Etude du transfert d'excitation par émission spontanée - I. - Analyse théorique

Martial Ducloy, Michel Dumont

► To cite this version:

Martial Ducloy, Michel Dumont. Etude du transfert d'excitation par émission spontanée - I. - Analyse théorique. Journal de Physique, 1970, 31 (5-6), pp.419-427. 10.1051/jphys:01970003105-6041900 . jpa-00206921

HAL Id: jpa-00206921

<https://hal.science/jpa-00206921>

Submitted on 1 Jan 1970

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉTUDE DU TRANSFERT D'EXCITATION PAR ÉMISSION SPONTANÉE (*)

I. — ANALYSE THÉORIQUE

par Martial DUCLOY et Michel DUMONT

Faculté des Sciences de Paris,
Laboratoire de Spectroscopie Hertzienne de l'E. N. S., associé au C. N. R. S.,
24, rue Lhomond, Paris 5^e

(Reçu le 5 janvier 1970)

Résumé. — On étudie le transfert d'excitation par émission spontanée dans une vapeur atomique. L'effet d'un champ magnétique statique sur une cascade radiative est analysé dans le formalisme des opérateurs tensoriels irréductibles ; on y tient compte de l'existence de relaxations isotropes. La forme de courbe de dépolarisation magnétique est étudiée. Le cas d'une excitation par irradiation laser est plus spécialement abordé et l'importance du transfert de cohérence Zeeman sur la transition laser elle-même est mise en évidence. Enfin les résultats sont étendus au transfert de cohérence hyperfine par émission spontanée.

Un second article (8) présentera les vérifications expérimentales. Elles recouvriront aussi bien le transfert sur la transition laser que celui sur des transitions différentes. L'application à l'étude du niveau $2p_2$ du néon y sera présentée.

Abstract. — Excitation transfer by spontaneous emission in an atomic gas is studied theoretically. The effect of a static magnetic field on a radiative cascade is analyzed in the formalism of irreducible tensor operators ; the existence of isotropic relaxations is taken into account. The magnetic depolarization curve is studied. The case of laser beam excitation is treated in a more detailed fashion and the importance of Zeeman coherence transfer from the upper to the lower levels of the laser transition is emphasized. Finally hyperfine coherence transfer is considered.

A second paper [8] will present the experimental results relative to the transfer on the laser transition as well as on other transitions. Application to the $2p_2$ level of neon will be described therein.

A. Introduction. — La transmission de populations et de cohérence hertzienne au cours d'une cascade de désexcitation dans une vapeur atomique est couramment observée dans les expériences de bombardement électronique. Tout niveau excité d'un atome est peuplé à la fois par excitation directe et par émission spontanée à partir des niveaux d'énergie supérieure. Le processus de transmission, remarqué pour la première fois par Descoubes [1] et Pebay-Peyroula [2], a fait depuis l'objet de développements théoriques et expérimentaux. En particulier, O. Nedelec [3], reprenant certains résultats obtenus par Cohen-Tannoudji [4] a fait la théorie des effets de cascade dans des expériences de dépolarisation magnétique en n'introduisant qu'un temps de relaxation (radiatif) par niveau atomique excité. Dans le cas du bombardement électronique, l'étude expérimentale du transfert *seul* est, en règle générale, impossible, car chaque niveau est peuplé, comme nous l'avons indiqué, à la fois par excitation directe et par cascade à partir de *tous* les niveaux excités d'énergie supérieure, ces cascades pouvant d'ailleurs comprendre plusieurs niveaux intermédiaires. Dans chaque élément

de la matrice densité décrivant un tel niveau atomique, apparaîtra en fait une superposition de termes plus ou moins compliqués dus à toutes les cascades possibles. Pour pouvoir étudier l'effet de transfert seul, il ne faut exciter de façon anisotrope qu'un seul niveau et observer les cascades de désexcitation de ce niveau. Ceci montre l'intérêt des méthodes de double résonance, pour atteindre un seul niveau de résonance, ou du pompage optique par une raie laser qui ne perturbe que deux niveaux excités.

L'étude expérimentale que nous présenterons par la suite a été faite dans le cas d'une excitation laser. A l'inverse du bombardement électronique, les pressions auxquelles nous opérons sont de quelques torr. La décharge électrique peuple alors de façon isotrope tous les niveaux, tandis que l'irradiation laser introduit des grandeurs tensorielles d'ordre non nul sélectivement dans les niveaux supérieur et inférieur de la transition laser. Dans ces conditions, la relaxation des niveaux excités ne se décrit plus par un seul temps de relaxation (dû à l'émission spontanée), mais doit tenir compte de l'effet des collisions atomiques et électroniques, de la diffusion multiple cohérente, etc..., qui couplent les différents éléments de la matrice densité atomique et nécessite, pour chaque élément, l'introduction de

(*) Cette étude a été réalisée avec l'aide de la D. R. M. E.

plusieurs constantes de temps qui peuvent prendre des valeurs très différentes les unes des autres. Lorsque la relaxation a la symétrie sphérique, Omont [5] a montré l'intérêt qu'il y a à développer la matrice densité sur une base d'opérateurs tensoriels irréductibles [6]. Sur une telle base, toute relaxation isotrope ne couple plus les différentes composantes de la matrice densité. De plus la relaxation des diverses composantes d'un tenseur irréductible est décrite par une même constante de temps.

Dans une première partie, nous étudierons le transfert d'excitation en termes de grandeurs tensorielles et nous l'appliquerons au cas de la dépolarisation magnétique successive de deux niveaux d'une cascade radiative. Pour cela, nous choisirons les opérateurs tensoriels irréductibles orthonormés au sens de Fano [7] :

$$\text{Tr} [T_q^{(k)} \cdot T_{q'}^{(k')}] = \delta_{\alpha\beta} \cdot \delta_{kk'} \cdot \delta_{qq'}$$

(k est l'ordre du tenseur, q repère la composante et α le niveau atomique). Cette normalisation définit sans ambiguïté les $T_q^{(k)}$ dans chaque niveau atomique, indépendamment de la transition par laquelle on observe ce niveau. Grâce à cette définition, il est possible d'étudier l'effet de cascade directement à l'intérieur de cette base. Ceci permettra de mettre clairement en évidence les symétries du processus d'émission spontanée. Nous nous intéresserons plus particulièrement au cas où l'excitation est obtenue par une irradiation laser, et étudierons sous quelles conditions le transfert peut devenir très important. Enfin, l'extension au cas où une structure hyperfine est présente sera envisagée.

