HAL
open science

Méthode élémentaire de calcul des lentilles électrostatiques

Noel J. Félici

To cite this version:

Noel J. Félici. Méthode élémentaire de calcul des lentilles électrostatiques. J. Phys. Phys. Appl., 1959, 20 (S12), pp.97-109. 10.1051/jphysap:01959002001209700 . jpa-00212767

HAL Id: jpa-00212767

https://hal.science/jpa-00212767

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Tome 20 SUPPLÉMENT AU N° 12 DÉCEMBRE 1959

LE JOURNAL DE PHYSIQUE

ET

LE RADIUM

PHYSIQUE APPLIQUÉE

MÉTHODE ÉLÉMENTAIRE DE CALCUL DES LENTILLES ÉLECTROSTATIQUES

Par NOEL J. FÉLICI,

Professeur à la Faculté des Sciences de Grenoble,
Laboratoire d'Électrostatique et de Physique du Métal du C. N. R. S.

Résumé. — Le calcul des lentilles électroniques a passé jusqu'ici pour une affaire de spécialistes, exigeant des moyens importants. Les formules simplifiées de lentilles minces étaient regardées avec raison comme totalement insuffisantes.

L'auteur expose une méthode qui permet de calculer, avec une approximation de quelques centièmes, tous les éléments d'une lentille électronique, sans exiger aucune opération mathématique autre qu'une intégration graphique simple. Cette méthode permet à un non-spécialiste une appréciation très rapide des possibilités d'une lentille électronique, comparable à celle donnée par les formules élémentaires de l'optique lumineuse.

Dans le cas des lentilles faibles, la méthode conduit à des développements en série fournissant des résultats très précis et qui mettent en évidence diverses propriétés peu connues des lentilles.

Abstract. — The computation of electron lenses has so far been considered as a rather complicated matter, calling for substantial computing facilities. Weak lens formulae were generally discarded by specialists as being unable to give satisfactory results in practical problems.

The present paper is devoted to a computing method which is, in fact, an extension of the weak lens formulae based on Picht equation. Even in the case of very strong electrostatic lenses, the numerical error does not exceed a few percent. The most tedious part of the computation is the graphical evaluation of an integral, and does not require more than five to ten minutes. This method enables the average scientist or engineer to get a quick and precise insight into the performance of electron lenses.

In the case of weak lenses, new formulae with series expansions are given, and some interesting properties of those lenses are established.

Méthode élémentaire de calcul des lentilles électrostatiques. — L'établissement de formules approchées, mais simples et maniables, est d'un grand intérêt dans toutes les branches de la science et de la technique. A moins d'être un expert chevronné, familiarisé avec les ordres de grandeur et les valeurs numériques par une longue pratique, on trouve une grande utilité dans toute expression qui permette de se faire rapidement une idée des phénomènes, quitte à préciser les valeurs exactes si nécessaire.

L'enseignement élémentaire de l'optique, bénéficiant d'une longue tradition, nous présente ainsi quelques formules lapidaires sur les lentilles minces ou épaisses, insuffisantes sans doute pour le professionnel qui veut établir un nouvel instrument d'optique, mais combien utiles pour tous les physiciens !

Il n'en est malheureusement pas de même en optique électronique, science beaucoup plus récente, dont l'enseignement est assez exceptionnel, et qui, en conséquence, est restée surtout l'affaire de spécialistes, pour lesquels formules ou expressions élémentaires ont moins d'intérêt.

A l'heure actuelle, avec le développement prodigieux de la physique corpusculaire et nucléaire, l'optique électronique connaît des applications innombrables ; il est donc nécessaire que l'étudiant, le physicien ou l'ingénieur possèdent quelques jalons leur permettant de situer les performances

Article published online by EDP Sciences and available at http://dx.doi.org/10.1051/jphysap:01959002001209700

de tel système de lentilles sans recourir à des abaques souvent peu utilisables ou même inexactes. L'intérêt d'expressions seulement approchées est d'ailleurs beaucoup plus grand en optique électronique qu'en optique lumineuse, parce que les aberrations sont incorrigibles et que beaucoup d'appareils peuvent se contenter d'une précision assez réduite.

Les formules de lentilles faibles. — Dans les traités d'optique électronique, on trouve des formules pour les lentilles « minces », ou « faibles », qui devraient tenir la place de l'expression bien connue [1]

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right).$$

Dans le cas des lentilles électrostatiques, qui sont de loin les plus fréquemment utilisées, les auteurs s'empressent de faire remarquer qu'elles sont beaucoup trop inexactes pour être utilisables, et les présentent comme de simples curiosités [2]. A les en croire, seule l'intégration de l'équation différentielle des trajectoires peut donner une précision suffisante. Malheureusement, une telle intégration est rigoureusement impraticable, en quelques minutes, sur le coin d'un tableau noir ou d'une feuille de papier, et il est donc impossible de se faire une idée, même grossière, des propriétés d'une lentille électrostatique, fût-elle très faible. Cette situation, on l'imagine, est des plus gênantes.

Il n'en est pas de même pour les lentilles magnétiques. L'équation différentielle des trajectoires :

$$\frac{d^2 r}{dx^2} + r\frac{eB^2}{8\,mU} = 0 \qquad (1)$$

donne pour distance focale d'une lentille faible :

$$\frac{1}{f} = \frac{e}{8\,mU}\int_a^b B^2\,dx. \qquad (2)$$

On peut apprécier la valeur de cette approximation en considérant le cas d'un champ magnétique constant sur l'axe, et disparaissant brusquement aux deux extrémités d'un segment AB (Solénoïde très allongé). L'équation différentielle est alors intégrable et l'on trouve, en posant

$$\Omega^2 = eB^2/(8\,mU)$$

et en appelant l l'épaisseur de la lentille (distance AB)

$$1/f = \Omega \sin \Omega l,$$

tandis que la formule des lentilles faibles donne :

$$1/f = \Omega^2 l.$$

Le rapport des deux expressions est $\frac{\Omega l}{\sin \Omega l}$. L'erreur atteint 10 % pour $\Omega l = \pi/4$, c'est-à-dire $f/l \approx 1{,}6$. Ainsi, tant que la lentille est assez faible pour que la distance focale soit sensiblement supérieure à la longueur où règne le champ, la formule (2) est suffisamment approchée. En ce qui concerne la position des plans principaux, le raisonnement élémentaire conduit à les confondre « au milieu » de la lentille, ou, si celle-ci n'est pas symétrique, au centre de gravité de la surface limitée par la courbe $y = B^2(x)$. La comparaison avec la lentille calculable qui précède montre que cette approximation est encore meilleure que celle obtenue sur la distance focale. En effet la distance du plan principal à la face d'émergence, est exactement

$$\frac{l}{2}\left(\frac{\operatorname{tg} \Omega l/2}{\Omega l/2}\right)$$

au lieu de $l/2$.

L'erreur sur cette distance est de 5 %, ce qui représente 1,5 % de la distance focale, quand $\Omega l = \pi/4$.

Ainsi les formules des lentilles « faibles » (on n'ose pas dire « minces » car cela suggèrerait des ordres de grandeur inexacts !) sont très satisfaisantes en optique électronique magnétique (*fig.* 1). Il existe, bien sûr, des cas où l'on ne peut

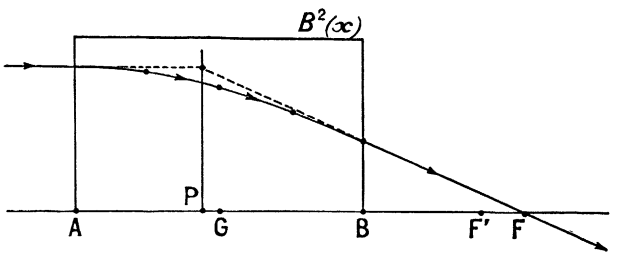

FIG. 1. — Lentille magnétique avec variation rectangulaire de l'induction, pour $\Omega l = \pi/3$. Bien que la distance focale soit voisine de l'épaisseur de la lentille, on voit que l'approximation d'une seule lentille mince est encore assez bonne. Le plan principal est très près du centre de gravité de $B^2(x)$, et le foyer F est voisin du foyer F' de la lentille mince.

s'en contenter, comme dans l'étude des objectifs de microscope, mais il faut reconnaître que leur domaine de validité est plus étendu qu'on ne le penserait à première vue.

La relation entre la distance focale et l'induction, dans une même lentille où l'on fait varier le courant magnétisant est aussi remarquablement simple. Si l'on multiplie $B(x)$ en tout point par un facteur constant, la convergence est multipliée par son carré.

Cas des lentilles électrostatiques. — Si nous passons maintenant aux lentilles faibles électrostatiques, nous rencontrons dès l'abord confusion

et contradictions. Il n'y a pas une, mais *deux* formules de lentilles faibles, irréductibles l'une à l'autre, et le problème des plans principaux pose de graves difficultés. Enfin la relation entre la distance focale et les potentiels, dans une même lentille, ne se présente pas simplement.

