



Calcul de l'entropie statistique d'un plasma hors d'équilibre

G. Laval, R. Pellat, M. Vuillemin

► To cite this version:

G. Laval, R. Pellat, M. Vuillemin. Calcul de l'entropie statistique d'un plasma hors d'équilibre. Journal de Physique, 1967, 28 (8-9), pp.689-700. 10.1051/jphys:01967002808-9068900 . jpa-00206570

HAL Id: jpa-00206570

<https://hal.science/jpa-00206570>

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CALCUL DE L'ENTROPIE STATISTIQUE D'UN PLASMA HORS D'ÉQUILIBRE

Par G. LAVAL, R. PELLAT, M. VUILLEMIN,

Groupe de Recherches de l'Association Euratom-C.E.A. sur la Fusion,
Centre d'Études Nucléaires de Fontenay-aux-Roses (Hauts-de-Seine).

Résumé. — On calcule l'entropie statistique d'un plasma hors d'équilibre en supposant que les corrélations binaires restent petites et en négligeant les corrélations d'ordre supérieur. À l'ordre le plus bas, on obtient une expression qui est une intégrale première approchée des deux premières équations de récurrence. Enfin, si le plasma est spatialement homogène, on en déduit un théorème H qui permet d'étudier l'évolution irréversible de la densité simple dans des situations où l'équation de Balescu-Lenard n'est plus valable.

Abstract. — The Gibbs entropy of a plasma out of equilibrium is obtained by assuming small binary correlation functions and neglecting higher order correlations. In the lowest order, we get a first integral of the hierarchy of equations for the reduced distribution functions. Finally, a H-theorem is demonstrated for a spatially homogeneous plasma when the Balescu-Lenard kinetic equation is valid no longer.

I. Introduction. — Le théorème H permet de montrer que toute solution de l'équation de Boltzmann évolue irréversiblement vers une maxwellienne. Ce théorème reste valable pour l'équation de Balescu-Lenard [1] qui décrit un plasma fortement stable. Si, dans un plasma hors d'équilibre, des micro-instabilités peuvent se développer, ou si le niveau des fluctuations est élevé, on doit utiliser des équations cinétiques plus perfectionnées. En général, elles couplent les évolutions des densités simples et doubles. La quantité H, qui ne dépend que de la densité simple, n'est plus suffisante pour caractériser l'irréversibilité. Or, on sait que H est l'entropie statistique [2], dans laquelle on a négligé la contribution des fonctions de corrélation. En retenant cette contribution à l'ordre le plus bas, et en étudiant son comportement, on saura s'il est possible d'obtenir des équations cinétiques plus générales que l'équation de Balescu-Lenard et dont les solutions correspondent à une évolution irréversible vers un état d'équilibre. L'expression générale de l'entropie statistique en fonction des densités en phase réduite a été donnée par Nettelton et Green [3]. Elle n'est pas explicite car elle fait intervenir des diagrammes qu'il faut dénombrer et dont on ne doit retenir que les termes d'ordre le plus bas. J. Yvon [2] a calculé les quatre premiers termes du développement en série d'intégrales d'essaim d'ordre de plus en plus élevé. Ces termes suffisent pour les gaz constitués de particules interagissant par l'intermédiaire de forces à courte portée. Dans un plasma où le nombre de particules contenues dans la sphère de corrélation est élevé, on doit tenir compte d'une infinité de termes. Nous utiliserons donc une méthode de calcul adaptée aux approximations particulières à ce cas. Dans la

première partie, nous calculons explicitement la contribution à l'ordre le plus bas des corrélations, puis nous montrons que l'expression ainsi obtenue vérifie les propriétés générales d'une entropie statistique et qu'en particulier elle est maximum à l'équilibre thermodynamique. Dans la dernière partie, nous étudions le cas particulier d'un plasma homogène et nous obtenons l'expression qui permet de caractériser l'irréversibilité du système.

II. L'approximation de Kirkwood. — A. LES DENSITÉS EN PHASE. — Nous supposons que toutes les particules constituant le système sont identiques et que leur nombre total n'est pas connu. On profite ainsi de certaines simplifications mathématiques. En particulier, on peut admettre sans restriction l'hypothèse du désordre moléculaire [2] qui permet d'annuler rigoureusement les corrélations entre deux particules éloignées. D'autre part, nous verrons qu'il est alors possible de déterminer les densités en phase à partir des densités réduites et de les mettre sous une forme qui se prête au calcul de l'entropie. Ces avantages pratiques sont analogues à ceux qui sont liés à l'emploi de la grande fonction de partition à l'équilibre thermodynamique.

Nous désignerons par $D_{12\dots N}$ la densité en phase lorsque le système contient N particules, et par $\mu_{12\dots M}^N$ la densité en phase réduite à M particules lorsque le système contient N particules. On a par définition [2] :

$$\mu_{12\dots M}^N = \frac{N!}{(N-M)!} \int D_{12\dots N} d\Omega_{M+1, \dots, M+N} \quad (\text{II.A.1})$$

En extrayant de $G_{M, \dots, M+N}^p$ les diagrammes connexes isolés à $p+1$ sommets et en tenant compte de la symétrie des ε_{ij} , on établit la relation suivante :

$$\begin{aligned} \int \mu_{M+1} \dots \mu_{M+N} G_{M, \dots, M+N}^p F_{M+1, \dots, M+N}^{12 \dots M} d\Omega_{M+1, \dots, M+N} &\equiv \sum_{q \leq \frac{N}{p+1}} \frac{N! [q(p+1)]!}{[N - (p+1)q]! [q(p+1)]! [p+1]^p q!} \\ &\times \left[\int \mu_{M+1} \dots \mu_{M+p+1} g_{M+1 \dots M+p+1} F_{M+1, \dots, M+p+1}^{12 \dots M} d\Omega_{M+1, \dots, M+p+1} \right]^q \\ &\times \int \mu_{M+(p+1)q+1} \dots \mu_{M+N} F_{M+(p+1)q+1, \dots, M+N}^{12 \dots M} G_{M+1+(p+1)q, \dots, M+N}^{p+1} d\Omega_{M+1+(p+1)q, \dots, M+N}. \end{aligned} \quad (\text{II.B.9})$$

Les diagrammes que nous utilisons ont les mêmes propriétés que les diagrammes introduits dans les développements des fonctions thermodynamiques : il suffit de faire jouer à ε_{ij} le même rôle que le potentiel d'interaction. De (II.B.9) on peut encore déduire :

$$\begin{aligned} \sum_{N=p+1}^{\infty} \frac{(-1)^N}{N!} \int \mu_{M+1} \mu_{M+2} \dots \mu_{M+N} G_{M+1, \dots, M+N}^p F_{M+1, \dots, M+N}^{12 \dots M} d\Omega_{M+1, \dots, M+N} \\ \equiv \exp \left\{ \frac{(-1)^{p+1}}{(p+1)!} \int \mu_{M+1} \dots \mu_{M+p+1} g_{M+1, \dots, M+p+1} F_{M+1, \dots, M+p+1}^{12 \dots M} d\Omega_{M+1, \dots, M+p+1} \right\} \\ \sum_{N=p+2}^{\infty} \frac{(-1)^N}{N!} \int \mu_{M+1} \mu_{M+2} \dots \mu_{M+N} G_{M+1, \dots, M+N}^{p+1} F_{M+1, \dots, M+N}^{12 \dots M} d\Omega_{M+1, \dots, M+N}. \end{aligned} \quad (\text{II.B.10})$$

