



Écarts à l'équilibre thermodynamique dans un plasma d'hydrogène atomique

Nelly Peyraud

► To cite this version:

Nelly Peyraud. Écarts à l'équilibre thermodynamique dans un plasma d'hydrogène atomique. Journal de Physique, 1970, 31 (7), pp.565-580. 10.1051/jphys:01970003107056500 . jpa-00206940

HAL Id: jpa-00206940

<https://hal.science/jpa-00206940>

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉCARTS A L'ÉQUILIBRE THERMODYNAMIQUE DANS UN PLASMA D'HYDROGÈNE ATOMIQUE

Nelly PEYRAUD

(Reçu le 1^{er} juillet 1969, révisé le 16 mars 1970)

Résumé. — On applique la « théorie quasi-statique d'un plasma moyennement ionisé avec piégeage partiel du rayonnement », exposée dans un précédent article [1], à un plasma d'hydrogène atomique. On détermine analytiquement les écarts non maxwelliens de la « queue » de la fonction de distribution en fonction de l'opacité partielle du plasma pour la radiation de résonance ; puis, on étudie localement la répercussion de ces écarts sur les lois de Boltzmann (pour le rapport des populations des niveaux de résonance et fondamental) et de Saha dans un plasma limité par deux faces planes parallèles.

Abstract. — The « quasi-static theory of a partially ionized plasma with partial emprisonement of radiation », exposed in a precedent paper [1], is applied to an atomic hydrogen plasma. We give an analytic expression for non maxwellian deviations of the « tail » of the distribution function in terms of the partial opacity of the plasma for resonance radiation ; and, we study the local influence of those deviations on Boltzmann (for the ratio of populations of resonance and fundamental levels) and Saha's laws in a slab of plasma.

Introduction. — On considère un *plasma libre de toute action extérieure, partiellement ionisé et optiquement mince pour toutes les raies à l'exclusion de la première transition à partir du niveau fondamental* (raie de résonance de l'hydrogène et des alcalins). On suppose que *la majorité des électrons ont une énergie inférieure au seuil d'excitation de la raie de résonance*. Dans ces conditions, le plasma relaxe vers un *pseudo-équilibre* [1] décrit en première approximation par une distribution électronique f_e maxwellienne à une température T_e inférieure à celle des neutres T_0 , aussi longtemps que l'on néglige les variations extrêmement lentes de cette dernière. Cependant, le calcul de certaines grandeurs macroscopiques — et tout particulièrement celui du rapport des populations n_1/n_0 des niveaux de résonance et fondamental et du taux d'ionisation — nécessite une connaissance plus fine de la fonction de distribution [1]. On montre que la distribution électronique maxwellienne en dessous du premier seuil d'excitation (« corps » de la fonction) ne l'est pas du tout au-delà (« queue » de la fonction) [1].

Dans cet article, on détermine analytiquement la « queue » de la fonction de distribution en vue du calcul de n_1/n_0 et de la densité électronique ; comme il n'est pas possible de résoudre directement le problème global, on procède à des approximations « locales » et on se contente d'une représentation correcte de la « queue » de la fonction au voisinage du premier seuil, plus précisément pour des *énergies comprises entre le seuil et 2 fois le seuil* ; on rappelle [1] que ce domaine est tout à fait suffisant en raison du fort taux de décroissance de la fonction de distribution (dû à la faiblesse de l'énergie thermique vis-à-vis du seuil).

On termine cet article par une application du résultat obtenu au calcul numérique des écarts de n_1/n_0 à la loi de Boltzmann et des écarts du taux d'ionisation à la loi de Saha dans l'hydrogène atomique.

Cette détermination permet la connaissance des écarts de n_1/n_0 à la loi de Boltzmann et des écarts du taux d'ionisation à la loi de Saha en fonction de l'importance des fuites du rayonnement de résonance. Ces résultats sont couplés au problème du transfert du rayonnement, objet de la dernière partie de cet article consacrée au calcul des profils spatiaux de n_1/n_0 et de la densité électronique dans une « tranche » de plasma d'hydrogène atomique.

1. Equation vérifiée par la « queue » de la fonction de distribution. — 1.1. RAPPEL DES PRINCIPAUX RÉSULTATS. — On montre que la « queue » de la distribution est principalement déterminée par les collisions électron-électron, les collisions inélastiques d'excitation du niveau fondamental (les collisions inélastiques d'excitation du niveau de résonance sont négligeables), et les collisions superélastiques de désexcitation du niveau de résonance ; l'action de ces trois types d'interactions est traduite par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} & v_{ee}(w) w^3 \left(f_e + \frac{kT_e}{m_e w} \frac{df_e}{dw} \right) + \\ & \sum_{s=1}^i \int_w^{\sqrt{w^2 + w_s^2}} n_0 w' Q_{0 \rightarrow s}(w') f_e(w') w'^2 dw' \\ & - n_1 \frac{g_0}{g_1} \int_w^{\sqrt{w^2 + w_1^2}} w' Q_{0 \rightarrow 1}(w') f_e(\sqrt{w'^2 - w_1^2}) w'^2 dw' = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Le premier terme représente l'action des collisions électron-électron ; il est proportionnel à la fréquence de collisions électron-électron ;

$$v_{ee}(w) = v_1^- \left(\frac{w_{th}}{w} \right)^3 = 4 \pi \left(\frac{e^2}{m_e} \right)^2 \frac{n_e \text{Log } A_e}{w^3}. \quad (2)$$

w_{th} désigne la vitesse thermique ($w_{th} = \sqrt{\frac{3 k T_e}{m_e}}$) et A_e le rapport de la longueur de Debye et du paramètre d'impact moyen. On désigne par $\frac{1}{2} m_e w_s^2$ l'énergie d'excitation du niveau s à partir du niveau fondamental ; $Q_{0 \rightarrow s}$ est la section efficace totale correspondante.

Le terme proportionnel à la population n_0 du niveau fondamental représente l'action des collisions inélastiques ; le terme proportionnel à la population n_1 du niveau de résonance représente l'action des collisions superélastiques.

On désigne respectivement par f_e^- et f_e^+ le « corps » et la « queue » de la fonction de distribution. f_e^+ est la restriction de la solution de l'équation (1) aux énergies supérieures à $\frac{1}{2} m_e w_1^2$ et dépend de f_e^- par l'intermédiaire du terme de collisions superélastiques.

Le « corps » de la fonction contient pratiquement tous les électrons et peut s'écrire :

$$f_e^-(w) = n_e \left(\frac{m_e}{2 \pi k T_e} \right)^{3/2} \exp \left[- \frac{m_e w^2}{2 k T_e} \right] \quad (3)$$

f_e^- et f_e^+ sont reliées par l'équation de continuité :

$$f_e^-(w_1) = f_e^+(w_1). \quad (4)$$

La « queue » de la fonction est entièrement déterminée par les équations (1), (3) et (4).

1.2 EQUATION RÉDUITE. — On obtient une équation sans dimension en posant :

$$u = \frac{1}{2} \frac{m_e w^2}{k T_e} \quad (5)$$

$$u_s = \frac{1}{2} \frac{m_e w_s^2}{k T_e} \quad (6)$$

$$g = 4 \pi \sqrt{2} \frac{1}{n_e} \left(\frac{k T_e}{m_e} \right)^{3/2} \frac{e^u}{u} f_e \quad (7)$$

$$b_s(u) = \frac{1}{2} \frac{n_0 w Q_{0 \rightarrow s}(w)}{v_{ee}(w)} \text{ avec } Q_{0 \rightarrow s} = 0 \text{ pour } u < u_s \quad (8)$$

$$\rho = \frac{n_1}{n_0} \frac{g_0}{g_1} e^{u_1}. \quad (9)$$

Compte tenu des variations de v_{ee} comme $u^{-3/2}$ (formule (2)), l'équation (1) prend la forme :

$$u \frac{dg}{du} + g + \sum_{s=1}^i \int_u^{u+u_s} b_s(u') e^{u-u'} g(u') du' - \rho \int_u^{u+u_1} \frac{b_1(u')(u' - u_1)}{u'} e^{u-u'} g(u' - u_1) du' = 0. \quad (10)$$

En l'absence de collisions inélastiques et superélastiques ($b_s = 0$), on retrouve la solution classique de Maxwell dont la forme réduite est $g_{Maxw.} = \text{cte}/u$.

On désigne respectivement par $g^- = g_{01}$ et $g^+ = g_{1\infty}$ le « corps » et la « queue » de la fonction de distribution réduite (¹).

$g_{1\infty}$ représente la restriction de la solution de l'équation (10) à l'intervalle $(u_1, +\infty)$, tandis que g_{01} est donnée par la formule suivante :

$$g_{01}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{u} = g_{Maxw.}(u). \quad (11)$$

g_{01} et $g_{1\infty}$ sont reliées par la condition de continuité (formule (4)) :

$$g_{01}(u_1) = g_{1\infty}(u_1). \quad (12)$$

L'équation (10) n'est pas « locale » dans l'espace des énergies ; en général, on ne sait pas résoudre le problème global qu'elle représente et on devra procéder à des approximations (paragraphe 2).

2. Approximation de l'équation réduite au voisinage du seuil. — D'un point de vue pratique (calcul des grandeurs macroscopiques), il importe de connaître $g_{1\infty}$ au voisinage du seuil u_1 , pour des énergies comprises entre u_1 et environ $2 u_1$. On procède successivement à trois approximations dont on analyse les conséquences sur le mode de résolution du problème.

2.1 APPROXIMATION DU TERME DE COLLISIONS SUPERÉLASTIQUES. — a) *Forme approchée de l'équation réduite pour $u_1 < u < 2 u_1$.* — Pour $u_1 < u < 2 u_1$, la dernière intégrale de (10) s'écrit (compte tenu de (11)) :

$$\begin{aligned} \int_u^{u+u_1} \frac{b_1(u')}{u'} e^{-u'}(u' - u_1) g(u' - u_1) du' &= \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_u^{2u_1} \frac{b_1(u')}{u'} e^{-u'} du' + \\ &+ \int_{2u_1}^{u+u_1} \frac{b_1(u')}{u'} e^{-u'}(u' - u_1) g_{1\infty}(u' - u_1) du'. \end{aligned} \quad (13)$$

La décomposition (13) du terme de collisions superélastiques fait apparaître deux termes de nature différente : d'une part le premier terme qui est une fonction connue de u et entre de manière inhomogène dans l'équation (10) ; d'autre part la seconde intégrale, terme homogène en $g_{1\infty}$, mais non « local » dans l'espace des énergies puisqu'il fait intervenir les valeurs de la fonction entre u_1 et u .

