Sur la théorie des verres de spin

Cirano de Dominicis

► To cite this version:

Cirano de Dominicis. Sur la théorie des verres de spin. Journal de Physique, 1989, 50 (18), pp.2767-2772. 10.1051/jphys:0198900500180276700 . jpa-00211100

HAL Id: jpa-00211100

<https://hal.science/jpa-00211100>

Submitted on 1 Jan 1989

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Classification

Physics Abstracts

05.50 – 05.20 – 75.40

Sur la théorie des verres de spin

C. De Dominicis

Service de Physique Théorique (*) de Saclay, F-91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France

(Reçu le 3 juillet 1989, accepté le 4 juillet 1989)

Résumé. — Il n'y a pas jusqu'ici de théorie des champs pour les verres de spin (d'Ising) qui explique comment ceux-ci peuvent exister en dimension inférieure à $d = 6$ (et *a fortiori* en dimension physique). Ce domaine $d \leq 6$, leur est interdit à cause de divergences infra-rouges trop violentes (en $1/p^4$) des propagateurs (nus) qui entraînent la violation d'une inégalité de Schwarz. On montre ici, qu'en $d < 6$, l'effet des fluctuations domine. Dès leur prise en compte à l'ordre le plus bas (une boucle) elles érodent à la fois le comportement du paramètre d'ordre de Parisi $q(x)$ près de l'origine (lequel passe de $q(x) \sim x$ à $q(x) \sim x^\rho$, $\rho - 1 \sim 6 - d$) et le comportement infra-rouge des propagateurs (qui passe de $1/p^4$ à $1/p^{2+\frac{2}{\rho}}$). Cet effet est dû à la présence, dans le spectre des "masses" verre de spin, de familles à masses nulles ou voisines de zéro (indexées par des paramètres continus) qui gouvernent les deux comportements en question. La prise en compte cohérente des fluctuations lève les interdictions mentionnées plus haut et *ouvre la possibilité d'une description détaillée par une théorie des champs, en $d < 6$* . Ces remarques ne sont pas liées à une proximité de la température critique T_c (il ya toujours un secteur, en champ magnétique nul, où $q(x) \sim 0$). En ce sens, *le verre de spin est toujours critique en dessous de T_c* .

Abstract. — To date, there is no spin glass field theory that explains how they can exist below dimension $d = 6$ (and *a fortiori* in the physical dimension). The domain $d \leq 6$ is forbidden because of too strong (in $1/p^4$) infrared divergences of the (bare) propagators that entail a violation of a Schwarz inequality. Here we show that in $d \leq 6$, fluctuations dominate. When taken into account at their lowest order (one loop) they immediately erode both the behavior of the Parisi order parameter $q(x)$ near the origin (it goes from $q(x) \sim x$ to $q(x) \sim x^\rho$, $\rho - 1 \sim 6 - d$) and the infrared behavior of propagators (it goes from $1/p^4$ to $1/p^{2+\frac{2}{\rho}}$). This effect is due the existence in the spin glass mass spectrum of families with zero or near zero masses (indexed by continuous parameters) that govern both behaviors in question. Taking consistently into account fluctuations removes the constraints mentioned above and *opens the way to a detailed field theory description of spin glasses in $d < 6$* . These remarks are not linked with a proximity to the critical temperature T_c (there always is, in zero magnetic field, a sector where $q(x) \sim 0$). In this sense, *spin glasses are always critical below T_c* .

(*) Laboratoire de l'Institut de Recherche Fondamentale du Commissariat à l'Energie Atomique.

Il y a trente ans paraissait dans ce même Journal de Physique un article d'André Blandin et Jacques Friedel [1] où était proposé "un "gel" du désordre de spin, à basse température". Dans un numéro qui est destiné à honorer l'oeuvre scientifique de Friedel, il me semble approprié de faire le point sur des avancées toutes fraîches sur ces systèmes qui, sous le nom de "verres de spin", devinrent populaires pendant la décade 75-85.

Dans ce court article nous ne ferons que survoler les quelques points strictement nécessaires à la compréhension de l'exposé qui par ailleurs n'aborde pas les questions de dynamique. Au reste il existe de nombreux textes faisant, à divers moments, le point sur l'état des choses⁽¹⁾, pour qu'il ne soit pas utile d'en produire un de plus.