Cette relation de récurrence permet dans (II.B.6) d'éliminer les diagrammes $G_{M+1, \dots, M+N}$ en faisant apparaître les diagrammes $G_{M+1, \dots, M+N}^1$, puis d'éliminer les $G_{M+1, \dots, M+N}$ en faisant apparaître les $G_{M+1, \dots, M+N}^2$ et ainsi de suite ; on obtient enfin :

$$\begin{aligned} M! D_{12 \dots M} = \mu_{12 \dots M} \exp \left\{ \sum_{N=1}^{\infty} \frac{(-1)^N}{N!} \int \mu_{M+1} \dots \mu_{M+N} \right. \\ \left. \times g_{M+1, \dots, M+N} F_{M+1, \dots, M+N}^{12 \dots M} d\Omega_{M+1, \dots, M+N} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{II.B.11})$$

Cette forme exponentielle sera particulièrement utile pour le calcul de l'entropie. Si l'on avait considéré que le nombre de particules était connu et fini, une telle resommation eût été impossible. On aurait pu également déduire cette formule de l'expression générale donnée par Nettelton et Green [3], mais il est plus simple de faire directement le calcul à l'aide de diagrammes adaptés aux approximations que nous avons choisies.

C. L'ENTROPIE STATISTIQUE. — Lorsque le nombre de particules du système peut varier, on définit l'entropie statistique par :

$$k^{-1} S = - \sum_N \int D_{12 \dots N} \log \Gamma_N D_{12 \dots N} d\Omega_{12 \dots N} \quad (\text{II.C.1})$$

où k est la constante de Boltzmann et où Γ_N doit être choisi de telle sorte que S soit une fonction additive pour des systèmes sans corrélation. On posera :

$$\Gamma_N = N! \Gamma^N \quad (\text{II.C.2})$$

où Γ est une constante qui a la dimension de $d\Omega_1$.

Avec cette définition, S conserve les propriétés générales de l'entropie. En particulier, on peut démontrer l'inégalité (Annexe I) :

$$k^{-1} S \leq \int \mu_1 (1 - \log \Gamma \mu_1) d\Omega_1. \quad (\text{II.C.3})$$

Pour un système constitué de particules sans corrélation, c'est-à-dire si $\varepsilon_{12}, \varepsilon_{123}, \dots, \varepsilon_{12 \dots N}, \dots$ sont nuls, et seulement dans ce cas, l'égalité est réalisée. On peut donc écrire :

$$k^{-1} S = \int \mu_1 (1 - \log \Gamma \mu_1) d\Omega_1 + k^{-1} S_c \quad (\text{II.C.4})$$

où S_c représente la contribution des corrélations à S : d'après (II.C.3) elle est négative.

On peut alors définir l'équilibre thermodynamique grand canonique en extrémisant S par rapport à toutes les fonctions $D_{12 \dots N}$ qui satisfont à des contraintes exprimant la conservation du nombre moyen de particules, de la quantité de mouvement moyenne et de l'énergie moyenne.

Si l'on étudie un système isolé, chaque fonction $D_{12 \dots N}$ est solution d'une équation de Liouville dans l'espace des phases à six N dimensions et chacun des termes de la série (II.C.1) est indépendant du temps. Donc S est une constante du mouvement du système total.

Si on pose alors [2] :

$$\begin{aligned} h_1 &= \log \left(1! \frac{D_1}{D_0} \Gamma \right) \\ h_{12} + h_1 + h_2 &= \log \left(2! \frac{D_{12}}{D_0} \Gamma^2 \right) \\ h_{123} + h_{12} + h_{13} + h_{23} + h_1 + h_2 + h_3 &= \log \left(3! \frac{D_{123}}{D_0} \Gamma^3 \right) \\ &\dots \dots \dots \\ \sum_{i=1}^N h_i + \sum_{i < j \leq N} h_{ij} + \dots + h_{12 \dots N} \\ &= \log \left(N! \frac{D_{12 \dots N}}{D_0} \Gamma^N \right) \end{aligned} \quad (\text{II.C.5})$$

de la définition (II.C.1) on déduit la formule :

$$k^{-1}S = -\log D_0 - \int \mu_1 h_1 d\Omega_1 - \frac{1}{2!} \int \mu_{12} h_{12} d\Omega_{12} - \dots - \frac{1}{N!} \int \mu_{12\dots N} h_{12\dots N} d\Omega_{12\dots N}. \quad (\text{I.C.6})$$

Pour calculer $h_1, h_{12}, \dots, h_{12\dots N}, \dots$ on prend le logarithme de (II.B.11) et on remarque que d'après (II.B.7) les décompositions qui figurent dans les premiers membres de (II.C.5) apparaissent déjà dans le logarithme de $D_{12\dots N}$. Donc :

$$\begin{aligned} \log D_0 &= \sum_{N=1}^{\infty} \frac{(-1)^N}{N!} \int \mu_1 \mu_2 \dots \mu_N g_{12\dots N} d\Omega_{12\dots N} \\ h_1 &= \log \Gamma \mu_1 + \sum_{N=1}^{\infty} \frac{(-1)^N}{N!} \int \mu_2 \dots \mu_{N+1} f_{2\dots N+1}^1 g_{2\dots N+1} d\Omega_{2\dots N+1} \\ h_{12} &= \log (1 + \varepsilon_{12}) + \sum_{N=1}^{\infty} \frac{(-1)^N}{N!} \int \mu_3 \dots \mu_{N+2} f_{3,\dots,N+2}^1 f_{3,\dots,N+2}^2 g_{3,\dots,N+2} d\Omega_{3,\dots,N+2} \\ h_{12\dots M} &= \sum_{N=1}^{\infty} \frac{(-1)^N}{N!} \int \mu_{M+1} \dots \mu_{M+N} f_{M+1,\dots,M+N}^1 \dots f_{M+1,\dots,M+N}^M g_{M+1,\dots,M+N} d\Omega_{M+1,\dots,M+N}. \end{aligned} \quad (\text{II.C.7})$$