Si nous considérons l'équation des trajectoires en optique électrostatique :

$$4\,Vr'' + 2\,V'r' + V''r = 0 \qquad (3)$$

une transformation élémentaire permet de l'écrire :

$$(V^{1/2}\,r')' + \frac{1}{4}\,V^{1/2}\,V''r = 0 \qquad (3')$$

ou en intégrant

$$|V^{1/2}\,r'|_a^b = -\frac{1}{4}\int_a^b V^{1/2}\,V''r\,\mathrm{d}x \qquad (3')$$

Jusqu'ici nous n'avons fait que des transformations mathématiquement équivalentes. Nous introduisons en revanche une approximation en admettant que dans une lentille faible, r ne varie pas sensiblement dans la traversée de la lentille et que nous pouvons l'extraire du signe somme. On en déduit immédiatement la distance focale :

$$\frac{1}{f_b} = -\frac{(r')_b}{r_a} = +\frac{1}{4\sqrt{V_b}}\int_a^b \frac{V''\,\mathrm{d}x}{\sqrt{V}} \qquad (3'')$$

(en faisant naturellement $(r')_a = 0$).

Dans le cas, très fréquent, où le champ est nul de part et d'autre de la lentille, une intégration par parties donne la formule équivalente :

$$\boxed{\frac{1}{f_b} = \frac{1}{8\sqrt{V_b}}\int_a^b \frac{V'^2\,\mathrm{d}x}{V^{3/2}}} \qquad (4)$$

formule bien connue, mais qu'on se garde d'utiliser.

L'équation (3) n'est pas toujours la forme la plus commode de l'équation des trajectoires. Une transformation remarquable, due à Picht, consiste à changer de fonction et à poser : $R = r.\,V^{1/4}$.

L'équation (3) prend alors la forme réduite :

$$\frac{R''}{R} + \frac{3}{16}\left(\frac{V'}{V}\right)^2 = 0. \qquad (5)$$

Dans le cas d'une lentille faible, on peut raisonner sur la fonction R comme précédemment sur r. Un rayon incident parallèle à l'axe répond à $R_a = \text{Cste}$, $R'_a = 0$. Le quotient $1/F = -R'_b/R_a$ sera, en supposant R constant pendant la traversée de la lentille

$$\frac{1}{F} = -\frac{R'_b}{R_a} = \frac{3}{16}\int_a^b \left(\frac{V'}{V}\right)^2 \mathrm{d}x.$$

La longueur F peut être appelée « distance focale réduite ».

Il est aisé de passer de R'_b/R_a à r'_b/r_a c'est-à-dire de F à la distance focale ordinaire f_b si les potentiels sont constants de part et d'autre de la lentille $R'_b = r'_b.\,V_b^{1/4}$ etc..., d'où

$$f_b = (V_b/V_a)^{1/4}\,F$$

$$\boxed{\frac{1}{f_b} = \frac{3}{16}\,(V_a/V_b)^{1/4}\int_a^b (V'/V)^2\,\mathrm{d}x.} \qquad (6)$$

Cette formule, contenant apparemment les mêmes approximations que (4), lui est-elle équivalente ? Il est manifeste que non. Prenons le cas asymptotique d'une lentille infiniment faible, où le potentiel varie très peu, en valeur relative, dans la traversée de la lentille. Nous pouvons alors considérer V comme une simple constante, et assimiler V_a/V_b à un. (4) se réduit à

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{8\,V^2}\int_a^b V'^2\,\mathrm{d}x$$

et (6) donne

$$\frac{1}{f} = \frac{3}{16\,V^2}\int_a^b V'^2\,\mathrm{d}x.$$

Les coefficients sont différents, dans le rapport 3/2. Les deux formules ne coïncident pas, même dans le cas asymptotique de la lentille infiniment faible.

D'où provient la contradiction ? Nous croyons avoir fait, dans les deux calculs, des approximations équivalentes, mais ce n'est qu'en apparence.

Dans l'équation réduite (5) le second terme est toujours positif. En assimilant R à une constante, nous commettons une erreur sur R'' et par suite sur R'_b, mais cette erreur est certainement inférieure, en valeur relative, à la variation relative de R au travers de la lentille. Nous sommes dans un cas similaire à celui de l'équation (1) de l'optique magnétique.

Tout autre est le cas de l'équation (3'). Dans toute lentille sans grille où le champ est nul de part et d'autre, V'' change au moins une fois de signe. L'intégrale du second membre contient des termes positifs et négatifs. Une erreur relative donnée sur r conduit à une erreur plus grande (et impossible à délimiter) sur l'intégration. En fait, quand la lentille devient très faible, l'erreur relative commise en prenant r constant tend vers une valeur fixe.

L'équation (3'') n'est applicable qu'à une lentille ou fraction de lentille *où V'' garde un signe constant.* Si l'on a une lentille où V'' change de signe, il faut la décomposer en lentilles minces élémentaires *non-accolées*, où V'' garde un signe constant. Cette méthode donne des résultats corrects [3]. En d'autres termes, l'erreur commise en accolant les différentes lentilles élémentaires est finie et ne peut être négligée.

Ainsi, la formule (4) est toujours inexacte et doit être rejetée. La formule (3″) est correcte si on l'applique à une région du champ où V'' garde un signe constant (partie convergente ou divergente d'une lentille à deux électrodes ; ou bien lentille-trou). La formule (6) est correcte dans tous les cas où le champ est nul de part et d'autre de la lentille.

Problème des plans principaux. — La formule inexacte (4) implique également une position incorrecte des plans principaux. D'après la façon même dont on l'a établie, les plans principaux doivent tomber « sur la lentille ». Or on sait bien qu'il n'en est rien dans toute lentille baignée par des potentiels différents. Les plans principaux sont en dehors de la lentille, du côté du petit potentiel. Pis encore, si l'on considère une lentille infiniment faible, les plans principaux s'éloignent à l'infini ! Cette nouvelle contradiction souligne le caractère erroné de (4).

Si nous reprenons le raisonnement conduisant à (6) nous sommes amenés à distinguer deux sortes de plans principaux. Une trajectoire de la fonction $R(x)$, initialement parallèle à l'axe, se courbe dans la lentille, émerge, redevient rectiligne, et coupe l'axe en un foyer. A ce foyer correspond ce qu'on peut appeler « un plan principal réduit », intersection des trajectoires incidentes et émergentes. Où est-il ? Exactement comme pour le plan principal ordinaire dans une lentille magnétique, le fait que la courbure de $R(x)$ est toujours de même sens entraîne, avec une haute approximation, que le « plan principal réduit » tombe « au centre » de la lentille, ou, mieux encore, au centre de gravité de l'aire limitée par la courbe $y(x) = (V'/V)^2$. Remarquons par ailleurs que dans toute lentille de part et d'autre de laquelle le champ est nul, les deux distances focales réduites sont rigoureusement égales. En effet, les deux distances focales ordinaires f_a et f_b sont liées aux distances focales réduites F_a et F_b par les relations :

$$f_a = F_a(V_a/V_b)^{1/4} \qquad f_b = F_b(V_b/V_a)^{1/4}.$$

Comme

$$f_a/f_b = (F_a/F_b).(V_a/V_b)^{1/2} = n_a/n_b = (V_a/V_b)^{1/2}$$

et il résulte

$$F_a/F_b = 1.$$

C'est pourquoi nous écrirons $F_a = F_b = F$.

Dans notre approximation des lentilles faibles, nous sommes amenés à confondre les deux plans principaux réduits au « centre de gravité » de la lentille. Les deux distances focales réduites étant rigoureusement égales, les deux foyers doivent être équidistants du centre de gravité. C'est une conséquence que le calcul rigoureux des lentilles montre comme étant très approchée, même dans les lentilles fortes.

Nous allons maintenant fixer la position des plans principaux ordinaires.

Considérons une lentille forte quelconque, où le champ est nul de part et d'autre. Appelons Π_a et Π_b les plans principaux réduits, V_a et V_b les potentiels de part et d'autre de la lentille ($V_a < V_b$) ; F_a et F_b les foyers, P_a et P_b les plans principaux ordinaires associés.

On a déjà dit que

$$\overline{\Pi_b F_b}/\overline{P_b F_b} = F/f_b = (V_a/V_b)^{1/4}$$

donc

$$\overline{\Pi_b P_b} = \overline{P_b F_b} - \overline{\Pi_b F_b} = f_b - F$$
$$= F[(V_b/V_a)^{1/4} - 1] = f_b[1 - (V_a/V_b)^{1/4}]$$

formule arithmétique.

De même

$$\overline{\Pi_a P_a} = \overline{\Pi_a F_a} - \overline{P_a F_a} = F - f_a$$
$$= F[1 - (V_a/V_b)^{1/4}] = f_a[(V_b/V_a)^{1/4} - 1]$$

formule également arithmétique.