Nous considérons la description de la phase condensée du verre de spin d'Ising, tel qu'elle a été formulée par Anderson [4] *via* l'hamiltonien

$$\mathcal{H} = - \sum_{(ij)} J_{ij} \sigma_i \sigma_j \quad (1)$$

où $\sigma_j = \pm 1$, et les couplages J_{ij} entre paires de voisins, sont distribués par une loi de probabilité gaussienne, ménageant à la fois désordre et frustration. Nous verrons les contradictions auxquelles se heurte la théorie et comment on peut, semble-t-il, y échapper.

La plupart des nouveaux résultats mentionnés ici feront partie d'un article écrit avec Imre Kondor et en cours de publication [5].

1. Le champ moyen.

Une théorie des champs décrivant le verre de spin d'Ising dérive directement du hamiltonien d'Anderson, *via* l'astuce technique des répliques [6] qui permet d'effectuer la moyenne sur le désordre. On obtient

$$\overline{Z^n} \simeq \int \prod_{j=1}^N \prod_{(\alpha\beta)} dy_j^{\alpha\beta} \exp \mathcal{L} \{y_j^{\alpha\beta}\} \quad (2)$$

$$\mathcal{L} = -z \frac{(\beta J_0)^2}{2} \sum_{i,j} \sum_{(\alpha,\beta)} y_i^{\alpha\beta} (K^{-1})_{ij} y_j^{\alpha\beta} + \sum_j \ln \text{tr}_{\sigma^\alpha} \exp(\beta J_0)^2 \sum_{(\alpha\beta)} y_j^{\alpha\beta} \sigma^\alpha \sigma^\beta \quad (3)$$

Ici $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n$ et n tend vers zéro de façon appropriée pour restituer les propriétés du système moyenné sur la distribution gaussienne de couplages. La matrice K_{ij} est égale à l'unité pour (i, j) proches voisins et nulle autrement. La largeur de la distribution gaussienne est en $J^2/z \equiv J_0^2$ où z est le nombre de voisins. Enfin $y_j^{\alpha\beta}$ est la variable de champ dont la valeur moyenne est le paramètre d'ordre verre de spin. Ainsi au col, on a

$$\left(y_j^{\alpha\beta}\right)_{\text{col}} \equiv q_{\alpha\beta} = \text{tr } e^{G\{\sigma\}} \sigma_\alpha \sigma_\beta / \text{tr } e^{G\{\sigma\}} \quad (4)$$

avec

$$G\{\sigma\} = (\beta J_0)^2 \sum_{(\gamma\delta)} q_{\gamma\delta} \sigma_\gamma \sigma_\delta. \quad (5)$$

⁽¹⁾ Signalons, pour ne parler que des plus récents, l'exhaustif Binder et Young [2] et, sur la "théorie du champ moyen" (et quelques sujets annexes), la somme de Mézard, Parisi et Virasoro [3].

L'histoire de la solution de ces équations est riche en péripéties. C'est finalement Parisi [7], qui par une audacieuse généralisation d'une idée de Blandin [8], a offert le premier un ansatz capable de résister au test de stabilité [9]. Cette solution brise la symétrie des répliques (ce qui est interprété comme une brisure d'ergodicité) et l'exprime comme une fonction $q(x)$

$$q_{\alpha\beta} \longrightarrow q(x) \quad (6)$$

où x est le "recouvrement" des répliques α et β ($x = \alpha \cap \beta$), dans le schéma hiérarchique imaginé par Parisi.

