



HAL
open science

La structure des raies de résonance hyperfine d'ions oscillant harmoniquement dans un champ électrique

F.G. Major, J.L. Duchene

► **To cite this version:**

F.G. Major, J.L. Duchene. La structure des raies de résonance hyperfine d'ions oscillant harmoniquement dans un champ électrique. *Journal de Physique*, 1975, 36 (10), pp.953-959. 10.1051/jphys:019750036010095300 . jpa-00208340

HAL Id: jpa-00208340

<https://hal.science/jpa-00208340>

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Classification
Physics Abstracts
 5.446

LA STRUCTURE DES RAIES DE RÉSONANCE HYPERFINE D'IONS OSCILLANT HARMONIQUEMENT DANS UN CHAMP ÉLECTRIQUE

F. G. MAJOR et J. L. DUCHENE

Laboratoire de l'Horloge Atomique, Bât. 221, Université Paris-Sud, 91405 Orsay, France

(Reçu le 24 juillet 1974, révisé le 21 mai 1975, accepté le 28 mai 1975)

Résumé. — Nous étudions la structure théorique du spectre hyperfin micro-onde observé sur des ions oscillant harmoniquement dans un champ quadropolaire radio-fréquence. Nous montrons que l'effet Doppler du premier ordre se manifeste par la présence d'un ensemble de raies latérales bien résolues, dont l'amplitude relative permet de déterminer la distribution d'énergie des ions et d'évaluer la correction Doppler du second ordre pour la raie centrale.

Abstract. — The theory is developed for the structure of the microwave hyperfine spectrum observed for ions suspended harmonically in a quadrupole rf field. It is shown that the linear Doppler effect leads to a well resolved system of side bands whose relative amplitudes are sufficient to determine the energy distribution of the ions and hence evaluate the second order Doppler correction for the central line.

1. **Introduction.** — La précision et la résolution avec lesquelles on peut observer le spectre d'un ensemble d'atomes dépendent, en dernier ressort, de deux facteurs : l'isolement du système des perturbations extérieures pendant l'observation, et la façon dont les conditions restrictives sur le mouvement des particules limitent l'élargissement dû à l'effet Doppler. Diverses méthodes ont déjà été employées pour réaliser une approximation des conditions idéales : par exemple, l'utilisation de jets moléculaires [1], la diffusion lente dans les gaz inertes [2], le stockage dans un récipient à parois inertes [3] et, dans le domaine de la physique nucléaire, la disposition convenable de noyaux dans un réseau cristallin [4].

Plus récemment, on a développé la méthode du confinement dans le vide, d'ions placés dans un champ électromagnétique approprié. L'une de ces configurations possibles de champ, adaptée à l'observation des transitions de dipôle magnétique est le champ électrique radio-fréquence du quadropôle, d'abord appliqué à l'étude de l'effet Zeeman pour les ions He^+ [5] et H_2^+ [6]. Pour observer de cette façon le spectre radio-fréquence d'ions, il faut résoudre le problème du pompage des populations des sous-niveaux magnétiques. Ceci a déjà été réalisé en mettant à profit les interactions dépendant du spin, avec des atomes ou des photons polarisés [7].

Cette méthode de confinement électrodynamique a été récemment employée pour observer les transitions hyperfines à 40,5 GHz de l'état fondamental de l'ion $^{199}\text{Hg}^+$, en vue d'applications possibles à la métro-

logie du temps et des fréquences. Dans cette expérience [8], le pompage des ions $^{199}\text{Hg}^+$ entre deux sous-niveaux hyperfins est effectué par la raie de résonance à 1 942 Å d'une lampe à ^{202}Hg . Il existe, en raison du déplacement isotopique, une coïncidence fortuite (à la largeur Doppler près) entre les longueurs d'onde des transitions $^2\text{S}_{1/2}(F=1) \rightarrow ^2\text{P}_{1/2}$ de $^{199}\text{Hg}^+$ et $^2\text{S}_{1/2} \rightarrow ^2\text{P}_{1/2}$ de $^{202}\text{Hg}^+$. Cette méthode permet d'observer, par l'intermédiaire de la lumière de fluorescence, les transitions induites par le champ hyperfréquence. La largeur de raie atteinte expérimentalement est inférieure à 2×10^{-10} , valeur très intéressante du point de vue métrologique.

Pourtant, bien que ces techniques aient été développées essentiellement pour atteindre une haute résolution spectrale, il existe peu de publications concernant la forme théorique de la raie fournie par un ensemble d'ions soumis à un champ de confinement harmonique. Nous étudions ici le spectre hyperfréquence modifié par le mouvement du centre de masse d'ions placés dans un champ de confinement. Nous montrons que l'effet Doppler du premier ordre transforme une raie de résonance simple en un système complexe, constitué d'une raie centrale non déplacée (au premier ordre en v/c) et d'un ensemble symétrique de bandes latérales dont les amplitudes permettent de déterminer la distribution des amplitudes d'oscillation des ions dans le champ de confinement. Cette fonction est importante dans l'application de la technique de suspension harmonique d'ions aux étalons de fréquence, car elle permet de calculer l'influence de l'effet Doppler sur la forme des raies.