Dans un second article [8], nous présenterons les vérifications expérimentales effectuées sur les niveaux $2p_4$ et $2p_2$ du néon pompés optiquement à l'aide de diverses raies laser du néon.

Pour finir, signalons les grandes similitudes qui existent entre le transfert par émission spontanée et l'excitation optique par échelons qui a été étudiée par Soleillet [9], Kastler [10] et, plus récemment, par Kibble [11] et Laniepe [12].

B. Etude du transfert. — Le transfert par émission spontanée, en physique atomique, est identique à un problème connu en physique nucléaire : les corrélations angulaires dans une suite de processus de désintégration [6] [13]. Dans cette section, nous rappelons les résultats obtenus dans le cas de l'émission dipolaire électrique.

1. DESCRIPTION D'UNE CASCADE ATOMIQUE — Nous considérons un atome en interaction avec des perturbations extérieures (champ magnétique, champ de radiofréquence, ...) et avec les fluctuations du champ électromagnétique. L'idée que l'on se fait habituellement d'une cascade de désexcitation sera supposée exacte : l'atome se trouve dans un niveau b et y évolue ; à un instant donné, sous l'effet des fluctuations du vide, il émet un photon et tombe dans un niveau d'énergie

inférieure a . On suppose cette émission instantanée. L'atome évolue alors dans a en attendant d'émettre un second photon.

Un calcul rigoureux fait par Barrat et Cohen-Tannoudji [4] a montré que cette description de la cascade est correcte lorsque les énergies intervenant dans l'évolution à l'intérieur d'un niveau (écart Zeeman, énergie des photons de radiofréquence, largeur naturelle du niveau, ...) sont très petites comparées à l'écart d'énergie entre les deux niveaux de la cascade. Ceci revient à dire que la durée des phénomènes transitoires liés à l'émission du photon optique, dont l'ordre de grandeur est l'inverse de la fréquence de ce photon, est très courte devant tous les autres temps d'évolution du système : période de Larmor, durée de vie du niveau, ... ; les deux phénomènes, émission du photon et évolution dans un niveau sont parfaitement découplés et le processus de cascade se traduit par un terme de relaxation dans les équations d'évolution du niveau supérieur b et par un terme source $\left(\frac{d}{dt} {}_a R \rho\right)_{tr}$ dans les équations d'évolution de la matrice densité totale après émission (cette matrice décrit à la fois l'atome dans le niveau inférieur a et le rayonnement émis)

$$\left(\frac{d}{dt} {}_a R \rho\right)_{tr} = S_T \cdot {}_b \rho. \quad (I.1)$$

${}_b \rho$ est la matrice densité du niveau supérieur b ⁽¹⁾ et S_T est une transformation linéaire de l'espace de Liouville (espace des opérateurs du système) [6] [7].

2. ETATS INITIAUX ET FINAUX DE LA CASCADE. — Comme le hamiltonien du système total atome-rayonnement est invariant par rotation, S_T est une transformation *scalaire*. Pour profiter des symétries du processus, nous développerons la matrice densité sur des bases d'opérateurs tensoriels irréductibles [6]

$${}_{\alpha\beta} T_q^{(k)} = \sum_{m_\alpha, m_\beta} (-)^{J_\beta + m_\beta} \langle J_\alpha J_\beta m_\alpha m_\beta | kq \rangle \cdot | J_\alpha m_\alpha \rangle \langle J_\beta - m_\beta | \quad (I.2)$$

où J_α est le moment cinétique du niveau α .

Dans la suite, nous remplacerons ${}_{\alpha\alpha} T_q^{(k)}$ par ${}_a T_q^{(k)}$.

a. Base du système atomique avant émission. — Le développement de la matrice densité atomique à l'intérieur du niveau b , avant émission, s'écrit

$${}_b \rho = \sum_{k,q} {}_b \rho_q^k \cdot {}_b T_q^{(k)}. \quad (I.3)$$

b. Base du système total après émission. — Après émission, le système se scinde en deux parties, un atome dans le niveau a et un photon dipolaire électrique de moment angulaire total $J_R = 1$. L'évolution

⁽¹⁾ En toute rigueur, la matrice densité avant émission, ${}_b R \rho$, est le produit de la matrice densité atomique ${}_b \rho$ par la matrice densité du vide électromagnétique, $|0\rangle \langle 0|$, où $|0\rangle$ est l'état à zéro photon. Comme cet état est isotrope (son moment cinétique J_R est nul), il n'interviendra pas explicitement dans les considérations angulaires que nous ferons par la suite.

de ces deux sous-systèmes étant découplée, nous avons intérêt à développer la matrice densité après émission sur une base d'opérateurs qui soient produits d'opérateurs tensoriels liés au niveau a , $aT_q^{(k')}$, et d'opérateurs tensoriels représentant le rayonnement émis :

$${}_R T_q^{(k'')} = \sum_{m, m'} (-)^{1+m'} \langle 1 \ 1 \ m m' | k'' \ q'' \rangle \cdot | 1 \ m \rangle \langle 1 \ -m' |. \quad (I.4)$$

$| 1 \ m \rangle$ représente l'état d'un photon dipolaire électrique de moment angulaire suivant Oz égal à m .

La base $\{ {}_a T_q^{(k')} \cdot {}_R T_q^{(k'')} \}$ est réductible par rapport au groupe des rotations globales de l'ensemble atome-rayonnement ; nous pouvons combiner les éléments de cette base de manière à former des ensembles irréductibles (Messiah [14], appendice C, éq. (86))

$${}^{k'k''} U_Q^{(K)} = \sum_{q'q''} \langle k' \ k'' \ q' \ q'' | K \ Q \rangle {}_a T_q^{(k')} \cdot {}_R T_q^{(k'')}. \quad (I.5)$$

Dans cette base, J_a (moment angulaire atomique) et J_R (moment angulaire du photon) sont découplés. On peut, par contre, considérer la base où l'on couple d'abord J_a et J_R pour obtenir le moment cinétique total J_T du système et en déduire d'autres ensembles irréductibles

$${}^{J_T J_T'} V_Q^{(K')} = \sum_{p, p'} (-)^{J_T' + p'} \langle J_T \ J_T' \ p \ p' | K \ Q \rangle \cdot | J_T \ p \rangle \langle J_T' - p' |. \quad (I.6)$$