L'interprétation physique est venue aussi de Parisi [10] qui montra la connexion entre le paramètre d'ordre issu de la formulation *via* les répliques⁽²⁾ et le recouvrement de deux états (ou vallées) ℓ et ℓ'

$$q_{\ell\ell'} = \frac{1}{N} \sum_j \langle \sigma_j \rangle_\ell \langle \sigma_j \rangle_{\ell'} \quad (7)$$

2. Les propagateurs (nus).

Au delà du champ moyen, il faut faire intervenir les fluctuations $\delta y_j^{\alpha\beta}$ autour de celui-ci

$$y_j^{\alpha\beta} = q^{\alpha\beta} + \delta y_j^{\alpha\beta} \quad (8)$$

et tout d'abord la corrélation (ou propagateur nu) des fluctuations, par exemple, pour la plus simple d'entre elles

$$G^{\alpha\beta;\alpha\beta}(p) \equiv \langle \delta y_p^{\alpha\beta} \delta y_p^{\alpha\beta} \rangle_0 \quad (9)$$

où $\langle \rangle_0$ est calculé avec la partie de $\mathcal{L}$ en (3) qui est quadratique en δy (et δy_p est la transformée de Fourier de δy_j). A nouveau on peut se demander quelle est l'interprétation de ces corrélations indexées par des répliques. Suivant les traces de Parisi [10], on peut établir [11] que pour $\alpha \cap \beta = x$,

$$G^{x;x}(p) = C_{\ell\ell'}(p) \quad (10)$$

pourvu que

$$q(x) = q_{\ell\ell'} \quad (11)$$

Ici on a introduit la fonction de corrélation spin-spin $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle$ dans les états ℓ et ℓ' ,

$$\tilde{C}_{\ell\ell'}(r) \equiv \frac{1}{N} \sum_i \langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{\ell'} \langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{\ell'} = q_{\ell\ell'}^2 + \frac{1}{N} \sum_p e^{-ip \cdot r} C_{\ell\ell'}(p) \quad (12)$$

où $r_j = r_i + r$ et $q_{\ell\ell'}$ est donné en (7).

3. Les contradictions de la théorie.

Le calcul explicite de ces quantités reste difficile, même si l'on se place dans une situation (près de T_c) où on peut restreindre $\mathcal{L}$ à ses termes dominants [7] (pour y petit) en ne gardant que

⁽²⁾ Mézard, Parisi et Virasoro ont développé [3] un formalisme qui évite l'usage des répliques mais difficile à pratiquer au delà du champ moyen.

les couplages en $wy^3 + uy^4$. Dans ces conditions on peut montrer que, pour la valeur maximale du recouvrement $x \geq x_1 \sim (T_c - T)/T_c$, (correspondant à un autorecouvrement, i.e. à une corrélation à l'intérieur d'un même état ℓ)

$$q(x_1) = q_{\ell\ell} \quad (13)$$

on a [12, 13]

$$G^{x_1, x_1}(p) \sim 1/p^2 \quad (14)$$

une corrélation à faible divergence infra-rouge (à forte décroissance à grande distance) qui laisserait intact l'ordre de Parisi en dimension physique.

Malheureusement il n'en va pas de même pour deux états à recouvrement quelconque [12, 13], en particulier pour un recouvrement nul [12, 14]

$$G^{0,0}(p) \sim 1/p^4, \quad (15)$$

un résultat qui semble proscrire tout ordre à la Parisi en dimension $d = 3$. Ce genre de résultat n'a pas suffi à troubler la quiétude des théoriciens (avant 1985). Peut-être après tout n'y avait-il pas de verre de spin dans la nature et ce qui était vu par les expérimentateurs n'était-il qu'un effet de la dynamique très lente associée à ces systèmes (ici nous ne parlons que de mécanique statistique de l'équilibre).

Il y a pire d'ailleurs. On peut écrire, à partir de (12), l'inégalité de Schwarz

$$\tilde{C}_{\ell\ell}(r) > \tilde{C}_{\ell\ell'}(r) \quad (16)$$

Choissant $q_{\ell\ell'} = 0$, on obtient alors avec (12-15)

$$q^2(x_1) + c_1/r^{d-2} > c_2/r^{d-4} \quad (17)$$

Avec $q(x_1) \sim x_1 \ll 1$ et en choisissant $r = 1/x_1 \gg 1$ on voit que l'inégalité est violée dès que $d < 6$!.

Ce qui a commencé à troubler le sommeil des théoriciens, est venu d'un calcul Monte Carlo, sur ordinateur spécialisé, fait par Ogielsky [15, 4], qui levant la plupart des doutes, établissait, entre autres, qu'en dimension $d = 3$ il y avait bien transition verre de spin ! Bien plus, des travaux récents de deux groupes [16, 17], toujours par des techniques numériques, suggèrent l'existence d'une brisure d'ergodicité.