Il suffit alors de reporter ces valeurs de $D_0, h_1, h_{12}, \dots$, dans (I.C.5) pour obtenir après un regroupement évident :

$$\begin{aligned} k^{-1}S &= - \int \mu_1 \log \Gamma \mu_1 d\Omega_1 - \frac{1}{2} \int \mu_{12} \log (1 + \varepsilon_{12}) d\Omega_{12} - \sum_{N \geq 1} \frac{1}{N!} \sum_{p=1}^N (-1)^p \frac{N!}{p! (N-p)!} \\ &\quad \int \mu_{12\dots N-p} \mu_{N-p+1} \mu_{N-p+2} \dots \mu_N g_{N-p+1,\dots,N} f_{N-p+1,\dots,N}^1 \dots f_{N-p+1,\dots,N}^N d\Omega_{12\dots N}. \end{aligned} \quad (\text{II.C.8})$$

C'est l'expression de l'entropie statistique S calculée en fonction des densités en phase simple et des fonctions de corrélation binaires à partir des seules hypothèses (II.B.2). Elle se présente sous la forme d'une série d'intégrales d'essaims contenant un nombre croissant de particules : on voit en effet sur (I.C.8) que les diagrammes qui figurent dans les intégrales sont tous connexes et ne donnent une contribution que si les sphères de corrélation des particules correspondantes se chevauchent deux à deux.

D. CONTRIBUTION DES CORRÉLATIONS A L'ENTROPIE STATISTIQUE D'UN PLASMA. — Pour obtenir la formule (II.C.8), on a seulement supposé que les fonctions de corrélation irréductibles à plus de deux particules étaient strictement nulles : il faut maintenant y ajouter des hypothèses supplémentaires propres au plasma composé d'une seule espèce de particules chargées et neutralisées globalement. On admet généralement que si N_D représente le nombre moyen de particules contenues dans une sphère de corrélation, ε_{ij} est de l'ordre de N_D^{-1} où N_D est beaucoup plus grand que l'unité. Ici nous ne ferons aucune hypothèse *a priori* sur la relation qui peut exister entre ε qui caractérise l'ordre de grandeur de ε_{ij} et la portée des corrélations. Les fonctions ε_{ij} sont seulement supposées infiniment petites et la portée des corrélations très inférieure aux dimensions du système. On ne peut donc comparer l'ordre de grandeur d'un terme à un autre que s'ils sont contenus dans la même intégrale d'essaim

de (II.C.8) : en effet, une intégration sur l'espace pourra changer les ordres de grandeur relatifs de deux termes contenus dans deux intégrales différentes. Dans chacun des termes de la série (II.C.8), on ne retiendra donc que la contribution d'ordre le plus bas en ε .

Grâce à la symétrie de ε_{ij} , S peut encore s'écrire :

$$\begin{aligned} k^{-1}S &= - \int \mu_1 \log \Gamma \mu_1 d\Omega_1 - \frac{1}{2} \int \mu_{12} \log (1 + \varepsilon_{12}) d\Omega_{12} \\ &\quad - \sum_{N \geq 2} \frac{1}{N!} \int \mu_1 \mu_2 \dots \mu_N d\Omega_{12\dots N} \sum \mathcal{G}_N^p k_p^N (-1)^p \end{aligned} \quad (\text{II.D.1})$$

où $\mathcal{G}_N^p$ représente un terme correspondant à un diagramme connexe à N sommets contenant au moins un diagramme G_p à p sommets, connexe, tel que tout point qui n'est pas dans G_p soit connecté au moins une fois à un point de G_p . Le coefficient k_p^N est un nombre entier égal au nombre de diagrammes G_p ayant la propriété ci-dessus et contenus dans $\mathcal{G}_N^p$. La sommation porte sur tous les diagrammes ainsi définis que l'on peut former à partir des points 1, 2, 3, ..., N . Un même diagramme peut figurer plusieurs fois dans cette somme s'il contient des diagrammes G_p correspondant à des valeurs différentes de p . Par exemple :



figure dans la somme pour la valeur $p = 1$ avec un coefficient $k_1^4 = 1$, $p = 2$ avec $k_2^4 = 3$, $p = 3$ avec $k_3^4 = 3$, et $p = 4$ avec $k_4^4 = 1$. La contribution totale de ce diagramme est nulle puisque :

$$-k_1^4 + k_2^4 - k_3^4 + k_4^4 = 0.$$

On voit qu'on peut calculer la contribution d'un diagramme déterminé et on montre ainsi que tous les diagrammes à N sommets et $N - 1$ arêtes donnent une contribution totale nulle. Seuls subsistent les diagrammes à N sommets et au moins N arêtes. Or l'ordre en ε d'un diagramme est égal au nombre de ses arêtes. Donc, pour obtenir la contribution d'ordre le plus bas, il suffit de calculer celle des diagrammes à N sommets et N arêtes. Parmi ceux-ci, il ne reste alors que les cycles, c'est-à-dire les diagrammes tels que chaque sommet est connecté à deux points et deux seulement. Pour de tels diagrammes, on a $k_p^N = \delta_{N,p}$. Donc à l'ordre le plus bas :

$$k^{-1}S = \int \mu_1(1 - \log \Gamma \mu_1) d\Omega_1 - \frac{1}{4} \int \mu_1 \mu_2 \varepsilon_{12}^2 d\Omega_{12} - \sum_{N \geq 2} \frac{(-1)^N}{N!} \int \mu_1 \mu_2 \dots \mu_N \sum C_N d\Omega_{12 \dots N} \quad (\text{II.D.2})$$

où C_N représente le terme correspondant à un cycle à N sommets et où la sommation s'étend à tous les cycles C_N que l'on peut former à partir des points 1, 2, ..., N . Les ε_{ij} sont symétriques et l'intégrale est indépendante de la répartition des points sur le cycle. On obtient finalement :

$$k^{-1}S = \int \mu_1(1 - \log \Gamma \mu_1) d\Omega_1 - \sum_{N=2}^{\infty} \frac{(-1)^N}{2N} \int \mu_1 \mu_2 \dots \mu_N \varepsilon_{12} \varepsilon_{23} \dots \varepsilon_{N-1,N} \varepsilon_{N1} d\Omega_{12 \dots N}. \quad (\text{II.D.3})$$

On aurait pu aussi obtenir cette même expression par induction à partir des premiers termes du développement général de l'entropie tel qu'il est donné par J. Yvon [2].

Si $\langle N \rangle$ est le nombre moyen de particules contenues dans le système, on a :

$$\int \mu_1 \mu_2 \dots \mu_N \varepsilon_{12} \varepsilon_{23} \dots \varepsilon_{N1} d\Omega_{12 \dots N} \sim \varepsilon \langle N \rangle (\varepsilon N)^{N-1}. \quad (\text{II.D.4})$$

On voit que la convergence de la série peut être très lente si $\varepsilon N_D \sim 1$ et qu'elle peut même diverger si $\varepsilon N_D \gg 1$, ce qui signifierait que nos hypothèses ne sont pas valables. Toutefois, nous verrons que cette expression garde un sens à l'équilibre thermodynamique.

