Symétrie des fluctuations dans le renversement du temps

Y. Pomeau

▶ **To cite this version:**

Y. Pomeau. Symétrie des fluctuations dans le renversement du temps. Journal de Physique, 1982, 43 (6), pp.859-867. 10.1051/jphys:01982004306085900 . jpa-00209463

HAL Id: jpa-00209463
https://hal.science/jpa-00209463

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Classification
Physics Abstracts
05.40

Symétrie des fluctuations dans le renversement du temps

Y. Pomeau

C.E.N./Saclay, Service de Physique Théorique, 91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France

(*Reçu le 9 décembre 1981, accepté le 18 février 1982*)

Résumé. — La fonction de corrélation temporelle $\psi(\tau) = \overline{x(t)\, x(t+\tau)}$ d'une quantité réelle fluctuante $x(t)$ est une fonction paire de τ. Si $x(.)$ est enregistré sur une bande magnétique, son examen ne permet pas de distinguer le sens de lecture de la bande. Au contraire, d'autres fonctions de corrélation, telles $\overline{x(t)\,(x(t+\tau)-x(t+2\,\tau))\,x(t+3\,\tau)}$ sont sensibles à ce sens de passage. Nous introduisons donc l'idée de fonction de corrélation testant la symétrie de $x(.)$ par renversement du temps. Nous montrons sur des exemples de la théorie du bruit l'intérêt de cette notion. Les fluctuations d'un système à N corps à l'équilibre thermodynamique sont réversibles, elles ne le sont plus si le système est hors d'équilibre dans un état stationnaire.

Abstract. — The time correlation function $\psi(\tau) = \overline{x(t)\, x(t+\tau)}$ of a real fluctuating quantity $x(t)$ is an even function of τ. If $x(.)$ is recorded on a magnetic tape, its examination does not allow to distinguish between the two senses of reading the tape. On the contrary, other correlation functions, as $\overline{x(t)\,(x(t+\tau)-x(t+2\,\tau))\,x(t+3\,\tau)}$ are sensitive to this sense. Thus we introduce the idea of a correlation function testing the time-symmetry of $x(.)$. We show on various examples in noise theory the interest of this notion. Fluctuations of a many-body system at equilibrium are symmetry, although they are not time symmetric if the many-body system is out of equilibrium in a steady state.

Soit $x(t)$ une variable réelle dépendant du temps, de valeur moyenne $\bar{x}$. $\psi(\tau) \equiv \overline{(x(t)-\bar{x})\,(x(t+\tau)-\bar{x})}$ est la fonction de corrélation des fluctuations de x, la barre supérieure représentant la moyenne glissante sur le temps. Si les fluctuations de x sont stationnaires en moyenne (ce que l'on supposera), $\psi(\tau)$ possède la symétrie : $\psi(\tau) = \psi(-\tau)$. Autrement dit, si $x(.)$ est enregistré sur une bande magnétique, l'examen de ψ ne permet pas de distinguer le sens de passage de la bande.

En se limitant à l'examen de ψ, on perd donc une partie de l'information contenue dans le signal $x(.)$, qui peut être symétrique ou non en moyenne dans le renversement du temps. Pour ne pas employer de façon répétée la périphase « symétrique en moyenne par renversement du temps », on parlera de signal (ou de bruit) t-symétrique ou t-dissymétrique. Ceci évite aussi l'emploi des mots « réversibles » et « irréversibles » qui prêtent à confusion.

Pour illustrer ce point, considérons la moyenne $\overline{x(t)\, x(t+2\,\tau)\, x(t+3\,\tau)}$, qui est une fonction de τ seul. Le centre de gravité des 3 temps en argument est en $t + \frac{5}{3}\tau$ et les trois temps de mesure t, $t + 2\,\tau$, $t + 3\,\tau$ ne sont manifestement pas disposés symétriquement par rapport à ce barycentre. Le renversement du temps (obtenu, par exemple, en renversant le sens du passage de la bande magnétique à laquelle il a été fait allusion plus haut) donnera $\overline{x(t)\, x(t+\tau)\, x(t+3\tau)}$ au lieu de $\overline{x(t)\, x(t+2\,\tau)\, x(t+3\,\tau)}$ et, sauf circonstance spéciale, ces deux fonctions de τ ne sont pas égales. Il paraît donc utile d'introduire la fonction impaire de τ définie par

$$\psi'(\tau) = \overline{x(t)\,(x(t+2\,\tau) - x(t+\tau))\, x(t+3\,\tau)}\,.$$

Les considérations précédentes montrent que ψ' s'annule identiquement si $x(.)$ est t-symétrique, c'est-à-dire si aucune fonction de corrélation ne permet de distinguer le sens de passage de la bande magnétique sur laquelle $x(.)$ est enregistré. Ceci introduit l'idée de « fonction test de t-symétrie », c'est-à-dire de fonction s'annulant exactement pour un signal t-symétrique et *a priori* de valeur non nulle autrement.

Une variété infinie de telles fonctions peut être imaginée. Si, par exemple, x est symétrique *a priori* autour de 0, alors toute fonction cubique de x, telle ψ', s'annule. On peut utiliser, par exemple, dans ce cas

$$\psi''(\tau) = \overline{x^3(t)\, x(t+\tau) - x(t)\, x^3(t+\tau)}$$

comme fonction test de t-symétrie, qui est encore une fonction impaire de τ, qui s'annule pour un signal t-symétrique, mais pas par le changement $(x) \to (-x)$. Si le signal $x(.)$ est suffisamment dérivable, le début

Article published online by EDP Sciences and available at http://dx.doi.org/10.1051/jphys:01982004306085900

du développement de Taylor de ψ' et ψ'' en $\tau = 0$ est donné par :

$$\psi'(\tau) \underset{\tau \to 0}{\simeq} -\frac{10}{3}\overline{(\dot{x})^3}\,\tau^3 + \mathcal{O}(\tau^5)$$

$$\psi''(\tau) \underset{\tau \to 0}{\simeq} -\tau^3\,\overline{x(\dot{x})^3} + \mathcal{O}(\tau^5)$$

où $\dot{x} = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ et où les grandeurs apparaissant sous la moyenne sont mesurées au même instant. Dans ce qui suit, on examinera différents problèmes canoniques de la théorie physique des fluctuations où cette question de symétrie peut se poser.

