Un modèle de Bremsstrahlung couplant une trajectoire classique et un champ quantifié

Guy Mayer

J. Phys. France **50** (1989) 2175-2192 15 AOÛT **1989**, PAGE 2175

Classification
Physics Abstracts
32.80K — 34.50 — 42.50

Un modèle de Bremsstrahlung couplant une trajectoire classique et un champ quantifié

Guy Mayer

Laboratoire d'Optique Quantique du Groupe de Physique des Solides de l'Ecole Normale Supérieure, Université Paris VII, 2 place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05, France

(*Reçu le 17 mai 1988, révisé le 17 mars 1989, accepté le 27 avril 1989*)

Résumé. — Une variation de vitesse d'une particule chargée déplace le point d'équilibre des oscillateurs harmoniques décrivant le champ électromagnétique. A partir des projections de la fonction d'onde initiale déplacée sur les états propres de l'oscillateur, nous calculons assez directement divers effets de Bremsstrahlung multiphotoniques. Le modèle n'est réaliste que si la variation de vitesse a lieu en un temps petit devant la période des oscillateurs. Nous retrouvons des résultats obtenus par des voies différentes et apportons quelques précisions nouvelles.

Abstract. — A charged particle velocity variation induces a displacement of the equilibrium point of the electromagnetic field oscillators. Projecting the displaced initial wave function on the oscillators eigenstates we get a straightforward calculation of various multiphotonic Bremsstrahlung effects. The model is realistic only if the velocity change occurs in a time small *versus* the oscillators periods. Our results which are in substantial agreement with previous calculations may help to clarify a few points.

Quand on modifie brusquement le point d'équilibre d'un oscillateur harmonique, il entre en oscillation s'il est initialement immobile ; si, au contraire, il était déjà en mouvement, celui-ci se trouve en général altéré. Cette modification « brusque » peut être obtenue en installant en un temps petit devant la période de l'oscillateur une force qui agira avec une intensité constante indépendante de la position x de l'objet en mouvement. Le point d'équilibre où l'énergie potentielle est minimale sera déplacé d'une longueur x_0 proportionnelle à la force, mais la période ne sera pas changée.

Appelons $\psi_n(x)$ la fonction d'onde décrivant la situation de l'oscillateur de fréquence ν avant la perturbation qui déplacera le point d'équilibre d'une « longueur » x_0. Immédiatement après l'installation de la perturbation en un temps t tel que $\nu t \ll 1$, la fonction n'est pas changée et l'état de l'oscillateur est décrit par les amplitudes $C_{n,n+q}(x_0)$ des nouvelles fonctions propres $\psi_{n+q}(x-x_0)$

$$C_{n,n+q}(x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n(x)\, \psi_{n+q}(x-x_0)\, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n(x+x_0)\, \psi_{n+q}(x)\, \mathrm{d}x\,. \quad (1)$$

Les oscillateurs considérés sont les modes propres du champ électromagnétique de volume L^3 arbitraire. Les indices n, $n + q$ désignent des nombres de quanta dans un mode.

La variable x correspondra par une normalisation convenable à la projection a sur un axe de coordonnées du potentiel vecteur **a** d'une composante de Fourier spatiale du potentiel vecteur **A**.

La variation x_0 du centre d'oscillation de a sera due à la variation Δv de la projection sur le même axe de la vitesse d'une particule douée d'une charge e.

Le nombre de photons émis ou absorbés à l'occasion de ces variations de vitesse sera essentiellement déterminé par les grandeurs $C_{n,n+q}(x_0)$; à $C^2_{n,n+q}$ correspondra la probabilité de l'émission de q photons ; à $C^2_{n,n-q}$ correspondra la probabilité de l'absorption de q photons.

C'est dans le domaine des basses fréquences que ce modèle s'écartera le moins de la réalité d'une part parce que la condition de variation « instantanée » $\nu t \ll 1$ y sera plus facilement satisfaite et d'autre part parce que l'absorption ou l'émission d'un bon nombre de petits quantas $\hbar\omega$ ne perturbera pas trop en valeur relative le module de la vitesse.

Low [1] a étudié de façon très générale la limite « basse fréquence » du Bremsstrahlung. Les deux conditions évidemment nécessaires dans notre modèle apparaissent dans sa théorie, notre durée de la variation de vitesse correspondant à la « durée d'une collision » bv^{-1} (b portée du potentiel électron-diffuseur). Nous revenons sur cette question à propos de l'équation (20).

Nous calculerons donc les effets de Bremsstrahlung multiphoniques dans ce modèle d'oscillateurs déplacés qui associe une trajectoire décrite classiquement en termes de variations de vitesse et un champ quantifié et nous comparerons nos résultats à ceux des théories plus couramment utilisées qui associent une onde décrite par une intensité de champ électrique à une particule décrite par une fonction d'onde.

Calcul du déplacement x_0 en fonction de $e\,\Delta v$.

Nous considérons des modes polarisés linéairement. La projection du potentiel vecteur sur l'axe de polarisation sera écrite

$$A(x, y, z, t) = \sum_s a_s(t)\, \phi_s(x, y, z)\,. \tag{2}$$

Les ϕ_s donnent les structures spatiales des modes propres d'oscillation de l'enceinte de volume L^3. Les ϕ_s sont orthogonales sur ce volume et normalisées.

Pour expliquer comment nous passons des grandeurs réelles A, e, Δv à la grandeur x_0 normalisée, nous répétons à présent quelques éléments d'un calcul bien connu qui mène d'abord à l'écriture hamiltonienne des mouvements de $a_s(t)$ en fonction de deux coordonnées canoniques P_s et Q_s qui seront ensuite considérées comme des opérateurs.

Soit ν la fréquence du mode, on a

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = -2\,\pi i\,\nu a \tag{3}$$

et l'équation conjuguée relative à a^*.

Pour définir à partir de a et a^* deux grandeurs réelles P et Q, on pose

$$\frac{1}{2}(a + a^*) = \sqrt{\pi}Q \tag{4}$$

$$\frac{1}{2i}(a - a^*) = \sqrt{\pi}P\,. \tag{5}$$

On a bien la forme hamiltonienne $\frac{\partial H}{\partial P}$ pour $\dot{Q}$ et $-\frac{\partial H}{\partial Q}$ pour $\dot{P}$ avec

$$H = \pi \nu (Q^2 + P^2) = \nu a a^* . \tag{6}$$

Considérés comme des opérateurs $\tilde{Q}$ et $\tilde{P}$ obéiront à la règle de commutation $\tilde{Q}\tilde{P} - \tilde{P}\tilde{Q} = i\hbar$. L'unité naturelle d'énergie dans l'équation (6) sera $\frac{\hbar\omega}{2}$. Les équations (4) et (5) définissent alors à partir de $\tilde{Q}$ et $\tilde{P}$ les opérateurs de création $a^\dagger$ et d'annihilation a.