Revenons maintenant à notre approximation des lentilles faibles. Elle conduit à confondre Π_a et Π_b au centre de gravité G. On a donc :

$$GP_b = F[(V_b/V_a)^{1/4} - 1] \qquad GP_a = F[1 - (V_a/V_b)^{1/4}]$$

$$GP_b = GF_a = F \qquad \frac{1}{F} = \frac{3}{16}\int_a^b (V'/V)^2\,dx. \qquad (7)$$

Telles sont les formules qui donnent les éléments d'une lentille électrostatique dans notre approximation des lentilles faibles (*fig.* 2).

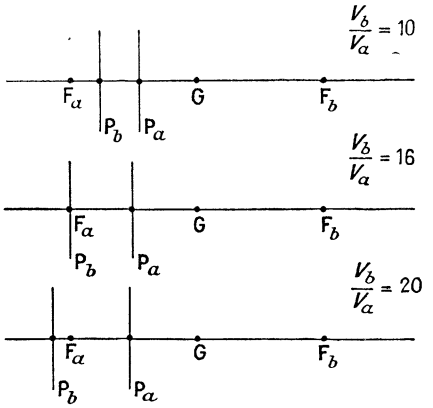

FIG. 2. — Disposition des éléments d'une lentille électrostatique dans l'approximation d'une seule lentille mince réduite. Les plans principaux de cette dernière sont confondus au centre de gravité G, dont les foyers sont équidistants. On remarque que pour un rapport de potentiels égal à 16, le plan principal P_b coïncide avec F_a. Cette prévision est très sensiblement vérifiée dans les lentilles réelles à deux électrodes.

Vérifions que ces formules permettent de retrouver certaines propriétés connues.

GP_a et GP_b sont arithmétiques, dans le cas où $V_a < V_b$. Les deux plans principaux sont donc bien en dehors de la lentille, du côté du petit potentiel.

On a manifestement $GP_b > GP_a$. Les plans principaux sont bien croisés.

Nos formules conduisent également à des résultats moins banals.

Le quotient

$$\frac{GP_b}{GP_a} = \left(\frac{V_b}{V_a}\right)^{1/4} - 1 \Big/ 1 - \left(\frac{V_a}{V_b}\right)^{1/4} = \left(\frac{V_b}{V_a}\right)^{1/4} = \left(\frac{n_b}{n_a}\right)^{1/2}.$$

L'interstice

$$P_a P_b = F . \frac{(V_b{}^{1/4} - V_a{}^{1/4})^2}{(V_a V_b)^{1/4}}.$$

Il se réduit à zéro quand les potentiels extrêmes sont égaux. C'est là un résultat très approché, même pour les lentilles fortes (objectifs symétriques de microscopes).

Que deviennent les foyers et les plans principaux quand la lentille est infiniment faible ? Posons $\frac{V_b - V_a}{V_a} = \varepsilon$ et faisons tendre ε vers zéro. La partie principale de $1/F$ est $\frac{3}{16\, V_a^2} \int_a^b V'^2\, dx$ et l'intégrale $\int_a^b V'^2\, dx$ est, dans une lentille donnée, égale à $(V_b - V_a)^2/l$, l étant une longueur caractéristique. Donc F est de l'ordre de $\frac{16}{3} . \frac{l}{\varepsilon^2}$, de même f_a et f_b. Comme $(V/_b V_a)^{1/4} - 1$ est de l'ordre de $\varepsilon/4$ les distances GP_b et GP_a deviennent infinies comme $(4/3)\,(l/\varepsilon)$. Les plans principaux s'éloignent donc *à l'infini* dans une lentille infiniment faible baignée par des potentiels différents.

Quant à l'interstice

$$P_a P_b = F . (V_a^{1/4} - V_b^{1/4})^2/(V_a V_b)^{1/4}$$

F est de l'ordre de $(16/3)\,(l/\varepsilon^2)$ mais

$$[(V_b/V_a)^{1/4} - 1]^2$$

est de l'ordre de $\varepsilon^2/16$. L'interstice *tend donc vers la limite* $l/3$.

Appréciation de l'erreur commise. — Les formules précédentes donnent, des lentilles électrostatiques, une description qui, qualitativement au moins, est certainement correcte. On y retrouve en effet les résultats connus sur la position et le croisement des plans principaux.

Pour apprécier l'erreur relative dans le calcul des distances focales, on peut se référer au cas de la lentille magnétique. Nous y avons vu que l'erreur est probablement inférieure à 10 % quand la distance focale est 1,5 à 2 fois plus grande que la longueur où règne $B^2(x)$. Étant donné la parfaite analogie de l'équation des trajectoires en optique magnétique et de l'équation réduite de l'optique électrique, on peut dire de même que l'erreur sur la distance focale réduite est probablement inférieure à 10 % quand cette distance est 1,5 à 2 fois supérieure à celle où la fonction $(V'/V)^2$ a une valeur notable. Les distances focales ordinaires se déduisant de la distance focale réduite par le facteur connu $(V_a/V_b)^{\pm 1/4}$, l'erreur commise sur elles est identique.

On peut donc dire que nos formules représentent une approximation utile, meilleure que 10 %, dès que la distance des foyers au « centre de gravité » de la lentille est notablement supérieure à la longueur où règne le champ. Cela correspond, dans une lentille à deux électrodes, à un rapport de potentiels très différent de l'unité. Prenons comme exemple une lentille à deux diaphragmes, petits par rapport à leur distance. Alors le champ est pratiquement uniforme entre les diaphragmes, et V une fonction linéaire. Le calcul de l'intégrale $\int_a^b \frac{V'^2}{V^2}\, dx$ est immédiat et donne $\frac{(V_b - V_a)^2}{V_a V_b} . \frac{1}{l}$ l étant la distance des diaphragmes.

La distance focale réduite est

$$F = (16/3)\, l\, V_a V_b/(V_b - V_a)^2.$$

Si $F \approx 1{,}7\, l$ cela fait

$$V_a V_b/(V_b - V_a)^2 \approx 3 \times 1{,}7/16 = 5/16,$$

ce qui correspond à un rapport $V_b/V_a = 5$.

Notre méthode de calcul est donc certainement valable pour toutes les lentilles à deux électrodes où le rapport des potentiels ne dépasse pas quelques unités, et, *a fortiori*, pour les lentilles où le rapport est peu supérieur à l'unité, cas très fréquent dans les accélérateurs de particules et dispositifs similaires.

Une vérification précise a été effectuée, pour un type de fonction $V(x)$ fréquemment rencontré en pratique, grâce à la machine à calculer arithmétique de l'Université, qui a permis une intégration numérique de l'équation réduite, avec une erreur certainement inférieure à 10^{-3} ou même 10^{-4}.

Nous avons pris pour la dérivée $V'(x)$ l'expression

$$V'(x) = E_0\, e^{-\pi x^2/k^2}$$

considérée par plusieurs auteurs [5] comme une bonne approximation du champ axial dans une lentille à deux tubes ou à deux diaphragmes égaux.

Comparons les résultats pour le rapport des potentiels $V_b/V_a = 10$ qui correspond à une lentille très convergente, donc à la limite de nos approximations. En prenant comme unité la longueur $k/\sqrt{\pi}$ et pour origine le centre géométrique ($x = 0$) le calcul à la machine donne :

Distance focale réduite	:	2,89
Abscisse du foyer F_a	:	3,36
Abscisse du foyer F_b	:	2,31

Le calcul approché, avec évaluation graphique de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} (V'/V)^2 \, dx$ donne :

Distance focale réduite : 2,59

Abscisse du foyer F_a : 3,12

Abscisse du centre de gravité : 0,53

Abscisse du foyer F_b : 2,06

La distance focale réduite est trop petite d'environ 12 %, en revanche le centre de gravité de l'aire de $(V'/V)^2$ coïncide pratiquement avec le milieu du segment $F_a F_b$ (son abscisse est 0,53 et celle du milieu de $F_a F_b$ 0,525).

Les plans principaux réduits que notre méthode conduit à confondre au centre de gravité, ont pour abscisses 0,47 et 0,58 ; ils ne sont pas croisés. Le centre de cet interstice coïncide sensiblement avec le centre de gravité.

Si l'on effectue la comparaison pour des rapports de potentiels inférieurs à 10, l'erreur diminue rapidement. Elle est inférieure à 2 % pour $V_b/V_a = 4$ et à 4 % pour $V_b/V_a = 6$.

Amélioration de la méthode. — Notre procédé a consisté jusqu'à présent à traiter la lentille réduite comme une lentille infiniment mince, en confondant les plans principaux réduits au centre de gravité, et en posant

$$\frac{1}{F} = \frac{3}{16} \int_a^b \left(\frac{V'}{V}\right)^2 dx.$$

Cette approximation est valable, contrairement à celle qui consiste à traiter la lentille ordinaire comme infiniment mince, à cause du signe constant de $(V'/V)^2$, tandis que V'' change de signe.

