HAL
open science

Etude des trajectoires des électrons primaires dans une décharge multipolaire

C. Gauthereau, G. Matthieussent

To cite this version:

C. Gauthereau, G. Matthieussent. Etude des trajectoires des électrons primaires dans une décharge multipolaire. Journal de Physique, 1984, 45 (7), pp.1113-1123. 10.1051/jphys:019840045070111300 . jpa-00209847

HAL Id: jpa-00209847

https://hal.science/jpa-00209847

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

J. Physique **45** (1984) 1113-1123

Classification
Physics Abstracts
52.55K — 52.50D

Etude des trajectoires des électrons primaires dans une décharge multipolaire

C. Gauthereau et G. Matthieussent

Laboratoire de Physique des Gaz et des Plasmas (*), Bât. 212, Université de Paris Sud, 91405 Orsay, France

(*Reçu le 5 janvier 1984, accepté le 23 mars 1984*)

Résumé. — Dans un champ magnétique à deux dimensions (x, y), il existe deux constantes du mouvement : le module du vecteur vitesse (v_0) et le moment conjugué P_z de la coordonnée z. Selon que $|P_z|/mv_0$ est supérieur ou inférieur à 1, les trajectoires sont bornées (les particules sont piégées), ou non bornées (les particules sont libres d'aller à l'infini). L'intégration numérique des équations du mouvement montre que si $|P_z|/mv_0$ est suffisamment grand, la théorie adiabatique décrit correctement les trajectoires piégées même dans les régions où ses conditions de validité ne sont pas rigoureusement vérifiées. La capture d'une particule chargée initialement libre par le champ multipolaire résulte d'une variation de $|P_z|/mv_0$ due à des causes extérieures au champ magnétique. Après avoir envisagé l'effet des collisions élastiques sur les neutres, nous montrons qu'un faible champ électrique, E_z, peut conduire à l'existence de forte populations de particules piégées dans le champ magnétique.

Abstract. — In a two-dimensional magnetic field (x, y), there exist two invariants of the motion : the velocity vector modulus (v_0) and the canonical z momentum (P_z). If $|P_z|/mv_0$ is greater than one, the motion is limited to a region near the magnets (the particles are trapped). If it is smaller than one, the particles can reach zero magnetic field regions. Numerical integration of the equations of motion shows that if $|P_z|/mv_0$ is sufficiently great, guiding centre theory describes fairly well the main features of trapped trajectories, even in regions where the validity conditions are not completely fulfilled. The trapping of a previously free charged particle by a multipolar field results from a variation of $|P_z|/mv_0$ due to external causes. After considering the effect of collisions, we show that a small electric field, E_z, can lead to large populations of trapped particles.

1. Introduction.

Depuis quelques années, les décharges multipolaires sont utilisées dans les laboratoires pour des études de propagation d'ondes [1, 2], de turbulence [3] et de chimie des plasmas [4-6]. Les caractères généraux de ces dispositifs peuvent être résumés ainsi : le plasma est créé par des électrons rapides (nous les appellerons électrons primaires dans les pages qui suivent) qui sont émis par des filaments et qui ionisent les molécules d'un gaz neutre. Le plasma est contenu dans une enceinte tapissée d'aimants, qui créent un champ magnétique localisé à proximité de la paroi (Fig. 1). Ce champ permet une augmentation de la densité électronique de un à deux ordres de grandeur. On obtient ainsi des plasmas parfaitement uniformes et stables, à basse pression (inférieure à 10^{-3} torr) dans des volumes qui peuvent dépasser un mètre cube et avec des taux de fluctuations de densité inférieurs à 10^{-3}.

Des études antérieures [7-9] ont montré que l'augmentation de densité est due, non pas au confinement du plasma qui est plutôt médiocre, mais bien au confinement des électrons primaires qui, au lieu d'être absorbés par les parois, sont réfléchis par le champ

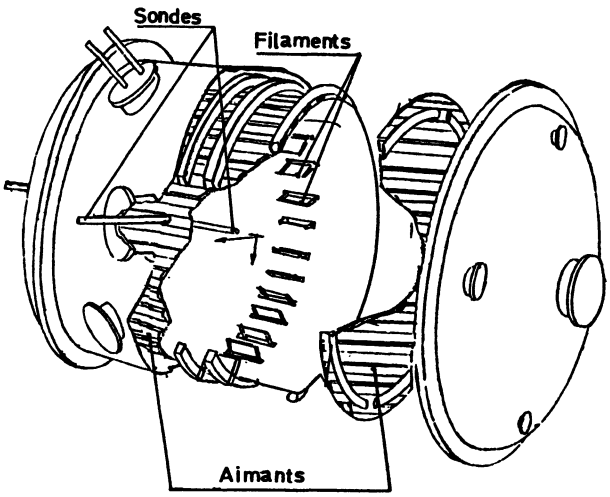

Fig. 1. — Vue éclatée du dispositif multipolaire.

[Multipolar discharge configuration.]

(*) Laboratoire associé au CNRS, LA 73.

Article published online by EDP Sciences and available at http://dx.doi.org/10.1051/jphys:019840045070111300

magnétique, avec pour conséquence une augmentation importante du terme d'ionisation.

Jusqu'à présent il était couramment admis que les électrons se répartissaient uniformément dans l'enceinte du multipôle. C. Koch et G. Matthieussent [10, 11] ont calculé le profil de densité électronique qui résulte de cette hypothèse en intégrant numériquement les équations d'équilibre du plasma, dans le cadre d'une théorie de diffusion ambipolaire. Le résultat est un profil de densité inhomogène en désaccord avec les résultats expérimentaux.

Dans un travail récent [12], nous avons montré que les profils expérimentaux s'expliquent si l'on admet que le terme d'ionisation, qui est proportionnel à la densité des électrons primaires, augmente au voisinage des parois.

Cette augmentation ne pouvant être due qu'au champ magnétique, nous nous proposons, dans cet article, d'étudier les trajectoires de ces électrons.

Les décharges multipolaires fonctionnent à basse pression : les libres parcours moyens des électrons primaires sont beaucoup plus grands que les dimensions de l'enceinte. Leur densité étant très faible, on peut les considérer comme des particules libres en mouvement dans un champ extérieur qui comprend le champ magnétique multipolaire et le champ électrique de charge d'espace du plasma.

2. Caractères généraux des trajectoires.

2.1 CONFIGURATION DES CHAMPS. — Par commodité, nous allons remplacer le multipôle cylindrique par une structure linéaire : le champ magnétique est produit par une rangée de barreaux aimantés, parallèles et alignés le long de l'axe Oz (Fig. 2). Le rayon de l'enceinte étant beaucoup plus grand que l'écartement des aimants, la situation physique n'en est pas changée pour autant. Le champ magnétique dérive alors d'un potentiel vecteur à une composante [10] :

$$A_z(x, y) = \frac{lB_0}{\pi}\,\lambda\left(\frac{\pi x}{l}, \frac{\pi y}{l}\right) \tag{1}$$

avec

$$\lambda(X, Y) \equiv \frac{\mathrm{ch}X \sin Y}{\mathrm{ch}^2 X - \cos^2 Y} \tag{2}$$

où l désigne l'écartement des aimants et B_0, une valeur caractéristique du champ qui dépend de l'aimantation des barreaux. Dans les applications numériques qui suivent, nous choisirons $l = 6{,}2$ cm et $B_0 = 100$ G (cette dernière valeur pouvant être obtenue avec des aimants permanents standards, dont le champ à la surface atteint couramment 800 G).

La figure 3 montre la topographie du champ magnétique. Les lignes de champ sont les courbes sur lesquelles le potentiel vecteur ne varie pas. Elles se ressèrent toutes sur les aimants et forment une structure que nous appellerons *cornet* (« cusp » en anglais). Le long d'une droite passant par un cornet ($Y = 0$), $|\mathbf{B}|$ décroît de façon monotone quand on s'éloigne de la paroi, alors que le long d'une droite passant entre deux aimants ($Y = \pi/2$), $|\mathbf{B}|$ présente un maximum égal à $B_0/2$ au voisinage de $\pi x/l = 0{,}9$.