L'hamiltonien classique décrivant le mouvement de la charge est

$$H = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - e\frac{\mathbf{a}}{c}\right)^2 \tag{7}$$

d'où on tire pour expression de la vitesse

$$\mathbf{v} = \frac{1}{m}\left(\mathbf{p} - e\frac{\mathbf{a}}{c}\right). \tag{8}$$

Ainsi une variation $\Delta\mathbf{v}$ de la vitesse induit dans H, outre un terme $\frac{\mathbf{P}}{m}\cdot\Delta\mathbf{v}$ sans incidence électromagnétique, une variation

$$\Delta H = -\frac{e}{c}\Delta\mathbf{v}\cdot\mathbf{a} = -\frac{e}{c}\Delta v\cdot a \tag{9}$$

en appelant Δv la projection de $\Delta\mathbf{v}$ sur la direction de $\mathbf{a}$. Pour trouver la correspondance entre a et les coordonnées normalisées P ou Q (elles jouent des rôles symétriques), nous écrivons l'énergie dans les deux systèmes :

$$\frac{\omega^2}{c^2}\frac{\overline{a^2}}{4\pi}L^3 = \pi\nu(\overline{Q^2} + \overline{P^2}) \tag{10}$$

d'où on tire

$$a = 2\sqrt{\pi}\,\frac{c}{\omega^{1/2}L^{3/2}}\,Q\,. \tag{11}$$

Avant la variation de vitesse Δv, H était donné par l'équation (6) ; après il vaut

$$H = \pi\nu\left[\left(Q - 2\sqrt{\pi}\,\frac{e\,\Delta v}{\omega^{3/2}L^{3/2}}\right)^2 + P^2 - 4\pi\,\frac{e^2\,\Delta v^2}{\omega^3 L^3}\right] \tag{12}$$

Q étant de dimension $\hbar^{1/2}$, le déplacement du point d'équilibre de l'oscillateur est en grandeur normalisée

$$x_0 = 2\sqrt{\pi}\,\frac{e\,\Delta v}{\hbar^{1/2}\,\omega^{3/2}L^{3/2}}\,. \tag{13}$$

Le terme en Δv^2 de l'équation (12) correspond à un déplacement d'ensemble de toute l'échelle d'énergie de l'oscillateur. Il est sans effet sur les probabilités de transition.

Emission purement spontanée.

Considérons d'abord le cas où le mode est vide au moment de la variation de vitesse qui correspond au déplacement x_0.

La probabilité d'émission de q photons correspondra à $C_{0q}^2(x_0)$ avec

$$C_{0q}(x_0) = \int \psi_0(x + x_0)\, \psi_q(x)\, \mathrm{d}x\,. \tag{14}$$

Les fonctions ψ_q normalisées impliquent les polynômes d'Hermite $h_q(x)$:

$$\psi_q(x) = (q!\, 2^q \sqrt{\pi})^{-1/2} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} h_q(x)\,. \tag{15}$$

La fonction génératrice des $h_q(x)$ étant $\exp\{-t^2 + 2\,tx\}$, il suffit de poser $t = \frac{x_0}{2}$ pour trouver

$$\psi_0(x + x_0) = \exp\left\{-\frac{x_0^2}{4}\right\} \sum_q (-1)^q \left(\frac{x_0}{\sqrt{2}}\right)^q (q!)^{-1/2}\, \psi_q(x)\,. \tag{16}$$

Ainsi, selon l'équation (14)

$$C_{0q} = (-1)^q \exp\left\{-\frac{x_0^2}{4}\right\} (2^q\, q!)^{-1/2}\, x_0^q\,. \tag{17}$$

Dès 1926, cette distribution d'amplitudes assez particulière a éveillé l'attention de Schrödinger [2]. Elle donne à l'incontournable incertitude $\overline{\Delta P^2}\ \overline{\Delta Q^2}$ la valeur minima $\frac{\hbar^2}{4}$. Plus récemment, Glauber [3] l'a utilisée sous le nom d'« état cohérent » à l'analyse des fluctuations du champ.

Les valeurs de C_{0q}^2 sont en fonction de q distribuées conformément à une loi de probabilité de Poisson :

$$C_{0q}^2 = \left(\frac{x_0^2}{2}\right)^q (q!)^{-1} \exp\left\{-\frac{x_0^2}{2}\right\}. \tag{18}$$

Nous discuterons plus loin, après avoir calculé le terme général $C_{n,n+q}(x_0)$, du facteur qui doit multiplier C_{0q}^2 pour que la probabilité correcte d'émission de q photons soit obtenue. Ce facteur prend en compte selon l'esprit de la règle de Fermi les densités d'états différents accessibles à la particule qui a perdu des nombres de quantas d'énergie différents.

Si on assimile ce facteur à l'unité, on trouve

$$\sum q C_{0q}^2 = \frac{x_0^2}{2} \simeq C_{01}^2\,. \tag{19}$$

Ce résultat est quelque peu paradoxal : le nombre total de photons émis à tous les ordres multiphotoniques est celui qu'on obtient avec le seul premier terme $\frac{x_0^2}{2}$ de la probabilité C_{01}^2 d'émission d'un seul photon et l'énergie du mode se trouve égale à l'énergie d'un oscillateur classique déplacé de x_0.

Ce premier terme $\frac{x_0^2}{2}$ de C_{01}^2 contient le paramètre arbitraire L^3 volume de la boîte qui définit les modes. Considérons tous les modes de L^3 compris dans l'intervalle de fréquence ω, $\omega + \mathrm{d}\omega$. leur nombre est $L^3\,\omega^2\,\pi^{-2}\,c^{-3}\,\mathrm{d}\omega$. Désignons par $\overline{\cos^2\theta}$ la valeur moyenne relative aux angles θ existant entre $\boldsymbol{\Delta v}$ et les directions du vecteur électrique de ces divers modes, le nombre total de photons émis sera

$$\mathrm{d}\phi = \frac{2}{\pi}\,\overline{\cos^2\theta}\,\frac{e^2\,\Delta v^2}{\hbar c^3}\,\frac{\mathrm{d}\omega}{\omega}\,. \tag{20}$$

Cette expression est satisfaisante car L^3 en a disparu. La présence du facteur $\exp\left\{-\frac{x_0^2}{2}\right\}$ dans l'équation (18) est déplaisante en principe puisqu'il dépend de L^3 ; mais on peut remarquer que pour jouer son rôle ωL doit être supérieur à πc $\left(L > \frac{\lambda}{2}\right)$; ainsi

$$x_0^2 < \frac{e^2}{\hbar c}\,\frac{\Delta v^2}{c^2} \tag{21}$$

et c'est bien le premier terme du développement des C_{0q}^2 en puissances de x_0 qui dominera.

L'équation (20) pose un problème de divergence « infrarouge » en nombre de photons. En fait, le modèle qui y a conduit suppose que la période ω^{-1} est inférieure à l'intervalle de temps t_i séparant deux variations de vitesse consécutives.

Dans tous les cas réels, la densité de diffuseurs est finie, t_i n'est pas infinie et l'équation (20) n'est valable que pour $\omega t_i > 2\,\pi$. Vers les hautes fréquences, la validité de l'équation (20) est bornée, nous l'avons vu par la conditon « de variation brusque » $\omega t \ll 1$, t étant de l'ordre de bv^{-1}.

Selon Schiff [4], on peut estimer l'erreur commise quand cette condition n'est plus satisfaite : la différence entre la vraie amplitude C_{0q} et celle que nous calculons est mesurée par la différence entre l'unité et $\exp\{-iq\omega t\}$; ce sera encore vrai pour les amplitudes $C_{n,n+q}$ que nous calculons ci-après.

Emissions stimulées et absorption.

Dans les effets multiphotoniques, la correspondance « spontané-stimulé » n'est pas aussi simple qu'au premier ordre. Aussi préférons-nous obtenir les effets d'une onde sur le système par un calcul direct des $C_{n,n+q}(x_0)$. La connexion entre n et le carré moyen du champ électrique $\bar{F}^2$ ou l'intensité I exprimée en nombre de photons par cm² et seconde sera

$$n = \frac{\bar{F}^2}{4\,\pi}\,\frac{L^3}{\hbar\omega} = \frac{I}{c}\,L^3\,. \tag{22}$$

Dans les expressions que nous obtiendrons pour $C_{n,n+q}^2(x_0)$, seuls les termes du genre $n^s\,x_0^{2s}$ seront indépendants du volume arbitraire L^3.

Nous présentons au tableau I pour $q = 0, 1, 2, 3$ les premiers termes des $C_{n,n+q}(x_0)$ développés en puissances croissantes de x_0. Le terme x_0^s de $C_{n,n+q}$ est $(s!)^{-1}\,x_{n,n+q}^s\,x_0^s$ où $x_{n,n+q}^s$ est l'élément de matrice de x^s entre ψ_n et ψ_{n+q}.