On montre [2] que l'hypothèse $k T_e \ll \text{seuil}$ permet avec une très bonne approximation de faire dispa-

(¹) Cette notation rappelle que g_{01} est la restriction de g à l'intervalle $(0, u_1)$ et $g_{1\infty}$ la restriction de g à l'intervalle $(u_1, +\infty)$.

raître ce double caractère du terme de collisions super-élastiques qui s'écrit alors :

$$\int_u^{u+u_1} \frac{b_1(u')}{u'} e^{-u'} (u' - u_1) g(u' - u_1) du' \simeq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_u^{u+u_1} \frac{b_1(u')}{u'} e^{-u'} du'. \quad (14)$$

$g_{1\infty}$ vérifie alors l'équation approchée suivante :

$$u \frac{dg_{1\infty}}{du} + g_{1\infty} + \sum_{s=1}^i \int_u^{u+u_s} b_s(u') e^{-u'} g_{1\infty}(u') du' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \rho \int_u^{u+u_1} \frac{b_1(u')}{u'} e^{-u'} du'. \quad (15)$$

Dans l'équation (15), le terme de collisions superélastiques apparaît comme un simple second membre, fonction connue de u . En fait l'approximation (14) traduit le fait suivant : lorsque kT_e est faible devant le seuil d'excitation, le repeuplement de la « queue » de la fonction de distribution est en très grande partie assuré par les électrons maxwelliens du « corps » de la fonction.

b) *Conséquence : Application du principe de décomposition de l'espace des énergies.* — Mise sous la forme (15), l'équation de détermination de la « queue » de la fonction de distribution $g_{1\infty}$ comprend des termes « locaux » en $g_{1\infty}(u)$ et une série de termes « non locaux » agissant sur $g_{1\infty}$ entre u et $u + u_s$ (terme en $\int_u^{u+u_s}$). A l'exception près du second membre en ρ , l'équation (15) est donc du même type que l'équation intégral-différentielle rencontrée lors de l'étude du gaz optiquement mince pour toutes les transitions [3] ($\rho = 0$) ; on peut alors appliquer la méthode de résolution par « tronçons » d'énergie.

On rappelle que l'on décompose l'espace des énergies en intervalles égaux à la distance de deux niveaux consécutifs soit, $(0, u_1), \dots, (u_{r-1}, u_r), \dots, (u_{i-1}, u_i)$ puis en l'intervalle infini $(u_i, +\infty)$; on note $g_{r-1,r}$ la restriction de g à l'intervalle (u_{r-1}, u_r) ; on montre [3] que $g_{1\infty}(u)$ est la réunion des i restrictions : $g_{12}, \dots, g_{r-1,r}, \dots, g_{i\infty}$, déterminées par les i équations suivantes :

— *Pour les énergies supérieures au seuil d'ionisation (13,6 eV pour l'hydrogène) $u_i < u$: Détermination de $g_{i\infty}$ [3] : 1 équation*

$$u \frac{dg_{i\infty}}{du} + g_{i\infty} + \sum_{s=1}^i \int_u^{u+u_s} b_s(u') e^{-u'} g_{i\infty}(u') du' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \rho \int_u^{u+u_1} \frac{b_1(u')}{u'} e^{-u'} du'. \quad (16)$$

— *Pour les énergies comprises entre 2 seuils d'excitation $u_1 < u_{r-1} < u < u_r < u_i$: Détermination de $g_{r-1,r}$ [3] : $i - 1$ équations ⁽²⁾*

(2) i est infini dénombrable.

$$\begin{aligned} u \frac{dg_{r-1,r}}{du} + g_{r-1,r} + \sum_{s=1}^{r-1} \int_u^{u_r} b_s(u') e^{-u'} g_{r-1,r}(u') du' = \\ = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \rho \int_u^{u+u_1} \frac{b_1(u')}{u'} e^{-u'} du' - \\ - \sum_{s=1}^{r-1} \int_{u_r}^{u+u_s} b_s(u') e^{-u'} g_{r\infty}(u') du' \\ - \sum_{s=r}^i \int_{u_s}^{u+u_s} b_s(u') e^{-u'} g_{r\infty}(u') du'. \end{aligned} \quad (17)$$

Les équations (16) et (17) montrent que l'on peut résoudre l'équation (15) de proche en proche en progressant des énergies les plus élevées vers les plus basses [3].

Les solutions respectives des équations (16) et (17) et par suite les restrictions $g_{i\infty}$ et $g_{r-1,r}$ dépendent chacune d'une constante d'intégration ; la « queue » $g_{1\infty}$ dépend donc de i constantes d'intégration ⁽²⁾ ; en fait $i - 1$ de ces constantes sont déterminées par $i - 1$ équations de continuité en chaque énergie u_r [3] :

$$g_{r-1,r}(u_r) = g_{r,r+1}(u_r) \quad 2 \leq r \leq i. \quad (18)$$

$g_{1\infty}$ dépend donc, comme le laissait prévoir l'équation (15), d'une seule constante d'intégration déterminée par la relation (12) de continuité avec le corps g^- .

Nota. — Le processus de détermination de proche en proche n'est valable que si la distance entre deux niveaux atomiques consécutifs diminue lorsque l'on se rapproche du niveau d'ionisation [3] ; c'est le cas dans l'hydrogène atomique considéré aux paragraphes 4 et 5.

— Les équations (16) et (17) sous-entendent $u_i < 2u_1$ (cas de l'hydrogène). Ce n'est pas le cas des alcalins ($u_i > 2u_1$) mais la méthode de résolution par « tronçons » demeure inchangée : u_r désignant le premier potentiel inférieur à $2u_1$, il suffit de déterminer $g_{r\infty}$ (équation (16) dans laquelle on a fait $i = r$) puis $g_{r-1,r}, \dots, g_{12}$ (équation (17)).

2.2 APPROXIMATIONS PAR DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES « LOCALES ». — a) *Approximation des termes intégrés.* — Dans les calculs qui suivent, on appro-

chera les intégrales du type $\int_u^{u+u_s}$ par $\int_u^{+\infty}$ (équation (16)), $\int_{u_r}^{u+u_s}$ par $\int_{u_r}^{+\infty}$ et $\int_{u_s}^{u+u_s}$ par $\int_{u_s}^{+\infty}$ (équation (17)). En raison des collisions inélastiques, la « queue » de la fonction de distribution décroît plus rapidement que la distribution maxwellienne (Fig. 5) et les approximations ci-dessus seront « a fortiori » vérifiées si elles le sont pour une distribution maxwellienne ; il suffit donc que les inégalités suivantes soient vérifiées :

$$e^{-u_s} < e^{-u_1} \ll 1 \quad (19)$$

$$e^{u_r - (u+u_s)} < e^{u_i - 2u_1} \ll 1 \quad (20)$$

$$e^{-u} < e^{-u_{r-1}} < e^{-u_1} \ll 1. \quad (21)$$

Les inégalités (19), (20) et (21) ne sont autres que la traduction de l'hypothèse $kT_e \ll \text{seuils}$.

Les équations (16) et (17) prennent les formes approchées suivantes :

$$u \frac{dg_{i\infty}}{du} + g_{i\infty} + \sum_{s=1}^i \int_u^{+\infty} b_s(u') e^{-u'} g_{i\infty}(u') du' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \rho \int_u^{+\infty} \frac{b_1(u')}{u'} e^{-u'} du' \quad (22)$$

$$u \frac{dg_{r-1,r}}{du} + g_{r-1,r} + \sum_{s=1}^{r-1} \int_u^{u_r} b_s(u') e^{-u'} g_{r-1,r}(u') du' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \rho \int_u^{+\infty} \frac{b_1(u')}{u'} e^{-u'} du' - e^u M_{r\infty} \quad (23)$$

avec :

$$M_{r\infty} = \sum_{s=1}^{r-1} \int_{u_r}^{+\infty} b_s(u') e^{-u'} g_{r\infty}(u') du' + \sum_{s=r}^i \int_{u_s}^{+\infty} b_s(u') e^{-u'} g_{r\infty}(u') du'. \quad (24)$$

b) *Conséquence : Réduction du problème à la résolution d'équations différentielles « locales ».* — On multiplie les équations (22) et (23) par e^{-u} . L'équation (22) est équivalente à l'équation dérivée (25) à condition de la compléter par la condition (26) :

$$u' \frac{d^2 g_{i\infty}}{du'^2} + (2 - u') \frac{dg_{i\infty}}{du'} - \left[1 + \sum_{s=1}^i b_s(u') \right] g_{i\infty} = - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \rho \frac{b_1(u')}{u'} \quad (25)$$

$$\left[e^{-u} \left(u \frac{dg_{i\infty}}{du} + g_{i\infty} \right) \right]_{u=+\infty} = 0. \quad (26)$$

De même, l'équation (23) est équivalente à l'équation (27) complétée par la condition (28).

$$u' \frac{d^2 g_{r-1,r}}{du'^2} + (2 - u') \frac{dg_{r-1,r}}{du'} - \left[1 + \sum_{s=1}^{r-1} b_s(u') \right] g_{r-1,r} = - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \rho \frac{b_1(u')}{u'} \quad (27)$$

$$\left[e^{-u} \left(u \frac{d}{du} g_{r-1,r} + g_{r-1,r} \right) \right]_{u=u_r} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \rho \int_{u_r}^{+\infty} \frac{b_1(u')}{u'} e^{-u'} du' - M_{r\infty}. \quad (28)$$

On est ramené à la résolution d'équations différentielles « locales » linéaires du second ordre ((25) et (27)) ; il s'agit de résoudre ces équations pour u quelconque ; il est évident que chacune des solutions des équations (25) et (27) n'a de signification physique que dans les intervalles respectifs $(u_i, +\infty)$ et (u_{r-1}, u_r) .

2.3 APPROXIMATIONS ANALYTIQUES DES SECTIONS EFFICACES D'EXCITATION. — On rappelle que la solution formée par la réunion de tous les tronçons

$g_{12} ; \dots ; g_{r-1,r} ; \dots ; g_{i\infty}$ représente correctement le comportement de g tant que l'énergie u ne dépasse pas une certaine valeur inférieure à $2u_1$ [2]. Il serait donc intéressant de connaître un développement analytique correct des coefficients $b_s(u)$ pour $u < 2u_1$.

D'après la formule (8), $b_s(u)$ varie comme $u^2 Q_{0 \rightarrow s}(u)$; si on désigne par E l'énergie exprimée en eV et $Q_{0 \rightarrow s}$ la section efficace exprimée en cm^2 , on a :

$$b_s = 7,64 \times 10^{12} \frac{n_0}{n_e \text{ Log } A_e} E^2 Q_{0 \rightarrow s}(E). \quad (29)$$

Les figures 1 et 2 représentent les variations de $E^2 Q_{0 \rightarrow s}(E)$, pour les principales transitions dans les cas de l'hydrogène atomique [4] [5] et des alcalins [6].

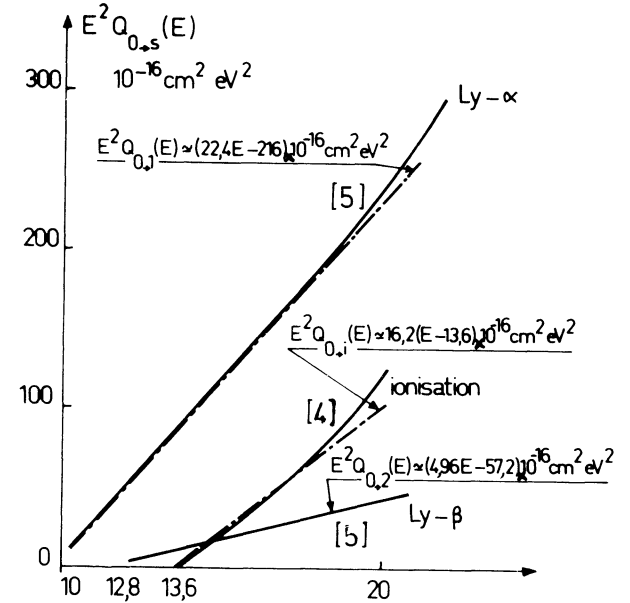


FIG. 1. — Variations de $E^2 Q_{0 \rightarrow 1}$, $E^2 Q_{0 \rightarrow 2}$ et $E^2 Q_{0 \rightarrow i}$. Cas de l'hydrogène atomique. — Variations réelles. - - - - - Approximations linéaires.