L'essentiel de l'erreur réside dans la valeur de la distance focale réduite, toujours trop petite. Ce n'est que pour des lentilles très fortes, où la fonction $(V'/V)^2$ a en outre certaines distributions exceptionnelles, que les plans principaux réduits s'écartent notablement du centre de gravité.

Il est possible d'améliorer sérieusement le procédé, et de traiter des lentilles très fortes avec des erreurs de quelques centièmes seulement, en tenant compte grossièrement, par des procédés apparemment simplistes mais efficaces, de l'épaisseur de la lentille réduite.

Un premier moyen, d'application immédiate, est de remplacer la fonction $(V'/V)^2$ par une fonction rectangulaire de même aire et de même centre de gravité. Les trajectoires réduites sont connues, ce sont des arcs de sinusoïde comme dans la lentille magnétique à champ constant sur l'axe. Nous assignerons à la lentille réduite une épaisseur l raisonnable et nous poserons

$$\frac{3}{16} \int_a^b \left(\frac{V'}{V}\right)^2 dx = \Omega^2 l.$$

L'équation différentielle $\frac{R''}{R} + \frac{3}{16}\left(\frac{V'}{V}\right)^2 = 0$ est remplacée par $\frac{R''}{R} + \Omega^2 = 0$.

La distance focale réduite améliorée sera $1/F_{am} = \Omega \sin \Omega l$ et le coefficient de correction par rapport aux calculs précédents $\sin \Omega l / \Omega l$. L'argument Ωl est obtenu par $(\Omega l)^2 = l/F$; F étant la distance focale réduite précédemment trouvée.

Reprenons l'exemple numérique de la lentille à deux tubes avec $V_b/V_a = 10$. Il est raisonnable de prendre pour l la distance des points où la fonction $(V'/V)^2$ passe par la moitié de sa valeur maxima. Ici $l = 1{,}20$ d'où $\Omega l = 0{,}744$ ou 42°40′ $\sin \Omega l = 0{,}678$.

$$\sin \Omega l / \Omega l = 0{,}910.$$

La distance focale réduite est maintenant 2,85, elle ne diffère que de 1 % de la valeur exacte !

Les abscisses des foyers deviennent, pour $F_a = 2{,}85 + 0{,}53 = 3{,}38$, pour $F_b = 2{,}85 - 0{,}53 = 2{,}32$, valeurs également correctes à 1 % près.

Un second moyen d'amélioration consiste à diviser l'aire de la courbe $(V'/V)^2$ en deux moitiés à peu près égales par une ordonnée et de représenter approximativement la lentille réduite par deux lentilles infiniment minces dont les centres sont aux centres de gravité partiels des deux moitiés de l'aire. Appelons F la distance focale réduite de 1re approximation, F_{am} la distance focale réduite améliorée, F_1 et F_2 les distances focales réduites de deux lentilles partielles, l la distance de leurs centres de gravité. On a

$$\frac{1}{F_{am}} = \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} - \frac{l}{F_1 F_2} \quad \text{mais} \quad \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} = \frac{1}{F}$$

et si $F_1 \# F_2$, $1/F_1 F_2$ est pratiquement égal à $1/4F^2$ d'où

$$\frac{1}{F_{am}} = \frac{1}{F} - \frac{l}{4F^2} = \frac{1}{F}\left(1 - \frac{l}{4F}\right).$$

Il suffit donc de trouver la distance l des deux centres de gravité.

Appliquons la méthode à une lentille à deux tubes très forte, pour laquelle $V_b/V_a = 20$ (même unité de longueur que dans l'exemple similaire précédent).

Le calcul exact à la machine donne une convergence réduite 0,531.

Le calcul de la lentille infiniment mince réduite donne 0,653, soit une erreur en excès de 23 %.

Le calcul amélioré par la fonction rectangulaire 0,574 erreur 8 %.

Le calcul amélioré par les 2 lentilles minces partielles 0,565 erreur 6 % (*fig.* 3).

(La distance des deux centres de gravité est 0,83, d'où $1 - l/4F = 0{,}864$.)

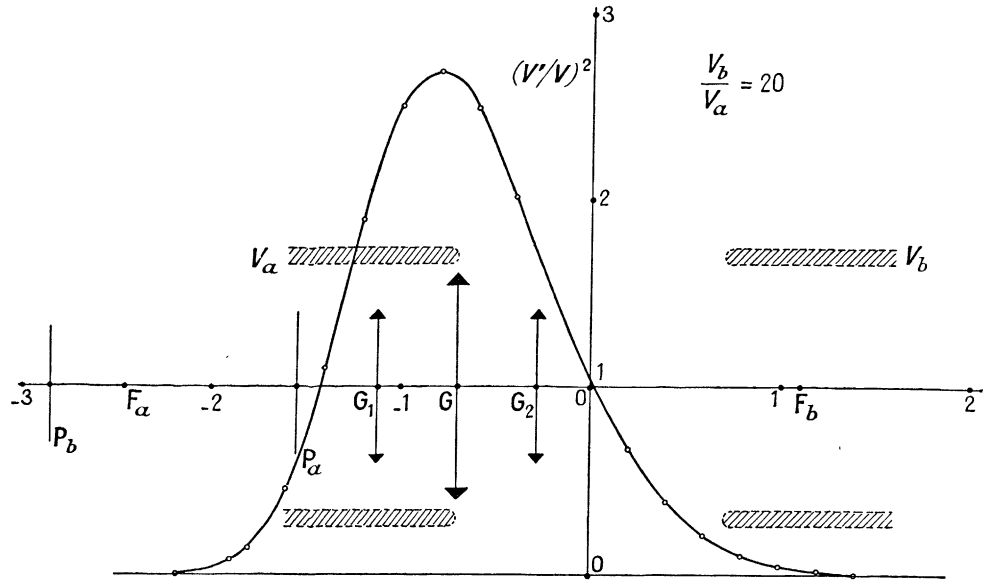

FIG. 3. — Éléments d'une lentille à deux tubes pour le rapport 20 des potentiels. La courbe représente la fonction $(V'/V)^2$. G est le centre de gravité général de cette courbe, G_1 et G_2 les centres de gravité partiels, déterminant la position des deux lentilles minces.

Le procédé des deux lentilles minces partielles est donc légèrement meilleur. Sa supériorité est beaucoup plus nette quand la répartition de la fonction $(V'/V)^2$ s'écarte beaucoup d'une fonction rectangulaire, quand elle présente, par exemple, deux pics distincts et très écartées comme dans certaines lentilles à trois diaphragmes. Il permet également de situer assez bien les plans principaux réduits dans certaines lentilles très fortes où ces derniers s'écartent notablement du centre de gravité général. En somme le procédé des deux lentilles minces partielles est capable, malgré son apparence simpliste, de traiter complétement presque toutes les lentilles réelles, même très fortes, avec une approximation satisfaisante.

Nous allons l'appliquer à un cas difficile, où les formules de lentilles faibles (7) sont complètement en défaut. Ce cas est cité par Pierce [4]. C'est celui de la lentille symétrique à trois diaphragmes avec potentiel le plus grand au centre (*fig.* 4). Si les trous sont très petits, la lentille est calculable. Les courbes de la figure 5 représentent :

a) La distance focale (qui se confond avec la distance focale réduite à cause de la symétrie des potentiels) donnée par l'approximation des lentilles faibles.

b) La distance focale améliorée par la fonction rectangulaire.

c) La distance focale améliorée par les deux lentilles minces.

d) La distance focale exacte.

e) La distance exacte d'un plan principal au

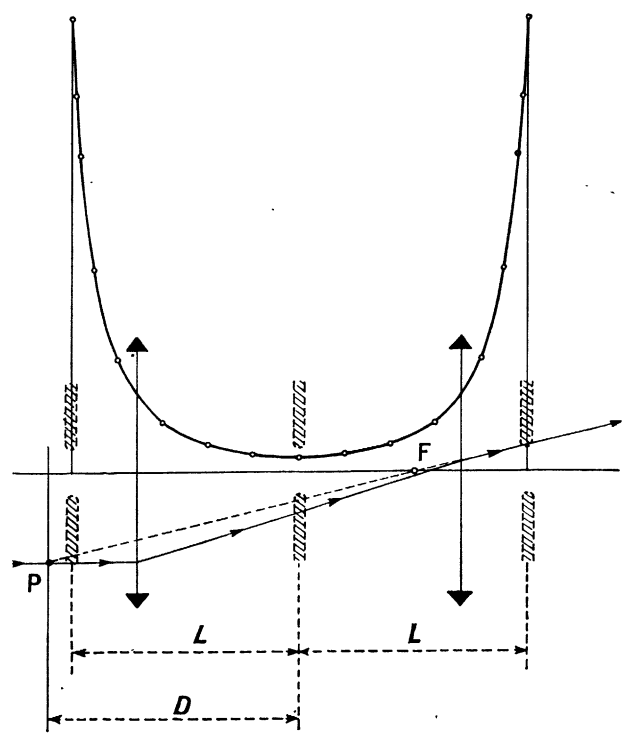

FIG. 4. — Lentille symétrique à trois trous, de très petit diamètre, avec potentiel maximum au centre, rapport de potentiels 6. A cause de la forme de la courbe $(V'/V)^2$, les deux lentilles minces partielles sont très écartées. La convergence totale est inférieure à celle de l'une d'entre elles, et le plan principal très éloigné du centre.