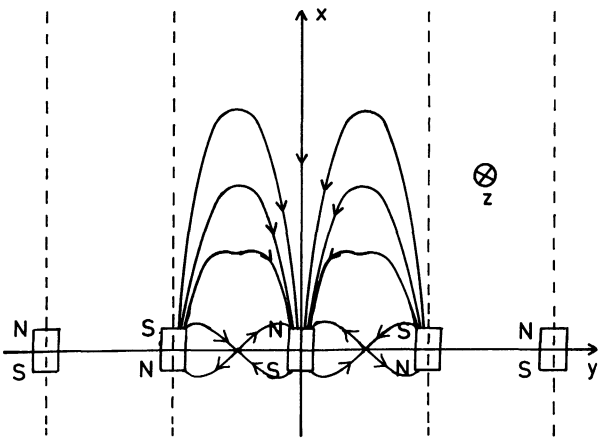

Fig. 2. — Configuration du champ magnétique. Les barreaux aimantés sont parallèles à l'axe Oz.

[Magnetic field configuration. The magnet rows are parallel to the z axis.]

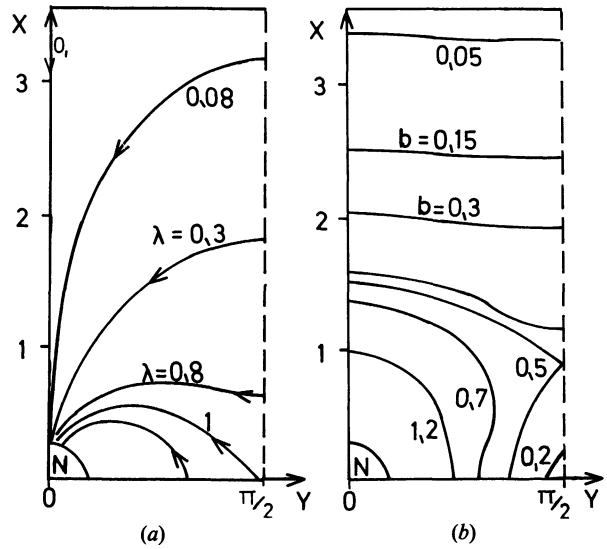

Fig. 3. — Topographie du champ multipolaire : l'aimant est centré en $X = 0$, $Y = 0$.
a) Lignes de champ ; b) Lignes à $|\mathbf{B}|$ constant. Les valeurs de $b \equiv B/B_0$ sont indiquées.

[Multipolar field topography. The magnet is centred at point $X = 0$, $Y = 0$.
a) Field lines ; b) Lines of constant $|\mathbf{B}|$. Values of $b \equiv B/B_0$ are indicated.]

Les variations d'énergie potentielle associées au champ électrique de charge d'espace ne dépassent pas l'énergie thermique des électrons du plasma (quelques eV) et sont faibles devant l'énergie cinétique des élec-

trons primaires (quelques dizaines d'eV). De plus, ce champ électrique (E) est localisé au voisinage des parois, dans les régions de fort champ magnétique. Son intensité peut s'évaluer simplement,

$$E \simeq \frac{KT_c}{el} = 50 \text{ V/m} \tag{3}$$

où e désigne la charge élémentaire et KT_c l'énergie thermique ($\simeq$ 3 eV) des électrons du plasma. Appelons v_0 la vitesse des électrons primaires. Pour une énergie de 50 eV et un champ magnétique $B_0 = 100$ G, le champ électromoteur est alors :

$$v_0 B_0 = 4 \times 10^4 \text{ V/m} . \tag{4}$$

La force magnétique est donc beaucoup plus grande que la force électrique et dans la suite de ce travail, nous négligerons l'effet de la charge d'espace sur les trajectoires des électrons primaires.

2.2 Invariants du mouvement. — Le champ multipolaire est trop complexe pour que l'on puisse intégrer analytiquement les équations du mouvement. Cependant, les constantes du mouvement permettent de déduire des propriétés très générales des trajectoires.

Ces invariants sont au nombre de deux : l'énergie cinétique et l'intégrale première qui résulte de la symétrie du champ magnétique. La première s'écrit :

$$\tfrac{1}{2} m v_0^2 = \tfrac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) . \tag{5}$$

Et la seconde se déduit immédiatement du lagrangien :

$$\mathfrak{L}(\dot{x}_i, x_i) \equiv \tfrac{1}{2} m\dot{\mathbf{x}}^2 - eA_z(x, y)\,\dot{z} . \tag{6}$$

En effet, $\mathfrak{L}$ ne dépendant pas de z, le moment conjugué $\partial\mathfrak{L}/\partial\dot{z}$ est une constante du mouvement :

$$P_z = m\dot{z} - eA_z(x, y) . \tag{7}$$

L'équation (7) permet de définir une fonction de Routh [13] du système :

$$R(\dot{x}, \dot{y}, x, y) \equiv \mathfrak{L}(\dot{x}_i, x_i) - P_z\,\dot{z}$$

$$R(\dot{x}, \dot{y}, x, y) = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2m}[P_z + eA_z(x, y)]^2 . \tag{8}$$

La fonction de Routh joue alors le rôle d'un langrangien effectif : les équations du mouvement sont les équations d'Euler appliquées à R pour les coordonnées x et y et l'équation (7) pour la coordonnée z.

Effectuons un changement de variables :

$$X \equiv \frac{\pi x}{l}; \quad Y \equiv \frac{\pi y}{l}; \quad T \equiv \frac{eB_0}{m} t; \quad P \equiv \frac{P_z}{mv_0} . \tag{9}$$

En notant $\dot{X} \equiv \mathrm{d}X/\mathrm{d}T$, on obtient :

$$R(\dot{X}, \dot{Y}, X, Y) = mv_0^2 C^2 \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) - \frac{1}{2}\left[\frac{P}{C} + \lambda(X, Y)^2\right] \right\} \tag{10}$$

où nous avons introduit la constante sans dimension,

$$C \equiv \frac{l}{\pi} \frac{eB_0}{mv_0} \tag{11}$$

qui s'interprète comme l'inverse d'un rayon de Larmor typique et dont la valeur est $C = 8{,}25$, avec les valeurs numériques utilisées précédemment.

Le lagrangien effectif (10) ne dépend plus que d'une seule constante (le facteur $mv_0^2 C^2$ n'affecte pas les équations du mouvement) : l'écartement et l'aimantation des barreaux, la charge, la masse et l'énergie des particules n'y apparaissent qu'à travers C. Il existe donc des lois d'échelle : si l'on fait varier les paramètres précédents sans changer la valeur de C, les trajectoires sont identiques. Seules changent les échelles de temps et de distance.

Les invariants (5) et (7) s'écrivent maintenant :

$$\frac{1}{C^2} = \dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2 \tag{12}$$

$$\frac{P}{C} = \dot{Z} - \lambda(X, Y) . \tag{13}$$

Eliminons $\dot{Z}$ de ces deux équations et ecrivons que $(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2)$ doit être positif :

$$-\frac{1+P}{C} \leqslant \lambda(X, Y) \leqslant \frac{1-P}{C} . \tag{14}$$

Cette condition exprime que les électrons primaires sont astreints à se mouvoir dans une région bornée par les lignes de champ $\lambda_{\min} = -\dfrac{1+P}{C}$ et $\lambda_{\max} = \dfrac{1-P}{C}$. Deux cas sont à considérer.

