



**HAL**  
open science

# Action d'un champ électrique sur un gaz faiblement ionisé - III. Influence des collisions inélastiques sur la fonction de distribution électronique aux basses énergies

Nelly Peyraud

► **To cite this version:**

Nelly Peyraud. Action d'un champ électrique sur un gaz faiblement ionisé - III. Influence des collisions inélastiques sur la fonction de distribution électronique aux basses énergies. *Journal de Physique*, 1968, 29 (11-12), pp.997-1004. 10.1051/jphys:019680029011-12099700 . jpa-00206753

**HAL Id: jpa-00206753**

**<https://hal.science/jpa-00206753>**

Submitted on 4 Feb 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# ACTION D'UN CHAMP ÉLECTRIQUE SUR UN GAZ FAIBLEMENT IONISÉ

## III. INFLUENCE DES COLLISIONS INÉLASTIQUES

### SUR LA FONCTION DE DISTRIBUTION ÉLECTRONIQUE AUX BASSES ÉNERGIES

Par NELLY PEYRAUD,

Laboratoire de Physique des Plasmas, Faculté des Sciences, Orsay.

(Reçu le 7 mars 1968, révisé le 3 mai 1968.)

**Résumé.** — On achève l'étude (commencée dans deux articles précédents [1], [2]) de l'équilibre qui résulte du chauffage par un champ électrique et des pertes par collisions élastiques et inélastiques sur les molécules neutres d'un gaz homogène, faiblement ionisé et optiquement mince pour toutes les transitions. Dans cette deuxième phase de l'étude, on détermine la fonction de distribution électronique pour des énergies inférieures au seuil d'excitation le plus élevé ; les fréquences de collisions élastiques et inélastiques sont représentées par un modèle simple dont on justifie le choix en utilisant l'exemple de l'hydrogène atomique.

**Abstract.** — The study (begun in two previous papers [1], [2]) of the balance between heating by an electric field and losses by elastic and inelastic collisions on neutral molecules of an homogeneous gas weakly ionized and optically thin for all transitions is completed here. In this second part of the work, we determine the electronic distribution function for energies lower than the upper threshold ; elastic and inelastic collision frequencies are described by elementary functions, the choice of which is justified using atomic hydrogen as example.

**Introduction.** — Un plasma homogène, faiblement ionisé et optiquement mince pour toutes les transitions, est soumis à un champ électrique continu ; dans deux articles précédents [1], [2] que nous désignerons tout au long de ce travail par I et II, on a déterminé analytiquement la « queue » de la fonction de distribution (énergies supérieures au seuil d'excitation le plus élevé, c'est-à-dire supérieures au seuil d'ionisation) : d'une part, aux très hautes énergies en I lorsque l'on peut appliquer l'approximation de Born sur les sections efficaces inélastiques ; d'autre part, au voisinage du seuil d'ionisation en II en adoptant des fréquences de collisions inélastiques variant linéairement avec l'énergie électronique ; dans les deux cas, la fréquence de collisions électron-neutre est considérée comme indépendante de l'énergie au moins à partir du seuil d'ionisation.

Dans cette deuxième partie, on se propose de déterminer la fonction de distribution aux basses énergies (inférieures au seuil d'excitation le plus élevé) ; on expose au préalable des propriétés tout à fait générales de l'équation réduite ; elles permettent ensuite de scinder le problème en plusieurs parties que l'on sait résoudre séparément.

1. L'ÉQUATION RÉDUITE. — On rappelle [1] les notations employées et l'équation réduite générale vérifiée

par la fonction de distribution électronique pour toute énergie  $u$  variant de zéro à l'infini :

$$u = \frac{1}{2} \frac{mw^2}{kT} \quad (1) ; \quad u_s = \frac{1}{2} \frac{mw_s^2}{kT} \quad (2)$$

énergie réduite par rapport au  $kT$  des molécules neutres ;

$$f = 4\pi \sqrt{2} \frac{1}{n_e} \left( \frac{kT}{m} \right)^{3/2} u \alpha_{00} \quad (3)$$

$f$  : fonction de distribution électronique réduite,  
 $\alpha_{00}$  : partie isotrope de la fonction de distribution électronique ;

$$a(u) = \frac{M}{3m} \frac{\Gamma_0^2}{v_1^2(u)} \frac{m}{kT} \quad (4)$$

importance relative de l'effet Joule et des collisions élastiques ;

$$b_s(u) = \frac{M}{2m} \frac{Q_{0 \rightarrow s}(u)}{Q_1(u)} \text{ avec } Q_{0 \rightarrow s}(u) = 0 \text{ pour } u < u_s \quad (5)$$

importance relative des collisions inélastiques et élastiques.

En choisissant pour fonction inconnue la fonction  $g$  reliée à  $f$  par la formule :

$$f(u) = \sqrt{u} \exp\left(-\int_0^u \frac{du'}{1+a(u')}\right) g(u) \quad (6)$$

on montre [1] que  $g$  vérifie l'équation réduite générale :

$$u \frac{dg}{du} - \frac{g}{2} + \sum_{s=1}^n \int_u^{u+u_s} \frac{\nu_1(u')}{\nu_1(u)} \frac{b_s(u')}{1+a(u')} \exp\left(\int_{u'}^u \frac{du''}{1+a(u'')}\right) g(u') du' = 0. \quad (7)$$

1.1. *Décomposition en intervalles.* — On peut décomposer l'espace des énergies en intervalles égaux à la distance de deux niveaux consécutifs, soit  $(0, u_1), \dots, (u_{r-1}, u_r), \dots, (u_{n-1}, u_n)$ , puis en l'intervalle infini  $(u_n, +\infty)$ ; cette répartition est schématisée par la figure 1; on note  $g_{r-1,r}$  la restriction de  $g$  à l'intervalle  $(u_{r-1}, u_r)$  et  $g_{r\infty}$  la restriction de  $g$  sur  $(u_r, +\infty)$ .