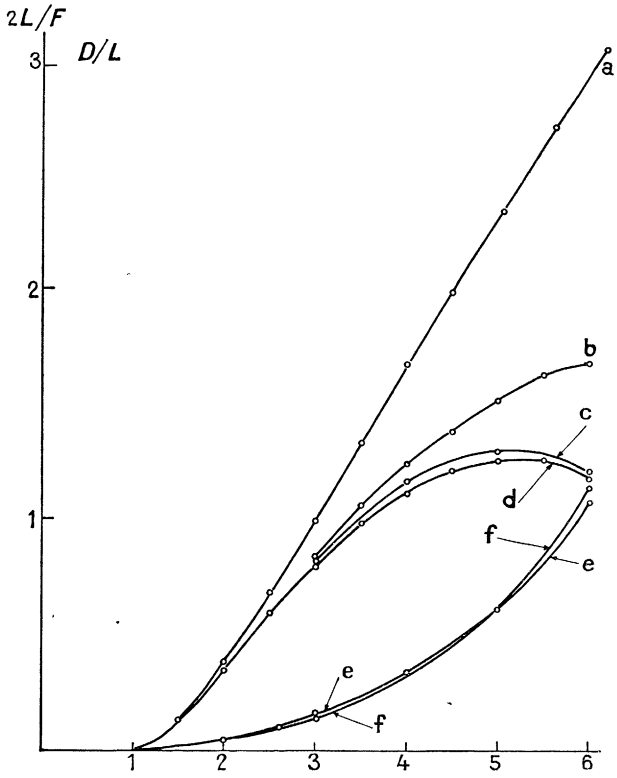

FIG. 5. — Courbes représentant la variation des éléments de la lentille de la figure 4, en fonction du rapport des potentiels. La convergence passe par un maximum quand la distance focale des deux lentilles minces devient inférieure à leur écartement.

centre géométrique. On voit que cette distance est très importante, et que le plan principal (bien qu'il soit en même temps plan principal réduit) s'éloigne beaucoup du centre de gravité général.

f) La distance du même plan principal au centre par le procédé des deux lentilles minces.

On voit que :

La courbe *a*), satisfaisante tant que la longueur de la lentille $2L$ reste inférieure à $(2/3)\,F$, s'écarte ensuite complètement de *d*). Ceci est conforme aux prévisions d'erreur déjà faites.

La courbe *b*) tout en étant erronée pour les lentilles très fortes, donne cependant un ordre de grandeur raisonnable.

La courbe *c*) suit de très près *d*) et son erreur ne dépasse pas 5 %.

Les courbes *e*) et *f*) sont presque confondues.

Il est à remarquer que dès que le rapport des potentiels atteint 5, les foyers pénètrent dans la lentille. Elle est donc ultra-forte [1].

[1] La comparaison des figures 4 et 6, représentant la même lentille symétrique avec le même rapport de potentiels, égal à 6, est très suggestive et illustre bien l'intérêt de l'approximation des deux lentilles minces. Dans les deux cas les deux lentilles minces ont même force, car les deux moitiés de la courbe $(V'/V)^2$ sont les mêmes partout à un retournement près. Mais dans la figure 4 les deux lentilles minces sont très écartées, la convergence de l'ensemble est faible, et l'écart avec l'approximation d'une seule lentille mince très grand. Au contraire, elles sont très rapprochées dans la figure 6, la convergence totale est forte et l'écart à l'approximation d'une seule lentille assez réduit. Dans le cas particulier où la distance focale des deux lentilles minces est égale à leur écartement, la convergence de l'ensemble passe par un maximum, et le système peut être qualifié d'« achromatique », de la même façon qu'un oculaire satisfaisant à la condition classique $F_1 + F_2 = 2l$.

D'une façon générale, le procédé des deux lentilles minces est plus recommandable que celui de la fonction rectangulaire. Il ne conduit jamais à des erreurs importantes. Ainsi, appliqué à une lentille où $(V'/V)^2$ est exactement une fonction rectangulaire, le procédé des deux lentilles minces conduit

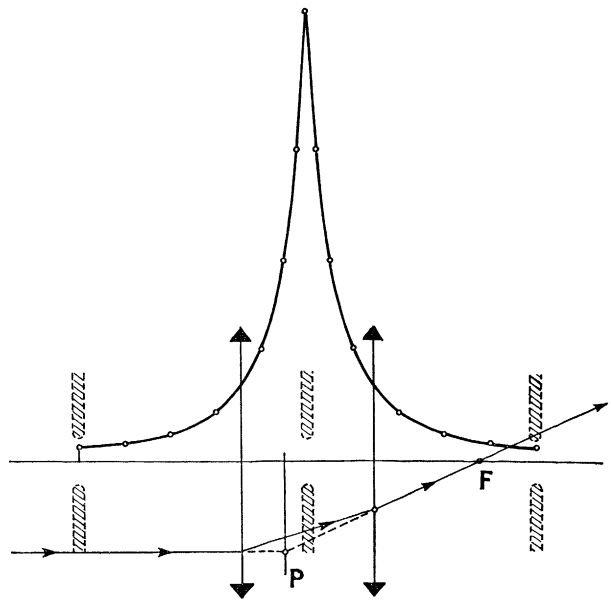

FIG. 6. — Lentille symétrique à trois trous, potentiel maximum à l'extérieur. Au lieu des deux pics de la figure 4, la courbe $(V'/V)^2$ n'en présente plus qu'un seul au centre. Les deux lentilles minces sont très proches, la convergence de l'ensemble est peu inférieure à la somme de leurs convergences, et le plan principal peu écarté du centre. En somme, l'approximation d'une seule lentille mince n'est pas mauvaise dans ce cas.

à une faible erreur, tandis que la fonction rectangulaire appliquée au cas où $(V'/V)^2$ a deux pics très aigus donne une erreur notable.

Soit une lentille où $\frac{3}{16}(V'/V)^2 = \Omega^2$ est constant sur une longueur l. Supposons la lentille très forte $\Omega l = \pi/2$ (le foyer à la limite du champ). On a en appelant F_{ex} la distance focale exacte,

$$l/F_{ex} = \Omega l \sin \Omega l = \pi/2.$$

Le procédé des deux lentilles minces conduit à leur donner à chacune comme convergence la moitié de l'intégrale $\frac{3}{16}\int_a^b \left(\frac{V'}{V}\right)^2 dx$ soit $\Omega^2 l/2$ et comme distance $l/2$. On obtiendra

$$l/F_{am} = \Omega^2 l^2[1 - (1/8)\,\Omega^2 l^2] = \frac{\pi^2}{4}\left(1 - \frac{\pi^2}{32}\right).$$

Le rapport de la convergence obtenue par les 2 lentilles minces à la convergence exacte est

$$(\pi/2)\,[1 - (\pi^2/32)] = 1{,}08.$$

L'erreur est de 8 % en excès.

Si au contraire la fonction $(V'/V)^2$ a deux pics égaux très étroits, on a l'équivalent de deux lentilles minces. Soit l leur distance. Supposons l'ensemble très convergent, la distance focale étant aussi égale à l. La convergence de chaque lentille est égale à celle de l'ensemble. On a

$$\frac{1}{F_{ex}} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{16}\int^b \left(\frac{V'}{V}\right)^2 dx.$$

Posons encore

$$\frac{3}{16}\int_a^b \left(\frac{V'}{V}\right)^2 dx = \Omega^2 l$$

$$\frac{l}{F_{ex}} = \frac{1}{2}\,\Omega^2 l^2 = 1$$

d'où

$$\Omega l = \sqrt{2} = 81°.$$

Le procédé de la fonction rectangulaire donne

$$l/F_{am} = \Omega l \sin \Omega l = 1{,}40.$$

L'erreur est de 40 %. Ainsi le procédé des deux lentilles minces est bien plus « passe-partout » que l'autre. Il donne de bons résultats aussi bien quand la fonction $(V'/V)^2$ a un seul pic (cas de la plupart des lentilles) que lorsqu'elle en a deux (lentille symétrique avec le potentiel le plus fort au centre) tandis que la fonction rectangulaire donne alors de mauvais résultats, comme on l'a vu précédemment.