1. **Equation de Langevin.** — Supposons que $x(t)$ est la solution de l'équation de Langevin (adimensionnelle)

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = f(t) \tag{1}$$

où $f(.)$ est un bruit blanc gaussien de température T tel que $\langle f(t) \rangle = 0$ et

$$\langle f(t)\, f(t') \rangle = T\,\delta(t - t')$$

(ici les moyennes sont des moyennes d'ensemble). Alors $x(.)$ est t-symétrique au sens de cette note. Ceci provient du caractère gaussien des fluctuations. Considérons, par exemple, $\psi''(\tau)$, $x(.)$ étant gaussien. On a

$$\langle x^3(t)\, x(t+\tau) \rangle = 3\overline{(x)^2}\,\langle x(t)\, x(t+\tau) \rangle$$

et

$$\langle x(t)\, x^3(t+\tau) \rangle = 3\overline{(x)^2}\,\langle x(t)\, x(t+\tau) \rangle$$

deux conséquences immédiates du calcul des mônomes de variables gaussiennes. Ceci donne $\psi'' = 0$. Cette symétrie est assez naturelle. En effet l'équation de Langevin décrit les fluctuations de vitesse d'une grosse particule en équilibre avec un thermostat de petites particules. Ces fluctuations doivent être réversibles, ayant leur origine dans la dynamique hamiltonienne du système qui est fondamentalement réversible. On verra plus loin, malgré tout, que la dynamique hamiltonienne ne suffit pas à elle seule à assurer la t-symétrie des fluctuations d'un système à N corps, il faut de plus que celui-ci soit à l'équilibre thermodynamique. La preuve précédente de la t-symétrie de $x(.)$ repose donc essentiellement sur le fait que $x(.)$ est gaussienne, et s'étend donc à toute variable aléatoire gaussienne, et à toute fonction test construite à partir de fonctions entières de cette variable. Si l'on considérait des fonctions test, par exemple de la forme

$$\left[\left\{\exp\left(-\frac{1}{x^2(t)}\right)\right\}\left\{\exp\left(-\frac{1}{x^4(t+\tau)}\right)\right\} - \left\{\exp -\frac{1}{x^4(t)}\right\}\left\{\exp\left(-\frac{1}{x^2(t+\tau)}\right)\right\}\right]$$

on pourrait encore montrer que leur moyenne disparaît en utilisant les fonctions de corrélation données par Chandrasekhar [7].

Si on remplaçait $f(.)$ par une bascule de Poisson [$f(t) = \pm 1$, si $f(.)$ vaut $+1$ (resp. -1) à un moment donné, il passe avec une probabilité constante par unité de temps à la valeur (-1) (resp. $+1$)], alors il est facile de constater que si $f(.)$ est toujours t-symétrique, la solution $x(.)$ de l'équation (1) ne l'est plus. Ceci montre que la t-symétrie au sens de cette note (au moins dans le cas présent) résulte d'un compromis entre la nature du bruit $f(.)$ et l'irréversibilité manifeste de l'équation de mouvement macroscopique.

La preuve de la t-symétrie des solutions de l'équation de Langevin linéaire est immédiate, contrairement à celle des solutions de l'équation de Langevin *non-linéaire* (que je dois à Jacques des Cloizeaux).

Soit donc l'équation de Langevin non linéaire

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - \phi'(y) = f(t)\,, \tag{2}$$

où f est toujours le même processus gaussien, $y(.)$ un bruit réel, et $-\phi'$ un champ de vitesse dérivant d'un potentiel ϕ tel que $\phi'(y) = \mathrm{d}\phi/\mathrm{d}y$, ϕ croissant suffisamment rapidement à $y = \pm\infty$ et ayant un minimum fini à distance finie.

La densité de probabilités de y, soit $P(y, t)$ obéit à l'équation

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{T}\phi(y)\right)P \tag{3}$$

où T est encore la température de bruit. La solution d'équilibre (« thermodynamique ») de (3) est

$$P_0(y) = \exp\left(-\frac{\phi(y)}{T}\right)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}y\,\exp\left(-\frac{\phi(y)}{T}\right)\right]^{-1}. \tag{4a}$$

La solution de l'équation (3) pour la condition initiale $P(y, t)\,|_{t=0} = \delta(y - y_0)$, peut s'écrire

$$P(y, t \mid y_0) = \sum_n \mathrm{e}^{-E_n t}\,\varphi_n(y)\,\varphi_n(y_0) \times \times \exp -\frac{1}{2T}(\phi(y) - \phi(y_0)) \tag{4b}$$

les φ_n étant les fonctions propres définies par

$$-E_n\,\varphi_n(y) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} + \frac{1}{2T}\phi(y)\right) \times \times \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} - \frac{1}{2T}\phi(y)\right)\varphi_n(y)$$

avec $E_n \geqslant 0$ et la normalisation

$$\sum_n \varphi_n(y)\,\varphi_n(y_0) = \delta(y - y_0)\,.$$

Considérons maintenant la fonction d'autocorrélation

$$\psi_{FG}(\tau) = \overline{F(y(t))\, G(y(t+\tau))}$$
$$= \int \mathrm{d}y \int \mathrm{d}y_0\, P_0(y_0)\, F(y_0)\, G(y)\, P(y, t \mid y_0).$$

De (4) on déduit que $P_0(y_0)\, P(y, t \mid y_0)$ est symétrique dans la permutation $y \leftrightarrow y_0$, donc que $\psi_{FG}(\tau) = \psi_{GF}(\tau) = \psi_{FG}(-\tau)$. Une simple extension de la preuve précédente montre la t-symétrie en général du bruit engendré par l'équation de Langevin non linéaire. Ceci devrait permettre de tester l'idée avancée parfois que le bruit apparaissant près du seuil de Rayleigh-Bénard a son origine dans les fluctuations thermiques [1]. La preuve précédente s'étend formellement sans difficulté au cas où l'équation de Langevin non linéaire consiste à ajouter un bruit blanc gaussien à un flot de gradient dans un espace à plusieurs dimensions, ou même à une infinité de dimensions (donc au cas où $y(.)$ est un vecteur à plusieurs composantes réelles, ou une fonction d'une ou plusieurs autres variables).