Si $\lambda_{\min}$ et $\lambda_{\max}$ sont de signes contraires, le volume accessible aux particules est ouvert (Fig. 4b). Ce cas correspond aux particules qui viennent de l'infini, pour lesquelles P/C est la valeur de $\dot{Z}$ là où le champ est nul (Eq. (13)) et est donc compris entre $-\dfrac{1}{C}$ et $\dfrac{1}{C}$ (équation (12)). Les lignes de champ $\lambda = 2/C$ et $\lambda = -2/C$ définissent un domaine interdit à toutes les particules venant de l'infini, quelle que soit la valeur de P.

Si $\lambda_{\min}$ et $\lambda_{\max}$ sont de même signe, le volume accessible aux particules est fermé (Fig. 4a). Les particules sont astreintes à se mouvoir dans une région en forme de croissant, sans pouvoir s'éloigner des aimants. Nous verrons qu'elles oscillent indéfiniment entre deux points miroir. Ces particules sont définies par la relation,

$$P^2 > 1 \tag{15}$$

qui s'écrit avec les variables habituelles :

$$\left(\frac{P_z}{mv_0}\right)^2 > 1 . \tag{16}$$

Dans la suite de ce travail, nous appellerons particules piégées celles qui vérifient l'inégalité (16), et particules libres celles qui vérifient l'inégalité inverse.

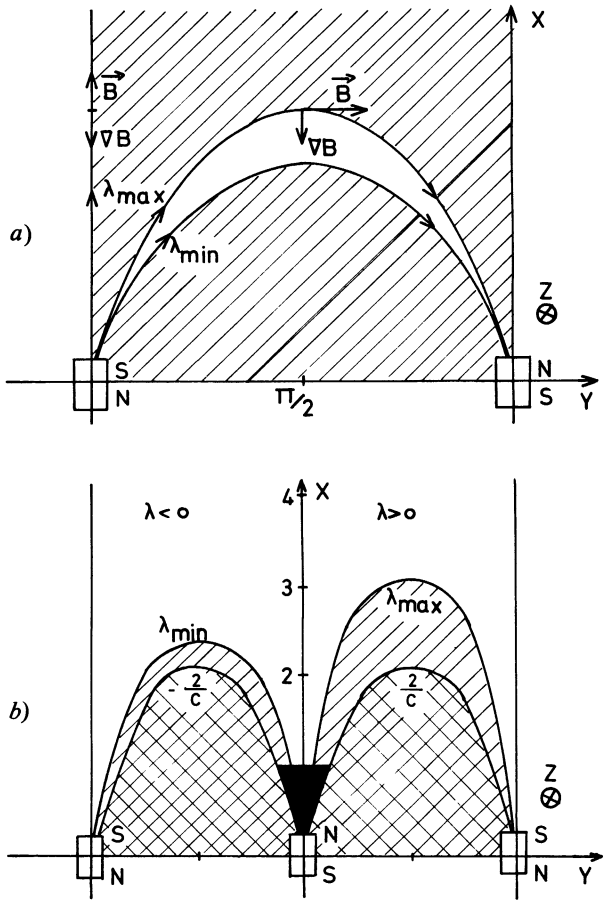

Fig. 4. — Zones interdites (domaines hachurés) : a) aux particules piégées ; b) aux particules libres. Les régions doublement hachurées sont interdites à toutes les particules venant de l'infini, quelle que soit la valeur de P. La région sombre est le domaine de validité de la théorie adiabatique : $(1/b^2).\partial b/\partial X \leqslant C/5$, avec $C = 8{,}25$.

[Forbidden regions (hachured domains) : a) trapped particles ; b) free particles. Doubly hachured regions are forbidden to all particles coming from zero field regions. The black region is the validity domain of guiding centre theory : $(1/b^2).\partial b/\partial X \leqslant C/5$, with $C = 8.25$.]

2.3 Théorie adiabatique.

2.3.1 *Domaine de validité.* — Lorsque le rayon de Larmor est petit devant la longueur d'inhomogénéité du champ, on peut simplifier les équations en ignorant le mouvement de rotation de la particule autour d'une ligne de champ et en ne s'intéressant qu'au mouvement d'un point fictif : le centre guide [14].

Il existe alors des quantités qui se conservent de façon approchée et qui jouent le rôle d'intégrales premières supplémentaires : les « invariants adiabatiques ».

La longueur d'inhomogénéité est la plus grande des quantités :

$$\left[\frac{1}{B_i}\frac{\partial}{\partial x_j}B_i\right]^{-1}.$$

Pour simplifier, nous choisirons plutôt la définition suivante :

$$L^{-1} \equiv \frac{1}{|\mathbf{B}|}\frac{\partial}{\partial x}|\mathbf{B}| \tag{17}$$

car le champ varie plus rapidement avec x qu'avec y.

Le critère d'adiabaticité s'écrit alors,

$$\frac{mv_0}{e}\frac{1}{B^2}\frac{\partial B}{\partial x} \ll 1\,, \tag{18}$$

et en posant $b = B/B_0$:

$$\frac{1}{b^2}\frac{\partial b}{\partial X} \ll C\,. \tag{19}$$

La figure 4b montre l'intersection de la région accessible aux particules libres et du domaine où l'inégalité (19) est vérifiée. Ce domaine est limité au voisinage immédiat des aimants et il est d'autant plus étendu que C est grand.

2.3.2 *Points miroirs.* — Le premier invariant adiabatique est le moment magnétique [14],

$$\mu \equiv \frac{v_\perp^2}{B(x, y)} \tag{20}$$

où $v_\perp$ désigne la vitesse de la particule perpendiculaire à $\mathbf{B}$. L'équation (5) peut alors s'écrire :

$$v_0^2 = v_\parallel^2 + \mu B(x, y)\,. \tag{21}$$

La figure 3 montre que dans un cornet les lignes d'iso-intensité magnétique sont presque parallèles à l'axe Oy. $B(x, y)$ ne dépend donc pratiquement pas de y. De plus, le champ magnétique est presque parallèle à Ox et le moment magnétique a pour expression approximative en coordonnées réduites :

$$M \equiv \mu\frac{B_0}{v_0^2} = C^2\frac{\dot{Y}^2 + \dot{Z}^2}{b(X)}\,. \tag{22}$$

De l'équation (21), on déduit :

$$\dot{X} = \pm\frac{1}{C}\sqrt{1 - Mb(X)}\,. \tag{23}$$

Le signe « + » correspond aux particules qui s'éloignent des aimants et le signe « − » à celles qui s'en approchent. L'abscisse du point où la particule rebrousse chemin est alors la solution de l'équation :

$$b(X) = \frac{1}{M}\,. \tag{24}$$

2.3.3 *Dérive des électrons.* — En l'absence de champ électrique, la dérive perpendiculaire à la ligne de champ suivie par le centre guide s'écrit [14],

$$\mathbf{v}_\perp = -\frac{m}{e}\frac{\mu}{2}\nabla B \times \frac{\hat{e}_1}{B} - \frac{m}{e} v_\parallel \frac{\mathrm{d}\hat{e}_1}{\mathrm{d}t} \times \frac{\hat{e}_1}{B} \quad (25)$$

où $\hat{e}_1 \equiv \frac{\mathbf{B}}{B}$ désigne le vecteur unitaire tangent au champ magnétique. Ces termes s'appellent respectivement la dérive du gradient et la dérive de courbure.

Dans un cornet, la courbure des lignes de champ est faible et ∇B est parallèle à $\hat{e}_1$ (Fig. 4a). On s'attend donc à ce que la dérive y soit pratiquement nulle. Entre deux cornets, par contre, ∇B est perpendiculaire à $\hat{e}_1$ et la courbure est importante. La vitesse de dérive y est maximale. L'équation (25) ne fait intervenir que des vecteurs du plan XOY. La dérive est donc parallèle à OZ ; ceci implique que la projection du centre guide parallèlement à l'axe d'invariance Z suit toujours la même ligne de champ. En gardant les axes adoptés sur la figure 4a, la dérive est dirigée vers les Z positifs. Si l'on inversait les pôles, les particules dériveraient dans l'autre sens.