La base (I.5) correspond au schéma de couplage $\{ (J_a \ J_a) \ k', (J_R \ J_R) \ k'' ; K \ Q \}$ et la base (I.6) au schéma

$$\{ (J_a \ J_R) \ J_T, (J_a \ J_R) \ J_T'; K' \ Q' \}.$$

Par définition, les coefficients de la transformation unitaire qui permet de passer d'une base à l'autre sont les coefficients 9 J (Messiah [14] appendice C, éq. 40a)

$$\begin{aligned} \text{Tr} \{ {}^{k'k''} U_Q^{(K)*} \cdot {}^{J_T J_T'} V_Q^{(K')} \} &= \\ &= \sqrt{(2k'+1)(2k''+1)(2J_T+1)(2J_T'+1)} \cdot \\ &\cdot \begin{Bmatrix} J_a & J_a & k' \\ J_R & J_R & k'' \\ J_T & J_T' & K \end{Bmatrix} \cdot \delta_{KK'} \cdot \delta_{QQ'}. \end{aligned} \quad (I.7)$$

On en déduit la relation

$$\begin{aligned} {}^{J_T J_T'} V_Q^{(K)} &= \\ &= \sum_{k', k'', q', q''} \sqrt{(2k'+1)(2k''+1)(2J_T+1)(2J_T'+1)} \cdot \\ &\cdot \begin{Bmatrix} J_a & J_a & k' \\ J_R & J_R & k'' \\ J_T & J_T' & K \end{Bmatrix} \cdot \langle k' \ k'' \ q' \ q'' | K \ Q \rangle \cdot {}_a T_q^{(k')} \cdot {}_R T_q^{(k'')}. \end{aligned} \quad (I.8)$$

3. ÉMISSION DU RAYONNEMENT. — Jusqu'ici, on s'est contenté d'expliciter les différentes bases sur lesquelles on peut développer la matrice densité totale du système et d'écrire les relations existant entre ces

bases. On va maintenant considérer le processus d'émission spontanée. Il est défini par la transformation S_T (éq. I.1). Cherchons l'action de S_T sur l'opérateur ${}_b T_q^{(k)}$. Comme cette transformation est *scalaire*, elle conserve le moment cinétique total du système et la nature tensorielle de l'opérateur sur lequel elle agit. Elle s'écrit donc très simplement sur la base couplée ${}^{J_T J_T'} V_Q^{(K)}$: la conservation du moment cinétique total impose $J_T = J_T' = J_b$ et la conservation du tenseur impose $K = k$ et $Q = q$ d'où

$$S_T \cdot {}_b T_q^{(k)} = \gamma_{ba} \cdot {}^{J_b J_b} V_q^{(k)}. \quad (I.9)$$

γ_{ba} est un élément de matrice réduit dont on verra plus loin la signification physique.

Sur la base découplée atome-rayonnement, le transfert s'écrit

$$\begin{aligned} S_T \cdot {}_b T_q^{(k)} &= \gamma_{ba} \cdot (2J_b + 1) \cdot \\ &\cdot \sum_{k', q', k'', q''} \sqrt{(2k'+1)(2k''+1)} \begin{Bmatrix} J_a & J_a & k' \\ 1 & 1 & k'' \\ J_b & J_b & k \end{Bmatrix} \cdot \\ &\cdot \langle k' \ k'' \ q' \ q'' | k \ q \rangle \cdot {}_a T_q^{(k')} \cdot {}_R T_q^{(k'')}. \end{aligned} \quad (I.10)$$

On a fait $J_R = 1$ (moment angulaire du photon).

Cette dernière équation nous montre comment une grandeur physique tensorielle ${}_b T_q^{(k)}$ existant dans le niveau b se dissocie dans l'émission spontanée en grandeurs atomiques dans le niveau a , $aT_q^{(k')}$, et en grandeurs physiques rayonnées par le champ électromagnétique, ${}_R T_q^{(k'')}$.

4. ÉVOLUTION DU SYSTÈME ATOMIQUE. — Pour observer l'évolution du système atomique indépendamment du rayonnement émis, il faut prendre la trace sur les variables de rayonnement

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} a\rho \right)_{\text{tr}} &= \text{Tr}_R \left[\left(\frac{d}{dt} aR\rho \right)_{\text{tr}} \right] \\ &= \text{Tr}_R [S_T \cdot {}_b \rho] = S_b \rho. \end{aligned} \quad (I.11)$$

Si on prend la trace des deux membres de l'équation (I.10), on obtient aisément :

$$S \cdot {}_b T_q^{(k)} = \Theta(b, a, k) \cdot {}_a T_q^{(k)} \quad (I.12)$$

avec

$$\begin{aligned} \Theta(b, a, k) &= \\ &= (-)^{J_a + J_b + k + 1} \cdot \gamma_{ba} \cdot (2J_b + 1) \cdot \begin{Bmatrix} J_b & J_b & k \\ J_a & J_a & 1 \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (I.13)$$

Les équations (I.12 et 13) ont une signification physique simple ; dans l'émission spontanée, toute grandeur conserve sa nature tensorielle (ordre k) et son orientation spatiale ($\Theta(b, a, k)$, indépendant de la composante q) [15]. Cette symétrie de la cascade radiative est liée au fait que l'émission spontanée est une émission « induite » par les fluctuations du vide qui sont *isotropes*. L'équation (I.12) peut encore s'écrire :

$$\left(\frac{d}{dt} a\rho_q^k \right)_{\text{tr}} = \Theta(b, a, k) \cdot {}_b \rho_q^k. \quad (I.14)$$

Pour trouver la signification de γ_{ba} , il suffit d'étudier le transfert de population.

Comme la population du niveau α est donnée par

$$P_\alpha = \text{tr}(\rho_\alpha) = \sqrt{2J_\alpha + 1} \cdot \rho_{00}^0,$$

l'équation (I.14) s'écrit, pour $k = 0$,

$$\left(\frac{dP_a}{dt}\right)_{\text{tr}} = \gamma_{ba} \cdot P_b.$$

Donc γ_{ba} est la probabilité de transition par unité de temps.