Par contre, si l'on considère un système d'équations général sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}(t)$$

où $\mathbf{x}$ est un vecteur à d composants, $\boldsymbol{\phi}$ un champ de vitesse dans $\mathbb{R}^d$ et $\mathbf{f}(t)$ un bruit blanc gaussien (avec éventuellement des corrélations entre les d-composants), il n'est pas vrai en général que $\mathbf{x}(.)$ soit t-symétrique, si $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})$ ne peut pas se mettre sous la forme $\left(-\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} V(\mathbf{x})\right)$, V étant un potentiel scalaire. Ceci donne à penser que l'addition d'un bruit blanc gaussien aux équations de l'hydrodynamique *non linéaires* de Navier-Stokes ne décrit pas correctement les fluctuations thermiques d'équilibre, puisque celles-ci doivent satisfaire à la t-réversibilité et que les équations de Navier-Stokes n'ont pas de formulation variationnelle.

2. **Théorie cinétique de Boltzmann.** — Avec la théorie de Langevin, l'équation cinétique de Boltzmann constitue un des modèles microscopiques du problème à N corps. Nous allons examiner maintenant la t-symétrie des fluctuations décrites par une équation de Boltzmann « modèle ». Ce modèle, dû à Maxwell, est l'équation de Boltzmann d'un gaz plan de particules identiques [2] dont les vitesses ont toutes le même module et sont orientées suivant l'un des quatre points cardinaux. La fonction de distribution des vitesses est un vecteur à quatre composantes réelles positives $N_i(t)$ où $i = 1, 2, 3, 4$. Dans les indices i on définit l'addition modulo 4, et les vitesses $(i, i+2)$ sont, par définition, opposées. Si les N_i sont normalisés par la condition $\sum_{i=1}^{4} N_i = 1$, alors l'équation de Boltzmann pour le gaz homogène s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}N_i}{\mathrm{d}t} = \nu(N_{i+1}\, N_{i+3} - N_i\, N_{i+2}) \qquad (5)$$

où ν est la fréquence de collision, qu'on prendra égale à 1 par la suite.

La distribution d'équilibre sans vitesse moyenne est $N_i^0 = \frac{1}{4}$. Elle annule, naturellement, le membre de droite de (5). Un état de non-équilibre stationnaire peut être maintenu par un cisaillement du champ de vitesse dans un écoulement de Couette [3]. Dans cet écoulement, deux droites parallèles (ou « parois ») limitent le fluide et sur celles-ci les conditions de réflections des particules tendent à imprimer à celle-ci une certaine vitesse parallèle à la paroi. Lorsque ces vitesses diffèrent d'une paroi à l'autre, étant par exemple de même module et de signe contraire, on a une réalisation microscopique d'un écoulement de Couette. Naturellement cet écoulement n'est pas homogène, puisque la vitesse du fluide dépend de sa distance aux parois. Mais lorsque la distance entre parois est très supérieure au libre parcours moyen, on a l'équilibre local dans cet écoulement, c'est-à-dire que la fonction de distribution est une fonction de distribution d'équilibre (telle que $N_1\, N_3 = N_2\, N_4$) additionnée d'une petite perturbation. Au centre de l'écoulement de Couette la fonction de distribution locale est de la forme $N_i^0 = \frac{1}{4} + \varepsilon(-)^i$ où $\varepsilon(-)^i (\varepsilon \ll 1)$ constitue l'écart à l'équilibre local de la fonction de distribution, ε étant proportionnel au gradient spatial de la vitesse hydrodynamique et pouvant être calculé par la méthode de Chapman-Enskog [3]. Naturellement, cette fonction de distribution n'est pas une solution stationnaire de l'équation de Boltzmann (5), elle est une solution de cette équation lorsqu'elle est étendue au cas de distribution dépendant de la position. Mais, dans la limite hydrodynamique (c'est-à-dire lorsque l'écart entre parois est très supérieur au libre parcours moyen), on peut pratiquement négliger cette dépendance spatiale de la solution d'équilibre local et, en chaque point, calculer une fonction d'autocorrélation locale, comme si $N_i^{(0)}$ constituait une solution stationnaire de l'équation (5). Les fonctions d'autocorrélation des fluctuations de vitesse du gaz de Maxwell à 4 vitesses sont des quantités de la forme

$$\langle F(i, 0)\, G(j, \tau) \rangle \equiv \sum_{i,j=1,4}' N_i^{(0)}\, M(j, \tau \mid i)\, G(j)\, F(i) \qquad (6)$$

$N_i^{(0)}$ définissant l'état stationnaire autour duquel se

font les fluctuations, et M est la solution de l'équation (5) (avec $v = 1$) linéarisée autour de $N_i^{(0)}$

$$\frac{dM(j, \tau \mid i)}{d\tau} = N_{j+1}^{(0)} M(j+3) + N_{j+3}^{(0)} M(j+1) - N_j^{(0)} M(j+2) - N_{j+2}^{(0)} M(j) \quad (7)$$

avec la condition initiale $M(j, 0 \mid i) = \delta_{ij}$.

La fonction de corrélation « test de t-symétrie » construite à partir de la fonction de corrélation définie dans l'équation (6) s'écrit en général

$$\langle F(i, 0)\, G(j, \tau) - F(i+2, \tau)\, G(j+2, 0) \rangle ,$$

en effet l'inversion du temps se traduit par un changement de signe de la vitesse ce qui équivaut, dans le cas présent, à la transformation d'indices $(i) \to (i+2)$.