Enfin, il faut encore que les corrélations irréductibles à plus de deux particules ne donnent pas de contribution du même ordre que celle qu'on a retenue dans (II.D.3). Il devient si compliqué de calculer les termes suivants en conservant toutes les fonctions de corrélation qu'on se contentera de le vérifier pour les intégrales d'essaim à deux, trois et quatre parti-

cules. Pour que (II.D.3) représente la contribution à l'ordre le plus bas, il faut supposer que les fonctions de corrélation irréductibles à plus de deux particules ont une portée inférieure ou égale à celle de ε_{12} et qu'elles sont d'ordre supérieur à ε . On justifie ainsi *a posteriori* l'utilisation de l'expression approchée (II.B.2) pour $\mu_{12 \dots N}$.

III. Propriétés de l'entropie statistique d'un plasma.

— A. SOMMATION DE LA CONTRIBUTION DES CORRÉLATIONS. — On remarque d'abord une différence importante entre l'expression (II.D.3) et la formule correspondante pour les gaz formés de particules interagissant par l'intermédiaire de forces à courte portée [2]. Dans ce dernier cas, la contribution des corrélations à l'ordre le plus bas se réduit à une intégrale portant sur les phases de deux particules seulement, mettant ainsi en évidence les interactions binaires. Par contre, lorsque les corrélations sont infiniment petites, comme c'est le cas dans un plasma, le calcul de S à l'ordre le plus bas fait intervenir des intégrales d'essaim portant sur les phases de toutes les particules du système. On voit apparaître ainsi les effets collectifs caractéristiques des forces à longue portée.

Pour obtenir une forme plus concise de S , on peut resommer la série en introduisant l'opérateur P défini par la relation :

$$Pf(\bar{\xi}_1) = \mu_1^{1/2} \int \mu_2^{1/2} \varepsilon_{12} f(\bar{\xi}_2) d\Omega_2 \quad (\text{III.A.1})$$

où $\bar{\xi}_i$ représente les coordonnées de la particule i dans l'espace des phases et $f(\bar{\xi}_i)$ une fonction quelconque de ces coordonnées. Dans cette représentation, on a alors :

$$\int \mu_1 \mu_2 \dots \mu_N \varepsilon_{12} \dots \varepsilon_{N-1,N} \varepsilon_{N1} d\Omega_{12 \dots N} = \text{Tr } P^N \quad (\text{III.A.2})$$

et (I.D.3) devient :

$$k^{-1}S = \int \mu_1(1 - \log \Gamma \mu_1) d\Omega_1 + \frac{1}{2} \text{Tr} [\log(1 + P) - P]. \quad (\text{III.A.3})$$

L'opérateur P est symétrique. Ses valeurs propres sont donc réelles. De plus, la formule fondamentale des fluctuations permet d'écrire :

$$\int \mu_1 f^2(\bar{\xi}_1) d\Omega_1 + \int (\mu_{12} - \mu_1 \mu_2) f(\bar{\xi}_1) f(\bar{\xi}_2) d\Omega_{12} \geq 0 \quad (\text{III.A.4})$$

où f est une fonction quelconque, soit encore :

$$\int g^2(\bar{\xi}_1) d\Omega_1 + \int \mu_1^{1/2} \mu_2^{1/2} g(\bar{\xi}_1) g(\bar{\xi}_2) \varepsilon_{12} d\Omega_{12} \geq 0$$

en posant :

$$g = f\mu_1^{1/2}$$

on a donc :

$$\int g(\bar{\xi}_1) Pg(\bar{\xi}_1) d\Omega_1 \geq - \int g^2(\bar{\xi}_1) d\Omega_1 \quad (\text{III.A.5})$$

où g est une fonction quelconque. Toutes les valeurs propres λ de P sont donc supérieures ou égales à -1 , ce qui était nécessaire pour assurer une définition correcte de l'opérateur qui figure dans (III.A.3). D'autre part, on a toujours [4] :

$$\int \mu_2 \varepsilon_{12} d\Omega_2 = -1$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$P\mu_2^{1/2} = -\mu_1^{1/2}$$

P admet donc toujours -1 comme valeur propre. Toutefois, comme on le vérifiera dans des cas particuliers, le spectre de P est en général continu et la trace de $\log(1+P) - P$ ne diverge pas. Comme $\lambda \geq -1$, on a :

$$\log(1+\lambda) - \lambda \leq 0$$

et :

$$k^{-1}S \leq \int \mu_1(1 - \log \Gamma\mu_1) d\Omega_1.$$

L'expression approchée de S que nous avons obtenue vérifie l'inégalité (I.C.3). Le signe égal correspond uniquement au cas (impossible) où ε_{12} serait identiquement nul, puisque P ne devrait avoir que la valeur propre zéro. Les calculs et les approximations que nous avons faits ont donc conservé les propriétés générales de S .

B. ÉQUILIBRE THERMODYNAMIQUE. — L'équilibre thermodynamique grand canonique d'un plasma peut maintenant se définir à partir de (II.D.3). Les fonctions μ_1 et ε_{12} correspondantes s'obtiennent en extrémalisant l'expression (II.D.3) de S à nombre moyen de particules et énergie moyenne constants. Ces deux contraintes s'écrivent :

$$\int \mu_1 d\Omega_1 = \langle N \rangle \quad (\text{II.B.1})$$

$$\int \frac{1}{2} m v_1^2 \mu_1 d\Omega_1 + \frac{q}{2} \int \mu_{12} V_{12} d\Omega_{12} - q \int n_0 n_1 V_{12} d\bar{r}_1 d\bar{r}_2 = E \quad (\text{II.B.2})$$

où m et q représentent la masse et la charge des particules constituant le système (électrons), $\bar{r}_i \bar{v}_i$ la position et la vitesse de la particule i , V_{12} le potentiel que crée en r_2 la particule située en r_1 , n_0 la densité uniforme des ions qui assurent la neutralité globale et n_1 la densité des électrons ; on a supposé qu'il n'y avait pas de force extérieure appliquée. Si ε_0 est la constante diélectrique du vide, on a :

$$V_{12} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|r_1 - r_2|} \quad (\text{II.B.3})$$

$$\int \mu_1 d\bar{v}_1 = n_1 \quad (\text{II.B.4})$$

$$n_0 = \langle N \rangle / V. \quad (\text{II.B.5})$$

La contrainte (III.B.2) peut encore s'écrire :

$$E = \int \frac{1}{2} m v_1^2 \mu_1 d\Omega_1 + \frac{q}{2} \int \mu_1 \mu_2 \varepsilon_{12} V_{12} d\Omega_{12} - q \int n_1 \left(n_0 - \frac{n_2}{2} \right) V_{12} d\bar{r}_1 d\bar{r}_2. \quad (\text{II.B.6})$$