C. Effet Hanle de transfert. — On étudie dans cette section les effets, sur une cascade radiative, d'un champ magnétique statique H , parallèle à l'axe Oz . Pour cela, on supposera que :

1) Des atomes sont excités de façon continue dans le niveau b , avec un taux de pompage $b\rho_{0q}^k/T$.

2) La seule source d'excitation du niveau a est le transfert de b vers a (eq. I.14).

3) La relaxation, qu'elle soit induite par l'émission spontanée, les collisions, la diffusion multiple, a la symétrie sphérique.

On sait qu'on peut alors introduire un temps de relaxation $T_\beta(k) = 1/\Gamma_\beta(k)$ par grandeur tensorielle ρ^k ($\beta = a$ ou b) [5].

Les équations d'évolution s'écrivent simplement, en explicitant le hamiltonien Zeeman

$$\frac{d}{dt} b\rho_q^k = \frac{b\rho_{0q}^k}{T} + [iqg_b \mu_B H - \Gamma_b(k)] \cdot b\rho_q^k \quad (\text{I.15})$$

et

$$\frac{d}{dt} a\rho_q^k = \Theta(b, a, k) \cdot b\rho_b^k + [iqg_a \mu_B H - \Gamma_a(k)] \cdot a\rho_q^k. \quad (\text{I.16})$$

g_β est le facteur de Landé du niveau β , μ_B le magnéton de Bohr (avec cette notation, la pulsation de Larmor est $\omega_\beta = -g_\beta \cdot \mu_B \cdot H$). La résolution de ces équations en régime stationnaire donne

$$b\rho_q^k(H) = \frac{b\rho_{0q}^k}{T} \cdot \frac{1}{\Gamma_b(k) - iqg_b \mu_B H} \quad (\text{I.17})$$

et

$$a\rho_q^k(H) = \Theta(b, a, k) \cdot \frac{b\rho_q^k(H)}{\Gamma_a(k) - iqg_a \mu_B H}. \quad (\text{I.18})$$

L'étude de la lumière de fluorescence émise par les atomes dans les niveaux a ou b permet la détermination des quantités $a\rho_q^k$ et $b\rho_q^k$. Nous savons en particulier [3] [16] qu'avec un choix adéquat de la polarisation et de la direction d'observation, nous pouvons atteindre les grandeurs transversales liées à la partie réelle de $a\rho_q^k$ et $b\rho_q^k$ ($q \neq 0$).

Posons

$$\Delta H_\beta = \frac{\Gamma_\beta(k)}{qg_\beta \mu_B} \quad \text{et} \quad x_\beta = \frac{H}{\Delta H_\beta}. \quad (\text{I.19})$$

On voit que $\text{Re}(b\rho_q^k)$ est proportionnel à

$$\mathfrak{L}(x_b) = \frac{1}{1 + x_b^2}. \quad (\text{I.20})$$

C'est l'effet Hanle : on observe une courbe de Lorentz de largeur $2\Delta H_b$.

Dans le niveau inférieur, la partie réelle de $a\rho_q^k$ est proportionnelle à

$$\begin{aligned} \text{Re} \left\{ \frac{\Delta H_a}{\Delta H_a - iH} \cdot \frac{\Delta H_b}{\Delta H_b - iH} \right\} &= \\ &= \frac{\alpha(\alpha - x_b^2)}{(1 + x_b^2)(\alpha^2 + x_b^2)} = \mathfrak{C}_\alpha(x_b) \end{aligned} \quad (\text{I.21})$$

où l'on a posé

$$\alpha = \frac{\Delta H_a}{\Delta H_b} = \frac{\Gamma_a(k)}{\Gamma_b(k)} \cdot \frac{g_b}{g_a}, \quad (\text{I.22})$$

On voit donc que la forme de raie s'exprime en fonction du seul rapport des largeurs de raie, ΔH_a et ΔH_b , du niveau supérieur et inférieur. Ce rapport dépend de l'ordre k , mais ne dépend pas de la composante q .

Ce résultat est analogue à celui antérieurement obtenu par O. Nedelec [3]. La seule différence provient de ce que, dans sa théorie, α est indépendant de k et n'est déterminé que par les durées de vie naturelles des niveaux. En fait, les temps de relaxation de l'orientation et de l'alignement peuvent différer considérablement et, par suite, changer la valeur de α . Nous verrons de plus que pour une grandeur tensorielle d'ordre k donné, nous pouvons faire varier α en jouant sur la pression de la vapeur atomique.

Les figures 1a et 1b donnent la forme de courbe $\mathfrak{C}_\alpha(x)$ pour $\alpha > 0$ (g_a et g_b de même signe) et $\alpha < 0$ (g_a et g_b de signes contraires).

FIG. 1. — (I) et (II) effets Hanle simples obtenus par excitation directe des niveaux a et b ; (III) effet Hanle composé obtenu par transfert du niveau b vers le niveau a .

D. Transfert dans le cas d'une excitation laser. —

Nous envisageons maintenant le cas où l'excitation des atomes se fait à l'aide d'une raie laser résonnante pour une transition entre les niveaux supérieur b et inférieur a de ces atomes. Cette excitation introduit de la cohérence hertzienne à l'intérieur des niveaux b et a (${}_a\rho_q^k, {}_b\rho_q^k$) et de la cohérence optique entre ces niveaux (${}_{ab}\rho_q^k$) [16].

1. TRANSFERT SUR UNE TRANSITION DIFFÉRENTE DE LA TRANSITION LASER. — Considérons un niveau c relié par une transition dipolaire électrique au niveau b . La transition a - c est donc interdite (niveaux de même parité) et les éléments de matrice de l'opérateur de transfert S_T entre a et c sont nuls.

Le transfert ne peut coupler ${}_c\rho$ qu'à ${}_b\rho$ et non à ${}_a\rho$ et ${}_{ab}\rho$; tout ce que nous avons dit antérieurement est encore valable par les niveaux b et c [17]. En particulier, la relation (I.18) donne

$${}_c\rho_q^k(H) = \frac{\Theta(b, c, k)}{\Gamma_c(k) - i q g_c \mu_B H} {}_b\rho_q^k(H) \quad (\text{I.24})$$

quelle que soit la forme de variation de ${}_b\rho_q^k$ en fonction de H . Nous verrons en particulier que, pour une excitation laser, dans la plupart des cas, ${}_b\rho_q^k(H)$ garde une forme lorentzienne, indépendamment de l'intensité d'irradiation [8] : l'effet Hanle de transfert variera encore comme $\mathcal{G}_a(x)$.

