Fig. 14

D. Conclusions sur la dualité.

(1) La dualité permet de décrire de façon assez satisfaisante les réactions à 2 corps et quasi-deux corps dans le domaine des moyennes et hautes énergies. Elle relie de façon convaincante les résonances proéminentes des ondes partielles périphériques aux pôles de Regge dominants (trajectoires des mésons vecteurs et tenseurs). Elle conduit à une simplification considérable de la phénoménologie des pôles de Regge.

(2) Les hypothèses (1) à (5) de la dualité conduisent à des résultats en désaccord quantitatif avec l'expérience, mais il n'existe pas à l'heure actuelle de théorie permettant de "casser" la dualité, ou plus exactement cette formulation particulière de la dualité.

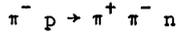
(3) Il est certain qu'une partie des défauts de la formulation (1) à (5) de la dualité vient de l'absence des coupures de Regge. Le rôle des coupures de Regge dans la dualité est loin d'être éclairci. Il est cependant très vraisemblable qu'une partie au moins des coupures est duale des résonances. En effet, on peut par exemple remarquer que le zéro de  $A^{(-)}(\pi N \rightarrow \pi N)$  à  $t = -0.2(\text{GeV})^2$ , construit par les résonances de la voie  $s$ , est probablement dû à une interférence destructive pôle-coupeure dans la voie  $t$ . De même le pic avant de  $\gamma p \rightarrow \pi^+ n$ , dû à une interférence pôle coupeure, peut être calculé à l'aide des RSEF<sup>(13)</sup>.

(4) Les solutions suivantes ont été proposées pour les problèmes posés par les mésons de parité antinaturelle et la catastrophe  $B\bar{B}$  :

- existence d'exotiques couplés à  $B\bar{B}$ <sup>(14)</sup>,
- abandon de la factorisation<sup>(15)</sup>,
- hiérarchie dans les équations de la dualité : plus le seuil d'une réaction est élevé, plus ses prédictions sont mauvaises<sup>(11)</sup>.

Les deux premiers remèdes ne semblent pas entièrement satisfaisants, le troisième est en bon accord avec l'expérience, mais n'est pas prédictif.

(5) La dualité oblige à revoir les analyses expérimentales des processus de production. Par exemple dans :



la dualité interdit d'ajouter deux Breit-Wigner dans la région de recouvrement des bandes du  $\Delta^+$  et du  $\Delta^-$ . En règle générale, la dualité met aussi

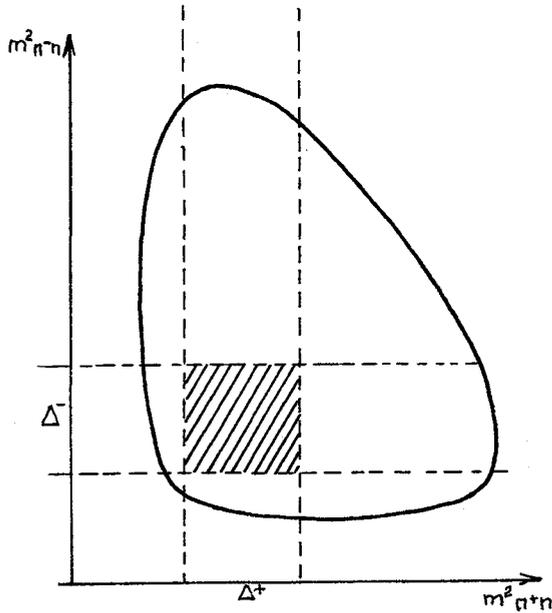


Diagramme de Dalitz  $\pi^- p \rightarrow \pi^+ \pi^- n$

Fig. 15

en garde contre la soustraction du "fond non résonant". Malheureusement la dualité ne donne aucune prescription quantitative, si ce n'est dans le cas de modèles trop particuliers, comme celui de Veneziano.

(6) Enfin la dualité n'est pas nécessairement incompatible, mais n'apporte aucune lumière sur deux résultats expérimentaux récents

- les sections efficaces de Serpurkhov, qui rendent certainement moins plausible et moins attrayante la conjecture de Harari-Freund,
- le dédoublement du  $A_2$ , qui apparaît comme un phénomène tout à fait extérieur à la dualité.

III. MODELES DUAUX.

A. Dualité locale.

On franchit une étape supplémentaire de la dualité en supposant qu'en chaque point, dans un certain domaine d'énergie :

$$A_{RS} \sim A_{RG}$$

ce qui est la dualité locale. Cette hypothèse est certainement beaucoup trop forte et on peut la tempérer quelque peu en prenant une moyenne sur un intervalle  $\Delta v$  de quelques centaines de MeV.

$$\int_v^{v+\Delta v} \text{Im } A_{RS} dv \sim \int_v^{v+\Delta v} \text{Im } A_{RG} dv \quad (\text{III},1)$$

ce qui est la dualité semi-locale. Cette forme de dualité présente un intérêt dans la région d'énergie intermédiaire :

$$1 \text{ GeV} \lesssim v \lesssim 2 \text{ GeV}$$

Nous n'insisterons pas sur ce type de dualité et renvoyons le lecteur par exemple au cours de Harari<sup>(1)</sup>, qui la discute en détail. Faisons simplement la remarque suivante : si la relation :

$$A_{RS} \equiv A_{RG} \quad (\text{II},2)$$

est exactement valable dans une certaine région d'énergie et de transfert, cela veut dire qu'elle peut être prolongée analytiquement à toute valeur de  $v$  et de  $t$ , et donc que  $A_{RS}$  doit en particulier reproduire une des caractéristiques de  $A_{RG}$ , à savoir les pôles dans la voie  $t$ . Cela ne peut se produire que si la somme sur les différentes résonances diverge pour certaines valeurs de  $t$ , ce qui implique l'existence d'un nombre infini de résonances. Le point important est que les pôles sont dus à la divergence d'une somme infinie, et non au fait qu'une certaine constante de couplage devient assez grande pour produire des états liés ou des résonances. Les équations de la dualité sont des équations de bootstrap, puisque les pôles d'une voie engendrent les pôles de la voie croisée. Cependant ces équations sont linéaires, et on peut en trouver au moins une solution dans

le modèle de Veneziano, que nous allons voir dans un instant.

Le changement de philosophie par rapport à l'ancien bootstrap basé sur la singularité la plus proche et l'unitarité à 2 corps (méthode N/D) est donc radical. Ce sont la multiplicité du spectre et les singularités lointaines qui engendrent les particules, et non les singularités les plus proches et l'unitarité.

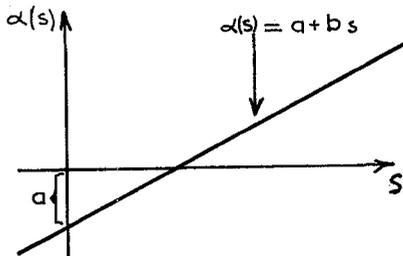
Cela n'implique pas que les deux points de vue sont contradictoires, mais plutôt que les approximations de départ sont contradictoires : en effet, à cause de la complexité de la dynamique des interactions fortes, on doit choisir un certain point de départ. La dualité met l'accent sur la multiplicité du spectre et oublie l'unitarité. L'ancien bootstrap tenait compte en principe de l'unitarité, mais en pratique on devait se restreindre à l'unitarité à 2 corps, une approximation probablement sans signification.