Pour des fonctions $N_i^{(0)}$ telles que $N_i^{(0)} = N_{i+2}^{(0)}$, et des fonctions $F(i)$ et $G(i)$ telles que $F(i+2) = F(i)$ et $G(i+2) = G(i)$, on a après quelques calculs élémentaires

$$\langle F(i, 0)\, G(i, \tau) - F(i+2, \tau)\, G(j+2, 0) \rangle = = \frac{\exp[-2\tau(N_1^0 + N_2^0)]}{(N_1^0 + N_2^0)} (G(2) F(1) - G(1) F(2)) \times \times ((N_1^0)^2 - (N_2^0)^2)$$

où $N_1^0 = \frac{1}{4} - \varepsilon$, $N_2^0 = \frac{1}{4} + \varepsilon$, ε étant, rappelons-le, proportionnel à l'écart à l'équilibre.

Donc

$$\langle F(i, 0)\, G(j, \tau) - F(i+2, \tau)\, G(j+2, 0) \rangle = = +2\varepsilon (F(2) G(1) - F(1) G(2)) [1 - \exp(-\tau)]$$

ce qui montre que la fonction test de t-symétrie est bien proportionnelle à ε et s'annule donc exactement à l'équilibre (le fait que cette fonction ne s'annule pas comme τ^3 en $\tau = 0$ provient de ce que la vitesse des particules à valeurs discrètes, n'est évidemment pas une fonction dérivable du temps).

Ce résultat montre que la t-symétrie des fluctuations d'un système à N corps nécessite en général, que celui-ci soit à l'équilibre thermodynamique. Cette remarque pourrait avoir un intérêt pour définir « objectivement » l'état d'équilibre ou de non équilibre. Ainsi les fluctuations d'un pendule de torsion dans un gaz doivent être t-dissymétriques au sens présent si ce gaz est hors d'équilibre, et t-symétrique si ce gaz est à l'équilibre en régime raréfié de Knudsen (pour éviter que ce pendule ait des fluctuations *a priori* gaussiennes — donc t-symétriques — simplement par l'effet statistique du grand nombre de collisions avec les particules de gaz).

3. **Processus de Markov.** — La théorie de Boltzmann, c'est évident, présente des analogies profondes avec le processus de Markov. Toutefois, il ne paraît pas inutile d'examiner les circonstances dans lesquelles un processus de Markov [6] donne un signal t-symétrique. En effet, l'idée de processus de Markov intervient dans la modélisation d'une classe assez large de processus physiques sans lien direct avec la théorie cinétique de Boltzmann.

Soit donc $(1, 2, ..., n)$ les états d'un système et P_{ij} $(i, j = 1, ..., n)$ les probabilités de transition de l'état i à l'état j, telles donc que $0 \leqslant P_{ij} \leqslant 1$ et $\sum_{j=1}^{n} P_{ij} = 1$, l'échelle des temps étant discrète (pour le moment), la distribution de probabilité à un instant donné t $(t \in \mathbb{Z})$ est un vecteur $Q_t(i)$ $i = 1, ..., n$ à composantes réelles positives qui obéit à l'équation « d'évolution »

$$Q_t(i) = \sum_{j=1}^{n} P_{ji}\, Q_{t-1}(j) \quad (8)$$

soit

$Q_t = P^+ Q_{t-1}$ en notations matricielles évidentes.

Puisque $P_{ij} \geqslant 0$ et $\sum_j P_{ij} = 1$, le théorème de Perron-Frobenius montre que la matrice P^+ a un comme plus grande valeur propre. Elle correspond naturellement à l'état d'équilibre, soit au vecteur Q^0 tel que

$$Q^0 = P^+ Q^0 .$$

Les fonctions d'autocorrélation de ce processus de Markov discret se mettent sous la forme

$$\langle F(i(t))\, G(i(t+m)) \rangle = = \sum_{i,j=1}^{n} Q^0(i)\, F(i)\, G(j)\, \pi(j, m \mid i) , \quad (9)$$

où F et G sont deux fonctions de l'état du système-pratiquement deux vecteurs à n-composantes réelles et $\pi(j, m \mid i)$ la probabilité de transition de l'état i à l'instant 0 vers l'état j au temps m. On tire de l'équation (8) l'expression formelle de cette matrice :

$$\pi(j, m \mid i) = [(P^+)^m]_{ji} ,$$

soit que $\pi(j, m \mid i)$ est l'élément (ji) de la puissance m (au sens habituel) de la matrice P^+, transposée de la matrice des probabilités de transition.

La fonction test de t-symétrie construite à partir de la fonction de corrélation définie en (9) s'écrit

$$\langle F(i(t))\, G(i(t+m)) - G(i(t))\, F(i(t+m)) \rangle = = \sum_{i,j=1}^{n} Q^0(i) [F(i) G(j) - F(j) G(i)] [(P^+)^m]_{ji} .$$

Le test conclura toujours à la t-symétrie si $Q^0(i) [(P^+)^m]_{ji}$ est symétrique dans l'échange $i \leftrightarrow j$.

Cette symétrie est réalisée en particulier s'il y a réversibilité « microscopique », soit si $P_{ij} = P_{ji}$. En effet, alors

$$Q^0(i) = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad (P^+)^m \text{ est une matrice symétrique} .$$

Mais ce n'est pas la seule circonstance où un processus de Markov est t-symétrique. Avant d'examiner la situation générale, montrons qu'un processus de Markov à deux états ($n = 2$) est toujours t-symétrique. La preuve de ce fait est formellement très proche de celle utilisée dans le cas de l'équation de Langevin non linéaire, et laisse supposer qu'il existe un lien mathématique plus général entre les deux problèmes.