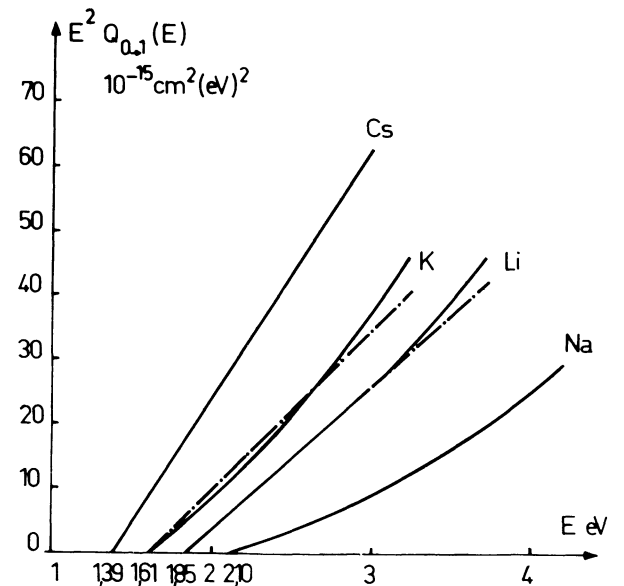


FIG. 2. — Variations de $E^2 Q_{0 \rightarrow 1}$. Cas des alcalins. — Variations réelles. - - - - - Approximations linéaires.

On peut admettre que les coefficients $E^2 Q_{0 \rightarrow s}$ représentés par les figures 1 et 2 ont des variations pratiquement linéaires dans le domaine d'énergie (E_1 , $2 E_1$) (à l'exclusion près du cas du sodium). On obtient donc une représentation correcte de la fonction g pour $u < 2 u_1$ en remplaçant les coefficients b_s par des fonctions linéaires ⁽³⁾ dans les équations (25) et (27).

$$b_s(u) = \alpha_s u - \alpha'_s \quad \text{pour } u_s < u < 2 u_1. \quad (30)$$

On pose :

$$\sigma_i = \sum_{s=1}^i \alpha_s \quad (31)$$

$$\sigma'_i = \sum_{s=1}^i \alpha'_s \quad (32)$$

$$\sigma_{r-1} = \sum_{s=1}^{r-1} \alpha_s \quad (33)$$

$$\sigma'_{r-1} = \sum_{s=1}^{r-1} \alpha'_s. \quad (34)$$

Les équations (25) et (27) s'écrivent respectivement :

$$u \frac{d^2 g_{i\infty}}{du^2} + (2 - u) \frac{dg_{i\infty}}{du} - (\sigma_i u + 1 - \sigma'_i) g_{i\infty} = - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \rho \frac{\alpha_1 u - \alpha'_1}{u} \quad (35)$$

$$u \frac{d^2 g_{r-1,r}}{du^2} + (2 - u) \frac{dg_{r-1,r}}{du} - (\sigma_{r-1} u + 1 - \sigma'_{r-1}) g_{r-1,r} = - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \rho \frac{\alpha_1 u - \alpha'_1}{u}. \quad (36)$$

Bien que la forme (30) ne soit valable que dans le domaine des énergies inférieures à $2 u_1$, on obtient une très bonne approximation de la condition (28) en remplaçant b_s par une fonction linéaire dans les intégrales $\int_{u_s}^{+\infty}$ (en raison de l'inégalité $kT_e \ll \frac{1}{2} m_e w_1^2$).

3. Méthode de détermination de $g_{r-1,r}$ et $g_{i\infty}$. — On cherchera la solution de l'équation (35) (ou (36)) pour u appartenant à l'intervalle $(0, +\infty)$; on note g sans indice cette solution; seule la restriction de g à l'intervalle $(u_i, +\infty)$ (ou (u_{r-1}, u_r)) a une signification physique et représente $g_{i\infty}$ (ou $g_{r-1,r}$). Dans chaque intervalle, on est ramené à la résolution d'une équation du type :

⁽³⁾ En général, $\alpha'_s = \alpha_s u_s$ sauf pour les coefficients b_1 et b_2 de l'hydrogène (raies Ly- α et Ly- β) qui ont une valeur finie au seuil (Fig. 1).

$$u \frac{d^2 g}{du^2} + (2 - u) \frac{dg}{du} - (\sigma u + 1 - \sigma') g = - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \rho \frac{\alpha_1 u - \alpha'_1}{u}. \quad (37)$$

L'équation (37) est linéaire, du second ordre, non homogène.

On peut obtenir la solution générale de l'équation (37) en faisant la somme de la solution générale de l'équation sans second membre et d'une solution particulière de l'équation complète.

3.1 RECHERCHE DE LA SOLUTION GÉNÉRALE DE L'ÉQUATION HOMOGÈNE. — On veut déterminer la solution générale de l'équation homogène :

$$u \frac{d^2 g}{du^2} + (2 - u) \frac{dg}{du} + (\sigma' - 1 - \sigma u) g = 0. \quad (38)$$

On ne détaille pas la résolution de l'équation (38); la méthode est classique et a été exposée dans un précédent article [3]; on montre que la solution générale de l'équation homogène (38) est de la forme :

$$g(u) = K\Phi(u) + C\psi(u) \quad (39)$$

K et C sont deux constantes d'intégration; Φ et ψ sont deux solutions linéairement indépendantes définies par :

$$\Phi(u) = e^{-pu} M[a, 2, (2p + 1)u] \quad (40)$$

$$\psi(u) = e^{-pu} U[a, 2, (2p + 1)u] \quad (41)$$

avec :

$$p = \frac{\sqrt{1 + 4\sigma} - 1}{2} > 0 \quad (42)$$

$$a = 1 - \frac{\sigma'}{2p + 1} = 1 - \frac{\sigma'}{\sqrt{1 + 4\sigma}}. \quad (43)$$

Le coefficient a est en général négatif dans les plasmas considérés ici et non entier.

M et U désignent deux fonctions hypergéométriques confluentes linéairement indépendantes définies dans l'appendice par les formules (75) et (78).

3.2 RECHERCHE D'UNE SOLUTION PARTICULIÈRE DE L'ÉQUATION COMPLÈTE. — On désire une solution particulière de l'équation :

$$u \frac{d^2 g}{du^2} + (2 - u) \frac{dg}{du} + (\sigma' - 1 - \sigma u) g = - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \rho \frac{\alpha_1 u - \alpha'_1}{u}. \quad (44)$$

On emploie la « méthode de la variation des paramètres » de Lagrange. W désignant le Wronskien

$\Phi \frac{d\psi}{du} - \psi \frac{d\Phi}{du}$ des fonctions Φ et ψ linéairement indépendantes, on obtient :

$$g(u) = k(u) \Phi(u) + c(u) \psi(u) \quad (45)$$

avec :

$$k(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \rho \int^u \frac{\alpha_1 u' - \alpha'_1}{u'^2} \frac{\psi(u')}{W(u')} du' \quad (46)$$

$$c(u) = - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \rho \int^u \frac{\alpha_1 u' - \alpha'_1}{u'^2} \frac{\Phi(u')}{W(u')} du'. \quad (47)$$

On peut simplifier les expressions (46) et (47) en tenant compte de la propriété du Wronskien W des fonctions Φ et ψ ; en effet comme Φ et ψ sont solutions de l'équation (38), leur Wronskien est solution de :

$$u \frac{dW}{du} + (2 - u) W = 0 \quad (48)$$

d'où :

$$W = \text{cte} \frac{e^u}{u^2}. \quad (49)$$

La constante du Wronskien est déterminée par la valeur du comportement asymptotique de W lorsque u tend vers l'infini (formules (80) et (81) appendice) ; on trouve :

$$W(u) = - \frac{1}{2p+1} \frac{1}{\Gamma(a)} \frac{e^u}{u^2}. \quad (50)$$

3.3 SOLUTION GÉNÉRALE DE L'ÉQUATION COMPLÈTE. CALCUL DE $g_{i\infty}$ ET $g_{r-1,r}$. — On affectera respectivement de l'indice i ou $r-1$ toutes les quantités (Φ , ψ , K , C , σ , σ' , a , p) relatives aux fonctions $g_{i\infty}$ ou $g_{r-1,r}$.

Les expressions (46) et (47) contiennent implicitement chacune une constante d'intégration arbitraire. D'un point de vue pratique, on ne déterminera pas les variations des fonctions Φ_i et ψ_i ou Φ_{r-1} et ψ_{r-1} en dehors des intervalles respectifs $(u_i, +\infty)$ ou (u_{r-1}, u_r) ; on peut donc expliciter chacune des constantes d'intégration contenues dans (46) et (47) de façon à ne faire intervenir que les restrictions de Φ_i et ψ_i sur $(u_i, +\infty)$ ou Φ_{r-1} et ψ_{r-1} sur (u_{r-1}, u_r) .

La restriction $g_{i\infty}$ de g à l'intervalle $(u_i, +\infty)$ est de la forme :

$$g_{i\infty}(u) = \left[K_i - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \rho(2p_i + 1) \Gamma(a_i) \int_{u_i}^u (\alpha_1 u' - \alpha'_1) \times \right. \\ \left. \times e^{-u'} \psi_i(u') du' \right] \Phi_i(u) + \\ + \left[C_i + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \rho(2p_i + 1) \Gamma(a_i) \int_{u_i}^u (\alpha_1 u' - \alpha'_1) \times \right.$$

$$\left. \times e^{-u'} \Phi_i(u') du' \right] \psi_i(u). \quad (51)$$

De même, la restriction $g_{r-1,r}$ de g à l'intervalle (u_{r-1}, u_r) est de la forme :

$$g_{r-1,r}(u) = \\ = \left[K_{r-1} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \rho(2p_{r-1} + 1) \Gamma(a_{r-1}) \times \right. \\ \left. \times \int_{u_{r-1}}^u (\alpha_1 u' - \alpha'_1) e^{-u'} \psi_{r-1}(u') du' \right] \Phi_{r-1}(u) + \\ + \left[C_{r-1} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \rho(2p_{r-1} + 1) \Gamma(a_{r-1}) \times \right. \\ \left. \times \int_{u_{r-1}}^u (\alpha_1 u' - \alpha'_1) e^{-u'} \Phi_{r-1}(u') du' \right] \psi_{r-1}(u). \quad (52)$$

Nota. — Les formules (80) et (81) de l'appendice permettent d'obtenir le comportement asymptotique de $g_{i\infty}$ lorsque u tend vers $+\infty$; on arrive à réduire la condition (26) à la condition suivante :

$$K_i - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \rho(2p_i + 1) \Gamma(a_i) \times \\ \times \int_{u_i}^{+\infty} (\alpha_1 u' - \alpha'_1) e^{-u'} \psi_i(u') du' = 0. \quad (53)$$

Les formules (51) et (52) déterminent entièrement la « queue » de la fonction de distribution à l'aide des fonctions hypergéométriques confluentes M et U ; on a donc ramené le problème à un calcul numérique d'intégrales définies.

4. Application : influence des fuites de la radiation de résonance sur les écarts à l'E. T. L. dans l'hydrogène atomique. — On a montré dans un précédent article [1] que les écarts non maxwelliens de la « queue » f_e^+ — bien qu'agissant sur un nombre très faible d'électrons — sont d'une importance primordiale lorsqu'il s'agit de déterminer les écarts de n_1/n_0 et n_e aux lois respectives de Boltzmann et de Saha.