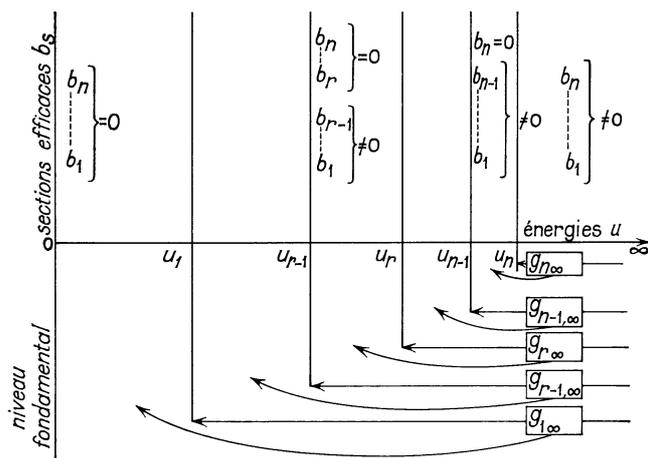


FIG. 1.

Répartition de l'espace des énergies en intervalles (1).

On peut expliciter l'équation (7) dans chacun des intervalles d'énergie représentés par la figure 1 en tenant compte de la propriété du coefficient  $b_s$  (formule (5) et fig. 1) d'être nul pour  $u < u_s$ .

— Pour  $u > u_n$ , l'équation (7) s'écrit :

$$u \frac{dg_{n\infty}}{du} - \frac{g_{n\infty}}{2} + \sum_{s=1}^n \int_u^{u+u_s} \frac{\nu_1(u')}{\nu_1(u)} \frac{b_s(u')}{1+a(u')} \exp\left(\int_{u'}^u \frac{du''}{1+a(u'')}\right) g_{n\infty}(u') du' = 0. \quad (8)$$

— Pour  $u_{r-1} < u < u_r, 2 \leq r \leq n$  :

$$u \frac{dg}{du} - \frac{g}{2} + \sum_{s=1}^{r-1} \int_u^{u+u_s} \frac{\nu_1(u')}{\nu_1(u)} \frac{b_s(u')}{1+a(u')} \exp\left(\int_{u'}^u \frac{du''}{1+a(u'')}\right) g(u') du' + \sum_{s=r}^n \int_{u_s}^{u+u_s} \frac{\nu_1(u')}{\nu_1(u)} \frac{b_s(u')}{1+a(u')} \exp\left(\int_{u'}^u \frac{du''}{1+a(u'')}\right) g(u') du' = 0. \quad (9)$$

Dans l'équation (9), on a :

$$u > u_{r-1} \\ u + u_s > u_{r-1} + u_s \geq u_{r-1} + u_1.$$

D'autre part, les niveaux d'énergie se resserrant (fig. 1) lorsque  $r$  augmente, on a aussi :

$$u_{r-1} + u_1 > u_r$$

et par suite :

$$u + u_s > u_r.$$

On peut donc écrire l'équation (9) en précisant la restriction de  $g$  dans les termes « locaux » (terme en  $dg/du$  et  $g$ ) d'une part, et dans les termes intégrés d'autre part; on obtient (2) :

$$u \frac{dg_{r-1,r}}{du} - \frac{g_{r-1,r}}{2} + \sum_{s=1}^{r-1} \int_u^{u_r} \frac{\nu_1(u')}{\nu_1(u)} \frac{b_s(u')}{1+a(u')} \exp\left(\int_{u'}^u \frac{du''}{1+a(u'')}\right) g_{r-1,r}(u') du' = - \sum_{s=1}^{r-1} \int_{u_r}^{u+u_s} \frac{\nu_1(u')}{\nu_1(u)} \frac{b_s(u')}{1+a(u')} \exp\left(\int_{u'}^u \frac{du''}{1+a(u'')}\right) g_{r\infty}(u') du' - \sum_{s=r}^n \int_{u_s}^{u+u_s} \frac{\nu_1(u')}{\nu_1(u)} \frac{b_s(u')}{1+a(u')} \exp\left(\int_{u'}^u \frac{du''}{1+a(u'')}\right) g_{r\infty}(u') du' = -N_{r\infty}(u). \quad (10)$$

— Pour  $0 < u < u_1$  (3) :

$$u \frac{dg_{01}}{du} - \frac{g_{01}}{2} = - \sum_{s=1}^n \int_{u_s}^{u+u_s} \frac{\nu_1(u')}{\nu_1(u)} \frac{b_s(u')}{1+a(u')} \exp\left(\int_{u'}^u \frac{du''}{1+a(u'')}\right) g_{1\infty}(u') du' = -N_{1\infty}(u). \quad (11)$$

(1) Dans un atome réel, le nombre  $n$  correspondant à la plus haute énergie d'excitation (niveau d'ionisation) est infini; le nombre d'intervalles  $(u_{r-1}, u_r)$  divisant l'intervalle  $(0, u_n)$  est infini dénombrable.

Les équations (8), (10) et (11) montrent que l'on peut résoudre l'équation (7) de proche en proche en progressant des énergies les plus élevées vers les énergies les plus basses (fig. 1).