2. TRANSFERT SUR LA TRANSITION LASER. — Le niveau a est soumis à deux excitations différentes :

- excitation directe par le laser,
- excitation par transfert à partir du niveau b .

Étudions l'importance relative de ces termes *dans le cas des faibles intensités laser*. Pour cela, nous nous servons de la théorie au second ordre en fonction du champ électrique de l'onde laser établie dans une publication précédente [16]. Cette théorie est valable si le « temps de pompage » par le laser n'est pas court devant la durée de vie des niveaux.

${}_a\rho_q^k(H)$ est alors proportionnel à :

$$\frac{1}{\Gamma_a(k) - i q g_a \mu_B H} \cdot \left[1 - \mathcal{A}_{b \rightarrow a}^{(k)} \frac{\gamma_{ba}}{\Gamma_b(k) - i q g_b \mu_B H} \right] \quad (\text{I.27})$$

et donc

$$\text{Re } {}_a\rho_q^k \propto \mathcal{L}(x_a) + \varepsilon \cdot \mathcal{G}_{a'}(x_a). \quad (\text{I.28})$$

On a posé

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{b \rightarrow a}^{(k)} = & (-)^{J_a + J_b + 1} (2 J_b + 1) \frac{\begin{Bmatrix} J_b & J_b & k \\ J_a & J_a & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} k & 1 & 1 \\ J_a & J_b & J_b \end{Bmatrix}}{\begin{Bmatrix} k & 1 & 1 \\ J_b & J_a & J_a \end{Bmatrix}} \end{aligned} \quad (\text{I.29})$$

$$\varepsilon = - \mathcal{A}_{b \rightarrow a}^{(k)} \cdot \frac{\gamma_{ba}}{\Gamma_b(k)} \quad \text{et} \quad \alpha' = \frac{\Gamma_b(k)}{\Gamma_a(k)} \cdot \frac{g_a}{g_b}. \quad (\text{I.30})$$

x_a est défini par les relations (I.19) ⁽²⁾.

Le paramètre ε caractérise l'importance relative, en champ magnétique nul, du terme d'excitation directe et du terme de transfert ⁽³⁾.

I. Transfert de population ($k = 0$). — Pour la population

$$\mathcal{A}_{b \rightarrow a}^{(0)} = 1 \quad \text{et} \quad \varepsilon = - \frac{\gamma_{ba}}{\Gamma_b(0)}. \quad (\text{I.32})$$

L'importance du transfert de population est simplement liée au rapport de la probabilité d'émission spontanée sur la transition $b \rightarrow a$ et de la probabilité de destruction globale de la population du niveau b .

II. Transfert d'alignement ($k = 2$). — Étudions plus particulièrement le cas de l'alignement.

a) Transition laser $J_b = J \Rightarrow J_a = J + 1$:

$$\mathcal{A}_{b \rightarrow a}^{(2)} = \frac{(2 J - 1) 2 J}{(2 J + 2) (2 J + 3)}. \quad (\text{I.33})$$

$\mathcal{A}_{b \rightarrow a}^{(2)}$ part de 0,10 (pour $J = 1$; c'est la valeur la plus faible de $\mathcal{A}_{b \rightarrow a}^{(2)}$) et augmente lentement vers 1, quand J croît (Fig. 3, courbe (I)). Ces faibles valeurs de $\mathcal{A}_{b \rightarrow a}^{(2)}$ sont essentiellement liées au fait que l'excitation laser ne crée que peu d'alignement dans le niveau b . Par ailleurs $\gamma_{ba}/\Gamma_b(2)$ est souvent faible car la probabilité d'émission spontanée sur la transition $b \rightarrow a$ est généralement petite par rapport à la probabilité de destruction globale de l'alignement du niveau supérieur. Il en résulte que dans la plupart des cas le transfert d'alignement est négligeable. Cette situation a été observée pour les raies laser du néon de longueur d'onde 6 328 Å (transition $3 s_2 - 2 p_4$) et 1,15 μ (transition $2 s_2 - 2 p_4$) qui sont des raies $1 \rightarrow 2$. $\gamma_{ba}/\Gamma_b(2)$ n'est jamais supérieur à 10 %, ce qui entraîne que $|\varepsilon|$ est toujours inférieur à 1 % [18].

b) Transition laser $J_b = J \Rightarrow J_a = J$:

$$\mathcal{A}_{b \rightarrow a}^{(2)} = \frac{J(J + 1) - 3}{J(J + 1)}. \quad (\text{I.34})$$

⁽²⁾ L'unité de champ magnétique est prise égale à ΔH_a (largeur du niveau inférieur) contrairement au paragraphe C où on l'avait prise égale à ΔH_b . Le rapport α (équation I.22) est alors remplacé par $\alpha' = 1/\alpha$.

⁽³⁾ Il faut bien faire la distinction entre le coefficient $\Theta(b, a, k)$ qui caractérise de façon générale le transfert sur la transition $b \rightarrow a$, indépendamment des grandeurs tensorielles créées dans les niveaux b et a , et le coefficient $\gamma_{ba} \cdot \mathcal{A}_{b \rightarrow a}^{(k)}$ qui caractérise l'importance relative du transfert dans le niveau a , lorsqu'on tient compte des conditions effectives d'excitation des deux niveaux par la raie laser.

La raie $1 \rightarrow 1$ représente un cas spécial puisque $\mathcal{A}_{b \rightarrow a}^{(2)}$ est négatif et égal à $-0,50$ ⁽⁴⁾. Dans le cas de l'alignement c'est la seule transition pour laquelle les deux effets (excitation directe et transfert) s'ajoutent. Nous avons représenté sur la figure 2a, l'effet Hanle correspondant aux valeurs $\varepsilon = 0,10$ et $\alpha' = 1$. C'est le cas de la raie $\lambda = 6401 \text{ \AA}$ du néon (transition $3s_2-2p_2$), où ε peut atteindre des valeurs de l'ordre de 3 % [8] [19] [20]. Pour les autres valeurs de J , $\mathcal{A}_{b \rightarrow a}^{(2)}$ est positif et inférieur à 1 (Fig. 3, courbe (II)). Le transfert reste faible, mais il est plus important que pour une raie $J \rightarrow J + 1$.