Cette équation contient ε_{12} . Si l'on n'avait retenu dans (II.D.3) que le terme d'ordre zéro en ε , donc indépendant de ε_{12} , on aurait dû négliger dans (III.B.6) le terme en ε_{12} . Cette équation se réduirait alors à la relation de conservation de l'énergie que l'on déduit de l'équation de Balescu-Lenard [1]. L'extrémalisation de S permettrait alors de trouver la densité en phase simple d'équilibre et l'entropie correspondante serait la même que celle d'un gaz parfait. Les termes en ε_{12} qui figurent dans (II.D.3) nous autorisent maintenant à conserver dans (III.B.6) l'énergie intermoléculaire de corrélation. L'extrémalisation de S doit nous fournir des résultats plus complets. En utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange, nous obtenons les équations d'Euler :

$$-\log \mu_1 - \sum_{N=2}^{\infty} \frac{(-1)^N}{2} \int \mu_2 \dots \mu_N \varepsilon_{12} \dots \varepsilon_{N-1, N} \varepsilon_{N1} d\Omega_{2\dots N} + \alpha$$

$$- \beta \left[\frac{1}{2} m v_1^2 + q \int \mu_2 \varepsilon_{12} V_{12} d\Omega_2 - q \int (n_0 - n_2) V_{12} d\bar{r}_2 \right] = 0 \quad (\text{II.B.7})$$

$$- \sum_{N=2}^{\infty} \frac{(-1)^N}{2} \int \mu_3 \dots \mu_N \varepsilon_{23} \dots \varepsilon_{N1} d\Omega_{3\dots N} - \frac{\beta q}{2} V_{12} = 0 \quad (\text{II.B.8})$$

où α et $-\beta$ sont les multiplicateurs relatifs à (III.B.1) et (III.B.2). En éliminant la série de (III.B.7) à l'aide de (III.B.8), on obtient :

$$-\log \mu_1 + \beta \left[\frac{1}{2} m v_1^2 - q \int (n_0 - n_1) V_{12} d\Omega_2 \right] + \alpha = 0. \quad (\text{III.B.9})$$

Si on impose comme conditions aux limites que le potentiel électrique soit nul à l'infini ou sur les parois qui limitent le système, la seule solution de (III.B.9) correspond à :

$$n_i = n_0$$

$$\mu_1 = n_0 \left(\frac{m\beta}{2\pi} \right)^{-3/2} \exp \left(\frac{-m\beta v_1^2}{2} \right). \quad (\text{III.B.10})$$

Pour calculer ε_{12} , on introduit à nouveau l'opérateur P qui permet d'écrire (II.B.8) sous la forme :

$$- \sum_{N=2}^{\infty} (-1)^{N-2} P^{N-2} \mu_1^{1/2} \varepsilon_{12} = \frac{q}{kT} V_{12} \mu_1^{1/2} \quad (\text{III.B.11})$$

avec $\beta = 1/kT$. Donc :

$$-\frac{1}{1+P}\mu_1^{1/2}\varepsilon_{12} = \frac{q}{kT}V_{12}\mu_1^{1/2} \quad (\text{III.B.12})$$

soit encore :

$$\varepsilon_{12} + \frac{q}{kT}V_{12} + \frac{q}{kT}\mu_3\varepsilon_{13}V_{32}d\Omega_3 = 0. \quad (\text{III.B.13})$$

L'équation (III.B.13) montre que ε_{12} ne dépend ni de $\bar{v}_1$ ni de $\bar{v}_2$. C'est une fonction de $\bar{r}_1 - \bar{r}_2$. Posant alors :

$$\varepsilon_{12}(\bar{k}) = \int \varepsilon_{12}(\bar{r}_1 - \bar{r}_2) e^{-i\bar{k}(\bar{r}_1 - \bar{r}_2)} d\bar{r}_1 \quad (\text{III.B.14})$$

la solution de (II.B.13) est donnée par :

$$\varepsilon_{12}(\bar{k}) = -\frac{1}{n_0} \frac{k_D^2}{k^2 + k_D^2} \quad \text{avec} \quad k_D^2 = n_0 \frac{q^2}{\varepsilon_0 kT}. \quad (\text{III.B.15})$$

C'est l'expression classique de la transformée de Fourier de la fonction de corrélation radiale d'un plasma à l'équilibre thermodynamique [5].

Dans la représentation de Fourier sur l'espace, on a :

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\log(1+P) - P] \\ = \frac{V}{(2\pi)^3} \int [\log(1 + n_0\varepsilon_{12}(\bar{k})) - n_0\varepsilon_{12}(\bar{k})] d\bar{k} \end{aligned} \quad (\text{III.B.16})$$

En reportant dans cette formule l'expression (II.B.15) de S , on calcule facilement l'intégrale sur $\bar{k}$ et :

$$\frac{k^{-1}S}{V} = n_0 \left\{ \frac{5}{2} - \log \left[\left(\frac{2\pi m}{kT} \right)^{3/2} \Gamma n_0 \right] - \frac{k_D^2}{24\pi} \right\}. \quad (\text{III.B.17})$$

Cette formule peut également s'obtenir par développement direct de l'expression générale de S à l'équilibre thermodynamique [6]. Nous avons voulu démontrer ici qu'il était possible de décrire complètement l'équilibre thermodynamique à partir de (II.D.3) et des relations de conservation.

C. L'IRRÉVERSIBILITÉ. — Si le système est en contact avec un thermostat avec lequel il interagit de telle sorte que son énergie moyenne et son nombre moyen de particules restent constants, S n'est pas une constante et rien ne s'oppose à ce que le système évolue vers l'état qui correspond à la valeur maximum de S .

Supposons maintenant le système isolé. On peut écrire :

$$k^{-1}S = \bar{H} + k^{-1}S_0$$

$$\text{avec} \quad H = \int \mu_1(1 - \log \Gamma \mu_1) d\Omega_1$$

$$\text{et} \quad S_0 \leq 0.$$

Puisque S est maintenant une constante du mouvement du système, on a rigoureusement :

$$k[H(t) - H(t=0)] = S_0(t=0) - S_0(t)$$

d'où :

$$H(t) - H(t=0) \leq -k^{-1}S_0(t)$$

Si, lorsque $t \rightarrow \infty$, le système évoluait rigoureusement vers l'équilibre thermodynamique, on aurait :

$$H(\infty) - H(0) \leq (V/24\pi) k_D^3.$$

La variation relative de H serait donc infiniment petite comme $1/N_D$. Or, on sait que l'équation cinétique d'un plasma stable peut décrire la thermalisation de μ_1 , même si μ_1 est initialement très différente d'une maxwellienne. Dans ce cas, H subit une variation relative d'ordre zéro en $1/N_D$, ce qui prouve que l'état final de l'évolution du système n'est pas l'équilibre thermodynamique. C'est évidemment une conséquence de la réversibilité de l'équation de Liouville.