B. Le modèle de Veneziano.

Veneziano a proposé il y a deux ans<sup>(16)</sup> un modèle explicite pour réaliser mathématiquement l'idée de dualité, modèle qui a connu par la suite une popularité certaine. Ce modèle peut être considéré comme une solution physiquement satisfaisante des équations du bootstrap dual dans un monde d'interactions faibles, où l'approximation des résonances étroites devient une bonne approximation.

Mathématiquement le modèle se présente ainsi. Pour la fonction à 4 points, on suppose :

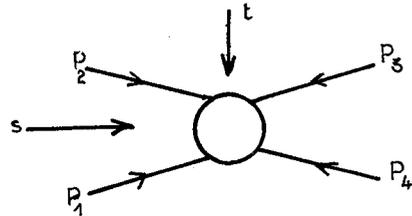
(a) que les trajectoires de Regge sont linéaires (et par conséquent indéfiniment croissantes)



Trajectoire de Regge linéaire

Fig.16

(b) que l'amplitude de diffusion est représentée par une fonction B d'Euler<sup>(17)</sup> :



$$s = (p_1 + p_2)^2$$

$$t = (p_2 + p_3)^2$$

Fig. 17

$$A = g^2 B_4(1234) = g^2 B(-\alpha(s), -\alpha(t)) =$$

$$g^2 \frac{\Gamma(-\alpha(s)) \Gamma(-\alpha(t))}{\Gamma(-\alpha(s) - \alpha(t))} \quad (III,3)$$

$$= g^2 \int_0^1 dx x^{-\alpha(s)-1} (1-x)^{-\alpha(t)-1} \quad (III,4)$$

où g est une constante de couplage.

Plus précisément, l'amplitude totale A sera donnée dans le cas général par la somme de 3 fonctions B<sub>4</sub>; en particulier si les particules externes sont des bosons identiques :

$$A = g^2 \{B_4(1234) + B_4(2134) + B_4(1324)\}$$

(III,5)

Notons aussi que la formule (B.1) n'est correcte que si l'intercept des trajectoires de Regge est négatif : a < 0; dans le cas de la diffusion π-π, par exemple, il faut modifier les arguments des fonctions Γ.

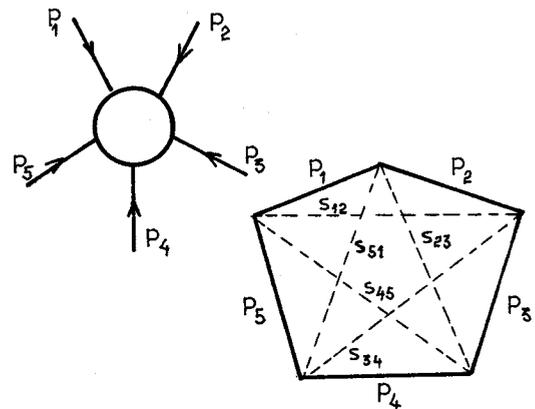
Pour montrer que le modèle réalise explicitement la dualité, on remarque que B<sub>4</sub> peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
 B_4 &= g^2 \sum_{J=0}^{\infty} \binom{\alpha(t)+J}{J} \frac{1}{J-\alpha(s)} \\
 &= g^2 \sum_{J=0}^{\infty} \binom{\alpha(s)+J}{J} \frac{1}{J-\alpha(t)} \quad \text{(III,6)} \\
 &= \sum_J \text{diagram } s = \sum_J \text{diagram } t
 \end{aligned}$$

Pour démontrer (III,6) il suffit de développer le facteur  $(1-x)^{-\alpha(t)-1}$  dans l'intégrale de (III,4) et d'intégrer. Nous voyons donc que  $B_4$  peut être interprété soit comme une somme de pôles (résonances) dans la voie  $s$ , soit comme une somme de pôles dans la voie  $t$ , et que les pôles de la voie  $t$  (resp.  $s$ ) ne doivent pas être ajoutés à ceux de la voie  $s$  (resp.  $t$ ) ; ils proviennent automatiquement de la divergence de la somme des pôles dans la voie croisée, et cela n'est évidemment possible que parce que ce nombre de pôles est infini.

La raison principale pour laquelle le modèle de Veneziano présente un intérêt autre que mathématique est qu'il peut être généralisé aux processus de production. La fonction à 5 points,  $B_5$ , a été découverte indépendamment par Bardakçi et Ruegg, et par Virasoro (18) ; elle dépend de 5 paramètres ( $s_{ij}$ ) en correspondance biunivoque avec les diagonales du diagramme dual (19), qui est dans ce cas un pentagone :

$$\begin{aligned}
 s_{12} = s_{345} &= (p_1 + p_2)^2 & s_{34} = s_{541} &= (p_3 + p_4)^2 \\
 s_{51} = s_{234} &= (p_5 + p_1)^2 & s_{23} = s_{451} &= (p_2 + p_3)^2 \\
 s_{45} = s_{123} &= (p_4 + p_5)^2 & & \quad \text{(III,7)}
 \end{aligned}$$

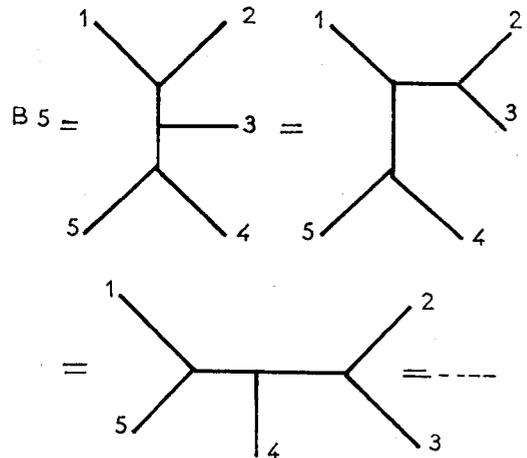


Fonction à 5 points et diagramme dual

Fig. 18

$$\begin{aligned}
 B_5(12345) &= \int_0^1 dx dy x^{-\alpha(s_{12})-1} y^{-\alpha(s_{45})-1} \\
 &\quad (1-x)^{-\alpha(s_{23})-1} (1-y)^{-\alpha(s_{34})-1} \\
 &\quad (1-xy)^{-2b} P_2 \cdot P_4 \quad \text{(III,8)}
 \end{aligned}$$

La généralisation à  $N$  particules a été donnée par de nombreux auteurs (20) (21).  $B_5$  peut aussi être écrit comme somme de pôles dans les voies  $s_{ij}$  définies précédemment, c'est à dire les voies formées par des groupes de particules adjacentes (il n'y a pas de pôle par exemple dans la voie  $s_{13} = (p_1 + p_3)^2$ ).