Pour $n = 2$, la matrice des probabilités de transition peut se mettre sous la forme

$$P^+ = \begin{pmatrix} p & q \\ 1-p & 1-q \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad 0 < p, q < 1 .$$

L'identité

$$\begin{pmatrix} p & q \\ 1-p & 1-q \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} q^{1/2} & 0 \\ 0 & (1-p)^{1/2} \end{pmatrix} \times \overline{P} \begin{pmatrix} q^{-1/2} & 0 \\ 0 & (1-p)^{-1/2} \end{pmatrix}$$

avec

$$\overline{P} \equiv \begin{pmatrix} p & q^{1/2}(1-p)^{1/2} \\ (1-p)^{1/2} q^{1/2} & 1-q \end{pmatrix}$$

ramène la matrice P^+ à une forme symétrique.

D'où

$$(P^+)^m = \begin{pmatrix} q^{1/2} & 0 \\ 0 & (1-p)^{1/2} \end{pmatrix} \times \overline{P}^m \begin{pmatrix} q^{-1/2} & 0 \\ 0 & (1-p)^{-1/2} \end{pmatrix}$$

$\overline{P}^m$ étant la puissance m de la matrice symétrique $\overline{P}$.

On en déduit

$$[(P^+)^m]_{ji}\, Q^0(i) = \begin{pmatrix} q^{1/2} & 0 \\ 0 & (1-p)^{1/2} \end{pmatrix} \times \overline{P}^m \begin{pmatrix} q^{1/2} & 0 \\ 0 & (1-p)^{1/2} \end{pmatrix}$$

c'est bien une matrice symétrique, ce qui prouve la t-symétrie du processus de Markov à 2 états.

Pour étudier le processus de Markov à plus de deux états, considérons d'abord le cas $m = 1$. L'expression des fonctions tests de t-symétrie montre que le processus est t-symétrique si la matrice $\hat{P}$ définie par

$$[\hat{P}]_{ij} = Q^{(0)}(i)\, P_{ij}$$

est symétrique, soit si

$$Q^{(0)}(i)\, P_{ij} = Q^{(0)}(j)\, P_{ji} \qquad \forall i \text{ et } j .$$

La même condition assure la t-symétrie pour tout m. En effet, introduisons la matrice diagonale $\hat{Q}$ telle que $[\hat{Q}]_{ij} = Q^{(0)}(i)\, \delta_{ij}$. Comme $Q^{(0)}(i) > 0$, les matrices diagonales $[\hat{Q}]^{\pm 1/2}$ d'élément diagonal $(Q^{(0)}(i))^{\pm 1/2}$ sont réelles (nous nous limiterons au cas où tous les $Q^{(0)}(i)$ sont strictement positifs. Si l'un d'eux venait à s'annuler, on pourrait éliminer l'état correspondant du système, puisqu'il n'aurait d'importance que dans des états transitoires, alors qu'on s'intéresse ici aux fluctuations au voisinage d'états permanents). Introduisons maintenant la matrice $\tilde{P}$ telle que

$$P^+ = [\hat{Q}]^{-1/2}\, \tilde{P} [\hat{Q}]^{1/2} ,$$

donc

$$(P^+)^m = [\hat{Q}]^{-1/2}\, (\tilde{P})^m\, [\hat{Q}]^{1/2}$$

et

$$\hat{Q}(P^+)^m = [\hat{Q}]^{1/2}\, (\tilde{P})^m\, [\hat{Q}]^{1/2} .$$

Pour $m = 1$, le processus de Markov est t-symétrique si $\hat{Q}P^+$ est une matrice symétrique. La matrice $[\hat{Q}]^{1/2}$ étant diagonale, $\tilde{P}$ est alors aussi symétrique, comme l'est $[\hat{Q}]^{1/2}\, (\tilde{P})^m\, [\hat{Q}]^{1/2}$ et donc $\hat{Q}(P^+)^m$ ce qui prouve la t-symétrie du processus pour tout m.

La matrice $\tilde{P}$ est symétrique si

$$Q^0(i)\, P_{ij} = Q^0(j)\, P_{ji} . \tag{10}$$

Cette dernière condition est toujours satisfaite pour $n = 2$. Pour $n = 3$ la matrice de transition (par exemple)

$$P^+ \equiv \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

donne une distribution d'équilibre.

$$Q^0(1) = \frac{8}{21}, \quad Q^0(2) = \frac{2}{7}, \quad Q^0(3) = \frac{1}{3},$$

et l'on a $P_{12} = P_{21} = \frac{1}{2}$, alors que $Q_0(1) \neq Q_0(2)$, la condition de t-symétrie n'est donc pas satisfaite pour ce cas.

La condition (10) entraîne nécessairement un ensemble de conditions à satisfaire par les P_{ij}. En effet considérons les 3 conditions

$$\begin{aligned} Q^0(j)\, P_{ji} &= Q^0(i)\, P_{ij} \\ Q^0(k)\, P_{kj} &= Q^0(j)\, P_{jk} \\ Q^0(i)\, P_{ik} &= Q^0(k)\, P_{ki} . \end{aligned}$$

En faisant le produit membre à membre de ces 3 égalités, on en déduit si $Q^0(i)\, Q^0(j)\, Q^0(k) \neq 0$:

$$P_{ik}\, P_{kj}\, P_{ji} = P_{ij}\, P_{jk}\, P_{ki} .$$

Plus généralement, si toutes les composantes du

vecteur Q^0 sont non nulles, les éléments de la matrice P doivent satisfaire les conditions

$$P_{i_1 i_2} P_{i_2 i_3} \ldots P_{i_j i_1} = P_{i_1 i_j} P_{i_j i_{j-1}} \ldots P_{i_3 i_2} P_{i_2 i_1} .$$

Examinons maintenant brièvement le cas d'un processus de Markov continu, c'est-à-dire où $Q_t(i)$ dépend continûment d'un temps t et obéit à l'équation d'évolution

$$\frac{dQ_t}{dt}(i) = \left[\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \theta_{ji} Q_t(j) \right] - \theta_{ii} Q_t(i) \qquad (11a)$$

où les θ_{ji} sont des probabilités de transition par unité de temps (donc des quantités positives). La conservation de la probabilité est assurée si