2. Mouvement des ions dans le champ de confinement.

— Le champ que nous envisageons ici pour le confinement est le champ électrique radio-fréquence du quadrupôle. Les résultats peuvent s'appliquer à d'autres configurations du champ, telle par exemple, celle de Penning [9], qui consiste en un champ quadrupolaire électrostatique auquel est superposé un champ magnétique uniforme axial. Le champ quadrupolaire radio-fréquence créé par les électrodes illustrées dans la figure 1 dérive du potentiel :

$$\Phi = (U_0 + V_0 \cos \Omega t) \left(\frac{r^2}{2} - z^2 \right) / r_1^2. \quad (2.1)$$

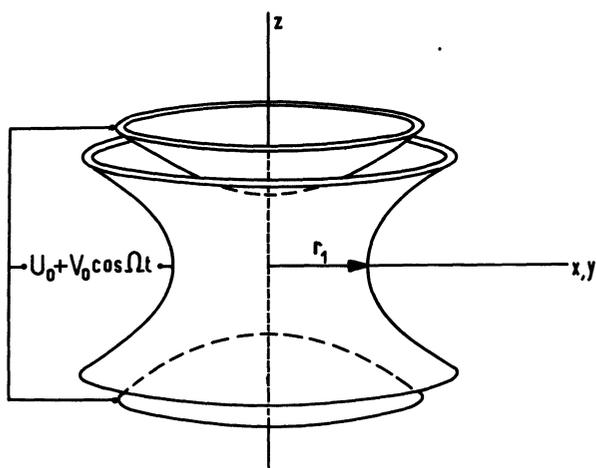


FIG. 1. — Géométrie des électrodes créant le champ quadrupolaire radio-fréquence.

Pour établir un tel champ sur un volume suffisant pour confiner un assez grand nombre d'ions, il n'est pas nécessaire, bien que cela soit habituellement fait, de réaliser des électrodes en forme d'hyperboloïde. Il suffit que le potentiel créé dans la région centrale présente une symétrie convenable, comme par exemple, le potentiel créé par un cylindre circulaire droit fermé par deux couvercles plans. Nous supposons par la suite que les mêmes électrodes servent également de cavité résonnante excitée sur un mode convenable pour induire des transitions entre les niveaux hyperfins des ions. Le cylindre circulaire droit présente alors l'avantage de donner une configuration du champ hyperfréquence relativement simple (Fig. 2). Le champ de radio-fréquence créé par ces électrodes dérive d'un potentiel de la forme [10] (en négligeant les effets de retard) :

$$\Phi(r, z) = \sum_i \frac{2 V_0 J_0(m_i r) \operatorname{ch}(m_i z)}{m_i r_0 J_1(m_i r_0) \operatorname{ch}(m_i z_0)} \quad (2.2)$$

où $J_0(m_i r_0) = 0$, r_0 étant le rayon et z_0 la demi-hauteur du cylindre. En développant cette fonction autour de l'origine, on trouve :

$$\Phi(r, z) \simeq \Phi_0 - \left[\frac{1}{r_0^2} \sum_i \frac{\lambda_i}{J_1(\lambda_i) \operatorname{ch}(\lambda_i/\sqrt{2})} \right] \left(\frac{r^2}{2} - z^2 \right). \quad (2.3)$$

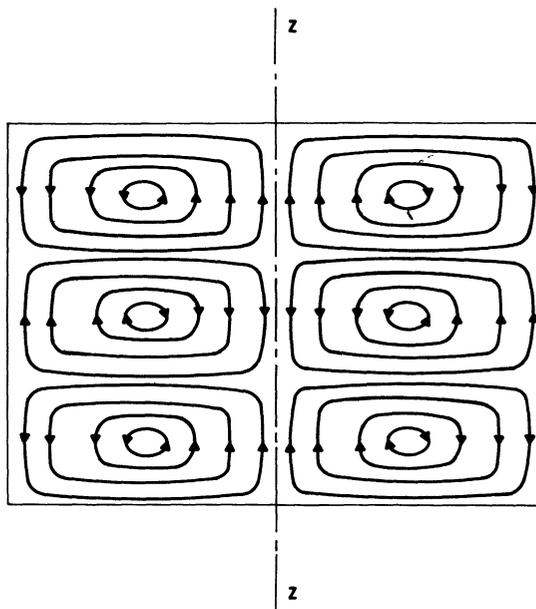


FIG. 2. — Lignes de champ magnétique dans une cavité résonnante cylindrique pour le mode TE_{013} .