La contradiction est flagrante entre une théorie des champs qui impose dès le départ une solution à la Parisi et qui dès l'évaluation de ses corrélations nues semble interdire l'existence d'un tel ordre en dessous de la dimension $d = 6$.

4. Prise en compte des fluctuations et levée des contradictions.

Ce que nous dit la violation de l'inégalité de Schwarz c'est qu'en dessous de $d = 6$, les fluctuations dominent. Aussi devient-il essentiel, dès lors, d'examiner l'effet de ces fluctuations sur l'équation d'état qui détermine le paramètre d'ordre $q(x)$. Partant du Lagrangien restreint aux couplages en $wy^3 + uy^4$ on trouve au niveau d'une boucle

$$0 = \tau q(x) - \frac{w}{2}(q^2(x) + \int_0^x dt q^2(t) + 2q(x) \int_0^1 dt q(t)) + \frac{2u}{3}q^3(x) - \frac{w}{2}L_w(x) + uq(x)L_u(x) + \dots \quad (18)$$

avec par exemple

$$L_u(x) = \Sigma_p G^{x,x}(p) \quad (19)$$

Dans le régime de *champ moyen*, (en l'absence des termes de boucle L_w , L_u), Parisi nous a montré comment on résout (18). L'équation (18) constitue en fait un nombre infini d'équations (pour chaque valeur de x) et elle peut se résoudre en prenant des dérivées successives (suivies de divisions par $\dot{q}(x) \neq 0$) pour aboutir à

$$0 = -wx + 2u q(x) \quad (20)$$

c'est-à-dire $q(x) \sim x$ jusqu'à une valeur maximale $q(x_1) \sim \tau$, au delà de laquelle $\dot{q}(x) = 0$. Le terme de boucle L_u typiquement fait apparaître une contribution, qui, pour le secteur le plus "dangereux" et pour $d > 6$, est en

$$uq(x)L_u(x) \sim uq(x) \frac{q^4(x)}{x^2} \Lambda^{d-6} \quad (21)$$

où Λ joue le rôle d'une valeur de coupure ultraviolette. Pour un $q(x)$ linéaire en x , (21) est de même ordre que le terme en $uq^3(x)$: en haute dimension, en régime classique, les fluctuations ne changent pas les comportements analytiques.

Dans le régime de *fluctuations*, la même contribution devient, pour $d < 6$,

$$uq(x)L_u(x) \sim uq(x) \frac{q(x)^{d-2}}{x^2} \quad (22)$$

qui pour $x \ll x_1 \sim \tau$, domine maintenant le terme de *champ moyen* $uq^3(x)$. Il s'ensuit qu'on obtient pour $x \ll x_1$,

$$\begin{aligned} q(x) &\sim x^\rho \\ \rho &\sim 1 + \varepsilon/3 \end{aligned} \quad (23)$$

où $\varepsilon = 6 - d$.

Dès que le terme à une boucle est pris en compte, le comportement analytique de $q(x)$ pour $x \ll x_1$ est changé drastiquement. (Notons que si on prend aussi en compte le terme en $L_w(x)$, plus compliqué à évaluer, il conduit, pour le même secteur le plus "dangereux", à un résultat qualitativement analogue avec $\rho \sim 1 + \varepsilon/2$ en lieu et place de (23)).

On peut examiner maintenant quelles sont les conséquences d'un tel changement sur les corrélations (propagateurs nus). Dans un système critique ordinaire, un changement du comportement analytique de la magnétisation (via la prise en compte d'une boucle dans l'équation d'état) n'altère pas le comportement infrarouge du propagateur qui reste en $1/p^2$ à masse nulle. Ce qui est *spécifique des verres de spin* c'est la brisure d'ergodicité, d'où une *fonction* $q(x)$ (une fonction qui, en champ magnétique nul, quelle que soit la température, sera toujours proche de zéro pourvu que le recouvrement x le soit aussi). Corrélativement, cet aspect entraîne l'existence d'un large spectre de masses nulles ou voisines de zéro: ainsi, pour le secteur le plus "dangereux" (replicon) on a un spectre indexé par plusieurs paramètres continus [9] :

$$\begin{aligned} \lambda_R(k_1, k_2 ; x) &= M(k_1) + M(k_2) - 2M(x) \\ M(k) &= uq^2(k) \end{aligned} \quad (24)$$