(2) La notation utilisée en indice ( $r\infty$ ) pour désigner le second membre de l'équation (10) rappelle qu'il ne fait intervenir la fonction  $g$  qu'au-delà de l'énergie  $u_r$ .

(3) La notation utilisée en indice ( $1\infty$ ) pour désigner le second membre de l'équation (11) rappelle qu'il ne fait intervenir la fonction  $g$  qu'au-delà de l'énergie  $u_1$ .

— L'équation (8) est linéaire, homogène, intégrodifférentielle du premier ordre; sa solution et par suite la restriction  $g_{n\infty}$  de sa solution contiennent une constante de proportionnalité  $K_{n\infty}$ . Ce problème est traité intégralement en I et II.

— L'équation (10) est linéaire, intégrodifférentielle du premier ordre avec un second membre connu (par la résolution des équations pour  $u > u_r$ ); sa solution et la restriction  $g_{r-1,r}$  dépendent d'une constante  $K_{r-1,r}$ .

— L'équation (11) est linéaire, différentielle du premier ordre avec un second membre connu (par la résolution des équations pour  $u > u_1$ ); sa solution et la restriction  $g_{01}$  dépendent d'une constante  $K_{01}$ .

— La solution  $g$  de l'équation (7) est représentée par la réunion des  $n + 1$  restrictions de type  $g_{r-1,r}$ ; elle dépend de  $n + 1$  constantes que l'on déterminera par  $n$  conditions de passage (en  $u_1, \dots, u_r, \dots, u_n$ ) et une condition de normalisation (on remarquera que l'écriture des équations (8), (10) et (11) tient déjà compte de la condition de convergence de  $f$  aux énergies infinies [1]).

En intégrant l'équation (7) entre  $u_r - \varepsilon$  et  $u_r + \varepsilon$  et en faisant tendre  $\varepsilon$  vers zéro, on obtient :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [ug]_{u_r - \varepsilon}^{u_r + \varepsilon} = 0. \quad (12)$$

La condition (12) correspond à la continuité de  $g$  en chaque énergie d'excitation  $u_r$ , c'est-à-dire :

$$g_{r-1,r}(u_r) = g_{r,r+1}(u_r). \quad (13)$$

La condition de normalisation s'écrit :

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(u)}{\sqrt{u}} du = \int_0^{+\infty} \exp\left(-\int_0^u \frac{du'}{1+a(u')}\right) g(u) du = 1. \quad (14)$$

**Nota.** — La condition (13) et l'équation (7) montrent qu'il y a aussi continuité de la dérivée de  $g$ , mais ce n'est pas une condition de détermination des  $n + 1$  constantes; c'est simplement une propriété de la fonction  $g$  qui résulte de la forme du problème.

On peut aussi obtenir la valeur de la discontinuité de la dérivée seconde et des dérivées d'ordres supérieurs; on obtient en particulier à l'aide de l'équation (7) (par dérivation) :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d^2 g_{r,r+1}}{du^2}\right)_{u_r} - \left(\frac{d^2 g_{r-1,r}}{du^2}\right)_{u_r} \\ &= \frac{1}{u_r} \frac{1}{1+a(u_r)} g_{r,r+1}(u_r) \lim_{u \rightarrow u_r} [b_r(u)]. \end{aligned} \quad (15)$$

par valeurs supérieures

La formule (13) montre qu'en général il n'y a pas non plus de discontinuité de la dérivée seconde en  $u_r$  car le coefficient  $b_r(u)$  est continu [3] (fig. 2); il existe cependant des cas particuliers; l'hydrogène en est l'exemple typique [4] : le coefficient  $b_1$  relatif à la

raie Lyman-alpha est discontinu en  $u = u_1$  (fig. 2) et entraîne ainsi une discontinuité de la dérivée seconde au premier seuil d'excitation.

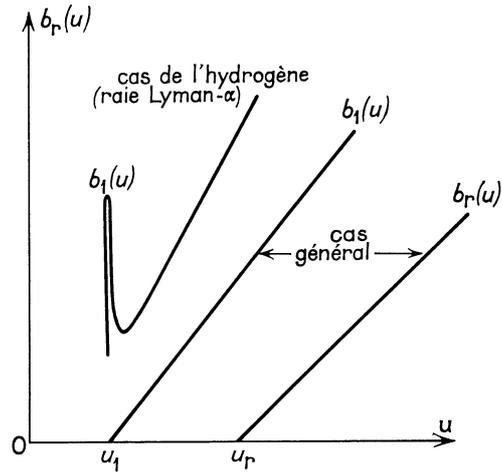


FIG. 2. — Comportement de  $b_r(u)$  au voisinage de  $u_r$ .

C'est donc au niveau de la dérivée troisième qu'apparaît en général la première discontinuité : la figure 2 montre que  $b_r$  est continu en  $u_r$ , mais sa dérivée ne l'est pas; en dérivant encore une fois l'équation (7) et en intégrant entre  $u_r - \varepsilon$  et  $u_r + \varepsilon$ , on obtient :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d^3 g_{r,r+1}}{du^3}\right)_{u_r} - \left(\frac{d^3 g_{r-1,r}}{du^3}\right)_{u_r} \\ &= \frac{1}{u_r} \frac{1}{1+a(u_r)} g_{r,r+1}(u_r) \lim_{u \rightarrow u_r} \left(\frac{db_r}{du}\right). \end{aligned} \quad (16)$$

par valeurs supérieures

1.2. *Approximations.* — Comme on l'a déjà vu en I, la fréquence de collision élastique électron-neutre  $\nu_1$  est pratiquement indépendante de l'énergie pour  $u > u_1$  [3] ( $Q_1 \sqrt{u} \simeq 2 \times 10^{-15}$  (eV)<sup>1/2</sup> cm<sup>2</sup> pour l'hydrogène [1]); on peut donc remplacer  $a(u)$  par sa valeur constante  $a$  prise pour  $u > u_1$  dans les équations (10) et (11), et on posera comme en I et II :

$$\left(\frac{1}{1+a(u)}\right)_{u > u_1} \simeq \frac{1}{1+a} = p_0 > 0. \quad (17)$$