Dans la région centrale, la géométrie du champ a bien la forme donnée par l'équation (2.1), et le rayon du quadrupôle équivalent est relié à celui du cylindre réel par :

$$r_1^{-2} = r_0^{-2} \left[\sum_i \frac{\lambda_i}{J_1(\lambda_i) \operatorname{ch}(\lambda_i/\sqrt{2})} \right]. \quad (2.4)$$

Dans cette région où l'on peut supposer que le champ a une forme quadrupolaire, les mouvements en r et z sont découplés. Les équations du mouvement pour des ions ayant un rapport e/m donné sont, dans un tel champ, des équations de Mathieu [11] :

$$\frac{d^2 x_i}{d\theta^2} + (a + 2q \cos 2\theta) x_i = 0 \quad (2.5)$$

$$\text{où } x_i = r, z; \quad a_r = -\frac{a_z}{2} = 4e \frac{U_0}{mr_1^2 \Omega^2};$$

$$q_r = \frac{q_z}{2} = 2e \frac{V_0}{mr_1^2 \Omega^2}; \quad \theta = \frac{\Omega t}{2}.$$

Pour des valeurs de a et q correspondant à des solutions stables de l'équation de Mathieu, le mouvement le long des deux axes de coordonnées est périodique et donné par :

$$x_i = A \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \cos(2n + \beta) \frac{\Omega t}{2} + B \sum_{-\infty}^{\infty} c_m \sin(2m + \beta) \frac{\Omega t}{2} \quad (2.6)$$

où c_n et β ne dépendent que de a et q .

Le mouvement a donc un spectre discret comprenant les fréquences $\omega_n = \left(n + \frac{\beta}{2} \right) \Omega$. Pour $a \ll 1$ et

$q \ll 1$, on peut montrer que $c_0 \simeq 1$ et $c_{\pm 1} \simeq q/4$. La fréquence dominante est donc $\omega_0 = \beta\Omega/2$. Bien que l'amplitude des oscillations de fréquence ω_0 soit très supérieure à celle des oscillations de fréquence $(1 \pm \beta/2)\Omega$ (ces dernières correspondent à une vibration de faible amplitude autour de la trajectoire basse fréquence), les amplitudes des vitesses pour ces deux fréquences sont du même ordre de grandeur.

En effet, on peut montrer que, dans ces conditions, dites adiabatiques, l'énergie cinétique d'oscillation est transférée du mouvement de fréquence ω_0 à celui de fréquence $\omega_{\pm 1}$ en même temps que l'ion passe d'une région de champ faible à une région de champ fort.

3. Forme de la raie de résonance. — Supposons que l'on dispose d'un ensemble d'ions paramagnétiques oscillant harmoniquement dans un champ électrique quadrupolaire et soumis à un champ micro-onde résonnant qui induit des transitions magnétiques hyperfines.

Considérons que les ions effectuent un mouvement oscillatoire dont la projection sur les axes r et z est caractérisée par les fréquences ω_r et ω_z , et soit $n(\rho, \zeta)$ la répartition des amplitudes d'oscillation. Négligeons d'abord l'effet Doppler du second ordre, ce qui nous permettra de décrire l'allure générale du spectre. Puisque chaque ion a un mouvement oscillatoire, le champ micro-onde dépend implicitement du temps. Or la dépendance de la probabilité de transition en fonction du mouvement des particules est complètement décrite, dans les limites où la résonance hyperfine est très peu saturée, par [12] :

$$\alpha(\omega) \sim \text{Re} \int_0^\infty \langle H_z(t) H_z^*(t + \tau) \rangle \exp(-i\omega_a \tau) d\tau \quad (3.1)$$

où $H_z(t)$ est l'amplitude de la composante du champ magnétique micro-onde parallèle à l'axe z , induisant les transitions $\Delta m = 0$ entre les états quantiques hyperfins et où $\omega_a/2\pi$ est la fréquence de ces transitions. Supposons que la répartition spatiale du champ

micro-onde corresponde à celle du mode TE_{01M} d'une cavité cylindrique (avec $M = 2p - 1$, afin que $\langle H_z \rangle \neq 0$). On a donc :

$$H_z(r, z, t) = \frac{k_1}{k} J_0(k_1 r) \cos(k_3 z) \cos \omega t \quad (3.2)$$

où $k_1 r_0 = \lambda_1$ est la première racine de $J_1(z)$ et $k_3 = M\pi/2 z_0$. Supposons que le mouvement des ions soit décrit par :

$$\left. \begin{aligned} r &= \rho \sin(\omega_r t + \varphi_r) \\ z &= \zeta \sin(\omega_z t + \varphi_z) \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

en reportant ces relations dans l'éq. (3.2) on obtient :

$$H_z(t) = \frac{k_1}{k} J_0[k_1 \rho \sin(\omega_r t + \varphi_r)] \times \cos[k_3 \zeta \sin(\omega_z t + \varphi_z)] \cos \omega t. \quad (3.4)$$

On peut alors développer en série de Fourier les facteurs radial et axial [13] :

$$J_0[k_1 \rho \sin(\omega_r t + \varphi_r)] = \sum_{-\infty}^{\infty} J_{m/2}^2\left(\frac{k_1 \rho}{2}\right) \cos[m(\omega_r t + \varphi_r)] \quad (3.5a)$$

$$\cos[k_3 \zeta \sin(\omega_z t + \varphi_z)] = \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(k_3 \zeta) \cos[n(\omega_z t + \varphi_z)] \quad (3.5b)$$

où les sommes ne portent que sur des indices m et n pairs.