On rappelle les formules qui permettent d'obtenir les grandeurs T_e (équation d'énergie), n_1/n_0 et n_e (équations de bilan des niveaux) lorsque l'on connaît la fonction de distribution (*) :

$$\frac{T_0}{T_e} - 1 = \frac{(1-\mu) \frac{1}{2} m_e w_1^2 \int_{w_1}^{+\infty} n_0 w Q_{0 \rightarrow 1}(w) f_e^+(w) 4 \pi w^2 dw + \sum_{s=2}^i \frac{1}{2} m_e w_s^2 \int_{w_s}^{+\infty} n_0 w Q_{0 \rightarrow s}(w) f_e^+(w) 4 \pi w^2 dw + \\ + \sum_{s=2}^i \frac{1}{2} m_e w_s^{*2} \int_{w_s^*}^{+\infty} n_1 w Q_{1 \rightarrow s}(w) f_e^-(w) 4 \pi w^2 dw}{2 \frac{m_e}{m_0} \int_0^{+\infty} \left(v_{e0}(w) + \sqrt{\frac{6}{\pi}} v_1 \right) \frac{1}{2} m_e w^2 f_e^-(w) 4 \pi w^2 dw} \quad (54)$$

(*) On rappelle le domaine d'applicabilité de ces formules dans l'hydrogène atomique [1] :

$$5 \times 10^{-3} \lesssim \frac{n_e \text{Log } A_e}{n_0} \lesssim 10^{-1}.$$

avec :

$\frac{1}{2} m_e w_s^{*2}$: énergie d'excitation du niveau de résonance vers le niveau s .
 $Q_{1 \rightarrow s}$: section efficace totale correspondante.
 v_{e0} : fréquence de transfert de la quantité de mouvement au cours de collisions élastiques électron-neutre.

$\bar{v}_1$: fréquence de collisions électron-ion (formule(2)).

μ : « coefficient d'emprisonnement » de la radiation de résonance, compris entre 0 (plasma totalement mince) et 1 (plasma totalement épais) [1].

$$\frac{n_1}{n_0} \simeq \mu \frac{g_1}{g_0} \exp \left[-\frac{m_e w_1^2}{2 k T_e} \right] \frac{\int_{w_1}^{+\infty} w Q_{0 \rightarrow 1}(w) f_e^+(w) 4 \pi w^2 dw}{\int_{w_1}^{+\infty} w Q_{0 \rightarrow 1}(w) f_e^-(w) 4 \pi w^2 dw} < \frac{g_1}{g_0} \exp \left[-\frac{m_e w_1^2}{2 k T_e} \right] \quad (55)$$

$$\begin{aligned} R_i(n_e, T_e) n_e^2 &= \int_{w_i}^{+\infty} n_0 w Q_{0 \rightarrow i}(w) f_e(w) 4 \pi w^2 dw + \int_{w_i^*}^{+\infty} n_1 w Q_{1 \rightarrow i}(w) f_e(w) 4 \pi w^2 dw \\ &\simeq \int_{w_i}^{+\infty} n_0 w Q_{0 \rightarrow i}(w) f_e^+(w) 4 \pi w^2 dw + \int_{w_i^*}^{+\infty} n_1 w Q_{1 \rightarrow i}(w) f_e^-(w) 4 \pi w^2 dw \\ &\simeq \int_{w_i}^{\infty} n_1 w Q_{1 \rightarrow i}(w) f_e^-(w) 4 \pi w^2 dw. \end{aligned} \quad (56)$$

R_i : coefficient total de recombinaison radiativo-collisionnelle sur les niveaux 0 et 1.

Nota. — La dernière approximation de (56) est justifiée par le fait que dans l'hydrogène, $Q_{0 \rightarrow i} \ll Q_{1 \rightarrow i}$ [4] ; elle exprime que l'ionisation du niveau de résonance constitue une source d'électrons bien supérieure à celle du niveau fondamental. On peut montrer numériquement que cette situation se produit (on majore f_e^+ par le prolongement de f_e^- dans le terme d'ionisation $0 \rightarrow i$) à condition que :

$$\rho = \frac{n_1/n_0}{(n_1/n_0)_{\text{Boltz}}} \gg 6 \times 10^{-3}. \quad (57)$$

Du point de vue de la technique du calcul, l'inégalité (57) permet de découpler l'équation de conservation de n_e de l'équation de Boltzmann.

4.1 DONNÉES NUMÉRIQUES. — On appliquera la théorie au modèle atomique simplifié à quatre niveaux (Fig. 3).

- niveau fondamental $1^2 S_{1/2}$
- niveau de résonance $2^2 P_{1/2, 3/2}$
- niveau $3^2 P_{1/2, 3/2}$
- niveau d'ionisation

a) Sections efficaces d'excitation du niveau fondamental : série de Lyman (voir Fig. 1).

b) Sections efficaces d'excitation du niveau de résonance : série de Balmer (Fig. 4).

c) Fréquence de collisions électron-neutre.

D'après Temkin et Lamkin (in [8] p. 315), la section efficace Q_{e0} de transfert de la quantité de mouvement vérifie :

$$Q_{e0} \sqrt{E} \simeq 2,2 \times 10^{-15} \text{ cm}^2 (\text{eV})^{1/2}. \quad (58)$$

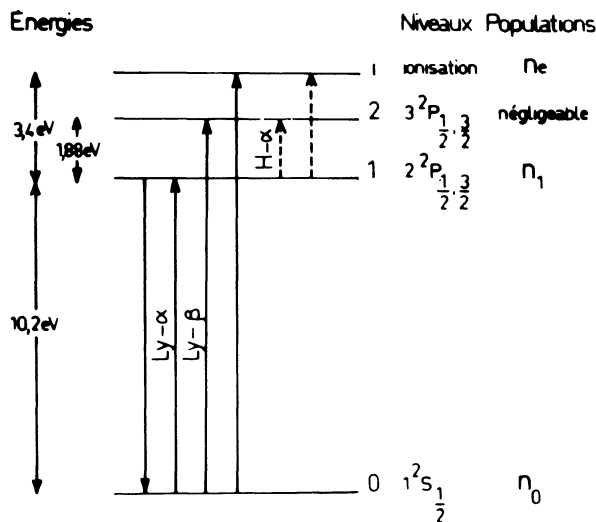


FIG. 3. — Modèle atomique à 4 niveaux. —→ Réactions déterminant f_e^+ . ----→ Réactions déterminant T_e .

d) Coefficient de recombinaison radiativo-collisionnelle $R_i(n_e, T_e)$.

Les électrons (dits « froids ») déterminant les processus de recombinaison sont maxwelliens (« corps » de la fonction) ; on peut donc utiliser les résultats ⁽⁵⁾ de Bates et al. (obtenus en supposant la distribution maxwellienne), valables soit dans le cas d'un plasma d'hydrogène parfaitement transparent à toutes les radiations [10] ($R_i = R_{\text{mince}}$), soit dans le cas d'un plasma optiquement épais pour les raies de type

⁽⁵⁾ Sous la forme de lois empiriques de n_e et T_e , plus faciles à manier que les représentations graphiques lors de l'emploi de l'ordinateur.

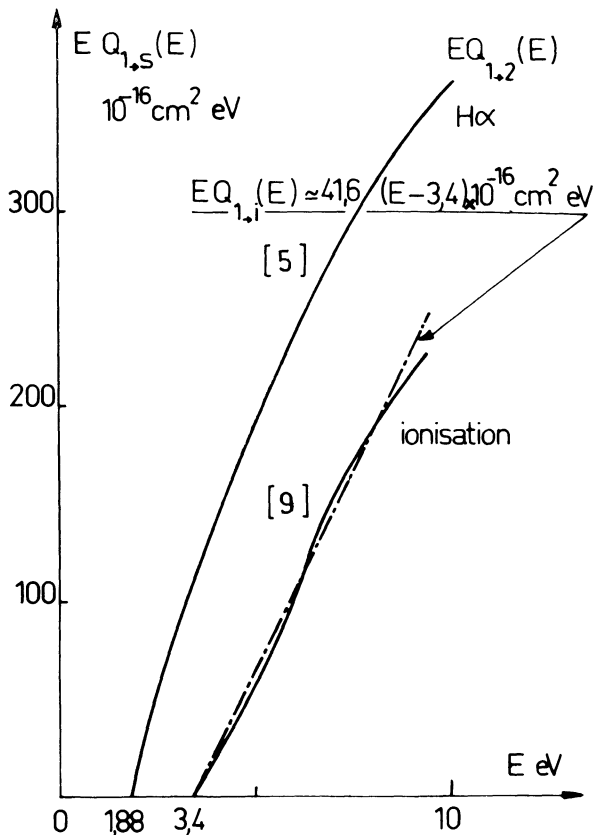


FIG. 4. — Variations de $EQ_{1 \rightarrow 2}$ et $EQ_{1 \rightarrow s}$. — Variations réelles. - - - - - Approximation linéaire.

Lyman [11] ($R_t = R_{\text{épais}}$). On admettra que dans le cas réel :

$$R_t = (1 - \mu) R_{\text{mince}} + \mu R_{\text{épais}}. \quad (59)$$

La formule (59) est tout à fait empirique mais elle donne de toute façon une meilleure estimation du coefficient de recombinaison que la méthode qui consiste à prendre $R_t = R_{\text{mince}}$ ou $R_t = R_{\text{épais}}$ (en moyenne, R_{mince} est d'environ 30 pour 100 supérieur à $R_{\text{épais}}$).

4.2 ECARTS DE TEMPÉRATURES. — On obtient une majoration de $\frac{T_0}{T_e} - 1$ (formule (54)) en remplaçant $f_e^+(w)$ par une distribution maxwellienne et en prenant n_1 égal à

$$n_0 \frac{g_1}{g_0} \exp \left[-\frac{m_e w_1^2}{2 k T_e} \right].$$

On montre que dans le domaine d'applicabilité ⁽⁴⁾ défini dans le précédent article [1], les écarts entre T_0 et T_e sont tout à fait négligeables

$$\left(\frac{T_0}{T_e} - 1 < 10^{-3} \text{ dans tous les cas} \right).$$

Il en résulte que *les neutres, les ions et les électrons sont pratiquement en équilibre de température.*

Remarque importante. Contribution éventuelle des pertes de rayonnement des séries de Paschen...

La faiblesse du seuil d'excitation de ces transitions ($2 \rightarrow s \geq 3, \dots$) et la valeur élevée des sections efficaces

$Q_{2 \rightarrow s}, \dots$ (5 à 10 fois plus que les sections $Q_{1 \rightarrow s}$ d'excitation des transitions de type Balmer) [5] conduisent à se poser le problème suivant : les pertes de rayonnement de Paschen ... ne sont-elles pas plus importantes que les pertes de type Balmer malgré la faiblesse des populations $n_2, \dots$? On obtient une majoration très forte de ces pertes en remplaçant $n_2, \dots$ par des populations Boltzmanniennes ; on emploie les sections efficaces données par Percival [5] ; on montre que dans le domaine d'applicabilité de la théorie ⁽⁴⁾, ces pertes ne dépassent jamais les pertes de type Balmer.

4.3 ECARTS AUX LOIS DE SAHA ET DE BOLTZMANN EN FONCTION DU COEFFICIENT μ . — Les calculs ont été effectués sur ordinateur UNIVAC 1108 ; les fonctions M et U ont été programmées à l'aide des séries (75) et (81) de l'appendice ; comme les expressions (51) et (52) de la « queue » $g_{1\infty}$ de la fonction et (55) du rapport ρ sont couplées, on a procédé à une méthode d'itération sur ρ .