Variantes de B5

Fig. 19

En dehors de la propriété de dualité, les fonctions  $B_N$  possèdent les propriétés fondamentales de symétrie de croisement (ou plus précisément de symétrie cyclique)

$$B_5(12345) = B_5(23451) = B_5(54321) = \dots$$

(III,9)

et le comportement à la Regge et à la multi-Regge. Par exemple prenons  $B_5$  dans la configuration suivante

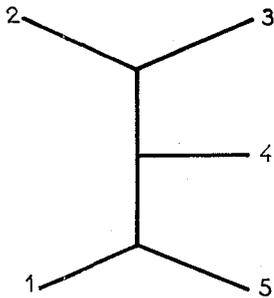


Fig. 20

$$s_{12} \rightarrow \infty; s_{34}, s_{45} \rightarrow \infty; \kappa = \frac{s_{34} s_{45}}{s_{12}} \text{ fixé}$$

$s_{23}, s_{15} < 0$  et fixés, alors :

$$B_5 \sim s_{34}^{\alpha(s_{23})} s_{45}^{(s_{15})} f(s_{23}, s_{15}, \kappa) \quad \text{(III,10)}$$

La dépendance par rapport à  $\kappa$  (relié à l'angle de Toller) est évidemment déterminée, et contrairement au modèle multi-Regge usuel, qui suppose  $f$  indépendant de  $\kappa$  pour des raisons de simplicité, on trouve que  $f$  dépend fortement de  $\kappa$ .

Enfin, on a la propriété de bootstrap : si on sépare les  $N$  particules en 2 groupes de  $M$  et  $N-M$  particules, et si on se place à  $\alpha(s) = 0$

$$s = (p_1 + \dots + p_M)^2 = (p_{M+1} + \dots + p_N)^2$$

ce qui veut dire que la particule intermédiaire est identique aux particules externes, on démontre que:

$$g^{N-2} B_N = g^{M-1} B_{N+1} \quad g^{N-M-1} B_{N-M+1} \quad \text{(III,11)}$$

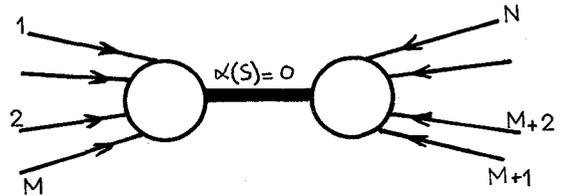


Fig. 21

A côté de ces propriétés très séduisantes la fonction  $B_N$  présente un certain nombre de graves inconvénients.

(a) Le modèle correspond fondamentalement à une approximation de résonances étroites et il viole par conséquent l'unitarité. Dans les applications phénoménologiques il est nécessaire de donner une partie imaginaire aux trajectoires de façon à rendre une largeur finie aux résonances.

(b) Le Pomeron n'a aucune place dans ce modèle, puisqu'il devrait être dual à un fond non-résonnant, et que l'amplitude est une somme de résonances.

(c) Enfin il paraît très difficile de généraliser  $B_N$  aux processus réalistes, où les trajectoires ont des intercepts positifs et les particules externes peuvent être de spin 1/2. Un gros travail a été fait pour écrire des amplitudes à 6 et 8 pions, mais on ne peut pas dire que les résultats soient à la hauteur des efforts déployés<sup>(22)</sup> : les expressions obtenues sont extrêmement compliquées, et ont des caractéristiques désagréables, notamment la nécessité de dédoubler le  $\rho$ . La situation pour les baryons est encore plus mauvaise; il est d'ailleurs bien possible que les difficultés avec les baryons ne soient pas spécifiques au modèle de Veneziano mais à la dualité en général.

C. Applications phénoménologiques (23).

Exception faite de la description du diagramme de Dalitz dans l'annihilation  $\bar{N}\bar{N} \rightarrow 3\pi$  (24), les applications de  $B_4$  à la phénoménologie n'ont pas connu de succès particulièrement spectaculaire. En effet, en ce qui concerne les "fits" à haute énergie, on ne gagne pas grand chose sur un modèle de Regge + dégénérescence d'échange; de plus la précision des résultats expérimentaux dans les réactions 2 particules  $\rightarrow$  2 particules est telle qu'il est nécessaire d'introduire des coupures d'une façon ou d'une autre, si l'on veut avoir une chance d'obtenir un accord quelconque avec l'expérience. Introduire les coupures avec les techniques actuelles (absorption, matrice K, eikonale, etc...), cela veut dire que l'on brise la symétrie de croisement, et la simplicité initiale du modèle est perdue.

Dans les processus de production, la situation est à priori plus favorable, en ce sens que les résultats expérimentaux sont moins précis et les modèles théoriques concurrents bien moins développés. En effet, si l'on veut une description significative des faits expérimentaux, il est nécessaire d'avoir une amplitude raisonnable même pour de faibles valeurs des énergies  $S_{ij}$  dans l'état final. C'est la raison pour laquelle le modèle multi-Regge original est extrêmement limité; son prolongement par le modèle CZA représente un développement important, mais CZA ne tient pas compte, au moins en principe, des résonances. Cependant, si on croit à la dualité, il doit en tenir compte au moins en moyenne. On est donc ramené aux difficultés du modèle d'interférences si l'on veut rajouter les résonances à CZA, sans parler du nombre de paramètres nécessaires.

Il est donc particulièrement intéressant de confronter  $B_5$  aux résultats expérimentaux pour les processus de production avec 3 particules dans l'état final. La première application faite par Peterson et Tornqvist (25) à la réaction :

$$K^+ p \rightarrow \pi^+ \pi^- \Lambda$$

a donné des résultats très encourageants, ce qui a conduit le groupe de Chan à s'attaquer aux réactions du type (26) :

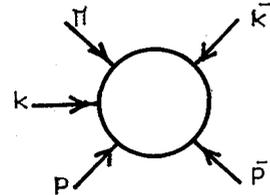
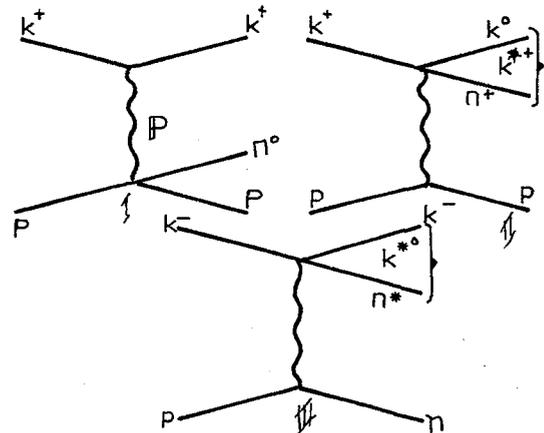


Fig.22

Ces réactions peuvent se décomposer en 3 groupes principaux :



Echanges dominants dans les groupes I, II, III

Fig. 23

- I.  $K^+ p \rightarrow K^+ \pi^0 p$  dominé par l'échange
- $K^- p \rightarrow K^- \pi^0 p$  du Pomeron
- etc...
- II.  $K^+ p \rightarrow K^0 \pi^+ p(A)$  la production de  $K^*$
- $K^- p \rightarrow \bar{K}^0 \pi^- p(B)$  chargé est dominée
- $\pi^- p \rightarrow K^- K^0 p(C)$  par l'échange du  $\omega$
- $\bar{p} p \rightarrow K^- K^0 \pi^+(D)$

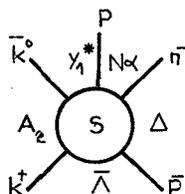
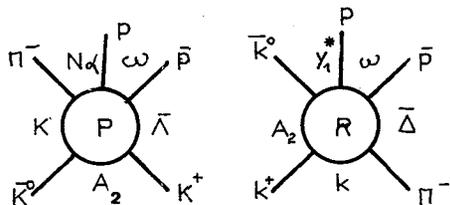
En principe l'échange du Pomeron est possible, mais on sait, théoriquement et expérimentalement, que cet échange est supprimé car le système  $K\pi$  a la parité naturelle contrairement au  $K$  incident (règle de Morrison).