On a vu en II que chaque coefficient  $b_s$  peut être considéré comme fonction linéaire de  $u$  avec une très bonne précision pour toute énergie ne dépassant pas une certaine énergie  $u_0$  (environ  $2u_1$  dans le cas de l'hydrogène); on admettra donc :

$$b_s(u) = a_s(u - u_s) + b_{s_0} \quad (18)$$

pour  $u_s < u < u_n$ .

(4)  $b_{s_0}$  représente l'ordonnée au seuil; elle diffère de zéro dans le cas de la raie Lyman-alpha de l'hydrogène [4].

Compte tenu des approximations (17) et (18), les équations (10) et (11) s'écrivent :

— Pour  $u_{r-1} < u < u_r$ ,  $2 \leq r \leq n$  :

$$u \frac{dg_{r-1,r}}{du} - \frac{g_{r-1,r}}{2} + \sum_{s=1}^{r-1} \int_u^{u_r} (\alpha_s u' - \alpha'_s) e^{p_0(u-u')} g_{r-1,r}(u') du' = -N_{r\infty}(u) \tag{19}$$

avec :

$$\alpha_s = p_0 a_s \tag{20}$$

$$\alpha'_s = p_0(a_s u_s - b_s) \tag{21}$$

$$N_{r\infty}(u) = \sum_{s=1}^{r-1} p_0 \int_{u_r}^{u+u_s} b_s(u') e^{p_0(u-u')} g_{r\infty}(u') du' + \sum_{s=r}^n p_0 \int_{u_s}^{u+u_s} b_s(u') e^{p_0(u-u')} g_{r\infty}(u') du'. \tag{22}$$

— Pour  $0 < u < u_1$  :

$$u \frac{dg_{01}}{du} - \frac{g_{01}}{2} = -N_{1\infty}(u) \tag{23}$$

avec :

$$N_{1\infty}(u) = \sum_{s=1}^n \int_{u_s}^{u+u_s} \frac{\nu_1}{\nu_1(u)} \frac{b_s(u')}{1+a(u)} \exp\left(\int_{u_1}^u \frac{du''}{1+a(u'')} \right) e^{p_0(u_1-u')} g_{1\infty}(u') du'. \tag{24}$$

Le principe de la méthode de détermination de  $g_{n\infty}(u)$  est traité en I et II; on donnera ici une méthode de détermination des tronçons  $g_{r-1,r}(u)$  ( $2 \leq r \leq n$ ) et  $g_{01}(u)$ .

**2. MÉTHODE DE DÉTERMINATION DE  $g_{r-1,r}$  ( $2 \leq r \leq n$ ).**

— On cherchera la solution de l'équation (19) pour  $u$  appartenant à l'intervalle  $(0, +\infty)$ ; on note  $g$  sans indice cette solution; seule la restriction de  $g$  à l'intervalle  $(u_{r-1}, u_r)$  a une signification physique et représente  $g_{r-1,r}$ ; de même, le second membre de l'équation vérifiée par  $g$  n'a de signification physique que pour  $u$  appartenant à l'intervalle  $(u_{r-1}, u_r)$ ; on convient de noter  $-N(u)$  le second membre de l'équation en  $g$ ;  $N$  est égal à  $N_{r\infty}$  pour  $u_{r-1} < u < u_r$  et égal au prolongement analytique de  $N_{r\infty}$  pour  $u < u_{r-1}$  ou  $u > u_r$  (obtenu en prolongeant  $g_{r-1,r}$  à l'intervalle  $(0, u_{r-1})$  ou  $(u_r, +\infty)$ ).  $g$  est solution de l'équation :

$$e^{-p_0 u} \left( u \frac{dg}{du} - \frac{g}{2} \right) + \sum_{s=1}^{r-1} \int_u^{u_r} (\alpha_s u' - \alpha'_s) e^{-p_0 u'} g(u') du' = -N(u) e^{-p_0 u} = -M(u). \tag{25}$$

**2.1. Équation équivalente.** — L'équation (25) est équivalente à l'équation dérivée (26) à condition de la compléter par la condition (27) :

$$\frac{d}{du} \left( u \frac{dg}{du} - \frac{g}{2} \right) - p_0 \left( u \frac{dg}{du} - \frac{g}{2} \right) - (\sigma_{r-1} u - \sigma'_{r-1}) g = -\frac{dM}{du} e^{p_0 u} = -L(u) \tag{26}$$

avec :

$$e^{-p_0 u_r} \left( u \frac{dg}{du} - \frac{g}{2} \right)_{u_r} = -M(u_r) = -M_{r\infty}(u_r) \tag{27}$$

$$\sigma_{r-1} = \sum_{s=1}^{r-1} \alpha_s = p_0 \sum_{s=1}^{r-1} a_s \tag{28}$$

$$\sigma'_{r-1} = \sum_{s=1}^{r-1} \alpha'_s = p_0 \sum_{s=1}^{r-1} (a_s u_s - b_s). \tag{29}$$

On a remplacé l'équation intégral-différentielle (25) du premier ordre par l'équation différentielle (26) du deuxième ordre avec second membre connu; la solution de (26) dépend de deux constantes dont l'une est déterminée par la condition (27); le « tronçon » de fonction  $g_{r-1,r}$  ne dépend donc, comme prévu au § 1.2, que d'une seule constante  $K_{r-1,r}$ .