En effet, conformément à son équation (1) de définition $C_{n,n+q}(x_0)$ résulte (à un facteur

$(-1)^{n+q}$ près) d'une convolution entre ψ_n et ψ_{n+q}. Donc en appelant $g_n(\kappa)$ et $g_{n+q}(\kappa)$ les transformées de Fourier de ψ_n et ψ_{n+q} :

$$C_{n,n+q}(x_0) = \int g_n(\kappa)\, g_{n+q}(\kappa)\, \mathrm{e}^{i\kappa x_0}\, \mathrm{d}\kappa = \sum_s \frac{(ix_0)^s}{s\,!} \int g_n(\kappa)\, \kappa^s g_{n+q}(\kappa)\, \mathrm{d}\kappa\,. \tag{23}$$

Mais l'équation de Schrödinger de l'oscillateur harmonique se retrouve après transformation de Fourier identique en κ et $g(\kappa)$ à ce qu'elle était en x, $\psi(x)$ avant. g_n est identique à ψ_n si n est pair et à $-i\psi_n$ si n est impair.

Ce sont donc bien les $x^s_{n,n+q}$ qu'il nous faut. Nous les avons obtenus par récurrence pour des valeurs croissantes de q et de s.

Les $C_{n,n+q}$ sont présentés au tableau I de façon à mettre en évidence ces éléments de matrice. Ils permettent le calcul des $C^2_{n,n+q}$ qui mèneront aux probabilités de transition. Par exemple

$$C^2_{n,n+2} = \frac{(n+1)(n+2)}{16} x_0^4 \left[1 - \frac{2n+3}{3}\frac{x_0^2}{2!} + \frac{7n^2+21n+18}{6}\frac{x_0^4}{4!} - \cdots \right]. \tag{24}$$

Cette expression est relative à l'émission de deux photons, stimulée ou spontanée. Symétriquement, $C^2_{n,n-2}$ qui, étant égale à $C^2_{n-2,n}$, se déduit de la même formule, sera relative à l'absorption simultanée de deux photons. Dans chaque terme x_0^{2s} où $s \geqslant q$ figure un polynôme en n d'ordre s. A son terme constant correspond l'effet purement spontané que nous avons déjà calculé dans le cas $n = 0$ (Eq. (18)).

Nous allons discuter dans les prochains paragraphes l'expression obtenue quand on ne retient au contraire dans chaque terme x_0^{2s} que le terme n^s de plus haute puissance en n.

Tableau I. — *Amplitudes $C_{n,n+q}(x_0)$ calculées à partir des éléments de matrice $x^s_{n,n+q}$ de l'oscillateur harmonique.*
[Amplitudes $C_{n,n+q}(x_0)$ calculated from harmonic oscillator matrix elements $x^s_{n,n+q}$.]

$$C_{nn}(x_0) = 1 - \frac{2n+1}{2}\frac{x_0^2}{2!} + \frac{3}{4}(2n^2+2n+1)\frac{x_0^4}{4!} - \frac{5}{8}(4n^3+6n^2+8n+3)\frac{x_0^6}{6!} + \frac{35}{16}(2n^4+4n^3+10n^2+8n+3)\frac{x_0^8}{8!} - \cdots$$

$$C_{n,n+1}(x_0) = -\frac{(n+1)^{1/2}}{\sqrt{2}}x_0 + \frac{(n+1)^{1/2}}{\sqrt{2}}\frac{3(n+1)}{2}\frac{x_0^3}{3!} - \frac{(n+1)^{1/2}}{\sqrt{2}}\frac{5}{4}(2n^2+4n+3)\frac{x_0^5}{5!} + \frac{(n+1)^{1/2}}{\sqrt{2}}\frac{35}{8}(n^3+3n^2+5n+3)\frac{x_0^7}{7!} - \cdots$$

$$C_{n,n+2}(x_0) = \frac{[(n+1)(n+2)]^{1/2}}{2}\frac{x_0^2}{2!} - \frac{[(n+1)(n+2)]^{1/2}}{2}(2n+3)\frac{x_0^4}{4!} + \frac{[(n+1)(n+2)]^{1/2}}{2}\frac{15}{4}(n^2+3n+3)\frac{x_0^6}{6!} - \cdots$$

$$C_{n,n+3}(x_0) = -\frac{[(n+1)(n+2)(n+3)]^{1/2}}{2\sqrt{2}}\frac{x_0^3}{3!} + \frac{[(n+1)(n+2)(n+3)]^{1/2}}{2\sqrt{2}}\frac{5(n+2)}{2}\frac{x_0^5}{5!} - \cdots$$

Dans chaque terme de chaque ligne du tableau I, convenons de ne retenir que le terme de plus haute puissance en n qui sera pratiquement le terme dominant si n est grand (si l'onde est forte). Par exemple :

$$\Gamma_{nn}(x_0) = 1 - \frac{nx_0^2}{2} + \frac{n^2 x_0^4}{16} - \frac{n^3 x_0^6}{12 \times 24} + \frac{n^4 x_0^8}{64 \times 144} \cdots \tag{25}$$

et posons $y = \sqrt{2\, nx_0}$, on constate

$$\Gamma_{nn}(y) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{\left(\frac{y}{2}\right)^{2s}}{s!\, s!} = J_0(y) . \tag{26}$$

On constaterait de même pour $\Gamma_{n,n+q}(y)$ la valeur $(-1)^q J_q(y)$. Les fonctions J_q sont les fonctions de Bessel d'ordre q.

Les fonctions de Bessel dans les théories du Bremsstrahlung.

Un calcul de Bremsstrahlung implique deux espèces d'action sur l'électron libre : l'une est due à la cible, l'autre au rayonnement. Notre calcul escamote l'action de la cible en la résumant par son effet : une variation de vitesse de la particule chargée. Ensuite, nous calculons l'effet de cette variation sur les oscillateurs de champ dont le point d'équilibre s'est trouvé déplacé. Cette méthode donne un résultat précis quelle que soit l'énergie initiale $n\hbar\omega$. Les séries de termes de plus hautes puissances de n dans les amplitudes font ainsi apparaître « expérimentalement » les fonctions de Bessel J_q à partir des éléments de matrices $(x^s)_{n,n+q}$ de l'oscillateur harmonique. Elles sont également présentes dans les probabilités de transitions multiphoniques prédites par toutes les théories en usage du Bremsstrahlung.

Elles y apparaissent parce que selon un schéma dû à Wolkow [5] la fonction d'onde d'un électron soumis à une onde électromagnétique de potentiel A cos ωt comporte un facteur $\psi(t)$ fonction de son énergie $H(t)$ modulée par $\mathbf{A}(t)$:

$$\psi(t) = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\int^t H(t)\mathrm{d}t\right\} = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int^t e\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{A}}{mc}\cos\omega t\, \mathrm{d}t\right\} = \exp\left\{i\frac{e}{mc\hbar\omega}\mathbf{p}\cdot\mathbf{A}\sin\omega t\right\} \tag{27}$$

$\mathbf{A}$ n'est pas un opérateur ; l'onde est donc implicitement supposée intense. L'intégrale impliquée à la dimension d'une action. Dans le cas non relativiste qui est le nôtre, ce facteur $\psi(t)$ permet de façon simple et directe à la fonction d'onde de satisfaire à l'équation de Schroedinger dépendant du temps.

Ainsi, apparaît en plus de l'amplitude centrale $J_0(y)$ correspondant à l'énergie ε de la particule non perturbée, tout un spectre d'amplitudes $J_q(y)$, $J_{-q}(y)$ correspondant aux énergies $\varepsilon \pm q\hbar\omega$, l'argument y étant

$$y = \frac{\mathbf{p}}{mc}\frac{e\mathbf{A}}{\hbar\omega} = \mathbf{vF}\frac{e}{\hbar\omega^2} . \tag{28}$$

Après ce point de départ commun, les auteurs [6-15] justifient par des voies diverses la transformation dans l'interaction électron-diffuseur de ces amplitudes proportionnelles à $J_q(y)$ en probabilités observables de transition proportionnelles à $J_q^2(y)$.