L'ordre de grandeur de l'approximation obtenue est facile à apprécier : il est du cinquième ou du quart du facteur correctif $l/4F$ (l = distance des deux lentilles minces partielles, $1/F$ convergence réduite totale), que ce facteur soit grand ou petit. On peut faire confiance à la méthode tant que $l/4F$ ne dépasse pas 0,6 ou 0,7, c'est-à-dire tant que les foyers ne sont pas trop immergés. (Naturellement, sous la forme indiquée, le procédé donne la distance focale classique et non les éléments immergés proprement dits).

Généralisation. — La méthode des deux lentilles minces n'est évidemment qu'un cas particulier d'une méthode plus générale qui consisterait à décomposer la lentille réduite en un nombre quelconque de lentilles minces partielles toutes convergentes, que l'on combinerait ensuite selon les règles de l'optique élémentaire des lentilles baignées par deux milieux identiques.

Il se trouve qu'en prenant seulement *deux* lentilles minces on fait une erreur de quelques centièmes au plus sur l'évaluation des éléments des lentilles électrostatiques les plus fortes, avec des formules d'une extrême simplicité, puisqu'il suffit de connaître la distance des deux centres de gravité, déterminés en quelques minutes par découpage de la courbe $(V'/V)^2$ et suspension avec une aiguille.

On pourrait se demander s'il n'y aurait pas avantage, pour obtenir une meilleure approximation, à prendre trois ou quatre lentilles minces partielles. Le progrès obtenu ne justifie pas en général la complication plus grande des calculs, une erreur de cinq ou six centièmes étant simplement réduite à un ou deux.

Dans le cas des lentilles magnétiques, la situation est sensiblement différente. Ces lentilles peuvent être beaucoup plus convergentes que les lentilles électrostatiques, et, pour les lentilles les plus fortes (objectifs de microscope), la décomposition en deux lentilles minces partielles, tout en assurant une grande amélioration sur la formule élémentaire

$$\frac{1}{f} = \frac{e}{8\,m\,U}\int_a^b B^2\,dx$$

laisse quand même des erreurs de 20 ou 30 %.

En revanche, tandis que dans les lentilles électrostatiques on modifie la convergence par changement du rapport des potentiels, ce qui déforme la courbe $(V'/V)^2$ et déplace les centres de gravité des lentilles partielles, on peut admettre que dans les lentilles magnétiques la variation du courant se borne à multiplier les ordonnées de la courbe $y = B^2(x)$ par un facteur constant. Dans ces conditions, les abscisses des centres de gravité des lentilles partielles sont fixes, et les puissances de ces lentilles restent dans des rapports constants. La méthode permet alors d'obtenir les éléments sous forme de polynômes fonctions d'un paramètre tel que le k^2 de Glaser.

Rappelons d'abord comment trouver mécaniquement les éléments d'un système de lentilles minces. Considérons la n^e lentille (*fig.* 7). Soit h_n la distance à l'axe du point d'impact d'un rayon, δ_{n-1} l'angle de ce rayon avec l'axe avant la traversée de la lentille, δ_n le même angle après la traversée. Appelons e_{n-1} la distance des lentilles $n - 1$ et n. On a manifestement

$$\begin{cases} \delta_n = \delta_{n-1} + \dfrac{h_n}{f_n} \\ h_n = h_{n-1} - \delta_{n-1}\,e_{n-1} \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} \delta_n = \delta_{n-1}\left(1 - \dfrac{e_{n-1}}{f_n}\right) + \dfrac{h_{n-1}}{f_n} \\ h_n = -\,\delta_{n-1}\,e_{n-1} + h_{n-1}. \end{cases}$$

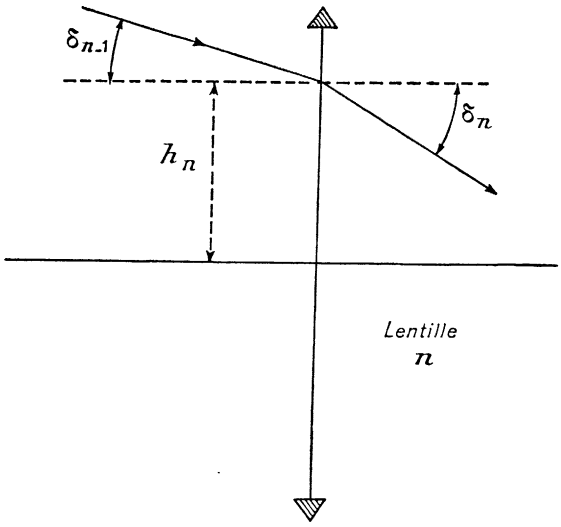

FIG. 7. — Réfraction dans une lentille mince.

La n^e lentille réalise donc sur le couple (δ, h) l'opération linéaire de matrice

$$\begin{Vmatrix} 1 - \dfrac{e_{n-1}}{f_n} & \dfrac{1}{f_n} \\ -e_{n-1} & 1. \end{Vmatrix}$$

Pour la lentille n° 1 sur laquelle on suppose tomber un rayon parallèle à l'axe, on prendra comme matrice

$$\begin{Vmatrix} 0 & \dfrac{1}{f_1} \\ 0 & 1. \end{Vmatrix}$$

La déviation par un système de lentilles, c'est-à-dire la distance focale du système, s'obtiendra par multiplication des matrices. Par exemple pour 3 lentilles

$$\begin{Vmatrix} 1 - \dfrac{e_2}{f_3} & \dfrac{1}{f_3} \\ -e_2 & 1 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 1 - \dfrac{e_1}{f_2} & \dfrac{1}{f_2} \\ -e_1 & 1 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 0 & \dfrac{1}{f_1} \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$= \begin{Vmatrix} 0 & \dfrac{1}{f_1} + \dfrac{1}{f_2} + \dfrac{1}{f_3} - \dfrac{e_1}{f_1 f_2} - \dfrac{e_2}{f_2 f_3} - \dfrac{e_3}{f_3 f_1} + \dfrac{e_1 e_2}{f_1 f_2 f_3} \\ 0 & 1 - \dfrac{e_1 + e_2}{f_1} - \dfrac{e_2}{f_2} + \dfrac{e_1 e_2}{f_1 f_2} \end{Vmatrix}.$$

La distance focale est

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} - \frac{e_1}{f_1 f_2} - \frac{e_2}{f_2 f_3} - \frac{e_3}{f_3 f_1} + \frac{e_1 e_2}{f_1 f_2 f_3}.$$

La distance du foyer à la dernière lentille est

$$x_n = \frac{h_n}{\delta_n} = f \cdot \frac{h_n}{h_0}.$$

Ici

$$x_3 = f\left[1 - \frac{e_1 + e_2}{f_1} - \frac{e_2}{f_2} + \frac{e_1 e_2}{f_1 f_2}\right].$$

Avec quatre lentilles il vient :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} + \frac{1}{f_4} - \frac{e_1}{f_1 f_2} - \frac{e_1 + e_2}{f_1 f_3}$$
$$- \frac{e_1 + e_2 + e_3}{f_1 f_4} - \frac{e_2}{f_2 f_3} - \frac{e_2 + e_3}{f_2 f_4} - \frac{e_3}{f_3 f_4}$$
$$+ \frac{e_1 e_2}{f_1 f_2 f_3} + \frac{e_1(e_2 + e_3)}{f_1 f_2 f_4} + \frac{e_3(e_1 + e_2)}{f_1 f_3 f_4} + \frac{e_2 e_3}{f_2 f_3 f_4} - \frac{e_1 e_2 e_3}{f_1 f_2 f_3 f_4}.$$

Considérons une lentille magnétique quelconque, et appelons $1/F$ sa convergence totale

$$\frac{1}{F} = \frac{e}{8m\ U} \int_a^b B^2\, dx.$$

Divisons par des ordonnées l'aire de la courbe $B^2(x)$ en 4 parties égales, représentant 4 lentilles partielles que nous remplaçons par 4 lentilles minces placées à leurs centres de gravité. On a alors:

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f_3} = \frac{1}{f_4} = \frac{1}{4F} \qquad \frac{1}{f_1 f_2} = \frac{1}{f_2 f_3} = \ldots = \frac{1}{16\ F^2}$$
$$\frac{1}{f_1 f_2 f_3} = \ldots = \frac{1}{64\ F^3} \qquad \frac{1}{f_1 f_2 f_3 f_4} = \frac{1}{256\ F^4}.$$

D'où la distance focale cherchée :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F} - \frac{3e_1 + 4e_2 + 3e_3}{16\ F^2}$$
$$+ \frac{2(e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_3 e_1)}{64\ F^3} - \frac{e_1 e_2 e_3}{256\ F^4}.$$

Tous les numérateurs sont des constantes, déterminées par la position des centres de gravité des lentilles partielles ; la convergence totale $1/F$ est proportionnelle au carré de l'induction, le coefficient de proportionnalité étant obtenu par quadrature de la courbe $B^2(x)$.