On peut obtenir la solution générale de l'équation (26) en faisant la somme de la solution générale de l'équation sans second membre et d'une solution particulière de l'équation complète [5].

**2.2. Recherche de la solution générale de l'équation homogène.** — On veut déterminer la solution générale de l'équation homogène :

$$u \frac{d^2 g}{du^2} + \left( \frac{1}{2} - p_0 u \right) \frac{dg}{du} + \left( \frac{p_0}{2} + \sigma'_{r-1} - \sigma_{r-1} u \right) g = 0 \tag{30}$$

$p_{r-1}$  étant un paramètre, on peut faire le changement de fonction inconnue :

$$g(u) = e^{-p_{r-1} u} \eta(u). \tag{31}$$

La fonction  $\eta(u)$  vérifie l'équation :

$$u \frac{d^2 \eta}{du^2} + \left[ \frac{1}{2} - (2p_{r-1} + p_0) u \right] \frac{d\eta}{du} + \left[ \frac{p_0 - p_{r-1}}{2} + \sigma'_{r-1} + (p_{r-1}^2 + p_0 p_{r-1} - \sigma_{r-1}) u \right] \eta = 0. \tag{32}$$

On peut toujours choisir  $p_{r-1}$  égal à la racine positive de l'équation :

$$p_{r-1}^2 + p_0 p_{r-1} - \sigma_{r-1} = 0. \tag{33}$$

On a alors :

$$p_{r-1} = \frac{\sqrt{p_0^2 + 4\sigma_{r-1}} - p_0}{2} > 0. \tag{34}$$

L'équation (32) se réduit à :

$$u \frac{d^2 \eta}{du^2} + \left[ \frac{1}{2} - (2p_{r-1} + p_0) \right] \frac{d\eta}{du} + \left( \sigma'_{r-1} + \frac{3}{4} p_0 - \frac{2p_{r-1} + p_0}{4} \right) \eta = 0. \quad (35)$$

On effectue la transformation suivante :

$$u = \theta x \quad (36)$$

$$\eta(u) = \eta(\theta x) = \varphi(x). \quad (37)$$

$\varphi(x)$  vérifie l'équation :

$$\frac{x}{\theta} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \left[ \frac{1}{2} - (2p_{r-1} + p_0) \theta x \right] \frac{1}{\theta} \frac{d\varphi}{dx} + \left( \sigma'_{r-1} + \frac{3}{4} p_0 - \frac{2p_{r-1} + p_0}{4} \right) \varphi = 0. \quad (38)$$

L'équation (38) est *hypergéométrique conflente* [6] à condition de choisir  $\theta$  de la façon suivante :

$$\theta(2p_{r-1} + p_0) = 1. \quad (39)$$

L'équation (38) s'écrit :

$$x \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \left( \frac{1}{2} - x \right) \frac{d\varphi}{dx} + \gamma_{r-1} \varphi = 0 \quad (40)$$

avec :

$$\gamma_{r-1} = \frac{\sigma'_{r-1} + \frac{3}{4} p_0}{2p_{r-1} + p_0} - \frac{1}{4} = \frac{\sigma'_{r-1} + \frac{3}{4} p_0}{\sqrt{p_0^2 + 4\sigma_{r-1}}} - \frac{1}{4}. \quad (41)$$

**Nota.** — On peut montrer que le paramètre  $\gamma_{r-1}$  est supérieur à  $\frac{1}{2}$  (valeur qu'il prend en l'absence de collisions inélastiques).

En négligeant  $b_{s_0}$  devant  $a_s u_s$ , on obtient :

$$\gamma_{r-1} \simeq \frac{\frac{3}{4} p_0 + p_0 \sum_{s=1}^{r-1} a_s u_s}{\sqrt{p_0^2 + 4p_0 \sum_{s=1}^{r-1} a_s}} - \frac{1}{4} > \frac{\frac{3}{4} p_0 + p_0 u_1 \sum_{s=1}^{r-1} a_s}{\sqrt{p_0^2 + 4p_0 \sum_{s=1}^{r-1} a_s}} - \frac{1}{4}. \quad (42)$$

On peut montrer que la quantité qui figure au second membre de l'inégalité (42) est une fonction croissante de  $\sum_{s=1}^{r-1} a_s$ ; par suite :

$$\gamma_{r-1} > \frac{1}{2} > 0. \quad (43)$$

La solution générale de l'équation (40) peut se mettre sous la forme d'une combinaison linéaire de deux solutions linéairement indépendantes, soit [6] :

$$\varphi(x) = K_{r-1,r} M \left( -\gamma_{r-1}, \frac{1}{2}, x \right) + C_{r-1,r} x^{\frac{1}{2}} M \left[ -\left( \gamma_{r-1} - \frac{1}{2} \right), \frac{3}{2}, x \right] \quad (44)$$

$K_{r-1,r}$  et  $C_{r-1,r}$  sont deux constantes;  $M$  désigne la fonction de Kummer [6] définie par :

$$M(\alpha, \beta, x) = 1 + \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+l-1) x^l}{\beta(\beta+1) \dots (\beta+l-1) l!}. \quad (45)$$