2.3.4 *Période de rebond.* — Nous venons de voir que si l'approximation adiabatique est vérifiée, la projection du centre guide suit toujours la même ligne de champ. Celle-ci joint deux aimants de polarité opposée. Il y a donc deux points miroirs M_1 et M_2 et le mouvement est périodique. Soit s la distance parcourue par le centre guide le long de la ligne de champ λ. L'invariant longitudinal s'écrit [14] :

$$J \equiv \oint v_\parallel(s)\,\mathrm{d}s\,. \quad (26)$$

L'intégration porte sur un aller-retour. A cause de la propriété ci-dessus de la trajectoire du centre guide le temps n'intervient pas dans cette expression, et l'invariance de J est manifeste.

On pourrait conclure de ce qui précède que le mouvement des particules dans le champ multipolaire est toujours périodique. Cela est évidemment faux. Pour que le mouvement soit périodique, il faut que l'approximation adiabatique soit vérifiée tout au long de la trajectoire. Cela n'est pas possible pour les faibles valeurs de λ, car les lignes de champ sortent du domaine de validité.

L'élément de longueur de la ligne de champ a pour expression, en coordonnées réduites :

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1 + \left(\frac{b_X}{b_Y}\right)^2}\,\mathrm{d}Y\,. \quad (27)$$

Les expressions de b_X et b_Y sont données en appendice. Soient (X_1, Y_1) les coordonnées du point miroir. L'équation de la ligne de champ λ dans l'intervalle $Y_1 \leqslant Y \leqslant \pi/2$ se déduit de (2) :

$$X(Y) = \mathrm{Arg\,ch}\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{\sin Y}{\lambda} + \sqrt{\frac{\sin^2 Y}{\lambda^2} + 4\cos^2 Y}\right]\right\}. \quad (28)$$

Le temps mis par la particule pour parcourir une demi-arche (de Y_1 à $Y = \pi/2$) est alors (demi-période de rebond) :

$$\frac{T}{2} = C\int_{Y_1}^{\pi/2} \frac{\sqrt{1 + \left\{\frac{b_X[X(Y), Y]}{b_Y[X(Y), Y]}\right\}^2}}{\sqrt{1 - Mb[X(Y), Y]}}\,\mathrm{d}Y\,. \quad (29)$$

3. Analyse numérique.

Dans ce paragraphe, nous présentons des trajectoires calculées en intégrant numériquement les équations du mouvement.

3.1 Particules piégées quasi-adiabatiques. — La figure 5 montre la trajectoire d'un électron piégé. Comme nous l'avions prévu au § 2.2, la particule est confinée dans une région en forme de croissant, limitée par deux lignes de champ. Dans cet exemple, $P = -3{,}3$ et les lignes de champ frontières ont pour valeur (14) :

$$\lambda_{\min} = 0{,}2788$$
$$\lambda_{\max} = 0{,}5212\,.$$

La particule oscille indéfiniment entre deux miroirs magnétiques. La trajectoire présente manifestement deux périodicités : l'une est associée au mouvement de rotation autour du centre guide (période de Larmor) et l'autre est associée aux rebonds du centre guide sur les miroirs magnétiques (période de rebond).

Le tableau I donne quelques indications relatives à la trajectoire au voisinage des points de rebroussement successifs.

La ligne de champ suivie par la projection du centre guide ne varie pratiquement pas :

$$\lambda_{CG} = \frac{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}}{2} = 0{,}400\,.$$

La dérive est parallèle à OZ et dirigée vers les Z positifs (Figs. 5b et c).

On constate que d'une réflexion à l'autre, le moment magnétique varie beaucoup. La figure 5.d montre le détail des variations en fonction du temps. On y observe des plateaux séparés par de brusques oscillations. Ces variations brutales ont lieu entre les cornets, là où l'inégalité (19) cesse d'être vérifiée. Chaque passage dans la région non adiabatique entraîne des variations aléatoires du moment magnétique, avec pour conséquence une légère variation du point miroir.

Le tableau I montre que, par contre, la période de rebond reste sensiblement constante.

Si l'on calcule l'abscisse du point miroir et la période de rebond à l'aide des équations (24) et (29) (avec M égal à sa valeur au moment des réflexions), on trouve les valeurs exactes à quelques pour cent près.

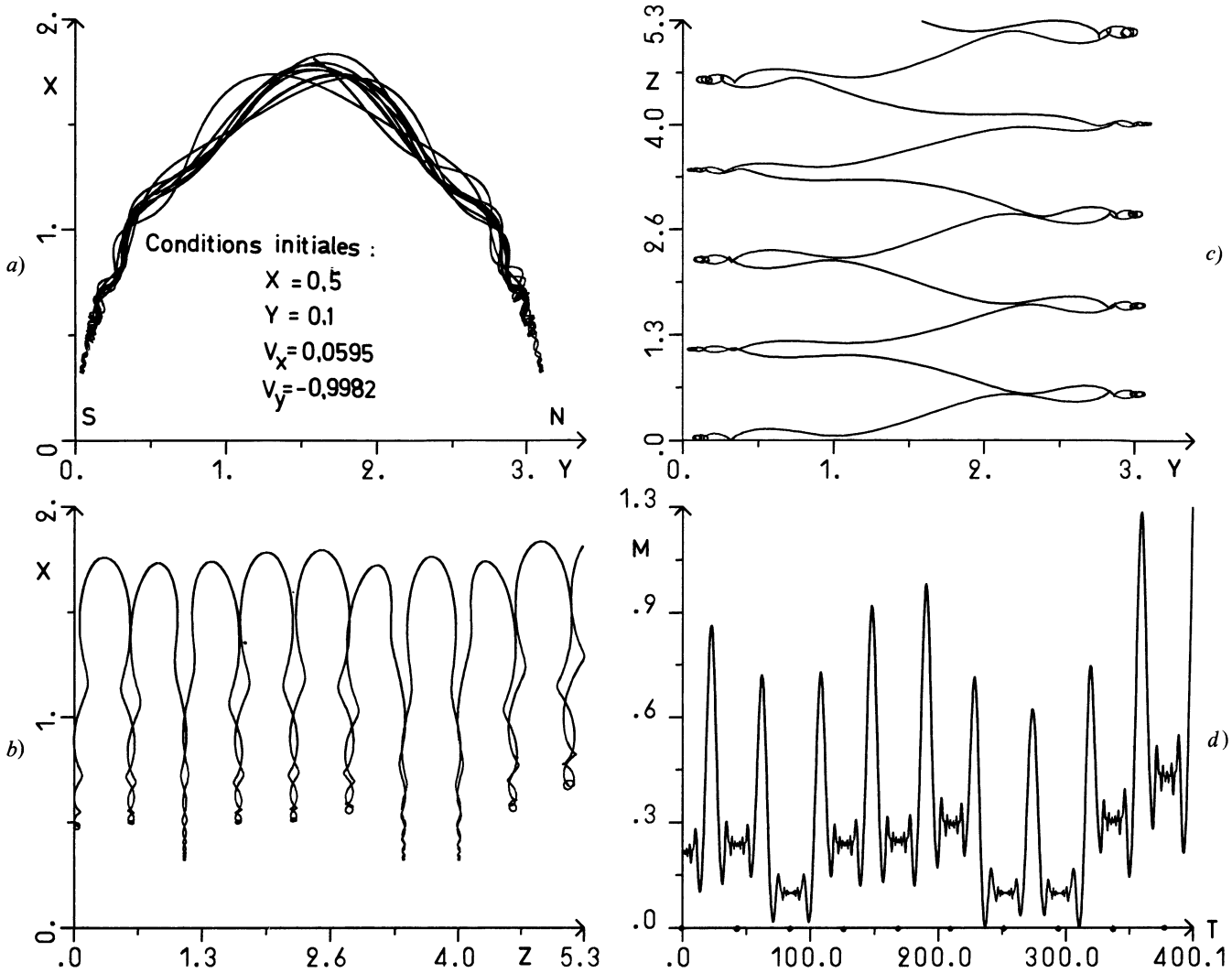

Fig. 5. — Trajectoire d'une particule piégée ($P = -3.3$) : a) projection dans le plan XOY ; b) plan XOZ ; c) plan YOZ ; d) variation du moment magnétique en fonction du temps ; les points indiquent les instants de rebond.