FIG. 2. — (I) effet Hanle simple obtenu par excitation directe du niveau inférieur a de la transition laser ; (II) effet Hanle obtenu par transfert entre les niveaux supérieur b et inférieur a de la transition laser ; (III) courbe de dépolarisation magnétique totale du niveau a .

c) Transition laser $J_b = J \Rightarrow J_a = J - 1$:

$$\mathcal{A}_{b \rightarrow a}^{(2)} = \frac{(2J+2)(2J+3)}{(2J-1)2J}. \quad (\text{I.35})$$

$\mathcal{A}_{b \rightarrow a}^{(2)}$ part de 3,50 (pour $J = 2$; c'est la valeur la plus forte de $\mathcal{A}_{b \rightarrow a}^{(2)}$) et décroît lentement vers 1 (Fig. 3, courbe (III)). Le transfert est très fort et peut être plus important que l'excitation directe ($|\varepsilon| > 1$). Ceci est dû à la faible valeur de l'alignement créé dans le niveau inférieur. Ce phénomène est certainement responsable pour une part importante des effets observés par M. Tsukakoshi et K. Shimoda [21] avec

⁽⁴⁾ Cette particularité est reliée à la valeur négative du facteur de transfert $\Theta(b, a, 2)$.

les raies laser du xénon, $\lambda = 3,51 \mu$ (transition $3d_4-2p_9 : 3 \Rightarrow 2$) et $\lambda = 5,57 \mu$ (transition $3d_4-2p_8 : 4 \Rightarrow 3$) ; étant donné la valeur importante de $\gamma_{ba}/\Gamma_b(2)$, $|\varepsilon|$ peut facilement prendre des valeurs supérieures ou égales à l'unité [22]. Nous avons représenté sur la figure 2b le cas où $\varepsilon = -0,80$ et $\alpha' = 0,07$.

FIG. 3. — Variations du coefficient de transfert de l'alignement, $\mathcal{A}_{b \rightarrow a}^{(2)}$, avec le moment cinétique J . Les points matérialisent les valeurs entières et demi-entières de J . (I) cas d'une transition laser $J_b = J \Rightarrow J_a = J + 1$; (II) transition $J \Rightarrow J$; (III) transition $J \Rightarrow J - 1$.

III. Transfert d'orientation ($k = 1$). — Dans le cas d'une transition laser $J_b = J \Rightarrow J_a = J + 1$

$$\mathcal{A}_{b \rightarrow a}^{(1)} = \frac{J}{J+1} \quad (\text{Fig. 4, courbe I}) \quad (\text{I.36})$$

Pour une transition $J \Rightarrow J$,

$$\mathcal{A}_{b \rightarrow a}^{(1)} = -\frac{J(J+1)-1}{J(J+1)} \quad (\text{Fig. 4, courbe II}) \quad (\text{I.37})$$

et pour une transition $J \Rightarrow J - 1$

$$\mathcal{A}_{b \rightarrow a}^{(1)} = \frac{J+1}{J} \quad (\text{Fig. 4, courbe III}) \quad (\text{I.38})$$

FIG. 4. — Variations du coefficient de transfert de l'orientation $\mathcal{A}_{b \rightarrow a}^{(1)}$, avec le moment cinétique J . Les points matérialisent les valeurs entières et demi-entières de J . (I) cas d'une transition laser $J_b = J \Rightarrow J_a = J + 1$; (II) transition $J \Rightarrow J$; (III) transition $J \Rightarrow J - 1$.

Pour les transitions $J \rightarrow J$ ($J \neq \frac{1}{2}$), $\mathcal{A}_{b \rightarrow a}^{(1)}$ est négatif et l'effet de transfert s'ajoute à l'effet d'excitation directe. Ceci provient de ce que, contrairement à tous les autres cas envisagés (population, alignement, orientation pour les raies $J \rightarrow J + 1$ et $J \rightarrow J - 1$), les orientations créées dans les niveaux a et b par l'irradiation laser ont le même signe ⁽⁵⁾.

Dans tous les cas, la valeur absolue de $\mathcal{A}_{b \rightarrow a}^{(1)}$ est toujours plus proche de 1 que la valeur correspondante de $\mathcal{A}_{b \rightarrow a}^{(2)}$; il en résulte qu'en règle générale, le transfert

⁽⁵⁾ Pour une raie $1/2 \rightarrow 1/2$, $\mathcal{A}_{b \rightarrow a}^{(1)}$ est positif car le facteur de transfert $\Theta(b, a, 1)$ est négatif. Le cas est semblable à celui observé pour le transfert d'alignement sur une raie $1 \rightarrow 1$.

d'orientation n'est jamais très important, ni tout à fait négligeable.

Pour des raisons expérimentales, l'orientation est plus difficile à créer à l'aide d'un faisceau laser, que l'alignement. Par suite il n'est pas possible d'étudier expérimentalement le transfert d'orientation. Cependant il faut en tenir compte pour l'étude de l'orientation du niveau $2p_4$ du néon [24] par la raie laser $6328 \text{ \AA}$. En effet, dans ce cas ($J_b = 1$, $J_a = 2$), $\mathcal{A}_{b \rightarrow a}^{(1)} = 0,50$ et $\gamma_{ba}/\Gamma_b(1)$ varie entre 3 % et 9 % dans la gamme de pressions utilisée : $|\varepsilon|$ varie donc entre 1,5 et 4,5 %.

En conclusion de cette étude, nous dirons donc que l'observation de la dépolarisation magnétique du niveau inférieur d'une transition laser demande quelques précautions.

ANNEXE

Transfert de cohérence hyperfine. — L'analyse du transfert présentée dans les paragraphes précédents est valable chaque fois que l'on étudie le transfert de « cohérences Zeeman » par émission spontanée entre deux niveaux de moment cinétique bien déterminé : ce moment cinétique peut avoir une origine quelconque (moment orbital, spin électronique ou nucléaire). Cependant dans certaines expériences, il est possible d'introduire de la cohérence entre plusieurs niveaux de même configuration mais de moment cinétique total différent : c'est en particulier le cas de la « cohérence hyperfine ». Dans ces cas, il est nécessaire, pour appliquer les calculs précédents, de découpler les divers moments cinétiques. Nous allons étudier ici la transmission de cohérence hyperfine dans le cas le plus courant correspondant à une structure hyperfine petite devant la structure fine. Les moments cinétiques électroniques J' et J des niveaux supérieur et inférieur sont alors de bons nombres quantiques. Ils se couplent au spin nucléaire I pour former les sous-niveaux hyperfins de moment cinétique total F' , G' , ... et F , G , ...