Si, au cours de l'évolution, les hypothèses du paragraphe I.D restent valables, le raisonnement précédent montre que lorsque μ_1 est devenue maxwellienne, ε_{12} n'a pas encore atteint la valeur définie par (III.B.15). Pour tenir compte de la thermalisation de ε_{12} , il faut retenir dans l'expression de S des termes que nous avons supposés d'ordre supérieur.

IV. Plasma spatialement homogène. — **A. REPRÉSENTATION DE FOURIER.** — Nous supposons maintenant que le milieu reste spatialement homogène. Donc, μ_1 ne dépend plus des coordonnées d'espace et ε_{12} est fonction de $\bar{r}_1 - \bar{r}_2$, $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, t . Posant alors :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{12}(\bar{k}, \bar{v}_1, \bar{v}_2) \\ = \int \varepsilon_{12}(\bar{r}_1 - \bar{r}_2, \bar{v}_1, \bar{v}_2) e^{-i\bar{k}(\bar{r}_1 - \bar{r}_2)} d\bar{r}_1 \equiv \varepsilon_{12}(\bar{k}) \end{aligned} \quad (\text{IV.A.1})$$

on en déduit :

$$P e^{i\bar{k}\bar{r}_1} f(\bar{v}_1) = e^{i\bar{k}\bar{r}_1} \int \varepsilon_{12}(\bar{k}, \bar{v}_1, \bar{v}_2) \mu_1^{1/2} \mu_2^{1/2} f(\bar{v}_2) d\bar{v}_2. \quad (\text{IV.A.2})$$

Si pour définir la représentation de P on choisit des fonctions de base proportionnelles à $\exp(i\bar{k} \cdot \bar{r})$, P sera diagonal en tant qu'opérateur agissant dans l'espace de Fourier. De (IV.A.2) on déduit que les éléments diagonaux correspondants $P_{\bar{k}}$ sont encore des opérateurs agissant sur les fonctions de v_1 et définis par :

$$P_{\bar{k}} f(\bar{v}_1) = \int \varepsilon(\bar{k}, \bar{v}_1, \bar{v}_2) \mu_1^{1/2} \mu_2^{1/2} f(\bar{v}_2) d\bar{v}_2. \quad (\text{IV.A.3})$$

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\log(1+P) - P] \\ = \frac{V}{(2\pi)^3} \int \text{Tr}[\log(1+P_{\bar{k}}) - P_{\bar{k}}] d\bar{k} \end{aligned} \quad (\text{IV.A.4})$$

et (II.A.3) devient :

$$k^{-1}S = \int \mu_1(1 - \log \Gamma \mu_1) d\bar{v}_1 + \int \sigma_{\bar{k}} d\bar{k} \quad (\text{IV.A.5})$$

avec

$$S = \int s d^3 \bar{r}_1$$

$$\text{et} \quad \sigma_{\bar{k}} = \frac{1}{2(2\pi)^3} \text{Tr}[\log(1+P_{\bar{k}}) - P_{\bar{k}}].$$

La contribution des corrélations apparaît maintenant comme la somme des contributions de chacun des degrés de liberté dans l'espace de Fourier. L'opérateur P_k est hermitique, puisque :

$$\begin{aligned} \langle \bar{v}_1 | P_{\bar{k}} | \bar{v}_2 \rangle &= \mu_1^{1/2} \mu_2^{1/2} \varepsilon_{12}(\bar{k}, \bar{v}_1, \bar{v}_2) \\ &\equiv \mu_1^{1/2} \mu_2^{1/2} \varepsilon_{12}^*(\bar{v}_2, \bar{v}_1, \bar{k}) \\ &= \langle \bar{v}_2 | P_{\bar{k}} | \bar{v}_1 \rangle^* \end{aligned}$$

et la formule générale (III.A.5) donne :

$$\int g^*(\bar{k}_1 \bar{v}_1) P_{\bar{k}} g(\bar{k}_1 \bar{v}_1) d\bar{v}_1 d\bar{k} \geq \int |g(\bar{k}_1 \bar{v}_1)|^2 d\bar{v}_1 d\bar{k}$$

où $g(\bar{k}_1 \bar{v}_1)$ est une fonction complexe quelconque de $\bar{k}$ et $\bar{v}_1$. Toutes les valeurs propres de $P_{\bar{k}}$ sont réelles et supérieures à -1 , donc :

$$\sigma_{\bar{k}} \leq 0. \quad (\text{IV.A.6})$$

Or, on sait que si des micro-instabilités peuvent se développer dans le plasma, c'est-à-dire si, pour certaines valeurs de k , la relation de dispersion possède des solutions correspondant à des ondes croissantes dans le temps, $\varepsilon_{12}(\bar{k}, \bar{v}_1, \bar{v}_2)$ [7 à 10] est elle-même instable pour ces valeurs de $\bar{k}$. Donc, si dans un plasma où $\varepsilon \sim 1/N_D$ et où la contribution des corrélations est petite on excite des micro-instabilités, on s'attend à ce que l'ordre de grandeur de $\sigma_{\bar{k}}$ change. Comme ces micro-instabilités ont de grandes longueurs d'onde, elles ne peuvent pas diminuer la portée des corrélations. Mais d'après (II.D.4), il suffit que $\varepsilon N_D > 1$ pour que la contribution des corrélations à S change d'ordre de grandeur et devienne très supérieure à sa valeur d'équilibre. Donc, la quantité H définie par :

$$H = \int \mu_1 (1 - \log \Gamma \mu_1) d\bar{v}_1$$

et qui, d'après (III.A.5), satisfait à l'équation :

$$\frac{d}{dt} \left[H + \int \sigma_{\bar{k}} d\bar{k} \right] = 0 \quad (\text{IV.A.7})$$

augmentera d'une quantité importante puisque $\sigma_{\bar{k}} \leq 0$. Mais on peut montrer (Annexe 2) que H est borné supérieurement et que sa borne supérieure ne peut être atteinte que si μ_1 est maxwellienne. On en déduit que l'instabilité tendra à modifier μ_1 pour la rapprocher d'une maxwellienne. En fait, l'instabilité pourra disparaître bien avant que le système ait atteint cet état limite. On comprend ainsi que l'instabilité de la fonction de corrélation ε_{12} puisse entraîner une stabilisation rapide du plasma sans que ε_{12} atteigne des valeurs telles que les hypothèses initiales de ce calcul soient mises en défaut, et sans que l'énergie intermoléculaire de corrélation cesse d'être petite devant l'énergie totale [11]. Il faut malgré tout que les termes négligés restent d'ordre supérieur. Rappelons que de nombreuses expériences ont montré que la thermalisation de la densité en phase simple était beaucoup plus rapide que ne le laissaient prévoir les collisions ordinaires lorsque des micro-instabilités étaient susceptibles d'exister [12].