Pour des amplitudes (ρ et ζ) et des phases (φ_r et φ_z) du mouvement des ions données, on peut maintenant écrire l'expression nécessaire au calcul de la fonction de corrélation $K(\tau) = \langle H_z(t) H_z(t + \tau) \rangle$, et ultérieurement au calcul de l'intensité des raies spectrales. Nous supposons, pour calculer la valeur moyenne de cette expression, que les phases sont toutes équiprobables, et que les amplitudes ont la répartition $n(\rho, \zeta)$. On a :

$$K(\tau) = \int_0^{r_0} \int_0^{z_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{m,n,p,q=-\infty}^{\infty} J_{m/2}^2\left(\frac{k_1 \rho}{2}\right) J_{p/2}^2\left(\frac{k_1 \rho}{2}\right) J_n(k_3 \zeta) J_q(k_3 \zeta) \cos[m(\omega_r t + \varphi_r)] \times \cos[p(\omega_r t' + \varphi_r)] \cos[n(\omega_z t + \varphi_z)] \cos[q(\omega_z t' + \varphi_z)] \cos \omega t \cos \omega t' \rho n(\rho, \zeta) d\varphi_r d\varphi_z d\zeta d\rho, \quad (3.6)$$

où $t' = t + \tau$. Après intégration par rapport à φ_r et φ_z , on obtient, en moyennant sur le temps :

$$K(\tau) = \frac{\pi^2}{2} \int_0^{r_0} \int_0^{z_0} \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} J_{m/2}^4\left(\frac{k_1 \rho}{2}\right) J_n^2(k_3 \zeta) \rho n(\rho, \zeta) \cos(m\omega_r \tau) \cos(n\omega_z \tau) \cos \omega \tau d\zeta d\rho. \quad (3.7)$$

Ce résultat prévoit un spectre de raies ayant pour fréquences :

$$\omega_{mn} = \omega + m\omega_r + n\omega_z \quad (3.8)$$

où m et n sont pairs. Leur parité est déterminée par la symétrie spatiale du champ micro-onde. L'intensité relative I_{mn} de la raie correspondant à la fréquence

ω_{mn} est égale à :

$$I_{mn} = \frac{\pi^2}{2} \int_0^{r_0} \int_0^{z_0} \rho n(\rho, \zeta) J_{m/2}^4\left(\frac{k_1 \rho}{2}\right) J_n^2(k_3 \zeta) d\zeta d\rho. \quad (3.9)$$

De ce résultat, on peut déduire la répartition d'amplitudes d'oscillation des ions $n(\rho, \zeta)$. Supposons que les intensités I_{mn} des raies aient été mesurées pour les valeurs de m et n allant de 0 à $2N$, ce qui implique la connaissance de $(N+1)^2$ nombres. De plus, choisissons un système de fonctions orthonormées dans le domaine $[-z_0, z_0]$, $[-r_0, r_0]$, pour servir de base au développement de la fonction $n(\rho, \zeta)$ en série de Fourier à deux dimensions :

$$n(\rho, \zeta) = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} \varphi_i(\rho) \psi_j(\zeta). \quad (3.10)$$

En substituant ce développement dans l'expression de I_{mn} , on obtient :

$$I_{mn} = \frac{\pi^2}{2} \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} \int_0^{r_0} \int_0^{z_0} \rho \varphi_i(\rho) \psi_j(\zeta) J_{m/2}^4\left(\frac{k_1 \rho}{2}\right) J_n^2(k_3 \zeta) d\zeta d\rho. \quad (3.11)$$

Après changement de variable et en posant $V = 2\pi r_0^2 z_0$ (volume de la cavité), on peut écrire :

$$I_{mn} = \frac{V}{4\pi^3} \sum a_{ij} c_{ijmn} \quad (3.12)$$

où

$$c_{ijmn} \equiv \pi \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} y \varphi_i(y) \psi_j(x) J_{m/2}^4\left(\frac{\lambda_1 y}{2\pi}\right) \times J_n^2\left(\frac{2p-1}{2}x\right) dy dx. \quad (3.13)$$

Pour poursuivre le calcul, il faut postuler que le rapport des fréquences ω_r et ω_z est irrationnel, c'est-à-dire que, quels que soient les nombres entiers a et b , $a\omega_r + b\omega_z \neq 0$. Dans ces conditions, chaque raie sera séparée et associée uniquement aux valeurs m et n . Les $(N+1)^2$ inconnues a_{ij} seront donc déterminées par autant d'équations algébriques linéaires qui auront une solution si le déterminant c_{ijmn} d'ordre $(N+1)^2$ n'est pas nul. La connaissance des valeurs de c_{ijmn} et I_{mn} permet de cette façon de déterminer les coefficients a_{ij} et donc la répartition d'amplitude $n(\rho, \zeta)$.

A titre d'exemple, choisissons les fonctions orthonormées :

$$\varphi_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos \frac{n\pi\rho}{r_0} \text{ et } \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin \frac{n\pi\rho}{r_0} \text{ dans l'intervalle } [-r_0, r_0] \quad (3.14a)$$

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos \frac{n\pi\zeta}{z_0} \text{ et } \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin \frac{n\pi\zeta}{z_0} \text{ dans l'intervalle } [-z_0, z_0]. \quad (3.14b)$$

La fonction $n(\rho, \zeta)$ est contrainte physiquement à être paire en ζ . On peut en outre supposer, ce qui est valable dans une large gamme de situations physiques, que cette fonction possède une dérivée par rapport à ρ nulle et continue à l'origine $\rho = 0$. On peut donc se contenter pour le développement des seules fonctions :

$$\varphi_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos \frac{n\pi\rho}{r_0}; \quad \psi_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos \frac{n\pi\zeta}{z_0}. \quad (3.15)$$