Nous nous intéressons au transfert des grandeurs tensorielles hyperfines, définies par les composantes de la matrice densité sur la base d'énergie :

$${}^{FG}T_q^{(k)} = \sum_{m,n} (-)^{G+n} \langle FGmn | kq \rangle \cdot | Fm \rangle \langle G-n |. \quad (\text{I.39})$$

Sur cette base, le transfert n'est pas simple à écrire. Nous supposons les écarts d'énergie de structure hyperfine très faibles devant l'énergie des photons optiques émis. Cela signifie que la durée d'émission du photon est très courte devant les temps d'évolution de la cohérence hyperfine et que nous pouvons négliger la précession de I et J autour de F pendant cette durée. Il est donc intéressant de considérer la base découplée :

$${}^{JJ}T_{qJ}^{(k_J)} \cdot {}^{II}T_{qI}^{(k_I)} \quad (\text{I.40})$$

formée par des produits d'opérateurs tensoriels irréductibles par rapport au groupe des rotations dans l'espace des variables électroniques et d'opérateurs tensoriels irréductibles par rapport au groupe des rotations dans l'espace des variables nucléaires.

L'émission spontanée ne fait intervenir que la partie électronique de la matrice densité atomique : l'opérateur de transfert S (voir éq. I.11) n'agit pas sur la partie nucléaire, ${}^{II}T_{qI}^{(k_I)}$, et le transfert s'écrit (éq. I.12 et I.13)

$$S {}^{J'J}T_{qJ}^{(k_J)} \cdot {}^{II}T_{qI}^{(k_I)} = \Theta(J', J, k_J) \cdot {}^{JJ}T_{qJ}^{(k_J)} \cdot {}^{II}T_{qI}^{(k_I)} \quad (\text{I.41})$$

avec

$$\Theta(J', J, k_J) = (-)^{J'+J+k_J+1} \cdot \gamma \cdot (2J'+1) \begin{Bmatrix} J' & J' & k_J \\ J & J & 1 \end{Bmatrix}. \quad (\text{I.42})$$

La base (I.40) est réductible par rapport au groupe des rotations dans l'espace total électrons + noyau ; nous pouvons combiner les éléments de cette base de manière à former des ensembles irréductibles (Messiah [14], appendice C, éq. 86)

$${}^{k_I k_J}T_{qJ}^{(k)} = \sum_{q_I q_J} \langle k_I k_J q_I q_J | kq \rangle \cdot {}^{II}T_{q_I}^{(k_I)} \cdot {}^{JJ}T_{q_J}^{(k_J)}. \quad (\text{I.43})$$

Dans cette base, le transfert devient :

$$S \cdot {}^{k_I k_J}T_{qJ}^{(k)} = \Theta(J', J, k_J) \cdot {}^{k_I k_J}T_{qJ}^{(k)}. \quad (\text{I.44})$$

Les opérateurs tensoriels ${}^{F'G'}T_q^{(k)}$ et ${}^{k_I k_J}T_q^{(k)}$ étant obtenus à partir de deux couplages différemment ordonnés des quatre moments cinétiques I , J , J' et J' le passage

de l'un à l'autre se fait à l'aide d'un coefficient 9 J (Messiah [14], appendice C, formule 40a) :

$$\begin{aligned} F'G'T_q^{(k)} &= \\ &= \sum_{k_I k_J} \sqrt{(2F' + 1)(2G' + 1)(2k_I + 1)(2k_J + 1)} \cdot \\ &\quad \cdot \begin{Bmatrix} I & I & k_I \\ J' & J' & k_J \\ F' & G' & k \end{Bmatrix} \cdot {}^{k_I k_J} T_q^{(k)} \quad (\text{I.45}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} {}^{k_I k_J} T_q^{(k)} &= \\ &= \sum_{F, G} \sqrt{(2F + 1)(2G + 1)(2k_I + 1)(2k_J + 1)} \cdot \\ &\quad \cdot \begin{Bmatrix} I & I & k_I \\ J & J & k_J \\ F & G & k \end{Bmatrix} \cdot {}^{FG} T_q^{(k)} \quad (\text{I.46}) \end{aligned}$$

La comparaison des équations (I.44, 45, 46) donne

$$\begin{aligned} S \cdot {}^{F'G'} T_q^{(k)} &= \gamma \cdot (2J' + 1) \sqrt{(2F' + 1)(2G' + 1)} \cdot \\ &\quad \cdot \sum_{F, G} \sqrt{(2F + 1)(2G + 1)} \cdot \beta(F, G) \cdot {}^{FG} T_q^{(k)} \quad (\text{I.47}) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \beta(F, G) &= \sum_{k_I, k_J} (-)^{J+J'+k_J+1} (2k_I + 1)(2k_J + 1) \times \\ &\quad \times \begin{Bmatrix} J & J & k_J \\ J' & J' & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} I & I & k_I \\ J & J & k_J \\ F & G & k \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} I & I & k_I \\ J' & J' & k_J \\ F' & G' & k \end{Bmatrix} \quad (\text{I.48}) \end{aligned}$$

Les relations entre coefficients 6 J et 9 J [23] permettent de simplifier β [17]

$$\begin{aligned} \beta &= (-)^{F+F'+k+1} \times \\ &\quad \times \begin{Bmatrix} F & G & k \\ G' & F' & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} G' & G & 1 \\ J & J' & I \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} F' & F & 1 \\ J & J' & I \end{Bmatrix} \quad (\text{I.49}) \end{aligned}$$

D'où

$$S \cdot {}^{F'G'} T_q^{(k)} = \sum_{F, G} {}^{F'G'} \zeta^{(k)} \cdot {}^{FG} T_q^{(k)} \quad (\text{I.50})$$

avec

$${}^{F'G'} \zeta^{(k)} = (-)^{F+F'+k+1} \cdot \gamma \cdot$$

$$\begin{aligned} &\cdot (2J' + 1) \sqrt{(2F + 1)(2G + 1)(2F' + 1)(2G' + 1)} \cdot \\ &\quad \cdot \begin{Bmatrix} F & G & k \\ G' & F' & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} G' & G & 1 \\ J & J' & I \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} F' & F & 1 \\ J & J' & I \end{Bmatrix} \quad (\text{I.51}) \end{aligned}$$

Si on développe la matrice densité

$$\rho = \sum_{F, G, k, q} {}^{FG} \rho_q^k \cdot {}^{FG} T_q^{(k)} \quad (\text{I.52})$$

L'équation de transfert s'écrit

$$\frac{d}{dt} ({}^{FG} \rho_q^k)_{\text{tr}} = \sum_{F'G'} {}^{F'G'} \zeta^{(k)} \cdot {}^{F'G'} \rho_q^k \quad (\text{I.53})$$

Cette formule nous donne le transfert de grandeurs physiques hyperfines par émission spontanée. De même que dans le cas où il n'existe pas de structure hyperfine, toute grandeur conserve dans l'émission spontanée son caractère tensoriel (ordre k) et son « orientation » dans l'espace (${}^{F'G'} \zeta^{(k)}$ indépendant de q).