[Trapped particle trajectory ($P = -3.3$) : a) projection in the plane XOY ; b) plane XOZ ; c) plane YOZ ; d) time evolution of the magnetic moment ; reflexion times are indicated by dots.]

Tableau I. — *Grandeurs caractéristiques associées à la trajectoire de la figure* 5.

[Numerical information about the particle of figure 5.]

Réflexion n°	1	2	3	4	5	6	7
T	$T = 1{,}86$	$T = 43{,}7$	$T = 84{,}82$	$T = 126{,}7$	$T = 169{,}1$	$T = 210{,}15$	$T = 251{,}6$
moment magnétique	$M = 0{,}230$	$M = 0{,}242$	$M = 0{,}103$	$M = 0{,}255$	$M = 0{,}286$	$M = 0{,}506$	$M = 0{,}252$
point miroir	$X = 0{,}486$	$X = 0{,}491$	$X = 0{,}319$	$X = 0{,}510$	$X = 0{,}541$	$X = 0{,}690$	$X = 0{,}497$
point miroir ((Eq. (24))	$X = 0{,}489$	$X = 0{,}501$	$X = 0{,}324$	$X = 0{,}515$	$X = 0{,}546$	$X = 0{,}738$	$X = 0{,}512$
centre guide	$\lambda = 0{,}400$	$\lambda = 0{,}399$	$\lambda = 0{,}398$	$\lambda = 0{,}384$	$\lambda = 0{,}392$	$\lambda = 0{,}392$	$\lambda = 0{,}390$
période (ΔT)	41,8	41,42	41,88	42,40	41,05	41,45	

Nous avons cessé de suivre la particule au bout de 280 périodes de Larmor. La variation relative de l'énergie (due à l'imprécision du calcul) était de 10^{-6} et P avait varié de 0,7 %.

3.2 PARTICULES PIÉGÉES NON PÉRIODIQUES. — Lorsque P est supérieur mais peu différent de 1, le domaine accessible à la particule s'étend loin des aimants :

$$\lambda_{\min} = \frac{1-P}{C} \simeq 0$$

$$\lambda_{\max} = -\frac{1+P}{C} \simeq -\frac{2}{C}.$$

Les conditions de l'approximation adiabatique (19) ne sont plus vérifiées et la périodicité associée au mouvement longitudinal disparaît. De plus, il n'y a plus de point miroir car l'endroit où la particule rebrousse chemin varie considérablement. Les figures 6a à d montrent un exemple de trajectoire de ce type (P = 1,1).

La dérive le long de OZ est toujours observable mais la régularité de la trajectoire de la figure 5 a disparu. Le moment magnétique (Fig. 6d) varie considérablement au cours du temps.

Le passage des trajectoires du type 5 aux trajectoires du type 6 se fait de façon continue. Lorsque P augmente, on observe l'apparition progressive de deux points miroirs symétriques (Fig. 7).

3.3 PARTICULES LIBRES. — La figure 8 présente quelques trajectoires typiques. Les particules sont toutes issues d'un point du plan XOZ et leur vitesse initiale $\mathbf{v}_0$ est située dans le plan XOY.

On observe que les particules qui pénètrent le plus profondément dans le cusp sont celles qui sont injectées avec un angle $\theta = (OX, \mathbf{v}_0)$ petit. Plus cet angle est petit et plus le point de rebroussement s'approche

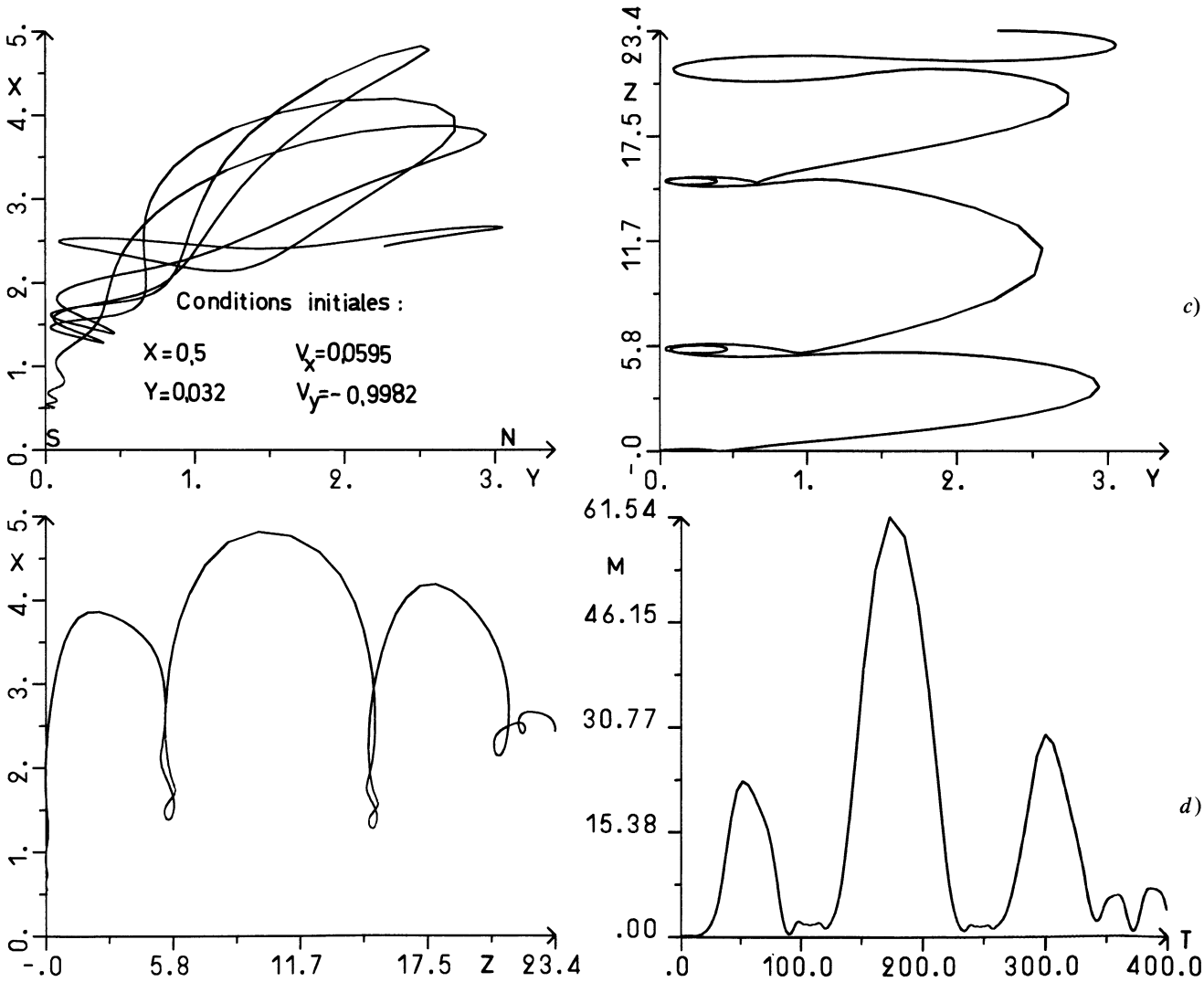

Fig. 6. — Trajectoire d'une particule piégée (P = 1,1) : a) projection dans le plan XOY ; b) plan XOZ ; c) plan YOZ ; d) variation du moment magnétique en fonction du temps.

[Trapped particle trajectory (P = 1.1) : a) projection in the plane XOY ; b) plane XOZ ; c) plane YOZ ; d) time evolution of the magnetic moment.]