Il en résulte que la solution générale de l'équation homogène (30) est de la forme :

$$g(u) = K_{r-1,r} \Phi_{r-1}(u) + C_{r-1,r} \Psi_{r-1}(u) \quad (46)$$

$\Phi_{r-1}$  et  $\Psi_{r-1}$  sont deux solutions particulières linéairement indépendantes définies par :

$$\Phi_{r-1}(u) = e^{-\gamma_{r-1} u} M \left[ -\gamma_{r-1}, \frac{1}{2}, (2p_{r-1} + p_0) u \right] \quad (47)$$

$$\Psi_{r-1}(u) = e^{-\gamma_{r-1} u} [(2p_{r-1} + p_0) u]^{\frac{1}{2}} M \left[ -\left( \gamma_{r-1} - \frac{1}{2} \right), \frac{3}{2}, (2p_{r-1} + p_0) u \right]. \quad (48)$$

2.3. Recherche d'une solution particulière de l'équation complète. — On désire une solution particulière de l'équation :

$$u \frac{d^2 g}{du^2} + \left( \frac{1}{2} - p_0 u \right) \frac{dg}{du} + \left( \frac{p_0}{2} + \sigma'_{r-1} - \sigma_{r-1} u \right) g = -L(u). \quad (49)$$

On emploie la « méthode de la variation des paramètres » de Lagrange [5]. On recherche une solution particulière de la forme :

$$g(u) = k_{r-1}(u) \Phi_{r-1}(u) + c_{r-1}(u) \Psi_{r-1}(u). \quad (50)$$

Comme on n'a besoin que d'une solution particulière, on peut imposer aux fonctions  $k_{r-1}(u)$  et  $c_{r-1}(u)$  de vérifier :

$$\frac{dk_{r-1}}{du} \Phi_{r-1} + \frac{dc_{r-1}}{du} \Psi_{r-1} = 0. \quad (51)$$

On reporte l'expression (50) dans l'équation (49); compte tenu du fait que  $\Phi_{r-1}$  et  $\Psi_{r-1}$  annulent le premier membre de (49) et de la condition (51), on obtient une seconde condition de détermination de  $\frac{dk_{r-1}}{du}$  et  $\frac{dc_{r-1}}{du}$  :

$$\frac{dk_{r-1}}{du} \frac{d\Phi_{r-1}}{du} + \frac{dc_{r-1}}{du} \frac{d\Psi_{r-1}}{du} = -\frac{L(u)}{u}. \quad (52)$$

Les deux équations (51) et (52) sont compatibles en raison de l'indépendance linéaire des fonctions  $\Phi_{r-1}$  et  $\Psi_{r-1}$ ; on obtient :

$$\frac{dk_{r-1}}{du} = \frac{\Psi_{r-1}}{\Phi_{r-1} \Psi'_{r-1} - \Psi_{r-1} \Phi'_{r-1}} \frac{L}{u} \quad (53)$$

$$\frac{dc_{r-1}}{du} = \frac{-\Phi_{r-1}}{\Phi_{r-1} \Psi'_{r-1} - \Psi_{r-1} \Phi'_{r-1}} \frac{L}{u}. \quad (54)$$

Une intégrale particulière de l'équation sans second membre peut s'écrire :

$$\Phi_{r-1}(u) \int_{u_{r-1}}^u \frac{\Psi_{r-1}(u') L(u')/u'}{\Phi_{r-1}(u') \Psi'_{r-1}(u') - \Psi_{r-1}(u') \Phi'_{r-1}(u')} du' - \Psi_{r-1}(u) \int_{u_{r-1}}^u \frac{\Phi_{r-1}(u') L(u')/u'}{\Phi_{r-1}(u') \Psi'_{r-1}(u') - \Psi_{r-1}(u') \Phi'_{r-1}(u')} du'. \quad (55)$$

La forme particulière (55) fait intervenir les primitives des expressions (53) et (54) s'annulant pour  $u = u_{r-1}$ ; cette forme a l'avantage de ne faire intervenir que la restriction de  $L$  à l'intervalle  $(u_{r-1}, u_r)$ , c'est-à-dire  $L_{r\infty}$ .

2.4. *Solution générale de l'équation complète. Calcul de  $g_{r-1,r}$ .* — La restriction  $g_{r-1,r}$  de  $g$  à l'intervalle  $(u_{r-1}, u_r)$  est de la forme :

$$g_{r-1,r}(u) = \left[ K_{r-1,r} + \int_{u_{r-1}}^u \frac{\Psi_{r-1}(u') L_{r\infty}(u')/u'}{\Phi_{r-1}(u') \Psi'_{r-1}(u') - \Psi_{r-1}(u') \Phi'_{r-1}(u')} du' \right] \Phi_{r-1}(u) + \left[ C_{r-1,r} - \int_{u_{r-1}}^u \frac{\Phi_{r-1}(u') L_{r\infty}(u')/u'}{\Phi_{r-1}(u') \Psi'_{r-1}(u') - \Psi_{r-1}(u') \Phi'_{r-1}(u')} du' \right] \Psi_{r-1}(u). \quad (56)$$

$g_{r-1,r}$  dépend donc, comme prévu au § 2.1, de deux constantes d'intégration  $K_{r-1,r}$  et  $C_{r-1,r}$ .  $\Phi_{r-1}$  et  $\Psi_{r-1}$  représentent respectivement les fonctions données par les formules (47) et (48).