Le propagateur $G^{xx}(p)$ dans le secteur replicon est ainsi décrit comme une somme pondérée sur les propagateurs associés à chaque masse $[p^2 + \lambda_R(k_1, k_2 ; x)]^{-1}$, d'où la sensibilité du comportement infrarouge à $q(x)$ (pour x petit), soit

$$G^{00}(p) \sim 1/p^{2+2/\rho} \quad (25)$$

au lieu de (15). Le large spectre de masses nulles (et leur voisinage) induit donc une érosion à la fois de $q(x)$ (pour $x \sim 0$) et des divergences infrarouges de $G^{00}(p)$. *Il permet de respecter l'inégalité de Schwarz et aux verres de spin d'exister en dimension inférieure à 6* (sans présumer de l'effet de boucles d'ordre supérieur).

Ce phénomène n'est lié qu'à l'existence d'un secteur où $q(x)$ reste très voisin de zéro, ce qui permet de dire que le verre de spin est *critique à toute température*.

Notons enfin que nous avons jusqu'ici travaillé en champ magnétique nul (infinitésimal). En champ magnétique [12, 13], paradoxalement, le secteur "dangereux" (replicon) devient régulier (en $1/p^2$ en régime classique) et c'est l'autre secteur (longitudinal-anormal) qui devient le plus dangereux et reste en même temps très difficile à traiter analytiquement.

References

- [1] BLANDIN A. et FRIEDEL J., *J. Phys. France* **20** (1959) 160.
- [2] BINDER K. and YOUNG P.A., *Rev. Mod. Phys.* **58** (1986) 801.
- [3] MÉZARD M., PARISI G. and VIRASORO M.A., *Spin Glass Theory and Beyond*, World Scientific Notes in Physics Vol.9 (1986) Singapore, New Jersey, Hong Kong.
- [4] ANDERSON P.W., *Lecture Notes, Ecole d'Été des Houches 1978, Ill condensed Matter*, Eds. R. Balian, R. Maynard et G. Toulouse (North Holland, Amsterdam, New York, Oxford) 1979.
- [5] DE DOMINICIS C. and KONDOR I., *J. Phys. A* (1989) à paraître.
- [6] EDWARDS S. and ANDERSON P.W., *J. Phys.* **F5** (1975) 965.
- [7] PARISI G., *Phys. Lett.* **73A** (1979) 154 ; *J. Phys.* **A13** (1980) L115, 1101, 1887.
- [8] BLANDIN A., *J. Phys. Colloq. France* **39** (1978) C6-1499.
- [9] DE DOMINICIS C. and KONDOR I., *Phys. Rev.* **B27** (1983) 189.
- [10] PARISI G., *Phys. Rev. Lett.* **50** (1983) 192.
- [11] TEMESVARI T., KONDOR I. and DE DOMINICIS C., *J. Phys.* **A21** (1988) L1145.
- [12] DE DOMINICIS C. et KONDOR I., *J. Phys.* **45** (1984) L205.
- [13] DE DOMINICIS C. et KONDOR I., *J. Phys. France Lett.* **46** (1985) L1037; *Application of Field Theory to Statistical Mechanics*, Ed. L. Garrido, *Lecture Notes in Physics* **216** (Springer Berlin) 1985.
- [14] SOMPOLINSKY H. and ZIPPELIUS A., *Phys. Rev. Lett.* **50** (1983) 1297.
- [15] OGIELSKY A.T., *Phys. Rev.* **B32** (1985) 7384.
- [16] SOURLAS N., *Europhys. Lett.* **6** (1988) L241 ; CARRACIOLO S., PARISI G., PATARNELLO S. and SOURLAS N. (1989) à paraître.
- [17] DE ARCANGELIS L., CONIGLIO A. and HERRMANN H., *Europhys. Lett.* (1989) sous presse ; DE ARCANGELIS L., HERRMANN H. and CONIGLIO A., Saclay preprint T89-078