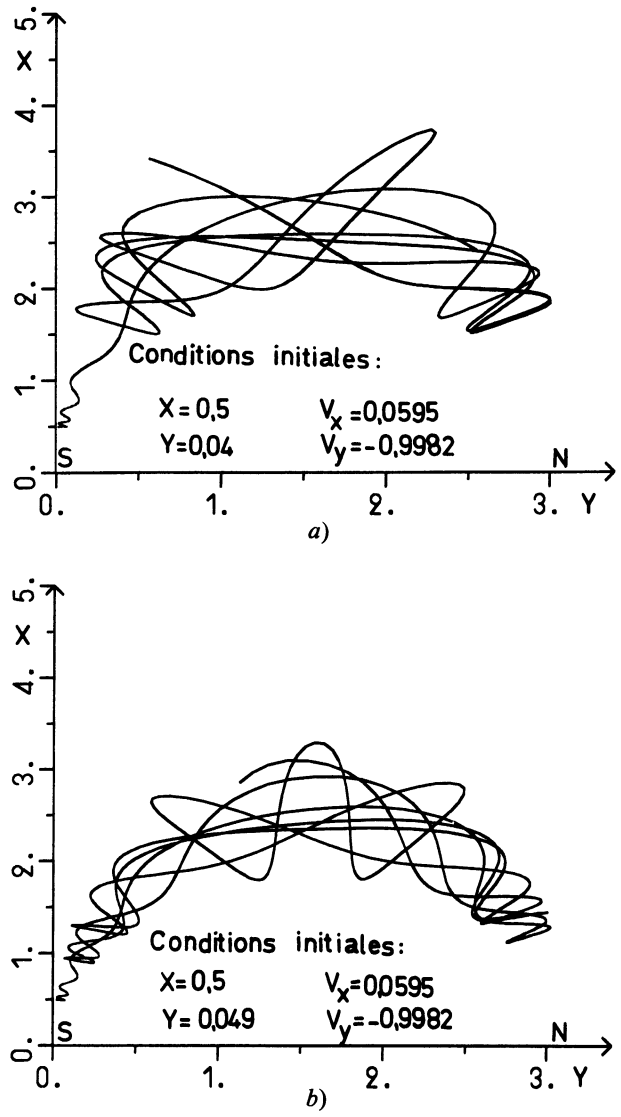

Fig. 7. — Deux trajectoires piégées : a) $P = 1{,}36$; b) $P = 1{,}67$. Projection dans le plan XOY.

[Trapped trajectories. Projection in the XOY plane : a) $P = 1.36$; b) $P = 1.67$.]

de l'aimant. A la limite, lorsque la vitesse initiale est parallèle à OX, la force de Lorentz est toujours nulle. La trajectoire est alors rectiligne et la particule ne rebrousse pas chemin.

Les figures 9a et b montrent l'évolution du moment magnétique le long de la trajectoire pour deux valeurs de θ.

Nous constatons que lorsque la particule pénètre suffisamment loin dans le cusp ($X \lesssim 2$), le moment magnétique oscille en s'écartant peu d'une valeur moyenne, en accord avec la théorie adiabatique et l'équation (24) permet de trouver l'abscisse du point miroir avec une bonne approximation.

La trajectoire $\theta = 7°$ (Fig. 8) est rivée à la ligne de champ $\lambda = 0$ et il n'y a pas de dérive parallèlement à OZ, comme nous l'avions prévu au § 2.3.3.

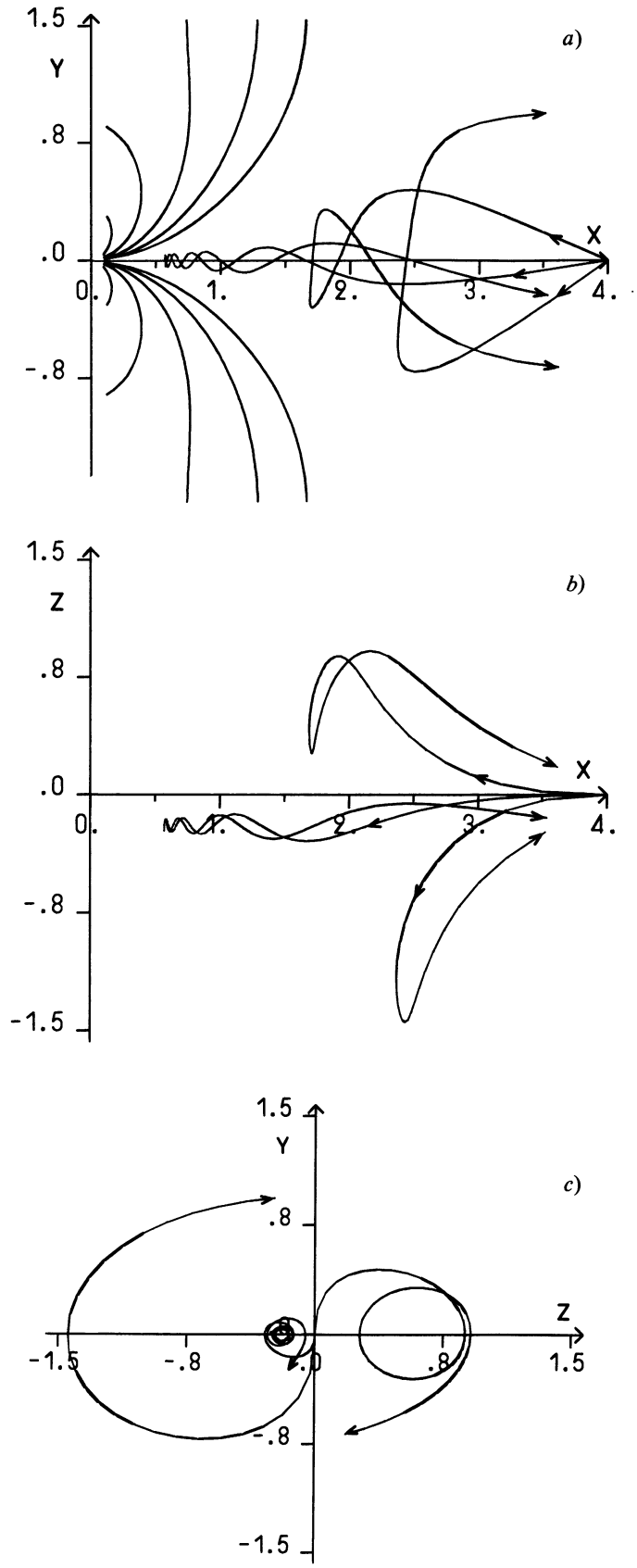

Fig. 8. — Trajectoire de particules libres ($P = 0$, $\theta = 7°$, $-20°$, $30°$) : a) plan XOY ; b) plan XOZ ; c) plan ZOY.

[Free particle trajectories ($P = 0$, $\theta = 7°$, $-20°$, $30°$) : a) plane XOY ; b) plane XOZ ; c) plane ZOY.]