3. DÉTERMINATION DE  $g_{01}$ . — On procède de la même manière qu'au § 2; on cherchera la solution de l'équation (23) pour  $u$  appartenant à l'intervalle  $(0, +\infty)$ ; on note  $g$  sans indice cette solution; seule la restriction de  $g$  à l'intervalle  $(0, u_1)$  a une signification physique et représente  $g_{01}$ ; comme précédemment, on notera  $-N(u)$  le second membre de l'équation vérifiée par  $g$  qui s'écrit alors :

$$u \frac{dg}{du} - \frac{g}{2} = -N(u). \quad (57)$$

L'équation (57) est linéaire du premier ordre avec second membre connu; sa solution générale  $g$  est de la forme :

$$g(u) = -\sqrt{u} \int_0^u \frac{N(u')}{u'^{3/2}} du'. \quad (58)$$

En explicitant la constante d'intégration  $K_{01}$  contenue dans la formule (58), la restriction de  $g$  à l'intervalle  $(0, u_1)$  s'écrit :

$$g_{01}(u) = \left[ K_{01} - \int_0^u \frac{N_{1\infty}(u')}{u'^{3/2}} du' \right] \sqrt{u}. \quad (59)$$

4. MODIFICATIONS DANS LE CAS PARTICULIER DU TYPE HYDROGÈNE. — Il peut arriver que l'on observe

un pic de résonance du coefficient  $b_1$  au voisinage du premier seuil d'excitation  $u_1$ ; c'est le cas de l'hydrogène [4] (fig. 2); on peut schématiser le phénomène de résonance à l'aide de la figure 3, c'est-à-dire :

$$b_1(u) = \text{cte} = b_1 \quad \text{pour } u_1 < u < u_1 + \delta u_1 \\ b_1(u) = a_1(u - u_1) + b_{10} \quad \text{pour } u > u_1 + \delta u_1. \quad (60)$$

Ainsi, l'équation (19) subit un changement de structure seulement pour  $r = 2$  et  $u_1 < u < u_1 + \delta u_1$

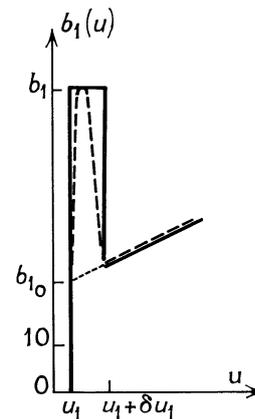


FIG. 3. — Schématisation de  $b_1(u)$  au voisinage de  $u_1$ .

Trait plein :  $b_1(u)$  schématisique.

Trait pointillé :  $b_1(u)$  réel.

et s'écrit dans cette bande d'énergie  $\delta u_1$  (on notera  $g_{12\delta}$  la restriction de  $g_{12}$  à l'intervalle  $(u_1, u_1 + \delta u_1)$ ) :

$$u \frac{dg_{12\delta}}{du} - \frac{g_{12\delta}}{2} + p_0 b_1 \int_u^{u_1 + \delta u_1} e^{p_0(u-u')} g_{12\delta}(u') du' + p_0 \int_{u_1 + \delta u_1}^{u_2} (\alpha_1 u' - \alpha'_1) e^{p_0(u-u')} g_{12}(u') du' = -N_{2\infty}(u). \tag{61}$$

De la même façon qu'en 2, on cherchera la solution  $g$  de l'équation (61) pour  $u$  appartenant à l'intervalle  $(0, +\infty)$ ; comme au § 2.1,  $g$  est solution de l'équation dérivée (62) équivalente à (61) lorsqu'on la complète par la condition (63) :

$$\frac{d}{du} \left( u \frac{dg}{du} - \frac{g}{2} \right) - p_0 \left( u \frac{dg}{du} - \frac{g}{2} \right) - p_0 b_1 g = -L(u) \tag{62}$$

avec :

$$\int_{u_1 + \delta u_1}^{u_2} (\alpha_1 u' - \alpha'_1) e^{-p_0 u'} g(u') du' = -M(u_1 + \delta u_1) - e^{-p_0(u_1 + \delta u_1)} \left( u \frac{dg}{du} - \frac{g}{2} \right)_{u_1 + \delta u_1}. \tag{63}$$

On remarque que l'équation (62) est de la même forme que l'équation (26) à condition de remplacer  $\sigma_{r-1}$  par 0 et  $\sigma'_{r-1}$  par  $-p_0 b_1$ ; pour obtenir la solution générale de (62), il suffit de reprendre exactement la formule (56); on obtient :

$$g_{12\delta}(u) = \left[ K_{12\delta} + \int_{u_1}^u \frac{\Psi_{1\delta}(u') L_{2\infty}(u')/u'}{\Phi_{1\delta}(u') \Psi'_{1\delta}(u') - \Psi_{1\delta}(u') \Phi'_{1\delta}(u')} du' \right] \Phi_{1\delta}(u) + \left[ C_{12\delta} - \int_{u_1}^u \frac{\Phi_{1\delta}(u') L_{2\infty}(u')/u'}{\Phi_{1\delta}(u') \Psi'_{1\delta}(u') - \Psi_{1\delta}(u') \Phi'_{1\delta}(u')} du' \right] \Psi_{1\delta}(u) \tag{64}$$

avec :

$$\Phi_{1\delta}(u) = M \left( b_1 - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, p_0 u \right) \tag{65}$$

$$\Psi_{1\delta}(u) = (p_0 u)^{\frac{1}{2}} M \left( b_1, \frac{3}{2}, p_0 u \right) \tag{66}$$