Si l'excitation n'a de composantes qu'à l'intérieur du niveau F' , l'équation (I.53) se réduit à

$$\frac{d}{dt} ({}^{FG} \rho_q^k)_{\text{tr}} = {}^{F'F'} \zeta^{(k)} \cdot {}^{F'F'} \rho_q^k \quad (\text{I.54})$$

On voit donc que l'émission spontanée peut introduire des cohérences hyperfines dans la configuration inférieure, même s'il n'y en a pas dans la configuration supérieure. Mais ces cohérences ne seront macroscopiquement différentes de zéro que si la structure hyperfine n'est pas trop grande devant la largeur naturelle des niveaux. Sinon elles s'annulent en moyenne étant donné le grand nombre de précessions qu'elles subissent avant de disparaître d'un niveau ⁽⁶⁾.

Si l'on s'intéresse à un niveau d'arrivée F , (I.54) se réduit à

$$\frac{d}{dt} ({}^{FF} \rho_q^k)_{\text{tr}} = {}^{F'F'} \zeta^{(k)} \cdot {}^{FF} \rho_q^k \quad (\text{I.55})$$

Cette équation s'identifie aux relations (I.13 et 14) si l'on pose

$$\gamma_{F'F} = \gamma \cdot (2J' + 1)(2F + 1) \cdot \begin{Bmatrix} F' & F & 1 \\ J & J' & I \end{Bmatrix}^2 \quad (\text{I.56})$$

$\gamma_{F'F}$ est la probabilité de transition de la raie hyperfine $F' \rightarrow F$. En sommant sur les niveaux d'arrivée F et en se servant de la relation d'orthogonalité des 6 J (Messiah [14], appendice C, éq. 35c), on obtient

$$\sum_F \gamma_{F'F} = \gamma \quad (\text{I.57})$$

γ représente donc la probabilité de transition d'un niveau supérieur F' vers l'ensemble des niveaux inférieurs.

⁽⁶⁾ Cette remarque est d'ailleurs valable toutes les fois que l'on veut observer de la cohérence hyperfine macroscopique. Si la structure hyperfine est grande, on peut cependant observer des cohérences dans le cas de croisement de niveaux (champ magnétique fort) ou en l'imposant par une onde de radiofréquence résonnante.

Bibliographie

- [1] DESCOUBES (J. P.), Diplôme d'Etudes Supérieures, Paris, 1958.
- [2] PEBAY-PEYROULA (J. C.), BROSSEL (J.) et KASTLER (A.), *C. R. Acad. Sci.*, 1957, **245**, 841.
- PEBAY-PEYROULA (J. C.), *J. Phys. Rad.*, 1959, **20**, 677.
- [3] NEDELEC (O.), *J. Physique*, 1966, **27**, 660.
- NEDELEC (O.), Thèse, Grenoble, 1966.
- [4] COHEN-TANNOUDJI (C.), Thèse, Paris, 1961, *Annales de Physique*, 1962, **7**, 423 et 469.
- BARRAT (J. P.) et COHEN-TANNOUDJI (C.), *J. Phys. Rad.*, 1961, **22**, 329 et 443.
- [5] OMONT (A.), *J. Physique*, 1965, **26**, 26 et 576.
- OMONT (A.), Thèse Paris, 1967.
- [6] FANO (U.) et RACAH (G.), Irreducible Tensorial Sets, Acad. Press, New York, 1959.
- [7] FANO (U.), *Rev. Mod. Phys.*, 1957, **29**, 74.
- [8] DUCLOY (M.), FOURNIER (E.) et DECOMPS (B.), *J. Physique*, à paraître.
- [9] SOLEILLET (P.), *J. Phys. Rad.*, 1936, **7**, 77 et 118.
- [10] KASTLER (A.), Thèse, Paris, 1935.
- [11] KIBBLE (B. P.) et PANCHARATNAM (S.), *Proc. Phys. Soc.*, 1965, **86**, 1351.
- [12] LANIEPCE (B. P.), *J. Physique*, 1968, **29**, 427.
- [13] FANO (U.), *Phys. Rev.*, 1953, **90**, 577.
- [14] MESSIAH (A.), Mécanique quantique, Dunod, Paris, 1962.
- [15] DUCLOY (M.) et DUMONT (M.), *C. R. Acad. Sci.*, 1968, **266B**, 340.
- [16] DUMONT (M.) et DECOMPS (B.), *J. Physique*, 1968, **29**, 181.
- [17] DUCLOY (M.), Thèse de Troisième cycle, Paris, 1968.
- [18] DECOMPS (B.) et DUMONT (M.), *J. Physique*, 1968, **29**, 443.
- [19] FOURNIER (E.), Thèse de 3^e cycle, Paris, 1969.
- [20] FOURNIER (E.), DUCLOY (M.), DECOMPS (B.) et DUMONT (M.), *C. R. Acad. Sci.*, 1969, **268B**, 1495.
- [21] TSUKAKOSHI (M.) et SHIMODA (K.), *J. Phys. Soc. Japan*, 1969, **26**, 758.
- [22] DUCLOY (M.), *C. R. Acad. Sci.*, 1969, **268B**, 1575.
- [23] EDMONDS (A. R.), Angular Momentum in quantum mechanics, Princeton, 1957, équations (6.4.3), p. 101 ; (6.4.8), p. 104 ; (6.2.12), p. 97.
- [24] DUMONT (M.) et DECOMPS (B.), *C. R. Acad. Sci.*, 1969, **269B**, 191.
-