Nota. — Lorsque l'on descend en température ($T_e \approx 7\,000$ °K), il importe d'introduire un facteur correctif représentant l'effet des collisions élastiques électron-neutre ; les températures T_0 et T_e étant pratiquement égales, il suffit de remplacer v_{ee} par

$$v_{ee} + \frac{m_e}{m_0} v_{e0}$$

dans toutes les équations, c'est-à-dire $b_s(u)$ par

$$\frac{b_s(u)}{1 + \frac{m_e v_{e0}(u)}{m_0 v_{ee}(u)}};$$

en réalité le rapport $\frac{v_{e0}(u)}{v_{ee}(u)}$ n'est pas constant et varie sensiblement comme $u^{3/2}$; il en résulte une déformation du coefficient $b_s(u)$; cependant, comme ce facteur n'est que correctif on le remplace par sa valeur moyenne pour $u > u_1$; on montre que pour une distribution maxwellienne, la valeur moyenne de $u^{3/2}$ est extrêmement voisine de $u_1^{3/2}$; elle l'est « a fortiori » pour la distribution réelle qui est encore plus décroissante.

D'après le précédent article [1], l'opacité à la radiation de résonance est partielle et peut engendrer des écarts à l'E. T. L. appréciables jusqu'à des distances du bord du plasma de l'ordre de 0,1 cm à 1 cm (c'est-à-dire des dimensions courantes au laboratoire) à condition de choisir des pressions P variant de 1 torr à 0,1 torr environ. Les résultats numériques donnés ci-dessous (Fig. 5 à 8) sont valables pour un plasma de forme quelconque et permettent d'en connaître les caractéristiques lorsque les fuites de rayonnement, caractérisées par le coefficient $1 - \mu$, sont connues. Il s'agit donc d'achever cette étude par l'évaluation du coefficient μ en tout point d'un plasma de géométrie donnée, c'est-à-dire le calcul des profils des densités n_1 et n_e .

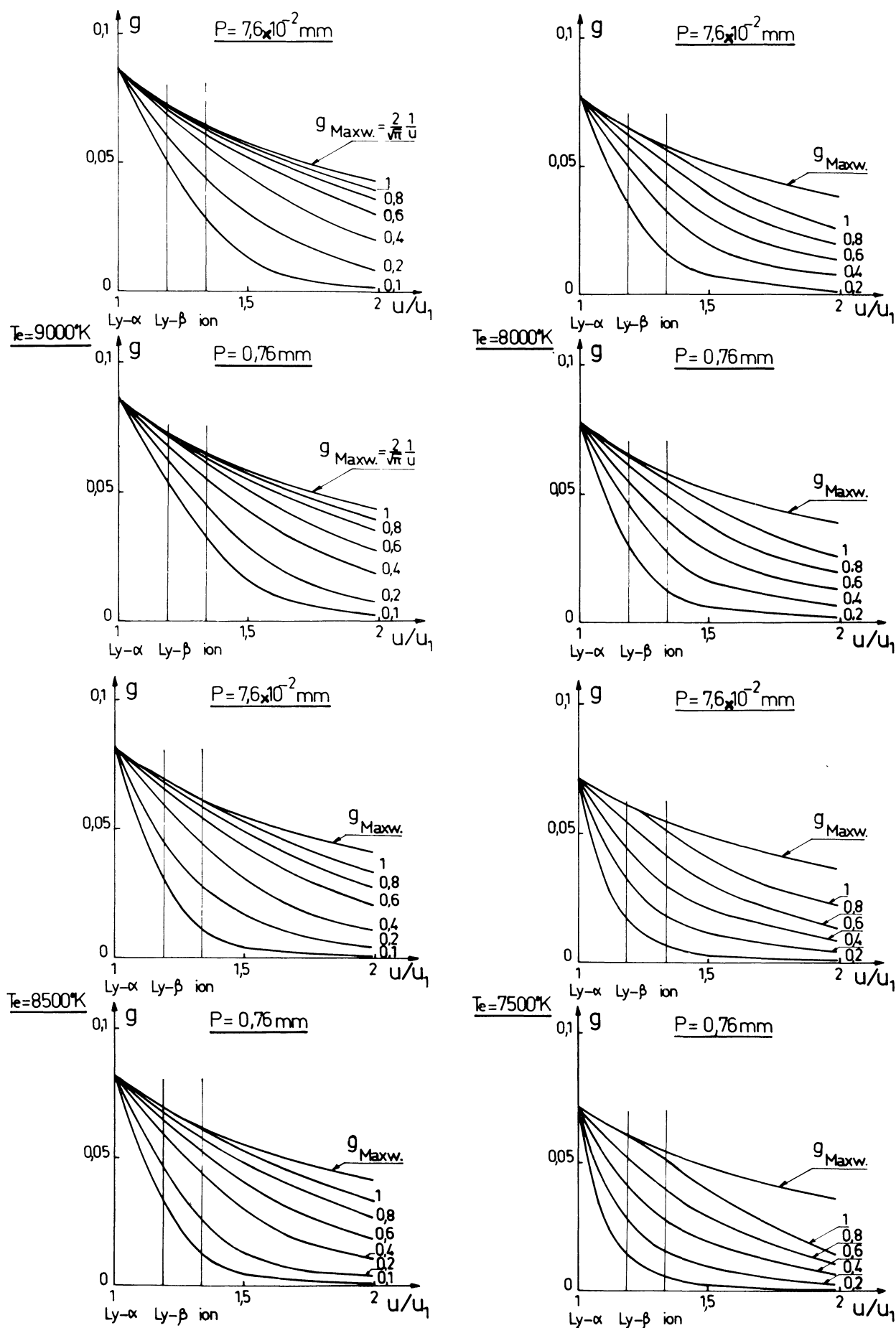


FIG. 5. — Ecart non maxwellien de la « queue » de la fonction de distribution réduite à « coefficient d'emprisonnement » μ constant. a) $T_e = 9\,000 \text{ K}$; b) $T_e = 8\,500 \text{ K}$; c) $T_e = 8\,000 \text{ K}$ d) $T_e = 7\,500 \text{ K}$.

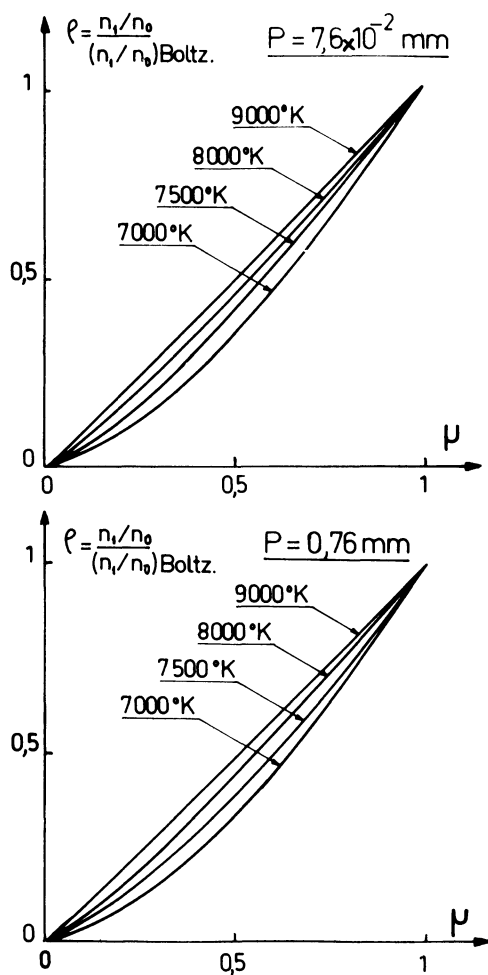


FIG. 6. — Variations des écarts à la loi de Boltzmann en fonction du « coefficient d'emprisonnement » μ .

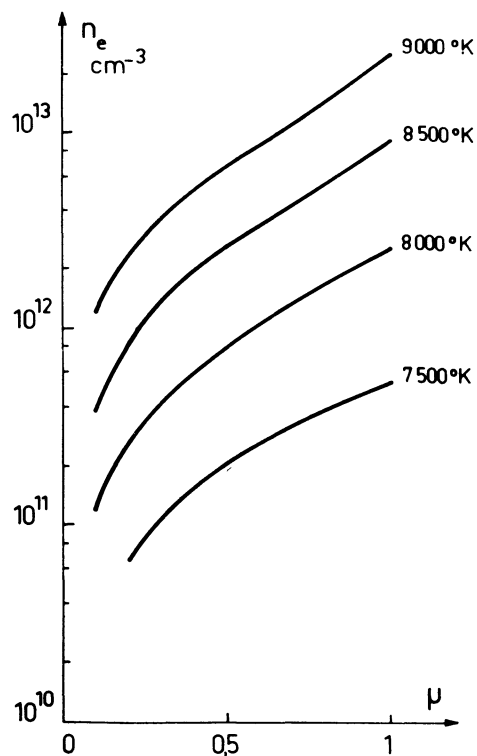
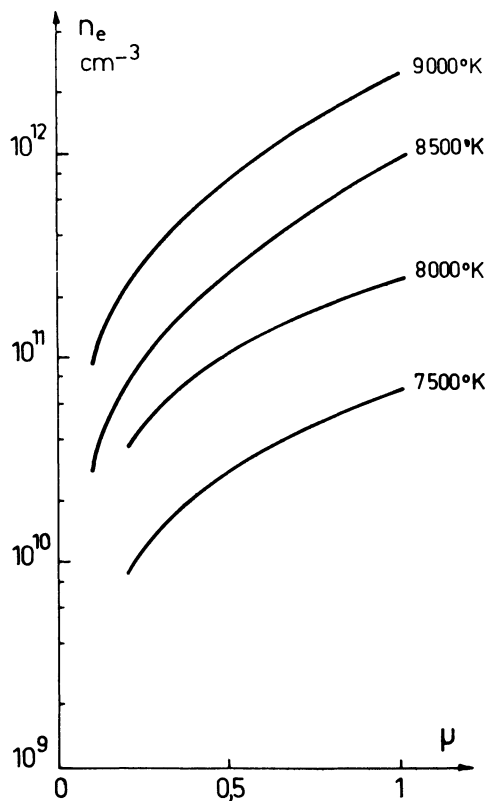


FIG. 7. — Variations de n_e en fonction de μ .
 $\rho = 7,6 \times 10^{-2}$ mm et $\rho = 0,76$ mm.

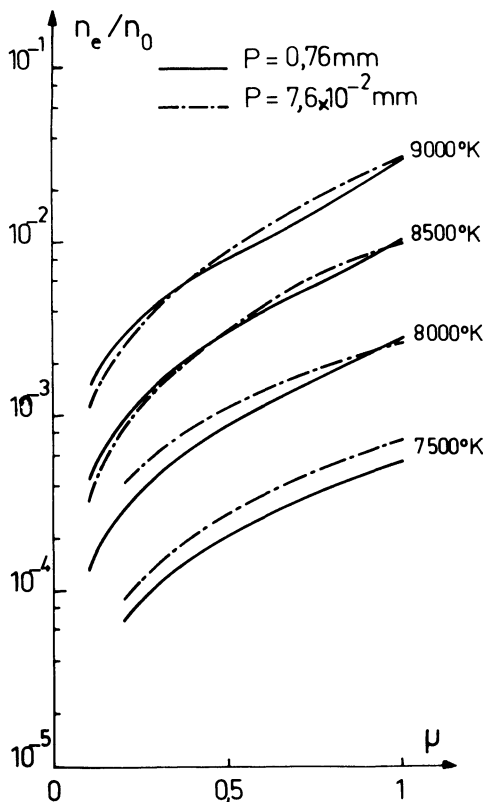


FIG. 8. — Variations du taux d'ionisation en fonction du « coefficient d'emprisonnement » μ .