Finalement, pour des fréquences « suffisamment » faibles, l'effet de la cible peut être résumé par la section *élastique* de diffusion $\frac{\partial\sigma_e}{\partial\Omega}(\theta)$ dans la direction θ considérée et c'est la variation de vitesse due au changement de direction θ sans changement de module qui figure dans l'expression de y. (A l'aide des équations (13) et (22), on peut vérifier que l'argument y de l'équation (28) est égal à $x_0 \sqrt{2n}$).

Ce point est étudié avec un soin particulier dans le travail de Choudhury [15] qui utilise une approximation de Born au second ordre.

Les travaux de Fried et Eberly [16] sont aussi à lire ; ces auteurs étudient le problème différent mais connexe du nôtre de la diffusion Thomson en champ intense. Les fonctions de Bessel y apparaissent par l'intermédiaire de fractions continues (Eq. (11-16) de la Ref. [16]).

On peut comparer les probabilités $J_q^2(\sqrt{2n}x_0)$ ainsi obtenues pour une variation d'énergie $|q|\,\hbar\omega$ d'un oscillateur d'énergie $\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$ déplacé de x_0 aux probabilités prévues pour un oscillateur classique.

Soit $X \sin \omega t$ son amplitude et soit x_0 le déplacement survenant en t_0, la variation de carré d'amplitude $X'^2 - X^2$ sera égale à $x_0^2 - 2Xx_0 \sin \omega t_0$. Avec un choix convenable de l'unité d'énergie, $X'^2 - X^2$ sera la variation d'énergie ΔE (l'analogue de $q\hbar\omega$). Pour un fort degré d'excitation, ΔE est dominée par le terme Xx_0. La probabilité d'une variation ΔE est proportionnelle à $\left[1-\left(\frac{\Delta E}{2Xx_0}\right)^2\right]^{-1/2}$. A ΔE croissante, elle passe par un maximum à $2Xx_0$ avant de s'annuler. Ainsi, en limite classique, la variation d'énergie la plus probable est égale à la racine carrée de l'énergie multipliée par $2x_0$. Ce résultat trouve sa correspondance ici : les $J_q^2(x_0\sqrt{2n})$ atteignent leur maximum pour des valeurs de q voisines de l'argument $x_0\sqrt{2n}$.

Dissymétrie entre absorption et émission.

Le carré de l'élément de matrice de la transition impliquant q quantas est donc le produit de $\frac{\partial\sigma_e}{\partial\Omega}$ qui résume l'action de la cible et de $J_q^2(x_0\sqrt{2n})$ qui résume celle de la radiation dans le cas où n est grand.

Comme $J_q^2 = J_{-q}^2$, c'est uniquement par la considération de la densité des états finaux accessibles à l'électron qu'on pourra créer une dissymétrie entre absorption $(q<0)$ et émission $(q>0)$.

Nous mentionnerons une formule [8, 13, 15] qui a guidé les interprétations de diverses expériences [17]. Elle donne une relation entre la probabilité de diffusion élastique $\frac{\partial\sigma_e}{\partial\Omega}$ et la probabilité de diffusion avec émission de q photons

$$\left(\frac{\partial\sigma}{\partial\Omega}\right)_q = \frac{\partial\sigma_e}{\partial\Omega} J_q^2(y)\,\frac{P_f}{P_0}. \tag{29}$$

Le facteur $\frac{P_f}{P_0}$ fait intervenir de façon assez approximative par le quotient des moments final et initial, la densité d'états qui figure dans la règle de Fermi. On a :

$$P_f^2 - P_0^2 = -2\,mq\hbar\omega\,. \tag{30}$$

Si $\hbar\omega$ est petit devant l'énergie initiale $\varepsilon = \frac{P_0^2}{2m}$, on obtient :

$$\frac{P_f}{P_0} \simeq 1 - \frac{q}{2}\frac{\hbar\omega}{\varepsilon}. \tag{31}$$

Sans ce facteur l'absorption serait égale à l'émission. Grâce à ce facteur, l'absorption nette (absorption diminuée de l'émission stimulée) l'emporte sur l'émission :

$$\left(\frac{\partial\sigma}{\partial\Omega}\right)_{-q} - \left(\frac{\partial\sigma}{\partial\Omega}\right)_{q} \simeq \frac{\partial\sigma_{\mathrm{e}}}{\partial\Omega} J_q^2(y)\, q\, \frac{\hbar\omega}{\varepsilon}. \tag{32}$$

Le facteur de l'équation (31) appliqué aux probabilités $C_{n,n+q}^2$ n'altère pas leur normalisation tant que $n \gg q$ car ce qui est ajouté à $C_{n,n-q}^2$ est retiré à $C_{n,n+q}^2$. Mais il détruit celle des C_{0q}^2.

Les fonctions de Bessel dans notre modèle.

Jusqu'ici, c'est de façon empirique que nous avons rencontré les fonctions de Bessel dans notre modèle en constatant l'identité des premiers termes des $\Gamma_{n,n+q}(x_0)$ obtenues à partir des $C_{n,n+q}(x_0)$ complètes en ne retenant dans chaque terme que la plus haute puissance de n avec les premiers termes de $J_q(\sqrt{2n}\,x_0)$. Nous allons montrer que dans la limite $n \gg 1$, la fonction $\Gamma_{n,n+q}(x_0)$ est bien $J_q(\sqrt{2n}\,x_0)$.

A. Relation entre $\Gamma_{n,n}$ et J_0. — Nous utilisons les relations de création et d'annihilation sous la forme

$$\sqrt{2(n+1)}\,\psi_{n+1} = x\psi_n - \frac{\partial\psi_n}{\partial x} \tag{33}$$

$$\sqrt{2n}\,\psi_{n-1} = x\psi_n + \frac{\partial\psi_n}{\partial x}. \tag{34}$$

Les ψ étant des solutions normalisées de l'équation de Schrödinger. Grâce à ces relations, $C_{n+1,n+1}$ d'une part et $C_{n-1,n-1}$ d'autre part peuvent s'exprimer en fonction de $C_{n,n}$ et $\frac{\partial C_{n,n}}{\partial x_0}$. Ceci fournit deux équations.

Leur différence donne (nous abrégeons C_{jj} en C_j) :

$$n(C_{n+1} - C_{n-1}) + C_{n+1} - C_n = x_0 \frac{\partial C_n}{\partial x_0}. \tag{35}$$

Leur somme donne

$$(n+1)(C_{n+1} - C_n) + n(C_{n-1} - C_n) = -\frac{x_0^2}{2} C_n. \tag{36}$$

Ces équations sont exactes. Usons à présent d'un développement limité :

$$C_{n\pm1} = C_n \pm \frac{\partial C_n}{\partial n} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_n}{\partial n^2} \tag{37}$$

qui ne sera valable que pour les n grands. Dans cette limite, les équations (35), (36) et (37) seront applicables aux fonctions limites Γ_n. L'équation (35) nous donne

$$2\frac{\partial\Gamma_n}{\partial \log n} = \frac{\partial\Gamma_n}{\partial \log x_0} \tag{38}$$

ce qui nous indique que Γ_n est une fonction de $\sqrt{n}\, x_0$ (cf. Tab. I). L'équation (36) nous donne :

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(n \frac{\partial \Gamma_n}{\partial n}\right) = -\frac{x_0^2}{2}\Gamma_n . \tag{39}$$

En posant $y = \sqrt{2\, n}\, x_0$, l'équation (39) devient :

$$\frac{\partial^2 \Gamma_n}{\partial y^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial \Gamma_n}{\partial y} + y\Gamma_n = 0 \tag{40}$$

qui est bien l'équation différentielle de $J_0(y)$.