B. RELATION AVEC LES ÉQUATIONS DE RÉCURRENCE. — On sait [4] qu'à l'ordre le plus bas les deux premières équations de récurrence se découplent des autres et s'écrivent dans le cas homogène :

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \int \frac{\partial}{\partial \bar{r}_1} V_{12} \frac{\partial}{\partial \bar{v}_1} \mu_1 \mu_2 \varepsilon_{12} d\bar{v}_2 d\bar{r}_2 = 0 \quad (\text{IV.B.1})$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial t} + \bar{v}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{r}_1} + \bar{v}_2 \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{r}_2} \right] \varepsilon_{12} + \frac{1}{\mu_1 \mu_2} \frac{\partial \mu_1}{\partial \bar{v}_1} \mu_2 \\ \int \frac{\partial}{\partial \bar{r}_1} V_{13} \varepsilon_{23} \mu_3 d\Omega_3 + \frac{\partial \mu_2}{\partial \bar{v}_2} \mu_1 \int \frac{\partial V_{13}}{\partial \bar{r}_2} \varepsilon_{13} \mu_3 d\Omega_3 \\ + \left[\frac{\partial}{\partial \bar{v}_1} - \frac{\partial}{\partial \bar{v}_2} \right] \mu_1 \mu_2 \frac{\partial V_{12}}{\partial \bar{r}_1} = 0. \quad (\text{IV.B.2}) \end{aligned}$$

Après transformation de Fourier sur l'espace, ces équations deviennent :

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial t} - \frac{ie^2}{m\varepsilon_0(2\pi)^3} \int \frac{d\bar{k}}{k^2} \bar{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{v}_1} \int \varepsilon_{12}(\bar{k}) \mu_1 \mu_2 d\bar{v}_2 = 0 \quad (\text{IV.B.3})$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial t} + i\bar{k}(\bar{v}_1 - \bar{v}_2) \right] \varepsilon_{12}(\bar{k}) - \frac{ie^2}{m\varepsilon_0 k^2 \mu_1 \mu_2} \\ \left[\bar{k} \frac{\partial \mu_1}{\partial \bar{v}_1} \mu_2 \int \varepsilon_{32}(\bar{k}) \mu_3 d\bar{v}_3 - \bar{k} \frac{\partial \mu_2}{\partial \bar{v}_2} \mu_1 \int \varepsilon_{13}(\bar{k}) \mu_3 d\bar{v}_3 \right. \\ \left. + \bar{k} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{v}_1} - \frac{\partial}{\partial \bar{v}_2} \right) \mu_1 \mu_2 \right] = 0. \quad (\text{IV.B.4}) \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\bar{k}}}{dt} = - \frac{1}{2(2\pi)^3} \sum_{N=2}^{\infty} (-1)^N \int \frac{\partial}{\partial t} (\mu_1 \varepsilon_{12}(\bar{k})) \\ \mu_2 \mu_3 \dots \mu_N \varepsilon_{23}(\bar{k}) \dots \varepsilon_{N1}(\bar{k}) d\bar{v}_1 \dots d\bar{v}_N \quad (\text{IV.B.5}) \end{aligned}$$

ou encore :

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\bar{k}}}{dt} = - \frac{1}{2(2\pi)^3} \text{Tr} \left[\frac{P_{\bar{k}}}{1 + P_{\bar{k}}} \frac{\partial P_{\bar{k}}}{\partial t} \right] \\ = - \frac{1}{(2\pi)^3 2} \sum_{N=0}^{\infty} (-1)^N \text{Tr} P_{\bar{k}}^N \frac{\partial P_{\bar{k}}}{\partial t}. \quad (\text{IV.B.6}) \end{aligned}$$

On peut calculer un terme quelconque de cette série à partir des équations (IV.B.3) et (IV.B.4). Toutefois, nous admettrons comme d'habitude que le temps caractéristique de variation de ε_{12} est beaucoup plus court que celui de μ_1 , ce qui nous permet dans (IV.B.5) de négliger $\partial \mu_1 / \partial t$ devant $\partial \varepsilon_{12} / \partial t$. On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\bar{k}}}{dt} = - \frac{1}{2(2\pi)^3} \sum_{N=2}^{\infty} (-1)^N \\ \int \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial t}(\bar{k}) \mu_1 \mu_2 \dots \mu_N \varepsilon_{23}(\bar{k}) \dots \varepsilon_{N1}(\bar{k}) d\bar{v}_1 \dots d\bar{v}_N \quad (\text{IV.B.7}) \end{aligned}$$

et d'après (IV.B.4) :

$$\begin{aligned} & \int \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial t}(\bar{k}) \mu_1 \mu_2 \dots \mu_N \varepsilon_{23}(\bar{k}) \dots \varepsilon_{N1}(\bar{k}) d\bar{v}_1 \dots d\bar{v}_2 \\ & \equiv - \frac{2e^2}{m\varepsilon_0 k^2} \bar{k} I_m \left[\int \frac{\partial \mu_1}{\partial \bar{v}_1} \mu_2 \dots \mu_N \mu_{N+1} \varepsilon_{23}(\bar{k}) \right. \\ & \quad \dots \varepsilon_{N+1,2}(\bar{k}) d\bar{v}_1 \dots d\bar{v}_N d\bar{v}_{N+1} \\ & \quad \left. + \int \frac{\partial \mu_1}{\partial \bar{v}_1} \mu_2 \dots \mu_N \varepsilon_{23}(\bar{k}) \dots \varepsilon_{N1}(\bar{k}) d\bar{v}_1 \dots d\bar{v}_N \right] \end{aligned} \quad (\text{IV.B.8})$$

en remarquant que :

$$\varepsilon_{12}(\bar{k}) = \varepsilon_{21}^*(\bar{k}).$$

On observe que la variation temporelle d'une intégrale contenant le produit de N fonctions de corrélation est la somme de deux intégrales : l'une fait intervenir les vitesses de $N + 1$ particules, l'autre de $N - 1$ particules, mais la règle de formation des deux intégrales est la même. Donc, la variation du $N^{\text{ième}}$ terme de la série due à la première intégrale est exactement compensée par la variation du $N + 1^{\text{ième}}$ terme de la série due à la seconde intégrale. On est en présence d'un mécanisme en « cascade » qui peut être rapproché de celui invoqué par Prigogine [13] pour expliquer la cinétique des corrélations. Nous n'avons pas encore montré que ce mécanisme était irréversible.