Pour une pression P donnée, les écarts non maxwelliens sont d'autant plus importants que la température T_e est faible (v_{ee} plus faible) et que l'on se rapproche des bords du plasma (μ plus faible). Pour $\mu = 1$, g

est maxwellienne jusqu'au seuil d'excitation de Ly- β (12,08 eV) quelle que soit T_e car les collisions superélastiques sont aussi importantes que les collisions inélastiques ; au-delà de 12,08 eV, les écarts non maxwelliens dus aux collisions inélastiques $0 \rightarrow 2$ (Ly- β) et $0 \rightarrow i$ (ionisation) se creusent lorsque T_e diminue car les collisions e-e sont ne plus suffisantes.

Ces écarts varient très peu lorsque P varie : en d'autres termes si on change les dimensions (augmentation de volume lorsque P diminue) du plasma de manière à retrouver le même « coefficient d'emprisonnement », les écarts non maxwelliens dépendent assez peu de la pression.

Pour une pression donnée, les écarts non Boltzmanniens varient dans le même sens que les écarts non maxwelliens ; on peut considérer qu'à μ constant, ils ne dépendent pas de la pression. Pour $\mu = 1$, n_1/n_0 est Boltzmannien quelle que soit T_e .

Pour un coefficient μ donné, le taux d'ionisation est pratiquement indépendant de la pression P lorsque cette dernière est faible (1/10 mm à 1 mm) ; en d'autres termes, la densité électronique est pratiquement proportionnelle à la pression alors que si la loi de Saha s'appliquait, elle serait proportionnelle à $\sqrt{P}$; cet effet montre qu'aux faibles pressions (n_e faible), la recombinaison radiative est dominante devant la recombinaison à trois corps dans l'équation (56) de conservation de n_e . Par contre, pour des pressions plus élevées, l'effet de la pression sur n_e/n_0 est beaucoup plus marqué en raison de la recombinaison collisionnelle.

5. Profil des écarts à l'E. T. L. dans une tranche de plasma. — 5.1 RAPPEL DE L'ÉQUATION DE BILAN DES NIVEAUX ATOMIQUES. — On ne peut donner la répartition spatiale des densités n_1 et n_e que si l'on connaît celle du « coefficient d'emprisonnement » μ . L'équation de bilan des niveaux 0 et 1 couplée à l'équation de transfert du rayonnement explicitée dans le précédent article [1] permet le calcul de la distribution spatiale $\mu(\mathbf{r})$; cependant, si l'on désire évaluer $\mu(\mathbf{r})$ de manière précise, il convient de modifier cette équation en tenant compte de la forme exacte du profil de raie que l'on désigne par $\mathcal{L}(\nu)$ (avec $\int \mathcal{L}(\nu) d\nu = 1$) et des variations du coefficient d'absorption K_ν de la raie de résonance avec la fréquence ν ; cela revient à intégrer le terme d'absorption de rayonnement sur le profil de la raie [12] [13] ; on obtient :

$$\begin{aligned} \rho \{ \mu(\mathbf{r}) \} - \frac{1}{4\pi} \int d\nu \mathcal{L}(\nu) \int_{4\pi} d\Omega K_\nu \times \\ \times e^{-K_\nu s} \int_0^s \rho \{ \mu(s') \} e^{K_\nu s'} ds' = \\ = \rho \{ \mu(\mathbf{r}) \} \frac{1 - \mu(\mathbf{r})}{\mu(\mathbf{r})} \frac{g_0}{g_1} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \times \exp \left[\frac{m_e w_1^2}{2 k T_e} \right] \int_{w_1}^{+\infty} \frac{w Q_{0 \rightarrow 1}(w) n_e \{ \mu(\mathbf{r}) \}}{A_{10}} \\ \left(\frac{m_e}{2 \pi k T_e} \right)^{3/2} \exp \left[- \frac{m_e w^2}{2 k T_e} \right] 4 \pi w^2 dw. \quad (60) \end{aligned}$$

Les fonctions $\rho \{ \mu \}$ et $n_e \{ \mu \}$ sont respectivement représentées par les courbes 6 et 7.

Dans le domaine de pression considéré, la principale cause d'élargissement de raie est l'effet Doppler [1] et l'on a :

Pour le profil de raie :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\nu) d\nu &= \mathcal{L}(\omega) d\omega = \frac{e^{-\omega^2}}{\sqrt{\pi}} d\omega ; \\ \omega &= 2 \frac{\nu - \nu_0}{\Delta \nu_D} \sqrt{\text{Log } 2} ; \\ \int \mathcal{L}(\nu) d\nu &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}(\omega) d\omega = 1. \quad (61) \end{aligned}$$

Pour le coefficient d'absorption [13] [14] :

$$K_\nu \simeq K_0 \mathcal{L}(\omega) \quad K_0 = \frac{2 \pi e^2}{m_e c} \frac{n_0 f_{0 \rightarrow 1}}{\Delta \nu_D} \sqrt{\text{Log } 2} \quad (62)$$

ν_0 est la fréquence de résonance, $\Delta \nu_D$ la largeur Doppler, $f_{0 \rightarrow 1}$ la force d'oscillateur associée.

La figure 9 rappelle la signification [1] des grandeurs $\mathbf{r}$, s , s' et Ω ; dans l'équation (60), l'abscisse s est prise algébriquement selon le vecteur unitaire Ω porté par le rayon lumineux AM ; le sens positif est celui du rayon lumineux issu de A ; l'origine est placée à l'entrée E du plasma.

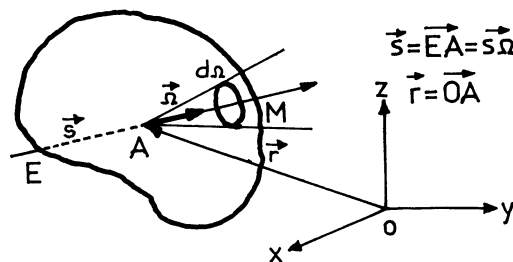


FIG. 9. — Le transfert du rayonnement.

5.2 CAS D'UN PLASMA LIMITÉ PAR DEUX FACES PLANES PARALLÈLES (TRANCHE DE PLASMA). — La figure 10 représente une tranche de plasma d'épaisseur $2d$; en raison de la symétrie du problème tout point du plan passant par A, parallèle aux faces, possède les mêmes densités $\rho \{ \mu(r) \}$ et $n_e \{ \mu(r) \}$.

$$\begin{aligned} \overline{OA} = r \quad \overline{EA} = s \\ \overline{OH} = r' \quad \overline{EA'} = s' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{rayon 1 : } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad s = \frac{d + r}{\cos \theta} \\ s' = \frac{d + r'}{\cos \theta} \end{aligned}$$

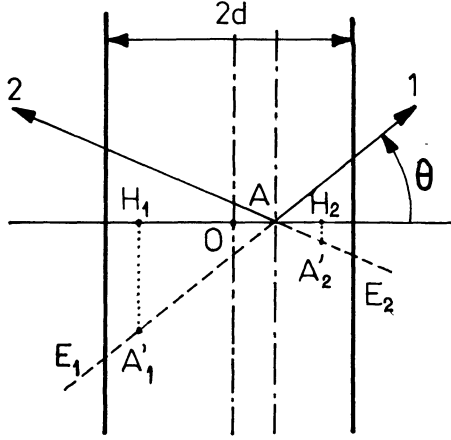


FIG. 10. — Le transfert du rayonnement dans une tranche de plasma.

$$\text{rayon 2 : } \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \quad s = \frac{r-d}{\cos \theta}$$

$$s' = \frac{r'-d}{\cos \theta}.$$

5.2.1 *Forme générale de l'équation de bilan.* — On peut transformer l'intégrale double sur $d\Omega ds'$ figurant dans le terme d'absorption en intégrale sur $d\theta dr'$; on obtient :

$$\int_{4\pi} d\Omega K_v e^{-K_v s} \int_0^s \rho(s') e^{K_v s'} ds' =$$

$$= \int_0^{\pi/2} 2\pi \sin \theta d\theta K_v \exp \left[-K_v \frac{d+r}{\cos \theta} \right] \times$$

$$\times \int_{-d}^r \rho(r') \exp \left[K_v \frac{d+r'}{\cos \theta} \right] \frac{dr'}{\cos \theta}$$

$$+ \int_{\pi/2}^{\pi} 2\pi \sin \theta d\theta K_v \exp \left[K_v \frac{d-r}{\cos \theta} \right]$$

$$\times \int_d^r \rho(r') \exp \left[-K_v \frac{d-r'}{\cos \theta} \right] \frac{dr'}{\cos \theta}. \quad (63)$$

Compte tenu de la symétrie $\rho(r) = \rho(-r)$ et en posant $x = \pm \frac{1}{\cos \theta}$ (+ pour la première intégrale de (63) et - pour la seconde), on obtient :

$$\int_{4\pi} d\Omega K_v e^{-K_v s} \int_0^s \rho(s') e^{K_v s'} ds' =$$

$$= 2\pi \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} K_v e^{-K_v r x} \int_{-d}^r \rho(r') e^{K_v r' x} dr' +$$

$$+ 2\pi \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} K_v e^{K_v r x} \int_{-d}^{-r} \rho(r') e^{K_v r' x} dr' =$$

$$= 2\pi K_v \int_{-d}^r dr' \rho(r') E_1[K_v(r-r')] +$$

$$+ 2\pi K_v \int_{-d}^{-r} dr' \rho(r') E_1[-K_v(r+r')]. \quad (64)$$

E_1 désigne la fonction exponentielle intégrale définie par

$$E_1(z) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-zt}}{z} dt.$$

Compte tenu de la forme (61) du profil de raie et de la valeur de K_v , l'équation (60) s'écrit :

$$\rho \{ \mu(r) \} = \rho(r) = \frac{\int_0^\infty d\omega \frac{K_0}{\pi} e^{-2\omega^2} \left\{ \int_{-d}^r dr' \rho(r') E_1[K_v(r-r')] + \int_{-d}^{-r} dr' \rho(r') E_1[-K_v(r+r')] \right\}}{1 - \frac{1-\mu(r)}{\mu(r)} \frac{n_e \{ \mu(r) \}}{N}} \quad (65)$$

en posant :

$$N = \frac{A_{10} \frac{g_1}{g_0} \exp \left[-\frac{m_e w_1^2}{2 k T_e} \right]}{\int_{w_1}^\infty w Q_{0 \rightarrow 1}(w) \left(\frac{m_e}{2 \pi k T_e} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{m_e w^2}{2 k T_e} \right] 4 \pi w^2 dw}. \quad (66)$$

On a vu dans le précédent article [1] qu'aux pressions étudiées, le rapport N/n_e est supérieur à 10^4 ; ainsi, si on considère un plasma de dimensions raisonnables (§ 5.2.2), le coefficient μ sera suffisamment élevé pour que le terme $\frac{1-\mu}{\mu} \frac{n_e}{N}$ soit toujours négligeable devant l'unité; on peut donc écrire :

$$\rho(r) \simeq$$

$$\simeq \int_0^\infty d\omega \frac{K_0}{\pi} e^{-2\omega^2} \left[\int_{-d}^r dr' \rho(r') E_1 \left(K_0 \frac{r-r'}{\sqrt{\pi}} e^{-\omega^2} \right) + \right.$$

$$\left. + \int_{-d}^{-r} dr' \rho(r') E_1 \left(-K_0 \frac{r+r'}{\sqrt{\pi}} e^{-\omega^2} \right) \right]. \quad (67)$$

5.2.2 Tranche de plasma de grande épaisseur. — On considère le cas où $K_0 d$ est suffisamment grand pour que le plasma soit non seulement opaque en son centre (c'est-à-dire $\mu(0) \simeq 1$ et $\rho(0) \simeq 1$) mais puisse l'être encore jusqu'à des distances de la surface bien inférieures à d . En d'autres termes, $K_0 d$ est tel que les écarts à l'E.T.L. dus aux fuites du rayonnement sont observables sur les bords du plasma à des distances de la surface que l'on se propose de déterminer.