III.  $K^- p \rightarrow K^- \pi^+ n$  la production du  $K^*$  neutre est dominée par l'échange du pion.

Utilisant l'invariance par isospin, on peut estimer à 15-20% la contribution du pion aux réactions du type II. En résumé on est conduit au modèle suivant pour les réactions des 3 groupes :

- I. Pomeron + Vecteur
- II. Vecteur
- III. Pomeron + pion

Il est clair que les réactions du groupe II donnent une bonne occasion de tester  $B_5$ , puisque l'on évite les problèmes du Pomeron et du pion. Chan et al ont obtenu une description globale satisfaisante des 3 réactions (A), (B), (C) entre 2,5 et 13 GeV/c en utilisant un seul paramètre (nous reviendrons un peu plus loin sur cette notion d'un seul paramètre). L'amplitude utilisée est la somme de 3 graphes P, R et S ajoutés avec un poids relatif 1 et multipliés par un paramètre de normalisation  $\beta$  (le paramètre de la théorie!) :



Graphes P, R, S

Fig. 24

Le "fit" rend compte de façon impressionnante, malgré quelques désaccords de détail :

- 1) des distributions de masse dans l'état final (Figure 25b),
- 2) de la dépendance en énergie des sections efficaces (Figure 25a),
- 3) des distributions angulaires de désintégration (Figure 25d),
- 4) des distributions en moment transféré (Figure 25b)
- 5) des distributions sur le diagramme de Van Hove etc...

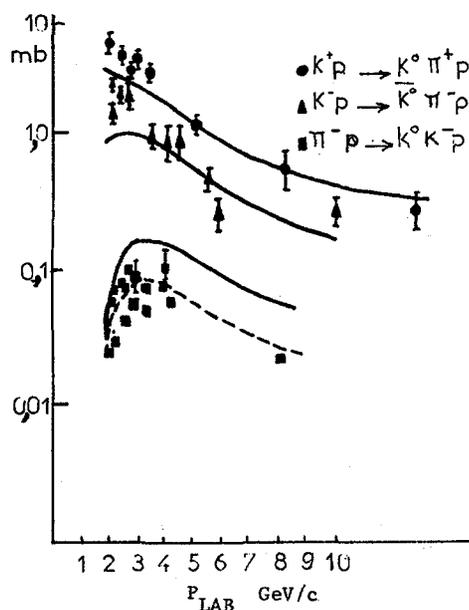


Fig. 25 a

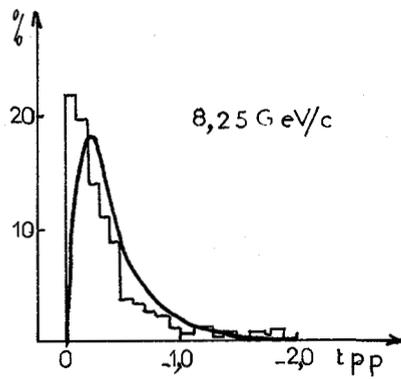
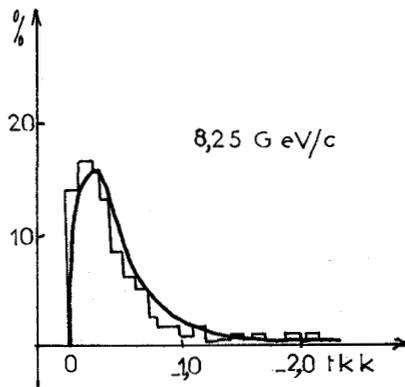


Fig. 25 b

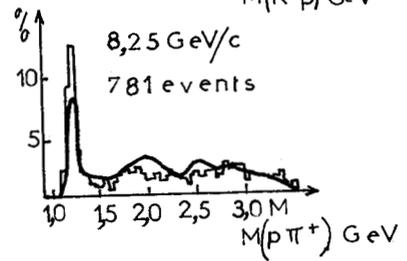
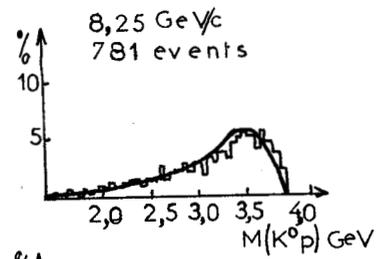
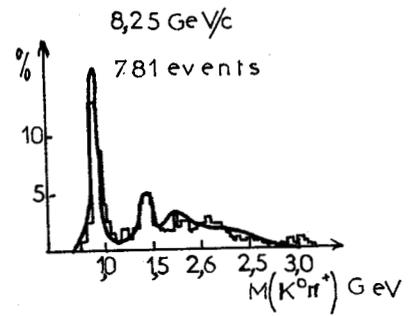


Fig. 25 c

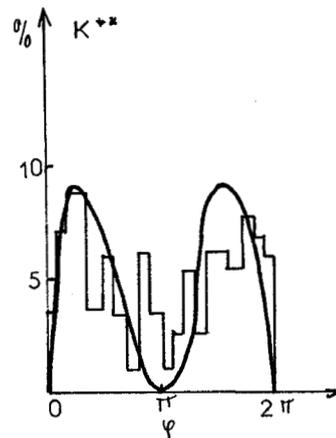
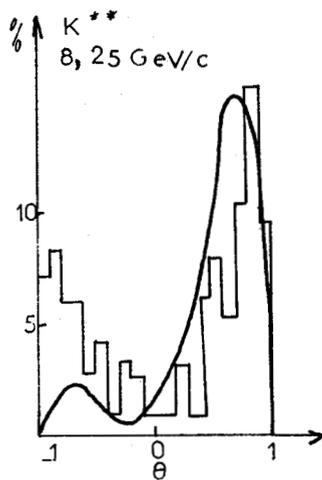
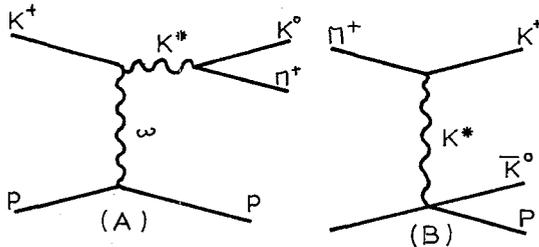


Fig. 25 d

Le fait que les résonances soit automatiquement incluses constitue une amélioration qualitative par rapport à CZA. Un point particulièrement non trivial est le test de croisement : la même amplitude rend compte de (A), (B), (C), et il faut remarquer qu'un simple renversement de ligne ne permet pas de passer de (A) ou (B) à (C) : en effet le  $K^*$  produit dans (A) comme résonance, est échangé dans (C) comme trajectoire de Regge.