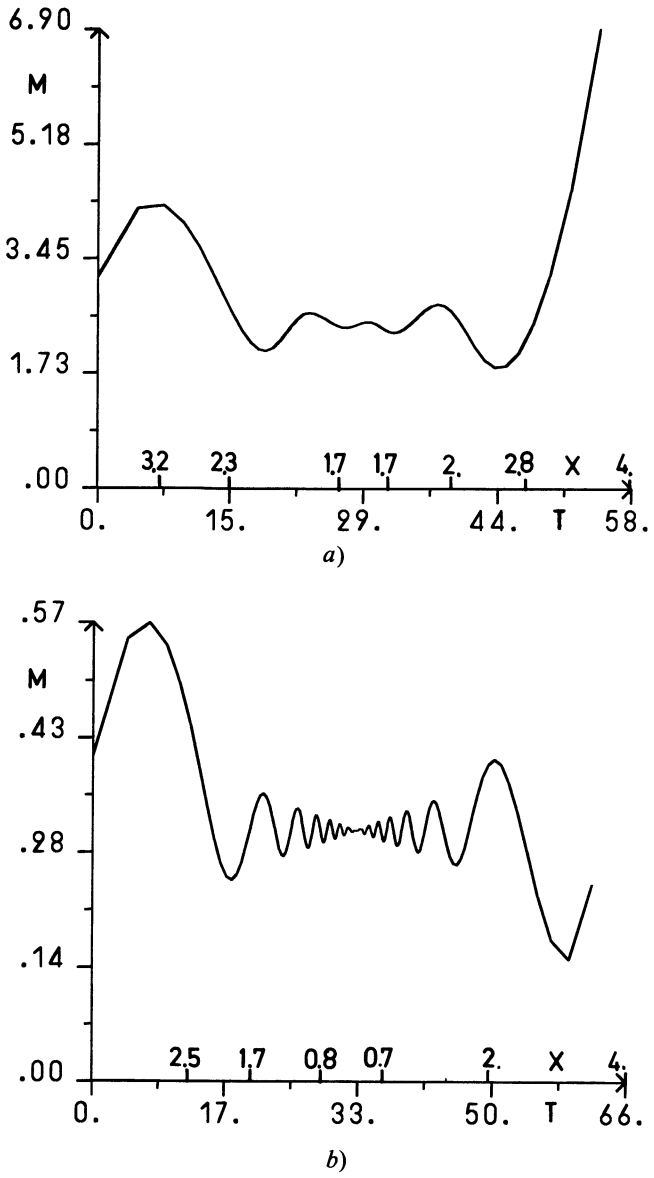

Fig. 9. — Variation du moment magnétique le long de la trajectoire d'une particule libre : a) $\theta = -20°$; b) $\theta = 7°$.

[Change of the magnetic moment along a free particule trajectory : a) $\theta = -20°$; b) $\theta = 7°$.]

4. Capture des particules par le champ multipolaire.

Il existe donc deux types de particules distinctes : celles qui sont libres d'aller et de venir des régions de faible champ magnétique et celles qui sont piégées au voisinage des aimants.

Dans une décharge multipolaire, les filaments qui émettent les électrons primaires sont situés dans une région où le champ magnétique peut être considéré comme nul. Pour expliquer l'uniformité de ces plasmas, il faut admettre [12] que la densité des électrons primaires augmente au voisinage des parois. Il est tentant de supposer que cette augmentation est due à l'existence de fortes populations de ces électrons, piégées par le champ magnétique. Nous nous trouvons donc confrontés à un nouveau problème : comment expliquer la capture des particules par le champ multipolaire ?

Ce problème se pose de façon analogue aux géophysiciens qui s'intéressent aux ceintures de Van-Allen. Ces ceintures de radiations sont en effet constituées de particules du vent solaire capturées par le champ du dipôle terrestre.

Pour qu'une particule issue de l'intérieur de l'enceinte multipolaire soit piégée par le champ magnétique, il faut qu'il y ait violation des invariants du mouvement P_z *et* v_0 (Eqs. (5) et (7)).

4.1 Effet des collisions. — Cette violation peut être due à un processus collisionnel. L'examen des libres parcours moyens montre que, dans les plasmas multipolaires, les collisions élastiques primaires-neutres dominent les autres phénomènes de transfert de quantité de mouvement. Ces collisions conduisent à une brusque variation de la direction du vecteur vitesse (v_0 est inchangé). Après un choc, toutes les valeurs de $\dot{z}$ comprises entre $-v_0$ et v_0 sont équiprobables et l'équation (7) montre que P_z/mv_0 peut devenir supérieur à 1. Cet événement a d'autant plus de chance d'avoir lieu que la particule est plus proche de sa zone interdite. La capture des particules par ce mécanisme se produit donc surtout dans les cornets. On peut cependant montrer [12] que les sections efficaces des collisions élastiques sont trop faibles pour entraîner une augmentation de la densité des électrons primaires au voisinage des parois.

4.2 Effet des champs électriques. — Jusqu'à présent, nous avons négligé le champ électrique de charge d'espace du plasma. Celui-ci est situé dans le plan xOy et, mise à part une dérive supplémentaire le long de Oz, il ne change pas la nature des trajectoires. En particulier P_z reste un invariant et les particules ne peuvent donc pas être piégées.

Considérons maintenant l'effet d'un champ électrique constant parallèle à Oz, localisé dans une petite région au voisinage des parois ; pendant l'interaction avec ce champ, la particule va dériver vers la région initialement interdite et, éventuellement, y restera piégée.

Un tel événement est montré sur les figures 10a et b. Sur la première de ces figures, il n'y a pas de champ électrique. On y voit une particule arriver de l'infini, s'enrouler autour d'une ligne de champ, rebrousser chemin par effet miroir et repartir à l'infini. Sur la deuxième figure, on voit la même particule (mêmes conditions initiales) arriver de l'infini. Mais cette fois, nous avons inclu dans le calcul un champ électrique (E_z) localisé dans un rectangle, dirigé le long de Oz et de faible amplitude :

$$E_z \sim 10^{-2}\, v_0\, B_0 \,.$$

Cette fois, la particule ne retourne pas à l'infini. Le champ électrique entraîne une variation ΔP_z

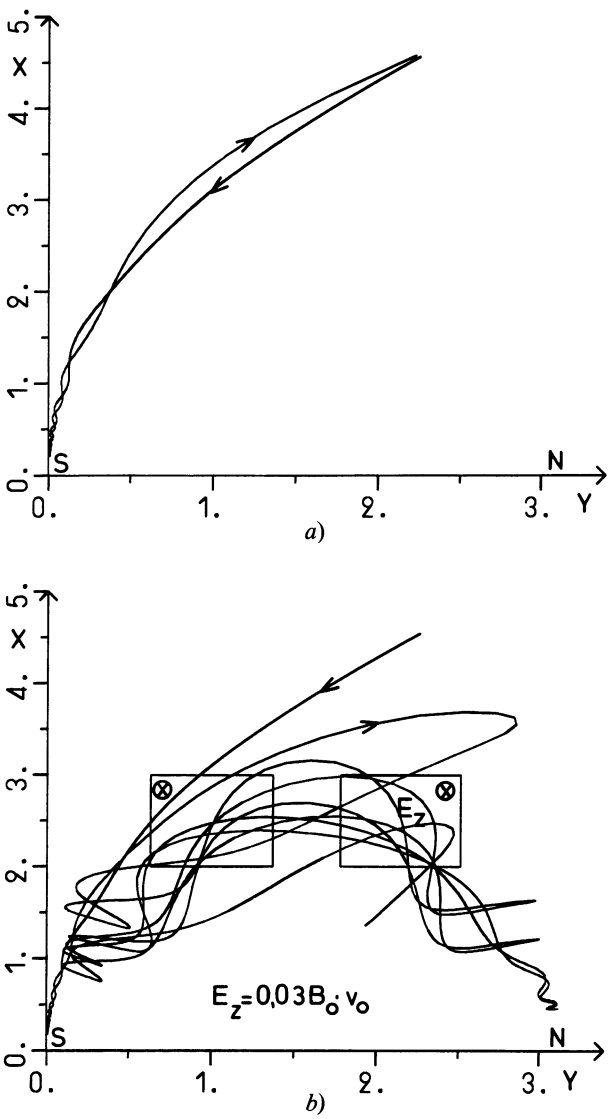

Fig. 10. — a) Trajectoire d'un électron primaire en l'absence de champ électrique. b) Capture du même électron sous l'effet d'un faible champ électrique E_z présent dans les rectangles de la figure.