On ne commet donc pas une grande erreur en remplaçant $\rho(r')$ par l'unité dans les deux intégrales de (67) et on obtient ainsi le profil des écarts à la loi de Boltzmann :

$$\begin{aligned} \rho(r) &\simeq \\ &\simeq \int_0^\infty d\omega \frac{K_0}{\pi} e^{-2\omega^2} \left[\int_{-d}^r dr' E_1 \left(K_0 \frac{r-r'}{\sqrt{\pi}} e^{-\omega^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \int_{-d}^{-r} dr' E_1 \left(-K_0 \frac{r+r'}{\sqrt{\pi}} e^{-\omega^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (68)$$

L'expression (68) peut être simplifiée et exprimée en fonction de E_2 exponentielle intégrale d'ordre 2 ; en posant $z = e^{-\omega^2}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \rho(r) &\simeq 1 - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{\text{Log} \frac{1}{z}}} \left[E_2 \left(K_0 \frac{d+r}{\sqrt{\pi}} z \right) + \right. \\ &\quad \left. + E_2 \left(K_0 \frac{d-r}{\sqrt{\pi}} z \right) \right]. \end{aligned} \quad (69)$$

Nota. — Cas limites $r = 0$ et $r = d$.

Au centre du plasma :

$$\rho(0) \simeq 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{\text{Log} \frac{1}{z}}} E_2 \left(K_0 \frac{d}{\sqrt{\pi}} z \right). \quad (70)$$

On retrouve le fait que lorsque $K_0 d$ tend vers l'infini $\rho(0) \lesssim 1$.

Au bord du plasma :

$$\begin{aligned} \rho(d) &\simeq 1 - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{\text{Log} \frac{1}{z}}} \left[E_2 \left(\frac{2K_0 d}{\sqrt{\pi}} z \right) + 1 \right] = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{\text{Log} \frac{1}{z}}} E_2 \left(\frac{2K_0 d}{\sqrt{\pi}} z \right) \approx \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (71)$$

On en déduit que pour les grandes valeurs de $K_0 d$, le rapport ρ varie entre 1 et $\frac{1}{2}$ du centre au bord du plasma, mais cette variation se produit surtout près de la surface et la loi (69) va permettre de déterminer à quelle distance.

5.2.3 Application : Etude des effets de bord sur les écarts à l'E.T.L. dans une tranche de plasma. — La formule (69) fournit directement le rapport $\rho(r)$ pour P ,

$T_0 \simeq T_e$ et d donnés ; les intégrales ont été programmées sur calculateur UNIVAC 1108. On en déduit donc le coefficient « d'emprisonnement » $\mu(r)$ à l'aide de la figure 6 puis $n_e(r)$ sur la figure 7.

La figure 11 montre très nettement une chute brutale du rapport ρ au voisinage de la surface, due aux fuites partielles du rayonnement de résonance. Cette variation de ρ de la valeur 1 à la valeur 0,5 se produit sur une épaisseur Δ de plasma voisine de 0,1 d et justifie « a posteriori » l'approximation (68) de l'équation (67). On peut même évaluer la longueur Δ qui n'est autre que la distance maximum de la surface à laquelle on doit se placer pour observer des écarts à l'équilibre thermodynamique. Compte tenu de l'expression (62) de K_0 , on obtient :

$$K_0 d = 1,03 \times 10^8 \frac{P}{(\text{Torr})} \frac{d}{(\text{cm})} T_0^{-3/2} \simeq 67 \quad (72)$$

$$K_0 \Delta \simeq 6,7. \quad (73)$$

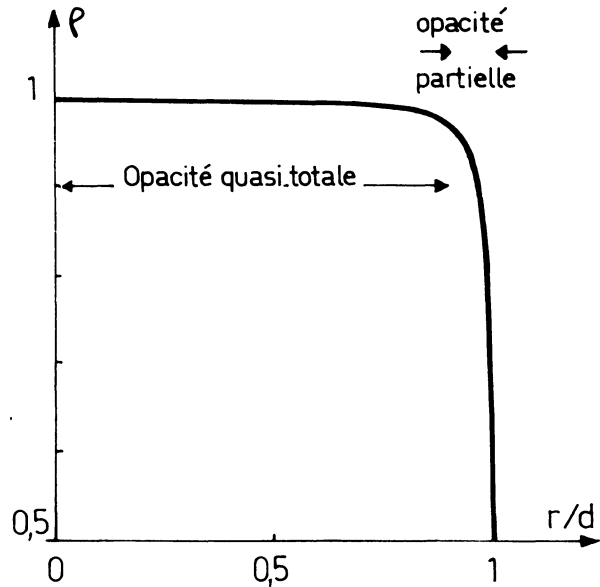


FIG. 11. — Profil des écarts non Boltzmanniens dans une tranche de plasma. $P \times d = 0,38 \text{ torr} \times \text{cm}$; $T_e = 7\,000^\circ\text{K}$.

L'égalité (73) vérifie précisément un résultat déjà obtenu [1] annonçant qu'un plasma ne commence à être opaque au rayonnement de résonance qu'à une distance de sa surface atteignant *plusieurs fois la profondeur optique* $1/K_0$.

La figure 12 déduite de la figure 11 représente les variations de ρ dans la zone d'opacité partielle, en fonction de la distance l comptée depuis la surface du plasma ; on en déduit le coefficient μ (Fig. 13) et la densité électronique n_e (Fig. 14) au voisinage de la surface.

D'après la figure 15, l'importance des écarts non Boltzmanniens dépend essentiellement du point dans le plasma ; par exemple pour $r = 0$, le plasma est totalement opaque ($\mu(0) \simeq 1$) ; il est Boltzmannien au centre ; pour $r = d$ ($\mu(d) \simeq 0,5$), le plasma n'est pas du tout Boltzmannien et les écarts se creusent

lorsque T_e diminue et peuvent atteindre plus de 100 %. De même d'après la figure 16, les écarts à la loi de Saha dépendent essentiellement du point considéré ; cependant, un plasma totalement opaque en son centre, bien que Boltzmannien loin de la surface (Fig. 15), n'obéit pas à la loi de Saha et on constate des écarts allant de un à deux ordres de grandeur, se creusant lorsque T_e diminue.

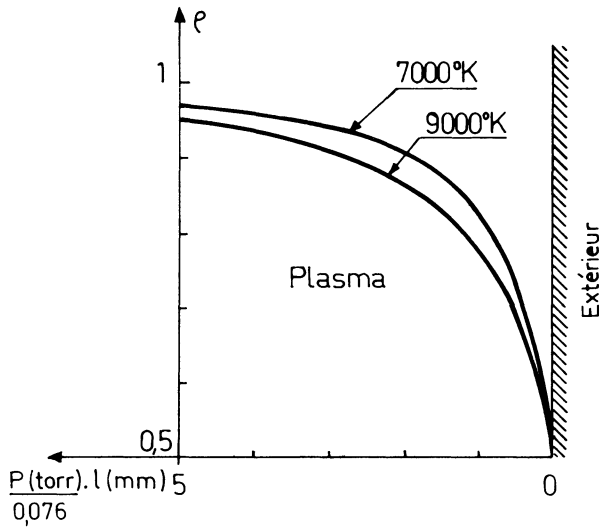


FIG. 12. — Effets de surface sur les écarts non Boltzmanniens.
 $P \times d > 0,076 \text{ torr} \times \text{cm}$.

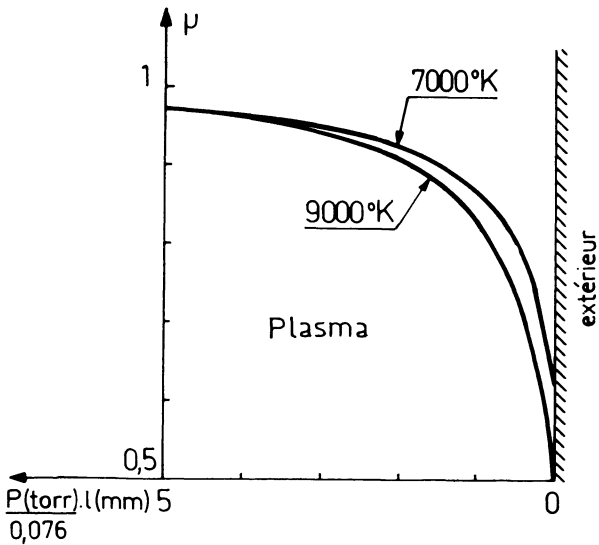
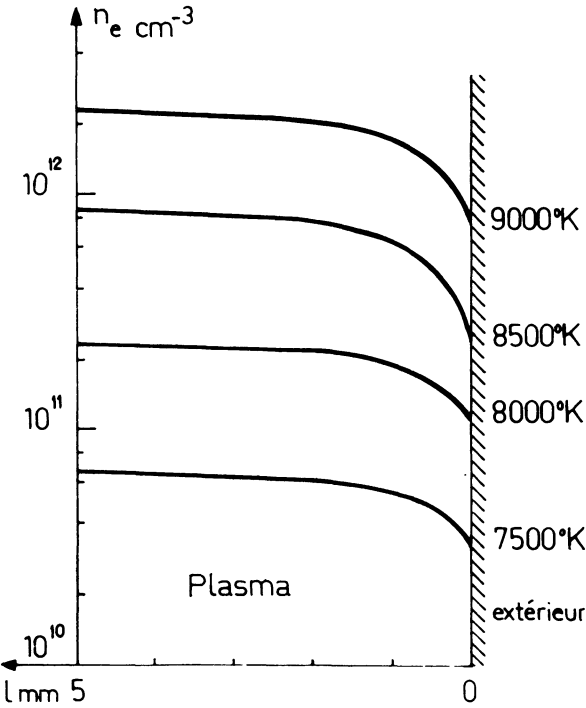


FIG. 13. — Effets de surface sur le « coefficient d'emprisonnement ».