Echange et production de  $K^*$

Fig. 26

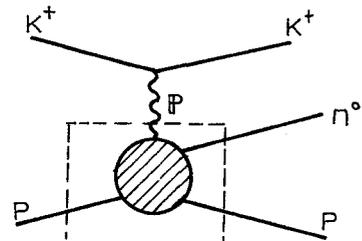
Ce test du croisement est assez spectaculaire, même si au lieu du rapport expérimental 20 entre (A) et (C) on trouve seulement un rapport théorique de 10. Mais ce désaccord d'un facteur 2 existe déjà dans le cas bien plus simple du renversement de ligne : il semble que les réactions induites par les  $\pi$  soient systématiquement trop faibles d'un facteur 2!

Les résultats de Chan et al sont certainement assez impressionnants, et représentent un progrès qualitatif sur ce que l'on savait faire précédemment avec les processus de production. Cependant il convient d'émettre un certain nombre de réserves.

En premier lieu on doit résoudre plusieurs problèmes fondamentaux avant que l'on puisse prétendre posséder un modèle des (ou d'une classe importante des) processus de production.

(1) On sait expérimentalement que la plupart des processus de production sont dominés par l'échange du Pomeron, ce qui restreint singulièrement le champ d'application de  $B_5$ , tant que le rôle du

Pomeron dans un modèle dual n'aura pas été élucidé. En attendant mieux on peut, suivant Kajantje et Papageorgiou<sup>(27)</sup>, rajouter une amplitude ad hoc pour l'échange du Pomeron dans les réactions du type I :



Amplitude pour le Pomeron

Fig. 27

Une fonction du type  $B_4$  décrit la "réaction"  $p + P \rightarrow \pi^0 p$ . Naturellement il n'est plus question de symétrie de croisement, la simplicité initiale du modèle est perdue, et les bases théoriques du modèle paraissent des plus fragiles.

(2) Inclure l'échange du pion ne va pas sans de sérieuses difficultés, d'abord à cause du rôle peu clair joué par le pion dans tout schéma dual ( $m_\pi = m_n!$ ), ensuite parce que l'échange du pion s'accompagne toujours d'une forte absorption, ce qui rend souhaitable l'introduction de coupures.

(3) Le rôle joué par les symétries internes, isospin et  $SU(3)$ , n'est pas entièrement clair. Par exemple, si Chan et al utilisent les graphes de dualité légaux, Petersson et Tornqvist affirment qu'ils ont besoin des diagrammes illégaux, et que les diagrammes légaux sont en contradiction flagrante avec l'expérience. Mais utiliser des diagrammes illégaux implique que par rotation de  $SU(3)$  on tombe inévitablement sur des amplitudes exotiques, ce qui paraît ennuyeux dans le cadre de la dualité. D'autres difficultés viennent du choix des trajectoires : en effet en mettant une seule trajectoire (cf.(4)), par voie, on restreint l'isospin dans cette voie, ce qui peut causer des ennuis dans les voies croisées. Par exemple le choix de trajectoires de Chan et al pour les réactions du groupe II viole la conjugaison de charge si on relie par isospin

les réactions du groupe II à celles des groupes I et III.

(4) Si l'on ne veut pas compliquer considérablement le calcul, il est nécessaire de se restreindre à 1 trajectoire par voie. Comme on l'a vu en (3), cela ne va pas toujours sans difficultés avec l'isospin, et parfois aussi avec résultats expérimentaux. Il est toujours difficile de se décider entre un  $N$  ou un  $\Delta$  pour une voie  $\pi^- p$ , un  $Y_0^*$  ou un  $Y_1^*$  pour une voie  $K^- p$ . Le choix final est en grande partie dicté par les résultats expérimentaux à reproduire, mais il serait probablement plus logique d'introduire les 2 trajectoires avec un poids relatif à déterminer. De même le poids relatif des différents graphes peut être plus ou moins fixé par des considérations sur la dégénérescence d'échange, et également les résultats expérimentaux, mais là aussi on pourrait garder ces poids relatifs comme paramètres : c'est d'ailleurs ce que font Bartsch et al.<sup>(28)</sup> Même si leurs poids relatifs déterminés par le fit sont assez peu différents de ceux choisis "a priori" par Chan et al, on peut émettre certaines réserves sur la notion de "fit à 1 paramètre".

(5) Afin de déplacer les pôles de  $B_5$  de l'axe réel, on doit donner une partie imaginaire aux trajectoires. Cette partie imaginaire est grossièrement déterminée par les largeurs des résonances qui se trouvent sur la trajectoire, mais peut varier dans certaines limites. Malheureusement il se trouve que les résultats théoriques sont assez sensibles aux parties imaginaires, qu'il faudrait peut être considérer aussi comme paramètres.

(6) Le spin est inclus de façon très approximative en admettant que l'amplitude est donnée par

$$A = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\mu^1 p_\nu^2 p_\rho^3 p_\sigma^4 B_5 \quad (\text{III},13)$$

ce qui, grossièrement parlant, veut dire que l'on a gardé uniquement la partie de spin-flip. Notons aussi que le facteur  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  détermine entièrement la distribution angulaire de la première résonance sur la trajectoire (c'est à dire le  $\rho$  et le  $K^*$ ) tandis que les désintégrations des récurrences ( $f, K^{**}$ ) sont des prédictions de  $B_5$ . Inclure correctement le spin, du moins d'un point de vue

cinématique, est certainement possible au prix de complications non négligeables; cependant, en l'absence d'une vraie fonction à N-points pour les particules pseudo-scalaires et de spin 1/2, il n'est pas sûr que l'inclusion du spin représente une amélioration significative, surtout si l'on se souvient des problèmes déjà posés par les réactions à 2 corps.

(7) D'après des résultats préliminaires de Chan et al, il semble probable que le croisement des baryons conduise à des désaccords très importants, voire catastrophiques. La section efficace prédite pour(D) :

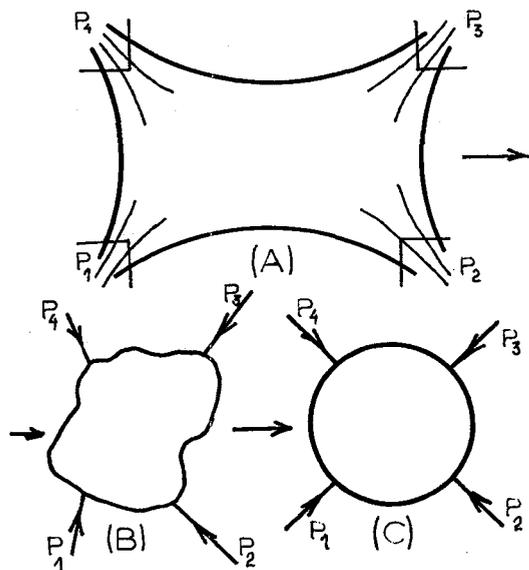
$$\bar{p}p \rightarrow K^- K^0 \pi^+$$

est vraisemblablement trop grande d'un facteur 10 au moins : Il serait intéressant de savoir si un traitement correct du spin améliore la situation; ce serait un bon test pour déterminer si l'inclusion du spin est vraiment essentielle, ou reste purement formelle. Indépendamment du problème du croisement, il paraît très difficile de reproduire les caractéristiques générales de la réaction  $\bar{p}p$  à l'aide de  $B_5$  (Baubillier et al.<sup>(29)</sup>)

#### D. Développements théoriques<sup>(30)</sup>.

Tout à fait indépendamment des applications phénoménologiques, on peut penser que le modèle de Veneziano fournit un prototype de théorie duale, qui ne représente pas nécessairement la nature de façon quantitative, mais dont certaines caractéristiques sont suffisamment générales pour pouvoir être extrapolées qualitativement à une théorie plus réaliste. En ce sens on pourrait comparer le modèle de Veneziano au modèle de Lee. Une meilleure comparaison serait peut-être le modèle d'Ising en mécanique statistique (du moins si le programme de Kikkawa, Sakita et Virasoro (K.S.V.)<sup>(31)</sup>, qui va être décrit par la suite, peut être mené à son terme!)