Prenons comme exemple le modèle Grivet-Lenz [2] où $B^2 = \dfrac{B_0^2}{\mathrm{ch}^2\, x/b}$. On obtient aisément

$$\frac{e_1}{b} = \mathrm{Log}\,\frac{64}{27} = 0{,}862.$$

$$\frac{e_2}{b} = \mathrm{Log}\,\frac{27}{16} = 0{,}523 \qquad \frac{e_3}{b} = 0{,}862.$$

D'où :

$$\frac{1}{f} \Big/ \frac{1}{F} = 1 - \frac{7{,}254}{16} \cdot \frac{b}{F} + \frac{2 \times 1{,}645}{64} \left(\frac{b}{F}\right)^2 - \frac{0{,}389}{256} \left(\frac{b}{F}\right)^3$$

$$\frac{1}{F} = \frac{e}{8\ mU} \int_{-\infty}^{+\infty} B^2\, dx = \frac{2eB_0^2\, b}{8\ mU} \qquad \frac{b}{F} = \frac{2eB_0^2\, b^2}{8\ mU}.$$

Pour nous ramener aux notations classiques nous poserons $\dfrac{eB_0^2}{8\ mU} = \dfrac{k^2}{a^2}$ et ici $b = 0{,}7593 . a$ d'où $b/F = 1{,}1531\ k^2$; k^2 étant le nouveau paramètre sans dimensions.

$$(1/f)/(1/F) = 1 - 0{,}5229 . k^2 + 0{,}06838\, k^4 - 0{,}00233 k^6$$

et $$a/F = 1{,}5186\ k^2$$

$$a/f = 1{,}5186\ k^2(1 - 0{,}5229\ k^2 + 0{,}06838\ k^4 - 0{,}00233\ k^6).$$

La figure 8 représente, en fonction de k^2, la distance focale ainsi obtenue et la distance focale exacte. On voit que les deux courbes sont pratiquement confondues jusqu'à $k^2 = 1{,}7$ et ne divergent notablement que pour $k^2 > 2$.

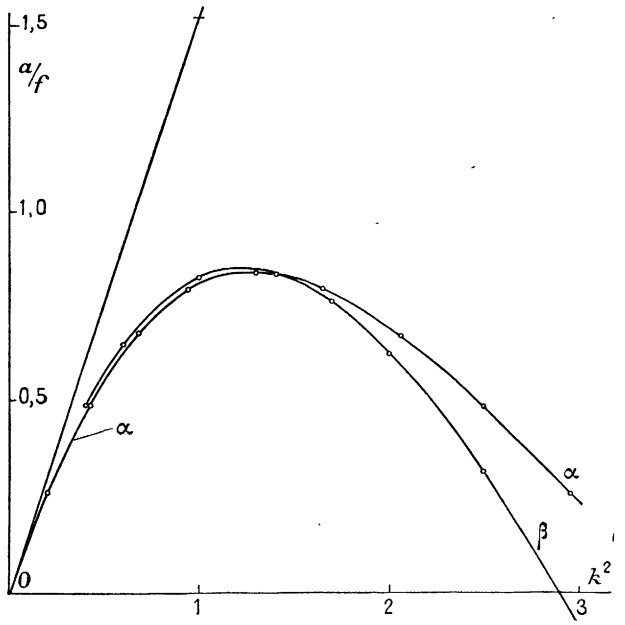

FIG. 8. — Distance focale classique d'une lentille magnétique conforme au modèle Grivet-Lenz. Courbe α), valeur exacte ; courbe β), par l'approximation de 4 lentilles minces. La droite représente celle d'une seule lentille mince.

Il ne faut d'ailleurs pas perdre de vue que les écarts alors observés ne sont pas plus grands que ceux résultant de l'incertitude expérimentale sur la fonction réelle $B^2(x)$. On le vérifie aisément en comparant les résultats obtenus avec les modèles Glaser et Grivet-Lenz.

On peut également, par le procédé des lentilles minces, évaluer les éléments immergés. La distance focale immergée se confondra avec la distance focale classique tant que le foyer n'aura pas traversé la dernière lentille, ici la 4e. Il faudra alors changer de formule et calculer la distance focale avec 3 lentilles au lieu de 4. Puis, quand le foyer aura traversé la 3e lentille, on prendra la formule à 2 lentilles, etc. La courbe représentant la distance focale immergée en fonction de k^2 se composera d'une série d'arcs de degré décroissant. La figure 9 permet la comparaison avec le calcul exact, encore dans le cas du modèle Grivet-Lenz. On voit que les écarts sont très faibles jusqu'à $k^2 = 2{,}3$ et que l'erreur ne dépasse jamais 10 %. Les calculs ne sont pas plus compliqués que pour la distance focale classique, il faut seulement changer de formule. Les valeurs de k^2 correspondant à ces changements peuvent être déterminées avec précision, si on le désire, en écrivant que h_4, h_3, h_2 passent par zéro, pour un incident parallèle à l'axe. Ces grandeurs sont données par le terme inférieur de la matrice représentant le groupe de lentilles envisagé.

Il convient de prendre garde que les formules obtenues pour $1/f$ en fonction de k^2 ne sont pas des développements en série limités, mais des expressions polynomiales qui ne coïncident pas avec les premiers termes du développement illimité. Par exemple, si on a une lentille où $B^2(x)$ est une fonction rectangulaire, la distance focale exacte est donnée par $1/f = \Omega l \sin \Omega l$ (pour les notations voir plus haut). L'approximation à 4 lentilles minces d'égale force, donne par un calcul immédiat

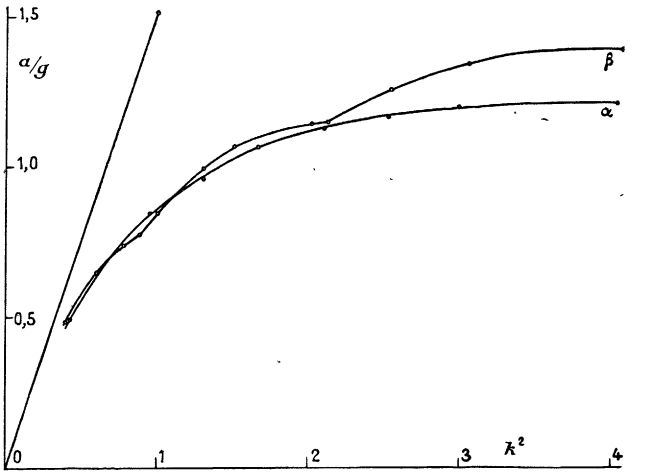

FIG. 9. — Distance focale immergée de la lentille de la figure 8. Courbe α) valeur exacte ; courbe β), par l'approximation de 4 lentilles minces. La première partie de la courbe β) est identique à celle de la figure 8 ; le premier point anguleux correspond au passage du foyer à travers la quatrième lentille, le second, au passage à travers la troisième.

$$\frac{l}{f} = (\Omega l)^2 - \frac{5}{32}(\Omega l)^4 + \frac{3}{512}(\Omega l)^6 - \frac{1}{16\,384}(\Omega l)^8$$

dont les coefficients ne coïncident pas avec ceux de $\sin \Omega l$.

Pour obtenir les coefficients du développement en série illimité de $1/f$ en fonction d'un paramètre comme k^2, il faut évaluer des intégrales dont l'ordre est égal à celui des termes du développement. La distance focale d'un système de n lentilles minces peut s'écrire

$$\frac{1}{f} = \sum_i \frac{1}{f_i} - \sum_{ij} \frac{e_{ij}}{f_i f_j} + \sum_{ijk} \frac{e_{ij}\, e_{jk}}{f_i f_j f_k} - \sum_{ijkl} \frac{e_{ij}\, e_{jk}\, e_{kl}}{f_i f_j f_k f_l} + \dots$$

en appelant e_{ij} la distance de la lentille i à la lentille j, et en excluant les permutations d'indices.

Si l'on a une lentille électronique où les trajectoires sont données par $r'' + r.y(x) = 0$ la convergence d'une tranche dx est $y(x)\,dx$ et la distance focale est donc :

$$\frac{1}{f} = \int y(x_i)\,dx_i - \iint |x_i - x_j|\,y(x_i)\,y(x_j)\,dx_i\,dx_j$$
$$+ \iiint |x_i - x_j|\,|x_j - x_k|\,y(x_i)\,y(x_j)\,y(x_k)\,dx_i\,dx_j\,dx_k - \ldots$$

Si on multiplie uniformément $y(x)$ par un facteur numérique λ comme dans une lentille magnétique où l'on fait varier le courant magnétisant, la variation de la convergence en fonction de λ est donnée par la série :

$$\frac{1}{f} = \lambda \int y(x_i)\,dx_i - \lambda^2 \iint |x_i - x_j|\,y(x_i)\,y(x_j)\,dx_i\,dx_j$$
$$+ \lambda^3 \iiint |x_i - x_j|\,|x_j - x_k|\,y(x_i)\,y(x_j)\,y(x_k)\,dx_i\,dx_j\,dx_k - \ldots$$

L'intégrale simple représente l'approximation d'une seule lentille mince. Les premières intégrales multiples peuvent se calculer sans trop de difficultés quand $y(x)$ est une fonction simple ; mais, dans le cas général, on ne peut guère les apprécier avec assez d'exactitude par des méthodes numériques. Il vaut bien mieux, si l'on ne dispose pas de moyens de calcul exceptionnels, se limiter à une décomposition en un nombre fini de lentilles élémentaires, qui, avec autant de termes, ne donne pas une erreur plus grande.