[a) A primary electron trajectory in the absence of an electric field. b) Trapping of the same electron under the influence of a small E_z electric field localized inside the rectangles.]

de l'impulsion. Après l'interaction les particules piégées sont celles qui vérifient :

$$\frac{|P_z + \Delta P_z|}{mv_0} > 1 . \tag{30}$$

Appelons d l'extension caractéristique du champ électrique dans le plan (x, y). ΔP_z peut être estimé comme :

$$\Delta P_z \simeq e \frac{E_z d}{v_0} . \tag{31}$$

L'énergie cinétique (et donc le module de la vitesse v_0) est inchangée car le travail moyen effectué par le champ électrique pendant une période de Larmor, est nul. Ainsi les particules qui sont piégées par ce mécanisme sont celles qui, avant de subir l'effet du champ électrique, vérifient la condition :

$$\left| 1 - \frac{eE_z d}{mv_0^2} \right| < \left| \frac{P_z}{mv_0} \right| < 1 . \tag{32}$$

4.3 Evaluation de la densité des particules piégées. — La population des pièges multipolaires résulte d'un bilan entre un mécanisme d'alimentation et un mécanisme de disparition. Si nous supposons que les pièges sont alimentés par un champ électrique E_z et dépeuplés par les collisions ionisantes primaires-neutres (fréquence d'ionisation ν^i), l'équation d'équilibre de la population N du piège est alors,

$$\frac{dN}{dt} \simeq - N\nu^i + f\, 4\pi R^2 n_p v_0 \tag{33}$$

où f désigne la fraction du flux des primaires capturée, n_p la densité des particules libres et $4\pi R^2$ la surface d'une enceinte cylindrique de hauteur égale au rayon, y compris la surface des couvercles (il s'agit d'une évaluation, seuls les ordres de grandeur nous intéressent).

En régime permanent, on obtient :

$$N \simeq f \frac{n_p v_0}{\nu^i} \cdot 4\pi R^2 . \tag{34}$$

Soit ΔR l'épaisseur du piège multipolaire (son volume est alors $4\pi R^2 \Delta R$). La densité des particules capturées, n, est alors,

$$n = n_p f \frac{\lambda_i}{\Delta R} \tag{35}$$

où λ_i désigne le libre parcours moyen des collisions ionisantes.

Pour évaluer f, nous supposerons les impulsions des particules selon z, P_z, distribuées uniformément entre $-mv_0$ et mv_0. Si l'on admet, de plus, que toutes les particules qui approchent des parois atteignent la région où règne le champ électrique, la fraction du flux piégée est alors simplement (Eq. (32)) :

$$f \simeq \frac{eE_z d}{mv_0^2} . \tag{36}$$

Ainsi pour des électrons de 30 eV, $d \simeq 2$ cm et $E_z = 30$ V/m, on obtient une fraction de l'ordre de 1 %.

A basse pression ($P_0 \lesssim 10^{-4}$ torr), λ_i est supérieur à 10 m dans une décharge d'argon. Comme ΔR n'excède pas quelques centimètres on conçoit que le rapport n/n_p puisse être supérieur à un (Eq. (35)).

Les calculs précédents ont été effectués en supposant le champ électrique constant. Cependant, il ne peut pas y avoir de champ électrique de charge d'espace le long

de l'axe z car le plasma est invariant par translation le long de cet axe. Les seuls champs qui peuvent exister dans cette direction sont produits par des instabilités. Soit ν la fréquence caractéristique de ces ondes et d leur extension dans le plan (x, y). La condition pour que le champ électrique apparaisse quasi statique à une particule de vitesse v_0 est :

$$\frac{d}{v_0} \ll \nu^{-1} \tag{37}$$

ce qui implique, avec $d \simeq 1$ cm que la fréquence soit inférieure à 4×10^8 Hz. Ceci est nettement plus grand que les fréquences plasma ioniques typiques des plasmas multipolaires.

Nous avons donc exploré la gaine magnétique de la décharge multipolaire du laboratoire de Physique des Gaz et Plasmas d'Orsay, et nous y avons trouvé une instabilité acoustique ionique, localisée approximativement comme sur la figure 10b, qui se propage parallèlement aux barreaux aimantés et dont l'intensité du champ électrique est de l'ordre de 30 V/m. La description et l'interprétation de cette expérience feront l'objet d'une publication ultérieure. Cette instabilité pourrait expliquer l'existence de fortes populations d'électrons primaires capturés par le champ multipolaire.

5. Conclusion.

Une étude détaillée des trajectoires des électrons primaires dans le champ multipolaire conduit à distinguer deux types de particules : celles qui sont libres d'atteindre les régions de faible champ magnétique et celles qui sont confinées au voisinage des aimants. Ces deux populations de particules sont caractérisées par des valeurs du rapport $|P_z|/mv_0$ respectivement inférieures et supérieures à 1. Si ce rapport est supérieur mais voisin de un, les trajectoires sont d'apparence stochastique. S'il est nettement supérieur à un ($\gtrsim 2$) les trajectoires sont quasi périodiques.

Les variations de $|P_z|/mv_0$ sous l'effet des collisions élastiques ou de champs électriques localisés et parallèles aux aimants nous ont permis d'expliquer comment une particule initialement libre pouvait se trouver piégée dans le champ magnétique.

L'augmentation de l'ionisation au voisinage des parois nécessaire pour expliquer l'uniformité des plasmas multipolaires pourrait être due à l'existence de fortes populations de primaires, capturés par le champ magnétique. Une expérience qui permettra de démontrer l'existence de ces particules est en préparation : il s'agit de mesurer la variation de l'intensité d'une raie de l'argon ionisé, excitée par les électrons primaires, en fonction de la distance à la paroi.

Appendice : expression du champ magnétique.

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \text{avec} \quad \mathbf{A} = A(x, y)\, \hat{e}_z\,.$$

Posons

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{B}}{B_0}, \quad \text{alors},$$

$$b_X = \operatorname{ch} X \cos Y \frac{\operatorname{sh}^2 X - \sin^2 Y}{(\operatorname{ch}^2 X - \cos^2 Y)^2},$$

$$b_Y = \operatorname{sh} X \sin Y \frac{\operatorname{ch}^2 X + \cos^2 Y}{(\operatorname{ch}^2 X - \cos^2 Y)^2},$$

$$b_Z = 0\,,$$

$$|b|^2 = \frac{\operatorname{ch}^2 X - \sin^2 Y}{(\operatorname{ch}^2 X - \cos^2 Y)^2}\,.$$

Bibliographie

[1] Stenzel, R. L., Wong, A. Y., Kim, M. C., *Phys. Rev. Lett.* **32** (1974) 654.

[2] Mantei, T., Matthieussent, G., *Phys. Fluid* **20** (1977) 1005.

[3] Wong, A. Y., Stenzel, R. L., *Phys. Rev. Lett.* **34** (1975) 727.

[4] Bacal, M., Hamilton, G. W., *Phys. Rev. Lett.* **42** (1979) 1538.

[5] Pealat, M., Taran, J. P., Taillet, J., Bacal, M., Bruneteau, A. M., *J. Appl. Phys.* **52** (4) (1981) 2687.

[6] Bacal, M., Bruneteau, A. M., Graham, W. G., Hamilton, G. W., Nachman, M., *J. Appl. Phys.* **52** (3) (1981) 1247.

[7] Buzzi, J. M., Snow, J., Hirschfield, J. L., *Phys. Lett.* **54** A (1975) 344.

[8] Limpaecher, R., Mackenzie, K. R., *Rev. Sci. Instrum.* **44** (1973) 726.

[9] Leung, K. N., Hershkowitz, N., Mackenzie, K. R., *Phys. Fluids* **19** (1976) 1045.

[10] Koch, C., Matthieussent, G., *Phys. Fluids* **26** (1983) 545.

[11] Koch, C., Matthieussent, G., *J. Physique* **43** (1982) 67.

[12] Gauthereau, C., Thèse, Orsay 3562 (1983).

[13] Ter Haar, D., *Elements of Hamiltonian Mechanics* (North Holland, Amsterdam) 1961, p. 41.

[14] Northrop, T., Teller, E., *Phys. Rev.* **117** (1960) 215.