Remarquons que compte tenu de l'équation (13) qui définit notre déplacement x_0, de l'équation (22) qui lie le nombre n au champ électrique F, la grandeur $y = \sqrt{2\, n}\, x_0$ est bien celle de l'équation (28) relative aux autres modèles.

B. Relations de récurrence entre $\Gamma_{n,n+q+1}$ et $\Gamma_{n,n+q}$. — En appliquant l'équation (33) d'escalade à l'étage $n+q$, on obtient

$$\sqrt{2(n+q+1)}\, C_{n,n+q+1} = \int \psi_n(x+x_0)\left[x\psi_{n+q} - \frac{\partial \psi_{n+q}}{\partial x}\right] \mathrm{d}x . \tag{41}$$

Le premier morceau de l'intégrale s'obtient en intégrant par parties $\frac{\partial \psi_n}{\partial x}(x+x_0)\frac{\partial \psi_{n+q}}{\partial x}\mathrm{d}x$ des deux façons possibles, en remplaçant les dérivées secondes par leurs expressions tirées de l'équation de Schrödinger et en égalant les deux résultats

$$\int \psi_n(x+x_0)\, x\psi_{n+q}(x)\, \mathrm{d}x = -\left(\frac{x_0}{2} + \frac{q}{x_0}\right) C_{n,n+q} . \tag{42}$$

Le deuxième morceau de l'intégrale est la dérivée en x_0 de $C_{n,n+q}$. Ainsi

$$\sqrt{2(n+q+1)}\, C_{n,n+q+1} = \frac{\partial C_{n,n+q}}{\partial x_0} - \left(\frac{x_0}{2} + \frac{q}{x_0}\right) C_{n,n+q} . \tag{43}$$

C'est seulement avec l'hypothèse supplémentaire $x_0^2 \ll 1$, largement vérifiée pour des dimensions L du volume arbitraire L^3 assez grandes pour qu'on puisse y définir des modes de fréquence ω (Eq. (21)) qu'on pourra pour de grandes valeurs de $n \gg q+1$ obtenir avec la variable $y = \sqrt{2\, n}\, x_0$:

$$\Gamma_{n,n+q+1}(y) = \frac{\partial \Gamma_{n,n+q}}{\partial y} - \frac{q}{y}\Gamma_{n,n+q} . \tag{44}$$

Cette relation est, au signe près, la relation d'escalade des fonctions de Bessel

$$J_{q+1} = \frac{q}{y} J_q - \frac{\partial J_q}{\partial y} . \tag{45}$$

Comme $\Gamma_{nn} = J_0$, $\Gamma_{n,n+q}$ sera égal à $(-1)^q J_q$.

A propos du passage de l'équation (43) à l'équation (44), il faut rappeler que la tendance pour $n \to \infty$ de la vraie fonction $C_{n,n+q}(x_0)$ vers la série $\Gamma_{n,n+q}$ obtenue en ne gardant dans chaque terme x_0^s que le terme dominant $n^{s/2} x_0^s$ demanderait bien des précautions mathématiques.

Le caractère approximatif de nos explications ne doit pas nous faire oublier le fait remarquable qu'il s'agit de comprendre :

La fonction $\Gamma_{n,n+q}$ que nous calculons à partir des éléments de matrice $x_{n,n+q}^s$ est *exactement* égale à $(-1)^q J_q(y)$ quelles que soient *les valeurs petites ou grandes* de n et de q.

Par contre, les méthodes de calcul inspirées du travail de Wolkow impliquent que n soit grand.

Tableau II. — *Probabilités $C_{n,n+q}^2(x_0)$ calculées à partir du tableau* I. *Quel que soit $s \neq 0$ et $a \leqslant s$, la somme des termes $n^{s-a} x_0^{2s}$ est nulle.*

[Probabilities $C_{n,n+q}^2(x_0)$ calculated from table I. For any $s \neq 0$ and $a \leqslant s$, the sum of the terms $n^{s-a} x_0^{2s}$ is zero.]

$$C_{nn}^2 = 1 - \frac{2n+1}{2} x_0^2 + \frac{3n^2+3n+1}{8} x_0^4 - \frac{10n^3+15n^2+11n+3}{3 \times 48} x_0^6 + \cdots$$

$$C_{n,n-1}^2 = \frac{n}{2} x_0^2 \left(1 - \frac{n}{2} x_0^2 + \frac{5n^2+1}{48} x_0^4 - \cdots\right)$$

$$C_{n,n+1}^2 = \frac{n+1}{2} x_0^2 \left(1 - \frac{n+1}{2} x_0^2 + \frac{5n^2+10n+6}{48} x_0^4 - \cdots\right)$$

$$C_{n,n-2}^2 = \frac{n(n-1)}{16} x_0^4 \left[1 - \frac{2n-1}{6} x_0^2 + \cdots\right]$$

$$C_{n,n+2}^2 = \frac{(n+1)(n+2)}{16} x_0^4 \left[1 - \frac{2n+3}{6} x_0^2 + \cdots\right]$$

$$C_{n,n-3}^2 = \frac{n(n-1)(n-2)}{8 \times 36} x_0^6 - \cdots$$

$$C_{n,n+3}^2 = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{8 \times 36} x_0^6 - \cdots$$

Effets physiques des termes de $C_{n,n+q}^2$.

Le tableau II tiré des expressions du tableau I montre tous les termes en x_0 de puissance égale ou inférieure à x_0^6 qu'on trouverait dans un tableau plus complet.

D'une façon générale, un terme x_0^{2s} concerne un effet impliquant s étapes ; en appelant α la constante de structure fine, il contiendra α^s.

A titre d'exemple, nous allons parler d'abord des effets en α^2 décrits par les termes en x_0^4 (effets « à deux photons »).

La quantité $C_{n,n+2}^2$ qui concerne la probabilité d'émission de deux quanta comporte trois termes en x_0^4 : le terme $\frac{x_0^4}{8}$ d'émission « purement » spontanée qui coïncide avec le terme en x_0^4 de C_{02}^2 calculé par l'équation (18), un terme $\frac{3\,n x_0^4}{16}$ impliquant une étape spontanée et une étape stimulée, le terme $\frac{n^2 x_0^4}{16}$ égal au terme en x_0^4 de $J_2^2(\sqrt{2n}\, x_0)$ décrivant une émission doublement stimulée.

A. RELATION DU TERME $n^2 x_0^4$ DE $C_{n,n+2}^2$ À LA « SECTION EFFICACE À DEUX PHOTONS ». — A propos des effets relatifs aux transitions à un seul photon, il est commode d'utiliser une section efficace $\sigma_1(\omega)$ ayant la dimension d'une surface relative à l'objet qui absorbe ou émet. En présence d'une intensité I exprimée en photons $s^{-1}\,cm^{-2}$, l'objet subira $\sigma_1 I$ transitions par seconde. Dans un milieu où la densité des objets est N, le libre parcours Λ d'un photon sera $(N\sigma_1)^{-1}$.

Il est de même commode pour les effets à deux photons d'introduire une « section » σ_2 de dimension cm^4.s. Dans le cas le plus général, deux fréquences différentes peuvent se combiner : $\sigma_2(\omega, \omega')\, I(\omega)\, I'(\omega')$ donnera le nombre d'événements par seconde subis par un objet ; $\sigma_2 I(\omega)$ donnera la section efficace en cm^2 pour la lumière ω' de l'objet éclairé par $I(\omega)$ et le libre parcours de ω' sera $(N\sigma_2 I)^{-1}$. Pour le moment, nous considérons le cas dégénéré $\omega = \omega'$.