On obtient alors pour la valeur de c_{ijmn} :

$$c_{ijmn} = \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} y \cos iy \cos jx J_{m/2}^4\left(\frac{\lambda_1 y}{2\pi}\right) \times J_n^2\left(\frac{2p-1}{2}x\right) dy dx. \quad (3.16)$$

Dans le cas simple d'une distribution uniforme d'énergie, les intensités relatives des raies spectrales s'écrivent :

$$I_{mn} = I_0 \int_0^{r_0} \int_0^{z_0} \rho J_{m/2}^4\left(\frac{k_1 \rho}{2}\right) J_n^2(k_3 \zeta) d\zeta d\rho. \quad (3.17)$$

Cette expression prévoit un spectre de raies dont les intensités relatives (c_{00mn}) sont représentées sur la figure 3 pour le mode TE_{013} .

Les valeurs des intégrales

$$A_{im} = \int_0^{\pi} y \cos iy J_{m/2}^4\left(\frac{\lambda_1 y}{2\pi}\right) dy \quad (3.18a)$$

et

$$B_{jn} = \int_0^{\pi} \cos jx J_n^2\left(\frac{2p-1}{2}x\right) dx \quad (3.18b)$$

sont données dans les tableaux I et II pour les premières valeurs de i, j, m, n . Elles permettent de calculer les coefficients :

$$c_{ijmn} = A_{im} B_{jn}. \quad (3.19)$$

4. Correction Doppler du second ordre. — Cherchons maintenant à affiner quelque peu la théorie pour rendre compte des effets relativistes observables sur le spectre de la résonance atomique. Une théorie relativiste rigoureuse tiendrait compte du mouvement accéléré du système de référence lié aux ions effectuant des oscillations dans la trappe. Cependant, en raison de l'ordre de grandeur de v/c ($v/c \sim 10^{-5}$) on peut

TABLEAU I

Table des intégrales A_{im} et B_{jn} ⁽¹⁾ pour le mode TE_{011} et pour les premières valeurs de i, j, m, n .
 Les coefficients c_{ijmn} sont donnés par $c_{ijmn} = A_{im} B_{jn}$. Les valeurs sont notées en fractions de 1
 suivies du signe et de la valeur de l'exposant (puissance de 10).

$A(I, M)$

	$M = 0$	$M = 2$	$M = 4$	$M = 6$	$M = 8$	$M = 10$
$I = 0$.118229+01	.346444+00	.154959-01	.143850-03	.426074-06	.520296-09
$I = 1$.272239+00	-.253552+00	-.140268-01	-.136999-03	-.413856-06	-.510307-09
$I = 2$	-.392934+00	.954907-01	.105968-01	.119159-03	.380398-06	.482193-09
$I = 3$	-.166108+00	-.180580-01	-.707285-02	-.965207-04	-.333661-06	-.440805-09
$I = 4$	-.753508-01	.494579-02	.454519-02	.748680-04	.282730-06	.392317-09
$I = 5$	-.419619-01	-.322124-02	-.302412-02	-.572121-04	-.234605-06	-.342437-09
$I = 6$	-.314848-01	.204429-02	.213110-02	.439812-04	.192989-06	.295291-09
$I = 7$	-.199552-01	-.149326-02	-.157743-02	-.343723-04	-.158830-06	-.253166-09
$I = 8$	-.173640-01	.111226-02	.121292-02	.273897-04	.131518-06	.216854-09
$I = 9$	-.117517-01	-.874865-03	-.960989-03	-.222396-04	-.109880-06	-.186206-09
$I = 10$	-.110148-01	.700324-03	.779847-03	.183673-04	.927194-07	.160614-09

$B(J, N)$ Pour le mode TE_{011}

	$N = 0$	$N = 2$	$N = 4$	$N = 6$	$N = 8$	$N = 10$
$J = 0$.215547+01	.444692-01	.716254-04	.220319-07	.210719-11	.817807-16
$J = 1$.546425+00	-.341959-01	-.652249-04	-.209981-07	-.204642-11	-.801863-16
$J = 2$	-.737248-01	.166282-01	.502858-04	.183112-07	.188033-11	.757050-16
$J = 3$.309745-01	-.711632-02	-.348452-04	-.149096-07	-.164906-11	-.691267-16
$J = 4$	-.171060-01	.395045-02	.234908-04	.116572-07	.139795-11	.614477-16
$J = 5$.108574-01	-.251294-02	-.162996-04	-.899392-08	-.116137-11	-.535791-16
$J = 6$	-.750634-02	.173934-02	.118147-04	.697955-08	.957084-12	.461689-16
$J = 7$.550016-02	-.127535-02	-.890388-05	-.549873-08	-.789346-12	-.395672-16
$J = 8$	-.420380-02	.975179-03	.692945-05	.440968-08	.654999-12	.338885-16
$J = 9$.331760-02	-.769831-03	-.553645-05	-.359821-08	-.548295-12	-.291017-16
$J = 10$	-.268500-02	.623170-03	.452023-05	.298305-08	.463446-12	.251071-16

TABLEAU II

Table des intégrales B_{jn} pour les modes $TE_{013}(p = 2)$ et $TE_{015}(p = 3)$.
 Pour ces deux modes, les intégrales A_{im} ont les mêmes valeurs que dans le tableau I.