On ne peut espérer découvrir ces caractéristiques générales d'une théorie duale que si on est capable de remédier aux défauts les plus flagrants du modèle de Veneziano, à savoir :



Le modèle analogique de Nielsen

Fig. 29

où s'écoule un courant d'impulsion limité par les lignes de quarks (A). Au lieu d'un courant d'impulsion, imaginons qu'il s'agit d'un courant électrique ordinaire dans un milieu de résistivité constante, l'intensité du courant dans l'électrode (i) étant égale à  $p_i$  (B). On est donc ramené à un problème harmonique (le courant  $\vec{j}$  dans le milieu dérive d'un potentiel  $\phi$ ,  $\vec{j} = -\vec{\nabla}\phi$ ,  $\nabla^2\phi = 0$ ) avec des conditions aux limites du type de Neumann :

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \sum_{i=1}^N p_i \delta(z - z_i) \quad (\text{III}, 18)$$

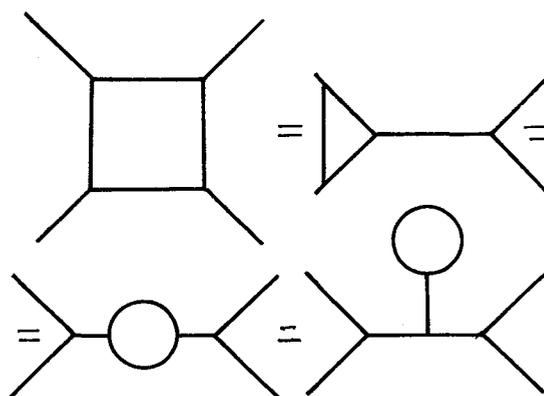
où  $z$  repère un point sur la frontière du domaine, et  $z_i$  est la position de l'électrode (i). L'intégrand de la fonction à N-points est alors simplement (34)

$$e^{\frac{b}{2} \sum_{i \neq j} p_i \cdot p_j N(z_i, z_j)} \quad (\text{III}, 19)$$

où  $N$  est la fonction de Neumann du problème. Cette quantité est d'ailleurs étroitement liée à l'exponentielle de la chaleur dégagée par effet Joule dans la région d'interaction, si  $b$  est proportionnel à la résistivité du milieu. Le problème de Neumann se résout aisément si l'on se ramène par transformation conforme à une

région d'interaction ayant la forme d'un disque (C), et la fonction à N-points s'obtient en intégrant sur toutes les configurations.

Revenons maintenant au programme d'unitarisation; l'observation initiale de K.S.V. est que la fonction à N-points viole l'unitarité de façon tout à fait analogue au terme de Born en théorie des perturbations ordinaire : en effet on ne tient compte que des états intermédiaires à une particule. K.S.V. proposent d'inclure les états intermédiaires à 2 particules ou plus en supposant que la fonction à N-points représente le terme de Born de la théorie, et que l'on doit donc construire une théorie des perturbations à la Feynman-Dyson. Ils espèrent ainsi obtenir une théorie unitaire, ou du moins qui satisfasse l'unitarité perturbative, tout en maintenant les propriétés de symétrie de croisement et de dualité. Par exemple on construit aisément le graphe carré qui possède une coupure à 2 particules dans les voies  $s$  et  $t$ , satisfait la symétrie de croisement (ou plus exactement la symétrie cyclique) et possède des pôles dans toutes les voies requises par la dualité : autrement dit, ce graphe carré représente aussi une série d'autres graphes, qui devraient être calculés indépendamment dans la théorie des perturbations usuelle.



Variantes du diagramme carré

Fig. 30 a

L'équivalence des divers graphes se voit aisément en déformant le diagramme de dualité :

a) construire un modèle satisfaisant l'unitarité  
 b) engendrer la singularité de Pomeranchuk  
 Il est vraisemblable que a) et b) sont étroitement liés!

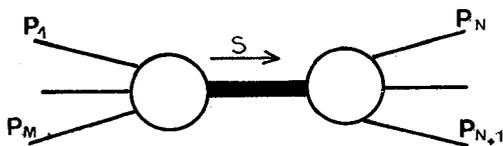
Naturellement il s'agit de résoudre (a) et (b) en préservant symétrie de croisement et dualité, et non d'utiliser des procédés ad hoc comme ceux décrits précédemment. Une fois que l'on a décidé qu'il s'agit de résoudre un modèle, et non une théorie réaliste, on est libre de commencer par le cas le plus simple, c'est à dire le cas de bosons scalaires identiques échangeant des trajectoires de Regge d'intercept négatif.

Avant de passer à (a) et (b), il est utile de mentionner deux propriétés très importantes de la fonction à N-points.

La première propriété est celle de factorisation. Cela veut dire que le résidu d'un pôle à  $\alpha(s) = J$  dans une voie :

$$S = (p_1 + \dots + p_M)^2 = (p_{M+1} + \dots + p_N)^2$$

se factorise en un nombre de termes indépendant de M et N :



Factorisation de la fonction à N points

Fig. 28

$$\text{Res } B_N |_{\alpha(s)=J} = \sum_{i=1}^{d(J)} g_i^{(J)}(p_1 \dots p_M) \cdot g_i^{(J)}(p_{M+1}, \dots, p_N) \quad (\text{III,14})$$

Cette factorisation permet de compter le nombre de résonances du niveau  $\alpha(s) = J$ ; on trouve que chaque résonance est caractérisée par un ensemble de nombres quantiques  $(l_1, l_2, \dots, l_n, \dots)$ ,  $l_i$  entier, la masse M de la résonance étant donnée par <sup>(32)</sup>:

$$M^2 = b^{-1} \left\{ -a + \sum_{n=1}^{\infty} (l_1 + 2l_2 + \dots + nl_n + \dots) \right\} \quad (\text{III,15})$$

Ces nombres  $(l_1, l_2, \dots, l_n, \dots)$  peuvent être considérés comme des nombres d'occupation, chaque résonance étant en correspondance biunivoque avec les états propres d'un hamiltonien <sup>(32)</sup> :

$$H = \sum_n a_n^+ a_n, [a_n, a_m^+] = \delta_{nm} \quad (\text{III,16})$$

Cette observation permet d'introduire un formalisme opératoire, qui rend compte automatiquement de la propriété de factorisation, et permet de construire aisément les graphes comportant des boucles fermées.