Nous avons deux façons d'écrire le nombre d'émissions stimulées à 2 photons : à l'aide de $n^2 x_0^4$ ou à l'aide de σ_2 en traduisant I en terme de n avec l'équation (22). Si la particule chargée subit $\frac{1}{\tau}$ variations de vitesses Δv par seconde, la valeur moyenne de Δv^4 étant notée $\overline{\Delta v^4}$ on trouve

$$\sigma_2(\omega, \omega) = \pi^2 \alpha^2 \omega^{-6} \frac{\overline{\Delta v^4}}{\tau}. \tag{46}$$

B. LE TERME nx_0^4 DE $C_{n,n+2}^2$. — Il correspond à une émission double « une fois spontanée, une fois stimulée ». Ses effets sont moins spectaculaires que ceux du terme $n^2 x_0^4$ mais néanmoins observables dans des conditions favorables : irradié par une onde d'intensité I qui correspond à $n = Ic^{-1} L^3$, la particule rayonnera « dans chaque mode » proportionnellement au terme nx_0^4, l'autre photon de l'émission double allant amplifier l'onde incidente. Le nombre de photons ainsi rayonnés dans les modes situés entre ω et $\omega + d\omega$ sera par unité de temps :

$$d\dot{\phi} = 3\, \alpha^2 \frac{\overline{\Delta v^4}}{\omega^4} \frac{1}{\tau} \frac{I}{c^2} d\omega \tag{47}$$

expression qui ne contient plus le volume arbitraire L^3.

Equilibre statistique.

Le travail fondamental de Goeppert Mayer [18] a établi que l'émission simultanée de deux photons se manifestait par les trois effets que nous avons énumérés : spontané double (notre terme x_0^4), partiellement stimulé (nx_0^4), doublement stimulé ($n^2 x_0^4$), et qu'il existait en contrepartie une absorption double.

Contribuent également au rayonnement spontané [18] d'autres termes nx_0^4 qui décrivent des effets « genre Raman » : un photon absorbé, un photon émis. Ils figurent au tableau II. Par exemple, le terme négatif en nx_0^4 de $C_{n,n-2}^2$ décrit un effet Raman. Les effets Raman stimulés en $n^2 x_0^4$ y sont aussi.

Il faut noter que les transitions à plusieurs photons considérés dans les atomes sont en général de « vraies » transitions multiphotoniques en ce sens qu'il n'y a pas d'états stationnaires intermédiaires susceptibles de servir d'étapes à une succession de transitions à un photon. Au contraire, la particule chargée a ici à sa disposition un continuum d'états propres à la situation est un peu différente.

Quand les états initial et final de la particule chargée sont bien définis en énergie et en poids statistique, le problème des relations existant entre ces trois effets se résout facilement [18]. On est guidé par le bilan détaillé d'Einstein : les effets doivent respecter les équilibres statistiques des particules et du rayonnement.

Mais ici, du point de vue des particules, les transitions sont indexées par des quantités Δv^{2s} et une même Δv peut associer bien des couples « états initial et final ».

Le problème reste le même : justifier une absorption qui compensera les émissions de façon que le nombre de photons par mode reste

$$n_T = \left[\exp\left\{\frac{\hbar\omega}{kT}\right\} - 1\right]^{-1}. \tag{48}$$

Remarquons d'abord que la différence du terme d'absorption $C^2_{n,n-2}$ et du terme d'émission $C^2_{n,n+2}$ ne comporte pas de termes en $n^2 x_0^4$. L'absorption « nette » $\Sigma_2 = \sigma_{-2} - \sigma_{+2}$ (cf. l'Eq. (46) qui donne aussi bien σ_{+2} que σ_{-2}) serait nulle.

C'est pourquoi un « facteur de poids statistique » dont nous avons donné un exemple avec l'équation (31) est nécessaire.

Nous voulons montrer que la connaissance des termes $n^s x_0^{2s}$ jointe à l'exigence d'équilibre statistique apporte des précisions sur le facteur qu'on doit appliquer à $C^2_{n,n+q}$ pour obtenir la probabilité correcte de transition.

Pour mieux expliquer la méthode, revenons au 1^er^ ordre. Aucune absorption n'est prévue car $C^2_{n,n-1} - C^2_{n,n+1}$ n'a pas de termes nx_0^2.

Posons pour obtenir une absorption nette non nulle :

$$\Sigma_1 = \sigma_1 g_1 . \tag{49}$$

Nous allons montrer que g_1, facteur physiquement relié aux densités d'états différentes pour la particule d'énergie $\varepsilon + \hbar\omega$ ou $\varepsilon - \hbar\omega$, est déterminé dans le cas $\varepsilon \gg \hbar\omega$ par la nécessité de l'équilibre statistique.

Dans un mode de volume L^3 rempli d'une densité N de particules le nombre de photons spontanés créés par seconde sera

$$\dot{\phi} = \frac{x_0^2}{2}\frac{1}{\tau} N L^3 . \tag{50}$$

La durée moyenne t de vie de ces photons sera limitée par l'absorption Σ_1 :

$$t = \frac{1}{N \Sigma_1 c} = \frac{1}{Nc \,.\, g_1 \sigma_1} . \tag{51}$$

Mais σ_1 est, de par sa définition

$$\sigma_1 = \frac{L^3 x_0^2}{c}\frac{1}{2}\frac{1}{\tau} . \tag{52}$$

Avec un rythme de création $\dot{\phi}$ et une durée de vie t on obtient un nombre d'équilibre qui doit coïncider avec l'expression de Planck

$$\dot{\phi} t = (g_1)^{-1} = \left|\exp\left\{\frac{\hbar\omega}{kT}\right\} - 1\right|^{-1} . \tag{53}$$

Pour $kT \gg \hbar\omega$, on obtient

$$g_1 \simeq \frac{\hbar\omega}{kT} . \tag{54}$$

Remarquons que la constante $\hbar$ présente dans σ_1 disparaît de l'absorption nette Σ_1.

Au deuxième ordre, le tableau II nous montre deux termes d'ordre nx_0^4 relatifs à des émissions comportant une étape spontanée et une étape stimulée.

Un terme positif $\frac{3\,nx_0^4}{16}$ dans $C^2_{n,n+2}$ (émission double partiellement stimulée).

Un terme $\frac{nx_0^4}{16}$ (absorption suivie d'une émission spontanée) à compter négativement pour $C^2_{n,n-2}$ mais positivement pour le spontané. On définit l'absorption nette à deux photons par la relation

$$\Sigma_2 = \sigma_2\, g_2 \tag{55}$$

où σ_2 est l'expression définie par l'équation (46).

En calculant $\dot{\phi} t$ de façon analogue à celle utilisée au premier ordre, on trouve en ne gardant que les termes du premier ordre en $\frac{\hbar\omega}{kT}$:

$$g_2 = 2\left[\exp\left\{\frac{\hbar\omega}{kT}\right\} - 1\right] \simeq 2\,\frac{\hbar\omega}{kT}\,. \tag{56}$$

Plus généralement, on trouverait $g_q \simeq q\,\frac{\hbar\omega}{kT}$.

Ces expressions qui concernent des milieux en équilibre statistique avec des particules ayant une distribution continue de vitesses de directions quelconques ont des points d'accord avec le facteur $\frac{P_f}{P_0}$ souvent utilisé (Eqs. (31) et (32)) quand l'énergie ε est déterminée : g_p est proportionnel à $q\hbar\omega$ et inversement proportionnel à l'énergie moyenne.

Cet argument qui nous confirme qu'un facteur g_q proportionnel à q est statistiquement satisfaisant ne nous a en revanche rien appris sur le terme a_{q-1} du polynôme $a_q\, n^q + a_{q-1}\, n^{q-1} + \cdots$ qui multiplie les termes x_0^{2q} du tableau II. En effet, l'émission spontanée en $n^{q-1}\, x_0^{2q}$ provient de l'addition de deux termes : l'émission partiellement stimulée de $C^2_{n,n+q}$ et l'effet Raman terme négatif de $C^2_{n,n-q}$. Le spontané total résulte donc de la différence de $a_q\, n^q$ et $a_q(n-q)^q$ qui pour $n \gg q$ vaut $q^2\, a_q$. La durée de vie t sera en $(qa_q)^{-1}\, g_q^{-1}$.