$B(J, N)$ Pour le mode TE_{013}

	$N = 0$	$N = 2$	$N = 4$	$N = 6$	$N = 8$	$N = 10$
$J = 0$.915009+00	.338241+00	.857824-01	.329922-02	.331724-04	.123827-06
$J = 1$.527960+00	-.118161+00	-.725591-01	-.308877-02	-.320095-04	-.121064-06
$J = 2$.435045+00	-.123156+00	.445429-01	.255962-02	.288758-04	.113352-06
$J = 3$.168934+00	.810995-01	-.212860-01	-.193254-02	-.246324-04	-.102189-06
$J = 4$	-.268614-01	-.134035-01	.959028-02	.138808-02	.202039-04	.894125-07
$J = 5$.129896-01	.730600-02	-.513224-02	-.991242-03	-.162276-04	-.766352-07
$J = 6$	-.794562-02	-.474285-02	.328870-02	.724244-03	.129667-04	.649220-07
$J = 7$.544384-02	.336069-02	-.231178-02	-.546419-03	-.104190-04	-.547704-07
$J = 8$	-.399270-02	-.251699-02	.172253-02	.424963-03	.846615-05	.462648-07
$J = 9$.306625-02	.196009-02	-.133673-02	-.339176-03	-.697056-05	-.392640-07
$J = 10$	-.243480-02	-.157171-02	.106922-02	.276633-03	.581562-05	.335417-07

$B(J, N)$ Pour le mode TE_{015}

	$N = 0$	$N = 2$	$N = 4$	$N = 6$	$N = 8$	$N = 10$
$J = 0$.608792+00	.267044+00	.161376+00	.955895-01	.137591-01	.590056-03
$J = 1$.385058+00	.166253-01	-.706250-01	-.816323-01	-.129725-01	-.571942-03
$J = 2$.306964+00	-.870480-01	-.646130-01	.501023-01	.109379-01	.522340-03
$J = 3$.243266+00	-.122380+00	.810754-01	-.207057-01	-.840069-02	-.453135-03
$J = 4$.242009+00	-.996995-03	-.260149-01	.418508-02	.605913-02	.378049-03
$J = 5$.100508+00	.683464-01	-.453856-02	.140027-02	-.426332-02	-.307789-03
$J = 6$	-.166218-01	-.120671-01	.609304-02	-.213550-02	.302997-02	.248015-03
$J = 7$.835816-02	.650757-02	-.335086-02	.175205-02	-.222028-02	-.200033-03
$J = 8$	-.529161-02	-.426761-02	.217534-02	-.135276-02	.168572-02	.162645-03
$J = 9$.373472-02	.307375-02	-.154695-02	.106301-02	-.132126-02	-.133789-03
$J = 10$	-.281011-02	-.234276-02	.116581-02	-.854806-03	.106318-02	.111449-03

⁽¹⁾ $A(i, m) \equiv A_{i,m}$ et $B(j, n) \equiv B_{j,n}$.

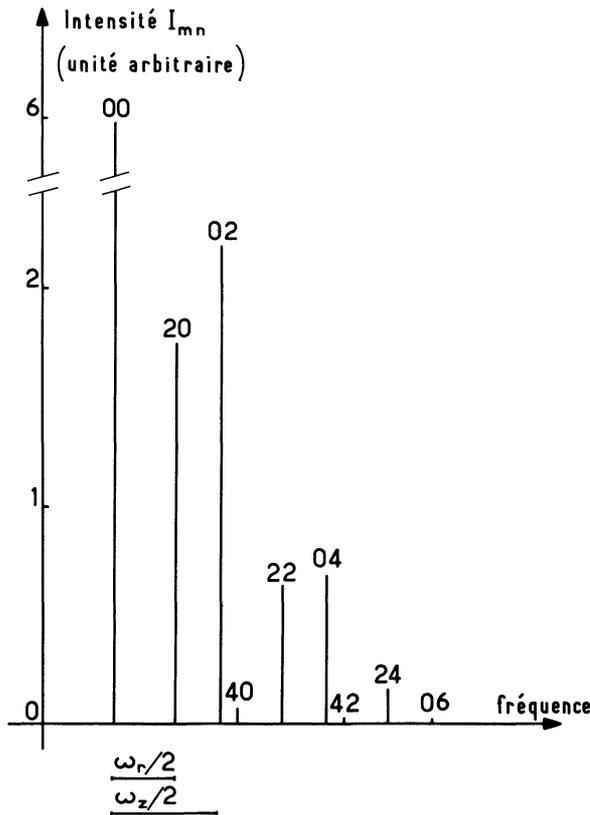


FIG. 3. — Intensités relatives pour le mode TE₀₁₃ du spectre de raies de la raie de résonance d'ions oscillant harmoniquement dans un champ électrique quadrupolaire. Les valeurs de ω_z et ω_r ont été choisies arbitrairement.