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \theta_{ij} = \theta_{ii} \qquad \forall i .$$

La condition de t-symétrie du processus de Markov continu défini par (11a) se déduit très simplement de la discussion précédente. Ecrivons formellement (11a) comme

$$\frac{dQ}{dt} = LQ \qquad (11b)$$

L étant une matrice dont la définition suit de la comparaison de (11a) et (11b). On résoud formellement l'équation (11b) sous la forme

$$Q_{t+\delta} = e^{L\delta} Q_t .$$

En se limitant aux petits δ et en examinant la t-symétrie à l'aide de fonctions de corrélations prises sur un intervalle de temps δ, la condition (10) de probabilité de transition P^+ du schéma discret devient une condition sur le générateur infinitésimal L, qui s'écrit :

$$\theta_{ji} Q^0(i) = Q^0(j) \theta_{ij} , \qquad (12)$$

Q_0 étant la distribution de probabilité d'équilibre, solution (non triviale) de

$$\sum_{\substack{j=1,n \\ j \neq i}} \theta_{ji} Q^0(j) = \theta_{ii} Q^0(i) .$$

Si $\theta_{ij} = \theta_{ji}$, on a encore t-symétrie, de même si $p = 2$.

4. **Systèmes dynamiques intrinsèquement stochastiques.** — On entend traditionnellement par stochasticité intrinsèque, celle que présente (éventuellement) des systèmes déterministes à petit nombre de degrés de liberté. Ces systèmes déterministes peuvent être soit des équations différentielles non linéaires, soit des itérations de transformations également non linéaires. Nous allons nous limiter à ce dernier cas.

Le modèle canonique d'un tel système dynamique discret est la transformation de Hénon [4]

$$(x, y) \to (1 - ax^2 + y, bx) \; a, b, x, y \in \mathbb{R} .$$

C'est un système dissipatif ($\simeq$ irréversible) pour $|b| < 1$ et hamiltonien ($\simeq$ réversible) pour $b = \pm 1$. Lorsque cette itération a un comportement non divergent, on peut examiner des fonctions d'autocorrélation, telle $\overline{x_n^3 x_{n+1}}$ (x_n étant la valeur de x à la n-ième itération, et la moyenne étant une moyenne glissante sur n).

La transformation inverse de la transformation d'Hénon s'écrit, en général

$$(x, y) \to (y/b, -1 + ay^2/b^2 + x) ,$$

soit si l'on permute x et y et si l'on change leur signe :

$$(x, y) \to (1 - ay^2/b^2 + x, x/b) .$$

La quantité « renversée par rapport au temps » de $x_n^3 x_{n+1}$ est, naturellement $\overline{x_n x_{n+1}^3}$, la fonction test de t-symétrie qui s'en déduit est donc

$$\psi^{(t)} = \overline{x_n x_{n+1}(x_n^2 - x_{n+1}^2)} .$$

Les considérations précédentes sur l'inverse de la transformation d'Hénon montrent que si $b = \pm 1$, $\psi^{(t)}$ doit s'annuler, puisque la transformation inverse est alors identique à la transformation directe, à des changements de signe près — qui n'affectent pas la fonction d'autocorrélation considérée et moyennant une substitution ($x \leftrightarrow y$) qui ne l'affecte pas non plus puisqu'elle revient à décaler l'indice n d'une unité, ce qui laisse encore invariant la fonction de corrélation. On vérifie bien numériquement que la fonction de corrélation $\psi^{(t)}$ définie ci-dessus s'annule dans le cas hamiltonien (à des fluctuations près naturellement), c'est-à-dire pour $b = \pm 1$, lorsque les trajectoires ne divergent pas. Pour $|b| < 1$, par exemple pour les valeurs canoniques $b = 0{,}3$, $a = 1{,}4$ on constate bien numériquement que si l'itération ne diverge pas, alors $\psi^{(t)}$ n'est pas nul et reste indépendant du point de départ. Le même genre de résultat reste valable pour des systèmes différentiels dissipatifs (et certainement t-dissymétrique en tous sens raisonnable du terme) tels le système de Lorenz ou même l'équation de Van der Pol. Les fonctions d'autocorrélation test de t-dissymétrie sont en général non nulles pour eux.

Les considérations précédentes font jouer un rôle particulier aux systèmes hamiltoniens (et donc réversibles), alors que suivant Whittaker [5], tout système différentiel autonome (tels, par exemple, les équations de Van der Pol ou de Lorenz) peut être muni d'une structure Lagrangienne et Hamiltonienne. Si ce système différentiel de départ est d'ordre k (= s'il peut s'écrire comme k équations différentielles couplées du premier ordre), le système hamiltonien

« équivalent » est (en général) d'ordre $2k$. L'irréversibilité du système (dissipatif) de départ se traduit (en général) par une contraction continue de l'élément de volume de l'espace des phases au cours de l'évolution. Le système hamiltonien construit à partir de ce système irréversible est donc dilatant par rapport aux nouvelles variables pour satisfaire au théorème de Liouville. Les trajectoires typiques de ce système hamiltonien divergent donc aux grands temps. Ceci interdit, en général, de calculer des moyennes glissantes, ce qui élimine toute contradiction entre t-symétrie des systèmes hamiltoniens et t-dissymétrie des systèmes dissipatifs.