Expressions développées. — Le travail le plus long, dans l'application du procédé, est l'évaluation de l'intégrale $(V'/V)^2\,dx$, qui doit être effectuée pour chaque valeur du rapport des potentiels. Cela représente chaque fois cinq à dix minutes de travail pour un calculateur muni d'une plume et de papier millimétré.

Quand on a souvent affaire au même type de lentille, on peut souhaiter avoir des formules explicites où ne figureraient que les potentiels, sans aucune intégration, moyennant un développement en série.

Il est facile d'obtenir de telles formules, par développement du dénominateur de $(V'/V)^2$ et intégration terme à terme.

En posant toujours $V_b > V_a$, nous pouvons écrire

$$V(x) = V_b\left[1 - \frac{V_b - V_a}{V_b}\,\varphi(x)\right]$$

$\varphi(x)$ étant une fonction comprise entre 0 et 1.

$$V^{-2} = V_b^{-2}\left[1 - \frac{V_b - V_a}{V_b}\,\varphi(x)\right]^{-2}$$
$$= V_b^{-2}\left[1 + 2\,\frac{V_b - V_a}{V_b}\,\varphi(x) + 3\left(\frac{V_b - V_a}{V_b}\right)^2 \varphi^2(x) + 4\left(\frac{V_b - V_a}{V_b}\right)^3 \varphi^3(x) + \ldots\right]$$

$$V'^2(x) = (V_b - V_a)^2\,\varphi'^2(x)$$

$$\int_a^b \left(\frac{V'}{V}\right)^2 dx = \left(\frac{V_b - V_a}{V_b}\right)^2 \times \left[\int_a^b \varphi'^2(x)\,dx + 2\,\frac{V_b - V_a}{V_b}\int_a^b \varphi(x)\,\varphi'^2(x)\,dx + 3\left(\frac{V_b - V_a}{V_b}\right)^2 \int_a^b \varphi^2(x)\,\varphi'^2(x)\,dx + \ldots\right].$$

Toutes les intégrales sont homogènes à l'inverse d'une longueur, que l'on peut représenter par une dimension caractéristique de la lentille, soit l, multipliée par des facteurs numériques $a_1, a_2, a_3 \ldots$ Il vient donc

$$\int_a^b \left(\frac{V'}{V}\right)^2 dx = \frac{a_1}{l}\left(\frac{V_b - V_a}{V_b}\right)^2 + \frac{2a_2}{l}\left(\frac{V_b - V_a}{V_b}\right)^3 + \frac{3a_3}{l}\left(\frac{V_b - V_a}{V_b}\right)^4 + \ldots$$

Les puissances de $\dfrac{V_b - V_a}{V_b}$ tendent lentement vers zéro, quand $V_b/V_a \gg 1$ mais la décroissance généralement rapide des a_n rend la convergence meilleure.

Si la lentille est géométriquement symétrique (lentille à deux tubes ou deux diaphragmes égaux) on peut écrire aussi :

$$V = \frac{V_a + V_b}{2}\left[1 + \frac{V_b - V_a}{V_b + V_a}\,\varphi(x)\right]$$

$\varphi(x)$ variant maintenant de -1 à $+1$

$$V^{-2} = \left(\frac{V_a + V_b}{2}\right)^{-2} \times \left[1 - 2\left(\frac{V_b - V_a}{V_b + V_a}\right)\varphi(x) + 3\left(\frac{V_b - V_a}{V_b + V_a}\right)^2 \varphi^2(x) \ldots\right]$$

$$V'^2(x) = \left(\frac{V_b - V_a}{2}\right)^2 \varphi'^2(x)$$

$$\int_a^b \left(\frac{V'}{V}\right)^2 dx = \left(\frac{V_b - V_a}{V_b + V_b}\right)^2 \times \left[\int_a^b \varphi'^2(x)\,dx + 3\left(\frac{V_b - V_a}{V_b + V_a}\right)^2 \int_a^b \varphi^2(x)\,\varphi'^2(x)\,dx + 5\left(\frac{V_b - V_a}{V_b + V_a}\right)^4 \int_a^b \varphi^4(x)\,\varphi'^2(x)\,dx + \ldots\right]$$

car toutes les intégrales impaires sont nulles.

Les intégrales paires sont encore égales à l'inverse d'une longueur caractéristique l multipliée par des coefficients numériques $a_1\ a_3\ a_5 \ldots$ D'où

$$\frac{1}{F} = \frac{3}{16}\cdot\frac{1}{l}\cdot\left(\frac{V_b - V_a}{V_b + V_a}\right)^2 \times \left[a_1 + 3a_3\left(\frac{V_b - V_a}{V_b + V_a}\right)^2 + 5a_5\left(\frac{V_b - V_a}{V_b + V_a}\right)^4 + \ldots\right].$$

L'intérêt de ce type de formules est de donner la valeur asymptotique des éléments pour les lentilles très faibles, valeur qui ne se trouve dans aucune abaque. Par exemple, si nous considérons la lentille à deux tubes ou deux diaphragmes égaux, dont le champ axial est bien représenté par

$$V'(x) = E_0 \, e^{-\pi x^2/k^2}$$

la longueur k étant elle-même reliée aux paramètres géométriques des électrodes par une relation connue [5], on a

$$E_0 = \frac{V_b - V_a}{k} \qquad V'(x) = \frac{V_b - V_a}{k} e^{-\pi x^2/k^2}$$

$$\varphi'(x) = \frac{2}{k} e^{-\pi x^2/k^2}.$$

Le coefficient a_1 est donné par une intégrale connue ; $a_1 = \dfrac{4}{k\sqrt{2}}$ d'où la valeur asymptotique

$$\frac{1}{F} = \frac{3}{16}\left(\frac{V_b - V_a}{V_b + V_a}\right)^2 \frac{4}{k\sqrt{2}}.$$

Les autres intégrales peuvent naturellement être évaluées ; et l'on obtient le développement :

$$\frac{1}{F} = \frac{3}{16}\left(\frac{V_b - V_a}{V_b + V_a}\right)^2 \frac{4}{k\sqrt{2}} \times \left[1 + 0{,}63\left(\frac{V_b - V_a}{V_b + V_a}\right)^2 + 0{,}12\left(\frac{V_b - V_a}{V_b + V_a}\right)^4 + \dots\right]$$

dont la convergence est rapide quand V_b/V_a ne dépasse pas 4 ou 5.

Conclusion. — La méthode présentée dans cet article permet un calcul rapide des lentilles moyennes et même fortes, dont la distance focale réduite est comparable à la longueur où règne le champ. Sous sa forme améliorée, elle conduira dans bien des cas, même pour les lentilles très fortes, à une erreur relative inférieure à celle de la réalisation géométrique des électrodes. Nous avons obtenu en outre plusieurs propriétés intéressantes, sans doute peu connues, des lentilles faibles.

L'intérêt pratique de ces procédés n'est pas négligeable. J'ai personnellement connu un ingénieur de grande valeur qui, voulant calculer une lentille à deux tubes pour le rapport de potentiels 1,3 (2), s'est lancé dans une intégration numérique de l'équation (5). Après une semaine et plus de calculs laborieux, c'est miracle que les résultats n'aient pas été erronés de plus de 10 % ! Dans un tel cas, nos formules asymptotiques donnent tous les éléments en quelques instants, avec une erreur bien inférieure au millième !

Pour les lentilles très fortes, il vaut mieux revenir à l'évaluation directe de l'intégrale $(V'/V)^2 \, dx$. La détermination des centres de gravité n'offre aucune difficulté. Il suffit de découper la courbe dans une feuille de papier millimétré et de la suspendre avec une aiguille.

(2) Ce rapport voisin de l'unité ne figure dans aucune abaque, et l'intéressé était avec raison prévenu contre les formules de « lentilles minces » qui donnent des positions absurdes pour les plans principaux.

Manuscrit reçu le 14 mars 1959.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Dupouy, Éléments d'Optique Électronique, Collection Armand Colin.
[2] Grivet, Précis d'Optique Électronique.
[3] Spangenberg, Vacuum Tubes, p, 364.
[4] Pierce, Theory and Design of Electron Beams, p. 99.
[5] Durand, Electrostatique et Magnétostatique, p. 412.