$g_{12\delta}$  dépend de deux constantes d'intégration; l'une d'entre elles est déterminée par la condition (63). D'autre part, on peut vérifier sur l'équation (10) pour  $r = 2$  que la fonction  $g_{12}$  est continue en  $u_1 + \delta u_1$  (démonstration analogue à celle de la formule (13)) bien que le coefficient  $b_1(u)$  (formule (60)) subisse une discontinuité <sup>(5)</sup>; ainsi la deuxième constante d'intégration est déterminée par la condition :

$$g_{12\delta}(u_1 + \delta u_1) = g_{12}(u_1 + \delta u_1). \tag{67}$$

5. RACCORD DES TRONÇONS DE FONCTION. — On a vu au § 1.1 et dans les articles I et II que  $g_{n\infty}(u)$  est le produit d'une fonction de  $u$  par une constante  $K_{n\infty}$ . La formule (56) montre que  $g_{n-1,n}(u)$  est une combinaison linéaire des trois constantes  $K_{n-1,n}$ ,  $C_{n-1,n}$  et  $K_{n\infty}$  (en effet,  $L_{n\infty}(u)$  contient — comme  $g_{n\infty}$  — la constante  $K_{n\infty}$  en facteur). La relation (13) — appliquée pour  $r = n$  — entre les trois constantes  $K_{n-1,n}$ ,  $C_{n-1,n}$  et  $K_{n\infty}$  est donc linéaire et homogène.

De même, on obtient une seconde relation linéaire, homogène entre ces trois constantes en écrivant la condition (27) pour  $r = n$ . Les constantes  $K_{n-1,n}$  et

$C_{n-1,n}$  sont donc proportionnelles à la constante  $K_{n\infty}$ ;  $g_{n-1,n}$ ,  $g_{n-1,\infty}$  (réunion de  $g_{n-1,n}$  et  $g_{n\infty}$ ),  $M_{n\infty}$ ,  $L_{n\infty}$  contiennent donc implicitement  $K_{n\infty}$  en facteur. On peut continuer ainsi le même raisonnement en progressant vers les basses énergies.

Il en résulte que tous les « tronçons » de fonction  $g_{n\infty}$ ,  $g_{n-1,n}$ , ...,  $g_{r-1,r}$ , ...,  $g_{01}$  contiennent implicitement la même constante de proportionnalité  $K_{n\infty}$ ; cette constatation est normale car l'équation vérifiée par la fonction  $g$  (réunion de tous les « tronçons ») sur tout l'intervalle énergétique est linéaire et homogène en  $g$  (formule (7)).

La constante  $K_{n\infty}$  est déterminée par la condition de normalisation de  $g$  (formule (14)) qui s'écrit :

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(u)}{\sqrt{u}} du = \int_0^{u_1} \frac{f_{01}(u)}{\sqrt{u}} du + \sum_{r=2}^n \int_{u_{r-1}}^{u_r} \frac{f_{r-1,r}(u)}{\sqrt{u}} du + \int_{u_n}^{+\infty} \frac{f_{n\infty}(u)}{\sqrt{u}} du = 1. \tag{68}$$

**Conclusion.** — On a remplacé la résolution d'une équation différentielle non locale dans l'espace des énergies (formule (7) du présent article III) par un problème de calcul numérique : calcul d'intégrales définies et sommation de séries (formule (68) de II et formules (56) et (59) du présent article III).

Les résultats ne sont pas seulement applicables au cas d'un gaz faiblement ionisé; en effet, dans un plasma moyennement ionisé, les collisions électron-électron très importantes en dessous du premier seuil sont largement dominées par les collisions inélastiques lorsque  $u$  est supérieur à  $u_1$ ; les théories précédentes restent donc valables pour la détermination des tronçons  $f_{n\infty}, f_{n-1,n}, \dots, f_{12}$  mais, pour  $u < u_1$ ,  $f$  est donnée

<sup>(5)</sup> On montrerait en utilisant la méthode du § 1.1 (formule (15)) que la représentation schématique (60) du coefficient  $b_1(u)$  introduit la première discontinuité au point  $u_1 + \delta u_1$  au niveau de la dérivée seconde de  $g_{12}$ .

par  $f_{01} = K_{01} u e^{-C_{01} u}$  (distribution maxwellienne). On détermine la constante supplémentaire  $C_{01}$  (température de  $f_{01}$ ) à l'aide de l'équation d'énergie des électrons dans laquelle l'effet des collisions électron-électron ne figure pas (aucune perte d'énergie par ce processus); les seuls termes de pertes sont ceux dus, d'une part, aux collisions élastiques électron-neutre

— terme dépendant surtout de  $f_{01}$  — et d'autre part, aux collisions inélastiques électron-neutre — termes ne dépendant que de la « queue »  $f_{1\infty}$  — de la fonction de distribution. On comprend donc l'importance de la détermination de  $f$  au-dessus du premier seuil d'excitation, même si  $f$  est maxwellienne aux basses énergies, car c'est  $f_{1\infty}$  qui détermine en partie la température de  $f_{01}$ .

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] PEYRAUD (N.), *J. Physique*, 1968, **29**, 201.  
 [2] PEYRAUD (N.), « Action d'un champ électrique sur un gaz faiblement ionisé. II. Influence des collisions inélastiques sur la « queue » de la fonction de distribution électronique : Région du seuil d'ionisation », *J. Physique*, 1968, **29**, 747.  
 [3] DELCROIX (J. L.), *Physique des Plasmas*, tome 2 (1966), Dunod.  
 [4] BURKE (P. G.), TAYLOR (A. J.), ORMONDE (S.) et WHITAKER (W.), Vth International Conference in the Physics of electronic and atomic collisions, Leningrad, USSR, July 17-23, 1967 (abstracts of papers), p. 368.  
 [5] PRISOT (C.), *Cours de Mathématiques* (1961), Paris.  
 [6] ABRAMOWITZ (M.) et STEGUN (I. A.), *Handbook of mathematical functions*.
-