5. **t-symétrie et filtrage du signal.** — L'idée de fonction test de t-symétrie peut fournir le principe d'un filtrage non linéaire du signal. Soit $\sigma(.)$ un signal t-dissymétrique additionné d'un bruit t-symétrique $\beta(.)$ aléatoire. La fonction de corrélation

$$\overline{(\sigma+\beta)^2\ (t)\ (\sigma+\beta)\ (t+\tau) - (\sigma+\beta)\ (t)\ (\sigma+\beta)^2\ (t+\tau)}$$

vaut $\overline{\sigma(t)\,\sigma(t+\tau)\,(\sigma(t)-\sigma(t+\tau))}$ si $\beta(.)$ est t-symétrique, elle est donc insensible au bruit $\beta(.)$. Pour en déduire une méthode de filtrage fournissant une fonction du temps et du seul signal $\sigma(.)$, il suffit de prendre la contribution à la fonction d'autocorrélation ci-dessus pour un temps de l'ordre d'un temps typique de σ. Soit $\overline{\beta}$ et τ_β (resp. $\overline{\sigma}$ et τ_σ) l'amplitude et l'échelle de temps typiques de β (resp. de σ), alors le procédé de filtrage en question est efficace si

$$\overline{\sigma}^3 \gg \overline{\beta}^3 \left(\frac{\tau_\beta}{\tau_\sigma}\right)^{1/2},$$

en effet la contribution des fluctuations de β à la fonction d'autocorrélation est une somme de variables aléatoires, chacune de ces variables qui a une amplitude $\overline{\beta}^3$ est constituée par une fluctuation de durée τ_β et il y a en tout de l'ordre (τ_σ/τ_β) telles contributions dans la fonction d'autocorrélation considérée, d'où l'expression précédente en utilisant la loi des grands nombres. Si $\beta(.)$ est un bruit blanc gaussien (donc sans échelle de temps caractéristique) de température T tel que $\overline{\beta(t)\,\beta(t')} = T\,\delta(t-t')$, la condition précédente devient :

$$\overline{\sigma} \gg \left(\frac{T}{\tau_\sigma}\right)^{1/2}.$$

6. **t-symétrie, théorème de Wiener-Khinchin et phase des composantes de Fourier.** — Si $X(.)$ est un signal fluctuant, dans l'état de régime (c'est-à-dire à caractéristique moyenne constante) le théorème de Wiener-Khinchin relie la transformée de Fourier de la fonction de corrélation de $X(.)$ à la puissance de $X(.)$. Soit donc

$$\tilde{X}_\tau(\omega) \equiv \int_{t_0}^{t_0+\tau} \mathrm{d}\tau'\, \mathrm{e}^{i\omega\tau'}\, X(\tau')$$

une composante de Fourier du signal $X(.)$, t_0 étant une origine standard, τ la durée de la mesure et $i = \sqrt{-1}$. Par définition la fonction d'autocorrélation de $X(.)$ est

$$S_a(t) = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \times \times \int_t^{t_0+\tau} \mathrm{d}\tau' (X(\tau') - \overline{X})\,(X(\tau'+t) - \overline{X}).$$

Alors, par le théorème de Wiener-Khinchin

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} |\, \tilde{X}_\tau(\omega)\,|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{i\omega t}\, S_a(t).$$

Donc, dans la fonction d'autocorrélation S_a la « phase » de la composante de Fourier $\tilde{X}_\tau(\omega)$ est perdue, puisque $S_a(t)$ ne permet pas de décider de la t-symétrie de $X(.)$, il est assez naturel de supposer que c'est dans cette phase qu'est « stockée » l'information concernant cette symétrie.

La conformité de ce point de vue avec les idées exposées dans le présent travail est aisée à établir. Considérons donc deux fonctions $A(X)$ et $B(X)$ du signal X, à valeurs réelles, et la fonction test de t-symétrie

$$S_{AB}(t) \equiv \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0+\tau} \mathrm{d}\tau' [A(X(\tau')) \times \times B(X(\tau'+t)) - B(X(\tau'))\,A(X(t+\tau'))]$$

Comme on l'a vu $S_{AB}(t) = 0$ si $X(.)$ est t-symétrique.

Considérons maintenant les transformées de Fourier A et B définies comme fonctions du temps à travers leur dépendance en X :

$$\tilde{A}_\tau(\omega) = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \mathrm{d}\tau'\, \mathrm{e}^{i\omega\tau'}\, A(X(\tau'))$$

$$\tilde{B}_\tau(\omega) = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \mathrm{d}\tau'\, \mathrm{e}^{i\omega\tau'}\, B(X(\tau')).$$

Une généralisation immédiate du théorème de Wiener-Khinchin montre que

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{2i}{\tau} \sin(\varphi_B(\omega) - \varphi_A(\omega))\, |\, \tilde{A}_\tau(\omega)\, \tilde{B}_\tau(\omega)\,| = = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{i\omega t}\, S_{AB}(t)$$

où $\varphi_{A,B}(\omega)$ sont les phases des transformées de Fourier $\tilde{A}_\tau(\omega)$ et $\tilde{B}_\tau(\omega)$, considérées comme nombres complexes.

On obtient aussi le résultat que, si $X(.)$ est t-symétrique, alors les phases des transformées de Fourier de toute fonction $\phi(X(.))$ (telle que les fonctions A et B considérées ci-dessus) et donc, en particulier

de $X(.)$ tendent vers une limite unique aux grands τ pour un ω donné. Cette phase n'a de sens que pour un choix bien défini des bornes de l'intégrale qui définit la transformée de Fourier. Cette égalité des phases n'existe donc que pour des intégrales de Fourier de différentes fonctions $\phi(X(t))$ calculées strictement dans les mêmes intervalles de temps.

7. **Remarques finales et conclusion.** — Comme on l'a déjà dit, les fluctuations d'un système stationnaire mais hors équilibre ne sont pas en général t-symétriques au sens de cette note.

Ainsi alors que le bruit Nyquist des circuits électriques est t-symétrique, puisque manifestement d'origine thermodynamique, le bruit Schottky du courant dans une résistance doit être t-dissymétrique, comme sans doute le sont les fluctuations d'un laser ou le bruit de magnétisation Barkhausen. Cette notion de t-symétrie n'apporterait sans doute aucune information nouvelle dans ces situations physiques bien comprises.

Par contre, le bruit en $1/f$ des circuits électriques semble encore assez mystérieux, et il ne serait peut être pas sans intérêt d'examiner sa t-symétrie, de même les fluctuations de vitesses d'un écoulement turbulent sont peut-être t-symétriques aux grandes échelles, où la dissipation ne se fait guère sentir.