Considérations statistiques sur les termes Δv^{2s}.

Considérons une particule chargée environnée d'atomes dont la densité est N.

La fréquence des chocs $\frac{1}{\tau}$ et l'amplitude de la variation de vitesse qui les accompagne sont déterminées par les amplitudes de diffusion élastiques $f(\theta)$ de la particule par les atomes. Considérons une particule de vitesse v. La fréquence $\frac{1}{\tau}$ des chocs sera NvQ_0 où Q_0 est la section efficace totale

$$Q_0 = 2\,\pi \int_0^\pi |f(\theta)|^2 \sin\theta\, \mathrm{d}\theta\,. \tag{57}$$

La variation de vitesse Δv mesurée sur l'axe de la vitesse initiale vaut $v(1-\cos\theta)$. Si on s'intéresse aux effets à un seul photon, c'est $\frac{\overline{\Delta v^2}}{\tau}$ que nous devons calculer :

$$\overline{\Delta v^2} = \frac{4\,\pi}{3\,Q_0}\, v^2 \int_0^\pi (1-\cos\theta)\,|f(\theta)|^2 \sin\theta\, \mathrm{d}\theta\,. \tag{58}$$

L'intégrale en $(1-\cos\theta)$ est celle qui figure dans la section de transfert de moment Q_{M} souvent utilisée dans le domaine de Bremsstrahlung [19].

Si on s'intéresse aux effets à deux photons, c'est la valeur moyenne de $(1-\cos\theta)^2$ qu'il faudra calculer pour les termes en x_0^4.

A titre d'exemple, pour un électron de 10 eV dans l'argon, les valeurs moyennes calculées à partir des $|f(\theta)|^2$ donnés par McEachran et Stauffer [20] sont pour $1-\cos\theta$, $(1-\cos\theta)^2$ et $(1-\cos\theta)^4$ dans les rapports 1 ; 1,51 ; 4,80.

De plus, il faudra moyenner sur les vitesses et la fonction $f(\theta)$ est sensible à la vitesse.

Ainsi en milieu désordonné, il n'y a pas de relation simple entre $\bar{x}_0^2$, $\bar{x}_0^4$, etc... C'est pourquoi, nous avons abordé la question de l'équilibre statistique d'abord avec les termes x_0^2, puis avec les termes x_0^4, etc...

Bilan de l'énergie totale absorbée.

Une simplification remarquable se manifeste néanmoins si on s'intéresse seulement à l'énergie totale absorbée, sans détailler la part de chaque processus multiphotonique d'ordre q.

Considérons l'action d'une onde forte correspondant à un nombre n de photons par mode grand.

Nous ne retenons donc dans les $C_{n,n+q}^2$ et $C_{n,n-q}^2$ que les termes $n^s x_0^{2s}$. Nous avons vu que la série ainsi obtenue est identique à $J_q^2(\sqrt{2n}\,x_0)$. D'autre part, l'absorption nette Σ_q est, pour une particule d'énergie ε égale à J_q^2, multipliée par $q\dfrac{\hbar\omega}{\varepsilon}$ (cf. Eq. (31)).

Ainsi l'énergie totale absorbée à l'occasion d'une variation de vitesse Δv déterminée sera

$$w = \frac{(\hbar\omega)^2}{\varepsilon}\sum_{q=1}^{\infty} q^2 J_q^2 . \tag{59}$$

Mais les fonctions de Bessel satisfont à la relation

$$\sum q^2 J_q^2(y) = \frac{y^2}{4} . \tag{60}$$

Ainsi

$$w = \frac{(\hbar\omega)^2}{\varepsilon}\cdot\frac{n x_0^2}{2} . \tag{61}$$

C'est l'énergie absorbée qu'on calculerait avec le seul premier terme en ignorant tous les effets multiphotoniques ; elle correspond à une section efficace σ_1 classique et est proportionnelle à l'intensité de l'onde.

On retrouve ici à propos des effets purement stimulés le résultat étonnant déjà noté à propos des effets purement spontanés (Eqs. (18) et (19)) : l'énergie spontanée totale était celle qu'on aurait calculée avec le seul terme x_0^2 et elle était indépendante de $\hbar$. Remarquons toutefois que nous n'avions pas appliqué de facteur de poids statistique dans l'équation (19). Le facteur $\dfrac{P_{\mathrm{f}}}{P_0}$ de l'équation (31) détruirait la normalisation des C_{0q}^2.

Ce même facteur respecte au moins au premier ordre en $\dfrac{\hbar\omega}{\varepsilon}$ la normalisation des $C_{n,n+q}^2$ du tableau II.

Ainsi, bien que chaque section efficace Σ_q d'absorption nette d'ordre $q \geqslant 2$ implique la constante $\hbar$, celle-ci disparaît de l'absorption globale par l'effet de l'équation (60).

Pour appliquer l'équation (60) à un milieu désordonné, il faut rechercher la valeur moyenne de $\frac{x_0^2}{\varepsilon}$ c'est-à-dire celle de $\frac{\Delta v^2}{\varepsilon}$. Si on peut négliger l'influence de v sur les amplitudes de diffusion $f(\theta)$, le travail est facile puisque Δv^2 et ε sont tous deux proportionnels à v^2.

Fréquences limites d'utilisation du modèle.

Nous avons déjà noté que la divergence « infrarouge » pour $\omega \to 0$ que nous constatons dans toutes nos expressions de sections efficaces puisque x_0 est en ω^{-3} n'est que théorique si la densité N de cibles diffusantes est finie. En effet, elles n'ont de valeur que si les intervalles de temps t_i entre chocs successifs ne sont pas inférieurs à la période de l'oscillation. Il y a donc une limite inférieure de fréquence ω_i pour la validité de ces expressions ; l'utilisation de la règle de somme de Thomas-Kuhn [19] à l'absorption du premier ordre Σ_1 montre que cette limite est $\omega_i = NvQ_0$. Or, NvQ_0 est précisément égal à t_i^{-1}.

D'autre part, nous avons noté dès le début que la variation de vitesse Δv devait être « assez brusque ». Si on dénote par b la portée du potentiel déflecteur, la limite supérieure de fréquence ω_s sera de l'ordre de $\frac{v}{b}$. Pour un potentiel coulombien ω_s est difficile à définir et nous ne croyons pas notre modèle utile dans ce cas. Les effets multiphotoniques d'électrons libres en potentiel coulombien sont difficiles à traiter dans toutes les théories [21].

Dans un gaz dilué d'atomes neutres, la plage de validité $\omega_i < \omega < \omega_s$ est assez grande ; mais ω_i monte avec la densité N vers ω_s. Dans un gaz comme l'argon ω_i rejoint ω_s dans le proche infrarouge pour des électrons d'énergie de l'ordre de l'électron-volt quand $N \simeq 6 \times 10^{21}\ \mathrm{cm}^{-3}$ [19].

Expériences relatives au Bremsstrahlung multiphotonique.

Les effets multiphotoniques sont impliqués dans de nombreuses expériences relatives aux milieux ionisés irradiés par des ondes intenses de fréquence assez basse pour donner une valeur numérique importante à x_0 mais néanmoins supérieure à ω_i.

Mais seules les expériences menées en géométrie bien définie ont donné des résultats précis.

A. EXPÉRIENCES AVEC ÉNERGIE ε ET ANGLE DE DIFFUSION θ DÉTERMINÉS. — Weingartshoffer et son équipe [17] conduisent depuis dix ans une série d'expériences dans lesquelles un jet d'électrons monocinétiques d'énergie ε interagit avec un jet d'atomes dans le faisceau d'un laser intense ($\hbar\omega \sim 0{,}12$ eV). Dans une direction déterminée, les électrons sont analysés en énergie et comptés [22, 23].