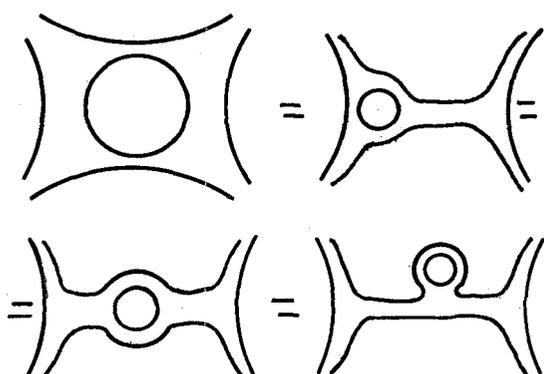
La propriété de factorisation permet de compter le nombre de résonances, et en particulier lorsque  $s \rightarrow \infty$ , on trouve que ce nombre croît comme l'exponentielle de la masse :

$$d(J) \sim e^{c\sqrt{J}} \quad \text{quand } J \sim M^2 \rightarrow \infty \quad (\text{III,17})$$

et ce n'est peut être pas un hasard si ce résultat est aussi celui de modèles statistiques.

L'ennui le plus sérieux vient de l'existence de fantômes sur la deuxième trajectoire fille et les trajectoires plus basses : ce problème des fantômes n'a reçu à l'heure actuelle aucune solution satisfaisante.

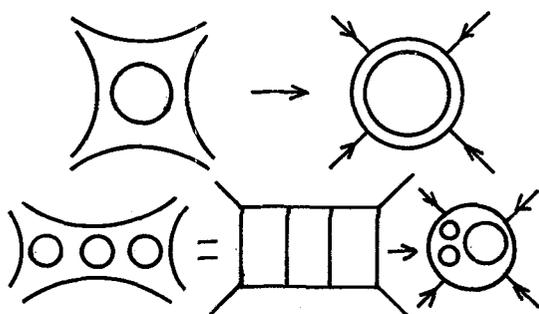
La deuxième propriété importante de la fonction à N-points est que l'on peut lui donner une interprétation quasi-physique. Plusieurs interprétations ont été proposées, mais la plus intéressante paraît être celle de Nielsen <sup>(33)</sup>, qui donne une analogie de type électrodynamique. Nielsen interprète le diagramme de dualité comme une région à deux dimensions



Déformations du diagramme de dualité

Fig. 30 b

Ces diagrammes ont une interprétation particulièrement simple dans le modèle analogique de Nielsen. En effet le diagramme à une boucle sera donné par la solution du problème de Neumann pour un anneau (34) :



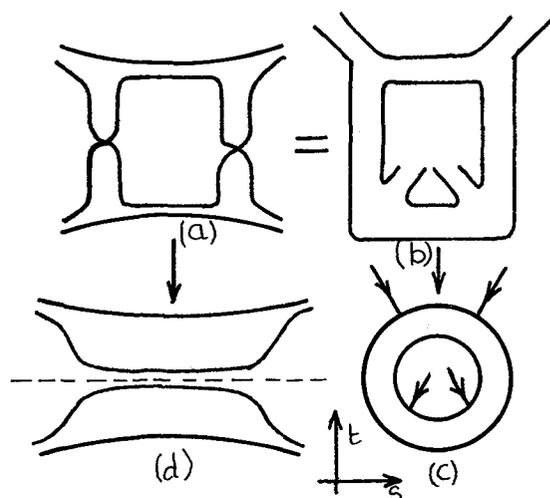
Boucles simples et multiples dans le modèle analogique

Fig. 31

tandis que pour un diagramme à N- boucles il suffit de percer N-trous dans le disque initial.

Les diagrammes en boucle sont violemment divergents, et les divergences peuvent être associées aux changements de topologie du diagramme de dualité : cercles se rétrécissant en un point ou entrant en collision.

Ces "graphes de Feynman reggézisés" présentent des propriétés tout à fait nouvelles, dues à la possibilité de tordre les lignes de quark, par exemple :



Diagrammes "twistés" et Pomeron

Fig. 32

Dans le langage de Nielsen, cela correspond à faire rentrer le courant par des électrodes placées à l'intérieur de l'anneau, et pas seulement à l'extérieur. Si une seule ligne de quark est tordue, il est facile de se rendre compte que l'on doit résoudre le problème d'électrodynamique sur une bande de Moebius! (35)

Le diagramme dessiné plus haut est particulièrement intéressant. En effet, si l'on sépare les lignes de quarks, il est facile de se convaincre que l'on échange dans la voie t les nombres quantiques du vide (cf. figure 32). Ce graphe pourrait donc être relié à la singularité de Pomeranchuk. On trouve effectivement que la singularité dominante est une coupure d'intercept fixe  $1/3$ , indépendante des paramètres a et b de la trajectoire initiale, et de pente  $b/2$ , c'est à dire la moitié de la pente de la trajectoire initiale (36). Ce résultat serait extrêmement encourageant, si ce graphe n'avait pas ailleurs de singularités inacceptables. Néanmoins on peut espérer que ces singularités disparaîtront si l'on inclut d'autres graphes, et qu'il sera possible de produire un Pomeron engendré par le modèle lui-même, sans le rajouter de l'extérieur.

Il faut reconnaître que les bases théoriques du programme de K.S.V. restent actuelle-

ment assez discutables, et que plusieurs objections sérieuses peuvent être faites concernant la signification théorique du développement de perturbations. Il est probable que seuls les résultats concrets du programme seront capables d'infirmer ou de confirmer ces objections, mais cela veut dire qu'il reste encore un travail mathématique considérable à accomplir. Toutefois le bilan des résultats obtenus en un an est encourageant. En effet, on a obtenu :

- a) un vertex à  $N$ -reggeons simple<sup>(37)</sup> (alors qu'il y a moins de six mois le vertex à 3 reggeons demeurait mystérieux),
- b) les diagrammes à une boucle avec twists<sup>(36)</sup>,
- c) la possibilité de renormaliser la divergence des diagrammes à une boucle, alors que le problème posé par cette divergence semblait insurmontable<sup>(38)</sup>,
- d) la solution des diagrammes à  $N$ -boucles et des résultats partiels sur leur divergence<sup>(35) (39)(40)</sup>.

Cependant il reste encore des problèmes difficiles à résoudre :

- a) la signification de la renormalisation des diagrammes à une boucle est loin d'être éclaircie, et son extension aux diagrammes à  $N$ -boucles semble hautement non triviale,
- b) il est nécessaire de faire disparaître les fantômes de la théorie finale, et il n'y a pour le moment aucune indication sur la manière dont on pourrait y arriver (sauf peut-être si  $a = 1$ ).

#### IV. CONCLUSION

L'amplitude dont rêvent les théoriciens, et qui serait à la fois

- (1) analytique,
- (2) symétrique de croisement,
- (3) unitaire,

ne nous a pas encore été fournie par la dualité. Cependant la dualité nous a amenés à prendre comme première approximation d'une théorie dynamique des interactions fortes une amplitude qui satisfait (1) et (2), en laissant (3) de côté pour le moment. Comme nous l'avons souligné cela représente un

changement radical de philosophie par rapport aux approches précédentes. Il est incontestable que dans le domaine phénoménologique la dualité a obtenu de bons résultats, tandis que sur le plan théorique la linéarité des équations a permis de trouver un modèle dual intéressant. Il est également encourageant que les processus de production semblent vouloir s'intégrer naturellement dans la théorie.