La théorie de la turbulence développée est basée sur l'idée de cascade d'Onsager-Kolmogoroff. Si $E(k)\,\mathrm{d}k$ est l'énergie contenue dans la bande de nombre d'onde $[k, k + \mathrm{d}k]$, on imagine que, par les processus non linéaires décrits par les équations de Navier-Stokes, cette énergie est transférée de façon irréversible vers les nombres d'ondes plus grands (au moins pour la turbulence 3 dimensionnelle). Soit $E(k, t_0)\,\mathrm{d}k$ l'énergie présente dans la bande $[k, k+\mathrm{d}k]$ à l'instant t_0, le transfert (irréversible) d'énergie vers la bande spectrale $[k_1, k_1 + \mathrm{d}k]$ pourrait être caractérisé par la fonction « test de t-symétrie »

$$\psi_{k,k_1}(\tau) = \overline{E(k, t_0)\, E(k_1, t_0+\tau) - E(k_1, t_0)\, E(k, t_0+\tau)}\,.$$

L'idée de cascade vers les grands nombres d'onde correspondra au fait que $\psi_{k,k_1}(\tau)$ est positive pour $\tau > 0$ et a une échelle de temps caractéristique de plus en plus grande quand k_1 devient de plus en plus grand à k fixé. Autrement dit, une fluctuation d'énergie dans la région (k) mettrait un certain temps à passer dans la région $k_1 = k + \Delta k$ $(\Delta k > 0)$, puis de la région $k + \Delta k$ à la région $k + 2\,\Delta k$, etc.

Une autre application de cette notion de t-symétrie pourrait se trouver dans une théorie statistique de la turbulence développée. En effet le temps et l'espace se distinguent (entre autres) du point de vue des fluctuations turbulentes par le fait que les équations de Navier-Stokes ne sont pas invariantes par renversement du temps. Le Lagrangien de Landau-Ginzburg des fluctuations d'un champ scalaire turbulent ψ pourrait être

$$\psi = \int \mathrm{d}t\, \mathrm{d}\mathbf{x} (\nabla\psi)^2 + \alpha^2\, \psi_t^2 + m^2\, \psi^2 + \mu'\, \psi_t^3\, \psi$$

où $(\nabla\psi)$ est le gradient habituel (dans l'espace des positions, $\mathbf{x}$) α l'inverse d'une vitesse caractéristique et $\mu'\, \psi_t^3\, \psi$ $(\psi_t \equiv \partial\psi/\partial t)$ serait le premier terme non trivial introduisant la t-dissymétrie suivant la « direction t ». En effet d'une part ce terme doit être impair dans le changement $t \to (-t)$ et d'autre part il ne peut être proportionnel à la première dérivée ψ_t, puisque sa contribution disparaîtrait par intégration sur le temps t. On peut remarquer que ce Lagrangien pour être t-dissymétrique, pair en ψ, polynomial et de degré minimum doit nécessairement inclure ce terme du 4e ordre, et il parait difficile de l'éliminer par des transformations d'échelle puisqu'il est le plus simple préservant la t-dissymétrie. En un certain sens donc ce type d'irréversibilité est fondamentalement lié au caractère non gaussien des fluctuations. Si l'indice continu « t » était remplacé par un indice discret, on aurait, au lieu de

$$\int \psi_t^3\, \psi\, \mathrm{d}t \text{ la somme } \frac{2}{27} \sum_i \psi_i\, \psi_{i+4} (\psi_{i+3} - \psi_{i+1})\, \psi_{i+2},$$

i étant l'indice de maille dans la direction du réseau représentant le temps. Ceci indique (peut être) qu'il existe une possibilité de représenter un flot turbulent à d-dimensions par les fluctuations critiques d'un modèle thermodynamique sur réseau à $(d + 1)$ dimensions avec des interactions t-dissymétriques dans la direction « temps » du réseau.

Remerciements. — Je remercie Etienne Guyon de m'avoir suggéré ce problème, j'ai eu aussi des discussions utiles avec Vincent Croquette, Jean Vannimenus et Eduardo Wesfreid; Jacques des Cloizeaux m'a communiqué la preuve de la réversibilité des fluctuations de l'équation de Langevin non linéaire.

Je remercie Robert Graham pour sa correspondance sur le lien entre t-symétrie et phase de la transformée de Fourier.

Bibliographie

[1] GRAHAM, R., *Phys. Rev.* **A 10** (1974) 1962.
PEDERSEN, A. M., RISTE, T., *Z. Phys.* **37B** (1980).

[2] GATIGNOL, R., *Lectures Notes in Physics, Théorie cinétique des gaz à répartition discrète de vitesse* (Springer Verlag) 1975, vol. 36.

[3] HARDY, J., POMEAU, Y., *J. Math. Phys.* **13** (1972) 1042.

[4] HÉNON, M., POMEAU, Y., Colloque sur la turbulence, Orsay (1976) (ed. Springer Verlag) *Lectures Notes in Math.*

[5] WHITTAKER, E. T., *A treatise in the analytical dynamics of particles and rigid bodies* (Cambridge University Press) 1959.

[6] La réversibilité des chaînes de Markov a déjà été étudiée, voir par exemple le paragraphe 12, chap. XV in *An introduction to probability theory and its applications*, W. Feller, 3e édition (Wiley & Sons, New York) 1968. Il semble toutefois que l'attention ait surtout porté sur la définition de la chaîne de Markov (si elle existe) correspondant à une chaîne de Markov donnée, mais où le sens d'écoulement du temps a été retourné.

La réversibilité de divers modèles probabilistes a été aussi étudiée par WILLEMS in *Stochastic Non Linear Systems*, L. Arnold et E. Lefever eds. (Springer Verlag, Berlin) 1981 et références incluses.

[7] Equation 161 in : CHANDRASEKHAR, S., *Rev. Mod. Phys.* **15** (1943) 1.