Ces expériences sont interprétées à l'aide de l'équation (32). Les nombres d'électrons montrant après diffusion l'énergie $\varepsilon \pm q\hbar\omega$ mesurent l'effet multiphotonique d'ordre q jusqu'à $q = \pm 4$, le facteur $y = \sqrt{2\,n}\,x_0$ étant de l'ordre de l'unité.

Ces expériences ne montrent pas encore directement la différence des probabilités $P(+q)$, $P(-q)$ des couples $+q$, $-q$ car $\frac{\hbar\omega}{\varepsilon}$ est petit, de l'ordre de 10^{-2}. Le caractère oscillant des fonctions de Bessel suggère des passages à zéro des $C^2_{n,n+q}$ mesurés en fonction de l'intensité qui n'ont pas été vus. Mais selon la suggestion de Jung [24], on peut en utilisant l'équation (60) assez caractéristique des $J_q(y)$ vérifier que $\sum_1^4 P(+q)\,q^2$ est proportionnelle à la première puissance de l'intensité lumineuse.

B. Expériences dans les milieux ionisés désordonnés.

1. *Absorption d'une onde.* — Le carré du déplacement x_0^2 dépend de la fréquence comme ω^{-3}. C'est donc aux fréquences basses qu'on peut attendre les effets les plus fortement multiphotoniques. Mais le modèle ne s'appliquera que si les intervalles entre collisions sont plus grands que ω^{-1}. D'autre part, la densité de particules chargées doit être assez petite pour que ω soit supérieure à la fréquence de plasma et que l'onde puisse se propager. Ces conditions sont réunies dans les couches supérieures de l'ionosphère [25] pour $\omega \simeq 10^7\ \mathrm{rad.s^{-1}}$.

Par exemple, dans les expériences de Thidé, Kopka et Stubbe [26], un émetteur à 5 mégacycles basé à terre est assez puissant (280 mégawatts) pour induire un champ de quelques volts par mètre à l'altitude de 100 km. Le $\overline{\Delta v^2}$ figurant dans l'expression de x_0^2 étant fixé par la température électronique $\varepsilon_{\mathrm{T}} \sim 10^{-14}$ erg, on obtient une valeur de nx_0^2 de l'ordre de 10^{10}.

L'aspect multiphotonique est en principe très fortement marqué, la valeur la plus probable du nombre de photons q impliqués à chaque collision en émission *ou* en absorption étant grand ; la valeur moyenne du nombre de photons *absorbés* sera de l'ordre de $nx_0^2 \dfrac{\hbar\omega}{\varepsilon_{\mathrm{T}}} \simeq 10^4$. Mais ces effets sont masqués par l'identité de l'équation (60) qui élimine la constante $\hbar$ et reconstitue une absorption classique simplement proportionnelle à nx_0^2, c'est-à-dire à l'intensité de l'onde.

2. *Couplage entre deux ondes.* — Un mécanisme analogue vient masquer les effets multiphotoniques dans les effets de couplage entre une onde faible ω_0 caractérisée par un nombre de photons n_0 et une onde forte ω, de nombre n. Pour calculer ces effets, il faut considérer en principe toutes les probabilités $C^2_{n_0, n_0+q_0}\ C^2_{n, n+q}$. Mais $n_0\, x_0^2(\omega_0)$ étant petit, nous n'aurons à retenir que les termes contenant $C^2_{n_0, n_0 \pm 1} \simeq \dfrac{n_0}{2} x_0^2(\omega_0)$. Ainsi, l'atténuation nette de l'onde faible qui résulte de la différence entre probabilités d'absorption P_- et d'émission P_+ sera proportionnelle à

$$P_- - P_+ = \frac{\hbar\omega_0}{\varepsilon}\frac{n_0}{2} x_0^2(\omega_0) \left(1 + \frac{\hbar\omega}{\varepsilon} \sum_{q=1}^{\infty} q C^2_{n, n+q}[x_0(\omega)]\right). \tag{62}$$

Si $nx_0^2(\omega)$ est de l'ordre de l'unité, le terme de couplage est petit devant l'unité à cause du seul facteur $\dfrac{\hbar\omega}{\varepsilon}$.

Si $nx_0^2(\omega)$ est grand, le terme de couplage reste modeste car la somme qui y figure est très inférieure à celle qui figure dans l'équation (60). En résumé, dans notre modèle où la même variation de vitesse $\boldsymbol{\Delta v}$ est imposée *a priori* à chaque onde, que l'autre soit présente ou non, il n'y a pas de couplage entre deux ondes différentes.

Perspectives.

Il est intéressant, croyons-nous, d'avoir constaté qu'un modèle « semi-classique » dans le sens inhabituel : orbite classique et champ quantifié donnait, à l'intérieur de certaines limites, les mêmes probabilités de transitions multiphotoniques que les modèles semi-classiques dans l'autre sens. Ce point de vue différent permet peut-être une meilleure critique des conditions de validité des résultats obtenus. Il apporte un éclairage nouveau sur la question du choix d'un facteur statistique susceptible d'assurer la cohérence de la théorie.

Les précisions numériques obtenues sur les effets d'émission et d'absorption partiellement stimulés, partiellement spontanés n'ont pas encore été exploitées.

Bibliographie

[1] LOW F. E., *Phys. Rev.* **110** (1958) 974.
[2] SCHRÖDINGER E., *Naturwiss.* **14** (1926) 664.
[3] GLAUBER R. J., *Phys. Rev.* **131** (1963) 2766.
[4] SCHIFF L., Quantum Mechanics, 2nd ed. (Mac Graw Hill) 1955, p. 218.
[5] WOLKOW D. M., *Z. Phys.* **94** (1935) 250.
[6] BUNKIN F. V., FEDOROV M. V., *Sov. Phys. JETP* **22** (1966) 844.
[7] BREHME H., *Phys. Rev.* **3C** (1971) 837.
[8] KROLL N. M., WATSON K. M., *Phys. Rev.* **A 8** (1973) 804.
[9] RAHMAN N. K., *Phys. Rev.* **A 10** (1974) 440.
[10] FAISAL F. H. M., *Phys. Lett.* **50A** (1974) 193.
[11] GELTMAN S., TEAGUE M. R., *J. Phys.* **B 7** (1974) L22.
[12] GELTMAN S., *J. Res. Nat. Bur. Stand.* **82** (1977) 173.
[13] KRÜGER H., JUNG C., *Phys. Rev.* **17A** (1978) 1706.
[14] DANIELE R., TROMBETTA F., FERRANTE G., CAVALIERE P., MORALES F., *Phys. Rev.* **36A** (1987) 1156.
[15] CHOUDHURY B. J., *Phys. Rev.* **A 11** (1975) 2194.
[16] FRIED Z., EBERLY J. H., *Phys. Rev.* **136** (1964) 871.
[17] WEINTGARTSHOFER A., CLARKE E. M., HOLMES J. K., JUNG C., *Phys. Rev.* **19A** (1979) 2371.
[18] GÖPPERT-MAYER Maria, *Ann. Phys.* **9** (1931) 273.
[19] MAYER G., *C. R. Acad. Sci. Paris* **307 II** (1988) 1327.
[20] MCEACHRAN R. P., STAUFFER A. D., *J. Phys.* **B 16** (1983) 4023.
[21] VÉNIARD V., GAVRILA M., MAQUET A., *Phys. Rev.* **A 35** (1987) 448.
[22] WEINTGARTSHOFER A., HOLMES J. K., SABBAGH J., CHIN S. L., *J. Phys.* **B 16** (1983) 1805.
[23] WALLBANK B., HOLMES J. K., WEINTGARTSHOFER A., *J. Phys. B* **20** (1987) 6121.
[24] JUNG C., *Phys. Rev.* **A 21** (1980) 408.
[25] GINZBURG V. L., The Propagation of Electromagnetic Waves in Plasmas (Pergamon Press, 2nd edition) 1970.
[26] THIDÉ B., KOPKA H., STUBBE P., *Phys. Rev. Lett.* **49** (1982) 1561.