Nous sommes heureux de remercier Maurice JACOB et Jacques WEYERS pour leur lecture critique du manuscrit. Des discussions avec Danièle AMATI et Victor ALESSANDRINI nous ont permis d'éclaircir ou de préciser de nombreux points.

Enfin M.L.B. désire remercier J. PRENTKI et W. THIRRING pour leur hospitalité à la division théorique du C.E.R.N., où ce travail a été rédigé.

#### REFERENCES ET NOTES

- (1) Afin de ne pas surcharger les références, nous ne citerons, en principe, que les travaux originaux récents, et renvoyons le lecteur aux nombreux articles de revue pour une bibliographie complète. Pour les réactions à 2 corps et à quasi 2-corps, voir par exemple l'article de revue de J.D. JACKSON, Rev. Mod. Phys. 42, 12 (1970) ou Ph. SALIN, rapport à cette conférence.
- (2) G. FOX : exposé à la conférence de Stony Brook (1969) (non publié).
- (3) Il existe un nombre impressionnant de cours ou d'articles de revue sur la dualité. Citons par exemple : (a) Proceedings de la conférence de Lund (1969), exposés de H. LIPKIN, M. JACOB, O. GREENBERG. (b) M. JACOB : notes de cours Schlädming (1969) et Brandeis (1970). (c) H. HARARI, notes de cours Brookhaven (1969). (d) M. KUGLER, notes de cours Schlädming (1970) etc... sans oublier l'article original : R. DOLEN, D. HORN et C. SCHMIDT, Phys. Rev. 166, 1768 (1967).
- (4) En identifiant dans la figure 1 a et a' avec les mésons, b et b' avec les nucléons, l'amplitude

$\pi$ -nucléon s'écrit :  $\bar{u}(p_4) \left[ -A + \frac{1}{2} (\not{p}_1 + \not{p}_3) \right] B$   
 $u(p_2)$  et :  $A' = A + \frac{1}{4m^2} \not{v} / (\not{v}^2 - t)$  B.A' et B  
sont respectivement, les amplitudes de renversement et non renversement d'hélicité dans la voie t.  $A'^{(-)}$ ,  $v_B^{(-)}$  (resp  $A'^{+}$ ,  $v_B^{+}$ ) désignent les amplitudes impaires (resp. paires) par croisement.

(5) Ces cercles sont dus avant tout au facteur de signature  $\exp(-i\pi\alpha(t))$ .

(6) A.BOYARSKI et al.: Conférence de Liverpool (1969).

(7) H.ATHERTON et al.: prétirage CERN (1969).

(7a) P.LEHMANN, communication privée.

(8) En toute rigueur cette phrase est incorrecte, et il faut aller au-delà des RSEF ordinaires pour la justifier.

(9) H.HARARI et Y.ZARMI : Phys. Rev. 187, 2230 (1969).

(10) H.HARARI et Y.ZARMI : Phys. Lett. 32B, 291 (1970).

(11) G.GOLDHABER : communication à la Conférence de Kiev (1970).

(12) Une excellente revue du bootstrap dual peut être trouvée dans J.MANDULA, J.WEYERS et G.ZWEIG : Ann. Rev. Nucl. Sci., à paraître.

(13) J.JACKSON et C.QUIGG : Phys. Lett. 29B, 236 (1969).

(14) J.ROSNER : Phys. Rev. Lett. 21, 950 (1968).

(15) M.KUGLER : Phys. Lett. 32B, 107 (1970).

(16) G.VENEZIANO : Nuovo Cimento, 57A, 190 (1968).

(17) La définition  $t = (p_2 + p_3)^2$  est plus commode que la définition habituelle  $t = (p_1 + p_3)^2$  pour discuter le modèle de Veneziano.

(18) K.BARDAKCI et H.RUEGG, Phys. Lett. 28B, 342 (1968); M.VIRASORO : Phys. Rev. Lett. 22, 37 (1969).

(19) A ne pas confondre avec le diagramme de dualité!

(20) Pour une revue de la construction et des propriétés de  $B_N$ , cf. par exemple : H.M.CHAN; prétirage CERN TH 1057 (1969).

(21)  $B_4$  et  $B_5$  ont une propriété unique : le nombre de variables cinématiques indépendantes  $s_{ij}$  est le même que le nombre de trajectoires de Regge  $\alpha(s_{ij})$  dont dépendent  $B_4$  et  $B_5$  (2 et 5 resp.). Par contre  $B_6$  dépend de 9 trajectoires alors qu'il y a seulement 8 variables indépendantes; en général  $B_N$  dépend de  $\frac{N(N-3)}{2}$  trajectoires tandis qu'il y a  $(3N-10)$  variables indépendantes. Si  $B_N$  décrit une amplitude correspondant à N mésons externes identiques, l'amplitude devra comprendre  $\frac{1}{2} (N-1)!$  termes.

(22) H.RUBINSTEIN et al.: prétirages, Weizmann Institute (1970). D.OLIVE et W.ZAKREWSKI : Nucl. Phys. B21,303 (1970).

(23) Voir par exemple les exposés de C.LOVELACE : à la Conférence d'Argonne, prétirage CERN TH 1041 (1969) et à la Conférence d'Irvine, prétirage CERN TH 1123 (1970).

(24) C.LOVELACE : Phys. Lett. 28B, 264 (1968).

(25) B.PETERSSON et N.TORNQVIST : Nucl. Phys. B13, 629 (1969).

(26) H.M.CHAN et al.: Nucl. Phys. B19, 173 (1970).

(27) K.KAJANTJE et S.PAPAGEORGIU : Nucl. Phys. B20, 31 (1970).

(28) J.BARTSCH et al.: Nucl. Phys. B20, 63 (1970)

(29) M.BAUBILLIER et al.: communication à cette conférence.

(30) Voir par exemple : V.ALESSANDRINI, D.AMATI, M.LE BELLAC et D.OLIVE : notes de cours, pré-tirage CERN TH 1160.(1970).

(31) K.KIKKAWA, B.SAKITA et M.VIRASORO : Phys. Rev. 184, 1701 (1969).

(32) Afin de simplifier l'argument, on n'a pas tenu compte des indices de Lorentz et du mode scalaire (cf. réf. 30).

(33) D.FAIRLIE et H.NIELSEN : Nucl. Phys. B20, 637 (1970).

(34) En toute rigueur le modèle analogique ne donne que la partie de l'intégrant dépendant des produits scalaires  $p_i \cdot p_j$ ,  $i \neq j$ . De même le modèle analogique ne donne pas la fonction de partition à l'origine de la divergence dans les diagrammes en boucle.

(35) V.ALESSANDRINI : pré-tirage CERN TH 1215 (1970).

(36) D.GROSS et al.: Phys. Rev., à paraître.

(37) C.LOVELACE : Phys. Lett (à paraître), CERN TH 1184 (1970).

(38) A.NEVEU et J.SCHERK : Phys. Rev.(à paraître).

(39) C.LOVELACE : Phys. Lett (à paraître), CERN TH 1203 (1970).

(40) M.KAKU et J.SCHERK : pré-tirage Berkeley (1970).