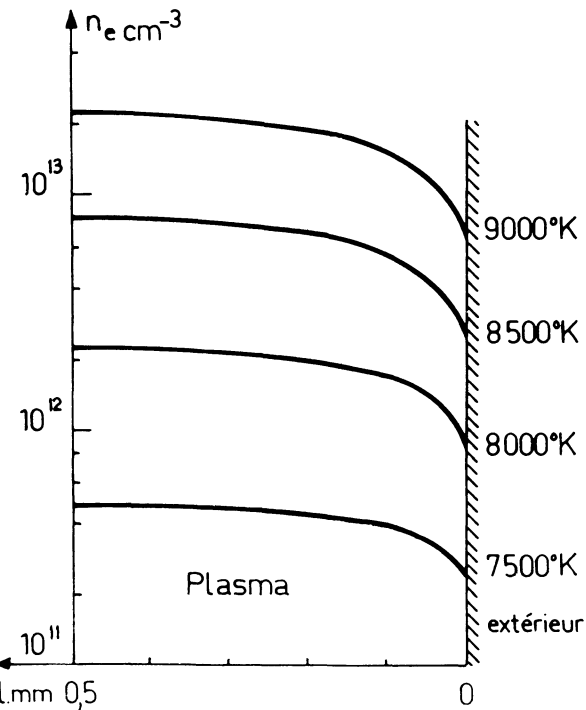


FIG. 14. — a) $P = 0,076 \text{ torr}$; b) $P = 0,76 \text{ torr}$. Effets de surface sur la densité électronique.

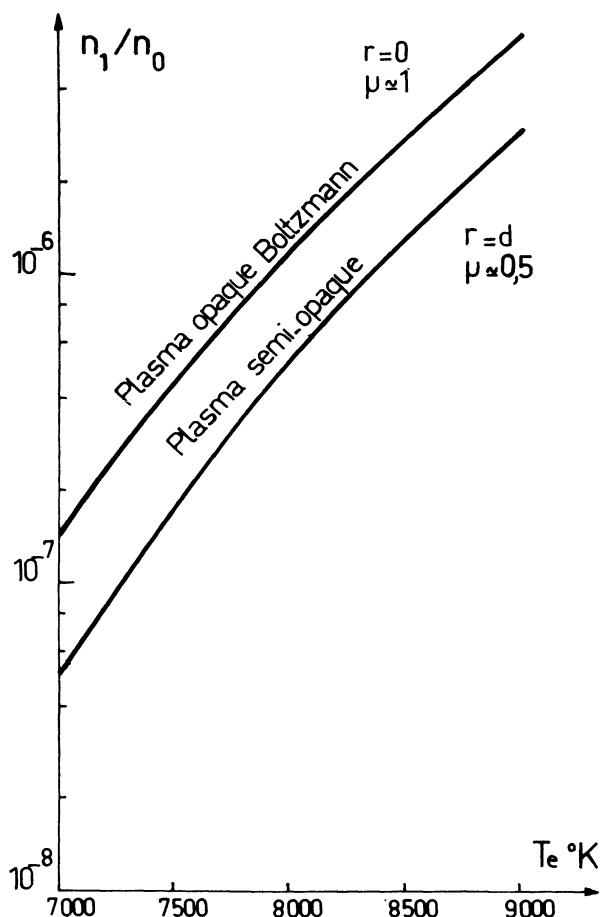


FIG. 15. — Ecart à la loi de Boltzmann au centre et au bord d'une tranche de plasma. $P = 0,76$ torr ; $d > 0,1$ cm.

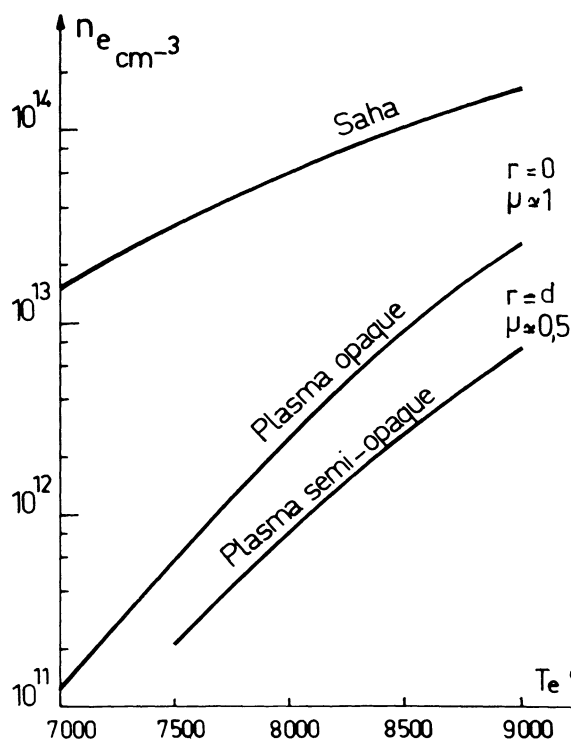


FIG. 16. — Ecart à la loi de Saha au centre et au bord d'une tranche de plasma. $P = 0,76$ torr ; $d > 0,1$ cm.

Conclusion. — La théorie [1] exploitée dans le présent article montre que les écarts à la loi de Boltzmann sont à peu près imperceptibles lorsque la radiation de résonance est totalement emprisonnée dans le plasma. Ces écarts deviennent très importants dans un plasma d'hydrogène où le piégeage de la radiation Lyman- α n'est que partiel ; cet effet est appréciable près des bords jusqu'à une profondeur de l'ordre de 0,5 à 5 mm (dimensions classiques d'un plasma de laboratoire) lorsque la pression totale est de l'ordre du millimètre au dixième de millimètre de mercure : dans ce cas, la théorie prévoit des écarts à la loi de Boltzmann pouvant atteindre 100 % (Fig. 15) ; les écarts à la loi de Saha peuvent alors atteindre 1 à 2 ordres de grandeur (Fig. 16). Des calculs effectués pour des pressions 10 fois plus faibles (0,01 mm) et 10 fois plus grandes (10 mm) ont donné des résultats similaires pour des plasmas respectivement 10 fois plus grands et 10 fois plus petits. On obtient la règle approximative suivante : pour des plasmas dont la pression est comprise entre 0,01 mm et 10 mm de mercure, à piégeage égal de la radiation Ly- α , les rapports n_1/n_0 et n_e/n_0 sont pratiquement indépendants de la pression (Fig. 6 et 8) ; près de la surface d'un plasma de grandes dimensions, on a « semi-piégeage » de Ly- α ($\mu \approx 0,5$) et les écarts à la loi de Boltzmann atteignent 100 % et les écarts à la loi de Saha 1 à 2 ordres de grandeur ; ces écarts restent appréciables à des profondeurs exprimées en millimètre de l'ordre de $0,5/P$ (P exprimée en mm Hg).

Par contre à des profondeurs de l'ordre de $1/P$ (mm), les plasmas *totalement opaques à la raie Ly- α* ($\mu \approx 1$) sont *Boltzmanniens* mais présentent toujours des écarts de 1 à 2 ordres de grandeur en ce qui concerne la loi de Saha.

Pour des pressions plus élevées, notamment à la pression atmosphérique, les calculs montrent que le plasma est pratiquement en équilibre thermodynamique ($\rho \approx 1$ et $n_e \approx n_e$ Saha) à l'exception près d'une mince couche superficielle (de l'ordre du micron) pour laquelle les écarts à la loi de Boltzmann sont aussi importants qu'à faible pression.

La théorie exposée ici peut s'étendre au cas des alcalins dans un domaine de températures moins élevées (1 000 à 2 000 °K au lieu de 10 000 °K pour l'hydrogène) correspondant à la plupart des conditions expérimentales réalisables au laboratoire.

Remerciements. — L'auteur remercie le professeur J. L. Delcroix pour sa lecture critique du manuscrit et le Dr J. Peyraud pour l'aide qu'il a apportée à la mise au point des calculs numériques.

Appendice. EQUATION DE KUMMER. FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES CONFLUENTES [7] — Equation de Kummer.

$$x \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + (b - x) \frac{d\varphi}{dx} - a\varphi = 0. \quad (74)$$

L'équation (74) admet deux solutions linéairement indépendantes (a non entier négatif) : la fonction de Kummer :

$$M(a, b, x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a)_n}{(b)_n} \frac{x^n}{n!} \quad (75)$$

où

$$(a)_n = a(a+1) \dots (a+n-1), (a)_0 = 1, \quad (76)$$

et la fonction :

$$U(a, b, x) = \frac{\pi}{\sin \pi b} \left[\frac{M(a, b, x)}{\Gamma(1+a-b)\Gamma(b)} - x^{1-b} \frac{M(1+a-b, 2-b, x)}{\Gamma(a)\Gamma(2-b)} \right]. \quad (77)$$

Cas particulier $b = 2$. — L'équation (74) admet toujours pour solution $M(a, 2, x)$; la définition de $M(1+a-b, 2-b, x)$ pose des difficultés mais on montre que la fonction U admet pour expression :

$$U(a, 2, x) = \frac{1}{\Gamma(a-1)} M(a, 2, x) \operatorname{Log} x + \frac{1}{\Gamma(a-1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a(a+1) \dots (a+k-1)}{(k+1)!} \times [\Omega(a+k) - \Omega(1+k) - \Omega(2+k)] \frac{x^k}{k!}$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(a)} x^{-1} \quad (78)$$

avec :

$$\Omega(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}. \quad (79)$$

Développements asymptotiques lorsque x est grand.

$$M(a, b, x) \sim \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} e^x x^{a-b} \quad (80)$$

$$U(a, b, x) = x^{-a} \left[\sum_{n=0}^{R-1} \frac{(a)_n (1+a-b)_n}{n!} (-x)^n + O(x^{-R}) \right] \quad (81)$$

avec :

$$O(x^{-R}) = \frac{(a)_R (1+a-b)_R}{R!} \times \left[\frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{8} + \frac{1}{4}b - \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}R}{x} + O(x^{-2}) \right] \quad (82)$$

où le R -ième terme est le plus petit en valeur absolue du développement (81).

Le développement (81) donne d'ailleurs une excellente approximation de la fonction U , simple à programmer sur ordinateur.

Bibliographie

- [1] PEYRAUD (N. et J.), *J. de Physique*, 1969, **30**, 773.
- [2] PEYRAUD (N.), Thèse, Paris, 1969.
- [3] PEYRAUD (N.), *J. de Physique*, 1968, **29**, 997.
- [4] DELCROIX (J. L.), *Physique des Plasmas*, tome 2, Dunod, 1966.
- [5] PERCIVAL (I. C.), *Nuclear Fusion*, 1966, **6**, 182.
- [6] ZAPESCHNY (I. P.), SIMON (L. L.), *Comptes rendus de la 4^e Conférence Int. sur la Physique des collisions électroniques et atomiques*, p. 401-4, Québec, 1965 (Science Bookcrafters, New York, 1965).
- [7] ABRAMOWITZ (M.) and STEGUN (I. A.), *Handbook of mathematical functions*.
- [8] BATES (D. R.), *Atomic and molecular processes* (Acad. Press, Londres, 1962).
- [9] SWAN (P.), *P. P. S.*, 1955, **68 A**, 1157-60.
- [10] BATES (D. R.), KINGSTON (A. E.), MC WHIRTER (R. W. P.), *Proc. Roy. Soc.*, 1962, **A 267**, 297.
- [11] BATES (D. R.), KINGSTON (A. E.), MC WHIRTER (R. W. P.), *Proc. Roy. Soc.*, 1962, **A 270**, 155.
- [12] BIBERMAN (L. M.), *Zh. Eksperim. i Teor. Fiz*, 1947, **17**, 416 ; 1949, **19**, 584.
- [13] HOLSTEIN (T.), *Phys. Rev.*, 1947, **72**, 1212 ; 1951, **83**, 1159.
- [14] MITTCHELL (A. C. G.) and ZEMANSKY (M. W.), *Resonance Radiation and Excited Atoms* (Cambridge University Press, Cambridge, 1961).