estimer qu'avec la transformation de Lorentz, le seul effet relativiste à envisager est la dilatation de l'échelle de temps qui affecte le profil de la résonance centrale. Supposons que, dans le référentiel du laboratoire, le champ micro-onde, auquel les ions sont soumis pour induire les transitions dipolaires magnétiques est celui du mode TE₀₁₁ d'une cavité cylindrique, envisagé au paragraphe 3. Nous avons donc, en coordonnées cylindriques r, z, θ :

$$\left. \begin{aligned} H_z &= (k_1/k) J_0(k_1 r) \cos(k_3 z) \cos \omega t \\ H_r &= - (k_3/k) J_1(k_1 r) \sin(k_3 z) \cos \omega t \\ E_\theta &= - \mu_0 c J_1(k_1 r) \cos(k_3 z) \sin \omega t \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

où c est la vitesse de la lumière et μ_0 la perméabilité magnétique du vide.

Dans le référentiel lié à un ion se déplaçant avec une vitesse v supposée uniforme relativement au référentiel du laboratoire, le champ électromagnétique prend, pour les deux cas possibles où la vitesse est parallèle ou perpendiculaire à l'axe des z , la forme suivante :

$$H_{z'} = (k_1/k) J_0(k_1 r') \cos(k_3 z') \cos \omega t' \quad v_r = 0, \quad v_z \neq 0 \quad (4.2)$$

et

$$H_{z'} = \left[(k_1/k) J_0(k_1 r') \cos \omega t' + \frac{v}{c} J_1(k_1 r') \sin \omega t' \right] \times \cos(k_3 z') \quad v_r \neq 0, \quad v_z = 0. \quad (4.3)$$

On peut constater que pour les deux composantes possibles du mouvement, la partie spatiale de H_z n'est affectée qu'au second ordre en v/c , tandis que la phase varie au premier ordre dans le cas transverse. Cependant lorsque l'on effectue le calcul complet de l'intégrale de corrélation entre les fonctions de Bessel J_0 et J_1 , il apparaît que les termes du premier ordre en v/c s'annulent, en raison des propriétés de symétrie de ces fonctions. En conséquence, le traitement non relativiste de l'amplitude et de la fréquence de la partie latérale du spectre est suffisamment précis pour estimer la distribution d'énergie des ions, de la façon décrite précédemment.

Cependant, la transformation dans le référentiel de l'ion produit une dilatation de l'échelle de temps, provoquant un déplacement significatif de la fréquence pour laquelle l'ion considéré contribue à la raie centrale de la résonance. Contrairement au cas non relativiste, où le mouvement de la particule affecte l'amplitude, mais non la fréquence de la raie centrale, il existe maintenant un déplacement de fréquence qui donne à la raie une largeur et un profil qui dépendent de la distribution d'énergie des ions.

Pour décrire cet effet plus quantitativement, rappelons que le temps propre T est relié au temps t par la relation suivante :

$$dT = \left\{ 1 - \sum_i (dx_i/dt)^2/c^2 \right\}^{1/2} dt. \quad (4.4)$$

En supposant que le mouvement ionique est décrit par l'éq. (2.6), c'est-à-dire en supposant que la vitesse peut être décrite de la façon suivante :

$$dx_i/dt = a_i \sum_{-\infty}^{+\infty} (n + \beta/2) c_n \sin \{ (n + \beta/2) \Omega t + \varphi \}. \quad (4.5)$$

On obtient dans le cas général :

$$(dx_i/dt)^2 = \frac{1}{2} a_i^2 \Omega^2 \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} (n + \beta/2) (m + \beta/2) c_n c_m \times [\cos(n-m) \Omega t - \cos \{ (n+m) + \beta \} \Omega t + 2 \varphi] . \quad (4.6)$$

Dans la région intéressante expérimentalement où $\beta \ll 1$, déjà considérée au paragraphe 3, le développement suivant est rapidement convergent :

$$(dx_i/dt)^2 = \frac{1}{2} a_i^2 \Omega^2 \{ c_0^2 \beta^2/4 + 2 c_1^2 (1 + \beta/2)^2 + \dots \} + \frac{1}{2} a_i^2 \Omega^2 \{ c_0^2 \beta^2/4 - 2 c_1^2 (1 - \beta^2/4) - \dots \} \cos(\beta \Omega t) + \dots \quad (4.7)$$

Utilisant maintenant des propriétés connues des coefficients de Mathieu c_m , en particulier, $\beta^2/4 \simeq 2 c_1^2$, $c_0 \simeq 1$, on a :

$$\begin{aligned}
 (dx_i/dt)^2 &= a_i^2 \Omega^2 \beta^2/4 + \\
 &+ \sum_{\substack{+\infty +\infty \\ -\infty -\infty \\ |n| > 1}} (n + \beta/2) (m + \beta/2) c_n c_m \\
 &\times \{ \cos (n - m) \Omega t - \cos [(n + m + \beta) \Omega t + 2 \varphi] \}
 \end{aligned}
 \tag{4.8}$$

dans lesquels les termes à la fréquence $\beta\Omega$, double de celle du mouvement séculaire sont, à la précision du calcul, absents.

Reportant l'éq. (4.8) dans l'éq. (4.4), on obtient, avec les notations du paragraphe 3 :

$$\begin{aligned}
 t &= \{ 1 + (\zeta^2 \Omega_z^2 + \rho^2 \Omega_r^2)/2 c^2 \} \times \\
 &\times T + 2(\zeta^2 \Omega_z^2 + \rho^2 \Omega_r^2) c_1 (\sin \omega t)/\Omega c^2 + \dots
 \end{aligned}
 \tag{4.9}$$

Cette transformation peut maintenant être utilisée pour obtenir $H_z(t)$ et, finalement, $K(\tau)$ en fonction du temps propre des ions, et donc le déplacement de la raie centrale en fonction de l'énergie des ions.

Soit Γ la largeur naturelle de la raie centrale. En utilisant les résultats déjà obtenus pour $I_{m,n}$, on aura :

$$I_{00} = \int_0^\infty \int_0^{r_0} \int_0^{z_0} n(\rho, \zeta) J_0^4\left(\frac{k_1 \rho}{2}\right) J_0^2(k_3 \zeta) \cos [\omega(1 + \{ \zeta^2 \Omega_z^2 + \rho^2 \Omega_r^2 \}/2 c^2) - \omega_a] \tau \exp(-\Gamma \tau) d\zeta d\rho d\tau .
 \tag{4.10}$$

L'intégration par rapport à τ conduit à :

$$I_{00} = \int_0^{r_0} \int_0^{z_0} n(\rho, \zeta) J_0^4\left(\frac{k_1 \rho}{2}\right) J_0^2(k_3 \zeta) \times \frac{\Gamma}{\{ \omega[1 + (\zeta^2 \Omega_z^2 + \rho^2 \Omega_r^2)/2 c^2] - \omega_a \}^2 + \Gamma^2} d\zeta d\rho .
 \tag{4.11}$$

En posant $n(\rho, \zeta) = \sum_{i,j=0}^\infty a_{ij} \varphi_i(\rho) \psi_j(\zeta)$, on obtient :

$$I_{00} = \sum_{i,j=0}^\infty a_{ij} \int_0^{r_0} \int_0^{z_0} \varphi_i(\rho) \psi_j(\zeta) J_0^4\left(\frac{k_1 \rho}{2}\right) J_0^2(k_3 \zeta) \frac{\Gamma}{\{ \omega[1 + (\zeta^2 \Omega_z^2 + \rho^2 \Omega_r^2)/2 c^2] - \omega_a \}^2 + \Gamma^2} d\zeta d\rho .
 \tag{4.12}$$

Remarquons que l'intégrale ne porte pas seulement sur la fonction Lorentzienne pondérée par la fonction de répartition, mais aussi sur les fonctions de Bessel reflétant la contribution à l'intensité spectrale d'un ion ayant une amplitude d'oscillation donnée.

En général, dans les conditions expérimentales qui nous intéressent, la largeur de raie Γ est du même ordre de grandeur que le déplacement $\Delta\omega_d$ dû à l'effet Doppler du second ordre. On ne peut donc pas approcher la fonction à intégrer par un développement en $(\Delta\omega_d/\Gamma)$ par exemple.

La forme théorique de la raie et son déplacement par effet Doppler du second ordre ne peuvent donc être connues que par un calcul complet de l'intégrale double, avec ω comme paramètre. L'expression de la fonction à intégrer ne permet pas la séparation en un produit d'intégrales simples comme dans le paragraphe 3.

Les applications ultérieures de la théorie ne pourront donc être poursuivies que par un calcul sur ordinateur utilisant les valeurs expérimentales des paramètres.

Bibliographie

[1] Voir par exemple RAMSEY, N. F., *Molecular Beams* (Oxford University Press, Oxford) 1956.
 [2] ARDITI, M., *J. Phys. Radium* **19** (1958) 873.
 [3] KLEPPNER, D., GOLDENBERG, H., RAMSEY, N. F., *Phys. Rev.* **126** (1962) 603.
 [4] Voir par exemple SINGWI, K. S., SJOLANDER, A., *Phys. Rev.* **120** (1960) 1093.
 [5] MAJOR, F. G. et DEHMELT, H. G., *Phys. Rev.* **170** (1968) 91.
 [6] JEFFERTS, K. B., *Phys. Rev. Lett.* **20** (1968) 39.
 [7] Voir par exemple DEHMELT, H. G., dans *Adv. At. Mol. Phys.* rédacteur BATES, D. R., **5** (Academic Press, Inc. New York) 1969, p. 109.
 [8] MAJOR, F. G., et WERTH, G., *Phys. Rev. Lett.* **30** (1973) 1155.
 [9] PIERCE, J. R., *Theory and Design of Electron Beams* (Van Nostrand Co. New York) 1954, p. 41.
 [10] BENILAN, M. N. et AUDOIN, C., *Int. J. Mass. Spectrom. Ion Phys.* **11** (1973) 421.
 [11] McLACHLAN, N. W., *Theory and Applications of Mathieu Functions* (Oxford University Press) 1947.
 [12] SINGWI, K. S. et SJOLANDER, A., *ibid.*
 [13] GRADSHTEYN, I. S. et RYZHIK, I. M., *Tables of Integrals, Series and Products* English Transl. (Academic Press, Inc. New York) 1965, p. 974 et p. 979.