Lorsqu'on reporte (IV.B.8) dans (IV.B.5), on constate que tous les termes s'éliminent deux à deux, sauf la seconde intégrale du second membre de (IV.B.8) qui est relative à la valeur $N = 2$. On trouve alors :

$$\frac{d\sigma_{\bar{k}}}{dt} = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{e^2}{m\varepsilon_0 k^2} \bar{k} I_m \int \frac{\partial \mu_1}{\partial \bar{v}_1} \mu_2 \varepsilon_{12}(\bar{k}) d\bar{v}_2 d\bar{v}_1 \quad (\text{IV.B.9})$$

mais de (IV.B.3), on déduit :

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= - \int \frac{\partial \mu_1}{\partial t} (1 + \log \mu_1) d\bar{v}_1 \\ &= - \frac{e^2}{m\varepsilon_0 (2\pi)^3} I_m \int \frac{d\bar{k}}{k^2} \bar{k} \cdot \frac{\partial \mu_1}{\partial \bar{v}_1} \int \varepsilon_{12}(\bar{k}) \mu_2 d\bar{v}_1 d\bar{v}_2 \end{aligned} \quad (\text{IV.B.10})$$

soit :

$$dH/dt = - \int d\bar{k} (d\sigma_{\bar{k}}/dt).$$

L'expression approchée de s définie par (IV.A.5) est une constante à des termes négligeables près. Donc on aurait pu trouver cet invariant intégral directement à partir des équations (IV.B.1) et (IV.B.2). Mais la démonstration générale donnée ci-dessus fait appel à des hypothèses moins restrictives.

C. LA THERMALISATION. — La formule (IV.B.9) peut encore s'écrire :

$$\frac{d\sigma_{\bar{k}}}{dt} = \frac{e^2}{m\varepsilon_0 k^2} \bar{k} \int \frac{\partial \mu_1}{\partial \bar{v}_1} \frac{1}{\mu_1} I_m \psi_{\bar{k}}(\bar{v}_1, t) d\bar{v}_1 \quad (\text{IV.C.1})$$

avec

$$\psi_{\bar{k}}(\bar{v}_1, t) = \int \mu_1 \mu_2 \varepsilon_{12}(\bar{k}) d\bar{v}_2. \quad (\text{IV.C.2})$$

Or, on a montré [14] que si τ est un intervalle de temps assez court pour que la variation de μ_1 puisse être négligée, on avait :

$$\psi_{\bar{k}}(\bar{v}_1, t + \tau) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{(p+p')\tau} dp dp' \psi_{\bar{k}}(\bar{v}_1, p, p') \quad (\text{IV.C.3})$$

$$\begin{aligned} \psi_{\bar{k}}(\bar{v}_1, p, p') &= \frac{\mu_1}{D(-\bar{k}, p') (p + i\bar{k} \cdot \bar{v}_1)} \\ & \quad \left[\frac{1}{p' - i\bar{k} \cdot \bar{v}_1} + \int \frac{\mu_2 \varepsilon_{12}(\bar{k}, t) d\bar{v}_1}{p' - i\bar{k} \cdot \bar{v}_2} \right] \\ & \quad + \frac{ie^2}{m\varepsilon_0 k^2} \frac{\bar{k} \cdot \frac{\partial \mu_1}{\partial \bar{v}_1}}{(p + i\bar{k} \cdot \bar{v}_1) D(k, p) D(-k, p')} \left[\int \frac{\mu_2 d\bar{v}_2}{p + i\bar{k} \cdot \bar{v}_2} \right] \\ & \quad \times \left[\frac{1}{p' - i\bar{k} \cdot \bar{v}_2} + \int \frac{\mu_3 \varepsilon_{23}(\bar{k}, t) d\bar{v}_3}{p' - i\bar{k} \cdot \bar{v}_3} \right] \end{aligned} \quad (\text{IV.C.4})$$

$$D(\bar{k}, p) = 1 - \frac{ie^2}{m\varepsilon_0 k^2} \int \frac{k \cdot \frac{\partial \mu_1}{\partial \bar{v}_1} d\bar{v}_1}{p + i\bar{k} \cdot \bar{v}_1} \quad (\text{IV.C.5})$$

où μ_1 est pris à l'instant t et les contours d'intégration sur p' et p sont définis comme dans les formules d'inversion des transformées de Laplace ; C est le contour de Landau. $\psi_{\bar{k}}(\bar{v}_1, t + \tau)$ se comporte différemment suivant les valeurs de $\bar{k}$; si $D(k, p)$ ne s'annule que pour des valeurs de p dont la partie réelle est négative et très grande en valeur absolue, dans (IV.C.3) les contributions des pôles de $\psi_{\bar{k}}(\bar{v}_1, p, p')$ correspondant au zéro de $D(k, p)$ et $D(-\bar{k}, p')$ s'amortissent après un temps très court et on trouve alors que, si $\varepsilon_{12}(\bar{k}, t)$ est une fonction suffisamment régulière de $\bar{v}_1$ et $\bar{v}_2$, $\psi_{\bar{k}}(\bar{v}_1, t + \tau)$ tend très rapidement vers une constante indépendante de τ et donnée par :

$$\begin{aligned} \psi_{\bar{k}}(\bar{v}_1, t + \tau) &\simeq \psi_{\bar{k}}(\bar{v}_1, t) \\ &= - \frac{\pi e^2}{m\varepsilon_0 k^3} \bar{k} \frac{\bar{\mu}_1 \frac{\partial \mu_1}{\partial \bar{v}_1} - \mu_1 \frac{\partial \bar{\mu}_1}{\partial \bar{v}_1}}{|D(\bar{k}_1 - i\bar{k} \cdot \bar{v}_1)|^2} \end{aligned} \quad (\text{IV.C.6})$$

avec

$$\bar{\mu}_1 \left(\frac{\bar{k} \cdot \bar{v}_1}{k} \right) = \int \mu_1 \delta[\bar{k} \cdot (\bar{v}_1 - \bar{v}_2)/k] d\bar{v}_2.$$

Si la validité de la formule (IV.C.6) s'étend à toutes les valeurs de $\bar{k}$, l'équation d'évolution de μ_1 se réduit à l'équation de Balescu-Lenard. On démontre alors facilement pour cette équation un théorème H qui prouve que μ_1 devient maxwellienne lorsque t tend vers l'infini [1]. Dans ce cas, les considérations aux-

quelles nous nous sommes livrés n'apportent aucune information supplémentaire.

Par contre, si pour certaines valeurs de $\bar{k}$, $D(\bar{k}, p)$ s'annule pour des valeurs de p dont la partie réelle est positive (plasma instable), ou faiblement négative, on ne peut plus négliger la contribution des pôles correspondant au zéro de D . On constate en particulier que $\psi_{\bar{k}}$ dépend de ε_{12} [15]. Dans ces conditions, l'équation de Balescu-Lenard n'est plus valable. On peut encore simplifier les équations d'évolution de μ_1 et ε_{12} au prix d'hypothèses supplémentaires. De plus, il est difficile sur l'équation ainsi obtenue d'étudier l'irréversibilité de l'évolution. Dans ce cas, la connaissance d'une formule explicite pour l'entropie statistique est utile. En effet, on va montrer que les solutions des équations (IV.B.1) et (IV.B.2) possèdent certains caractères de l'irréversibilité, sans ajouter d'hypothèses à celles qui nous ont permis d'obtenir (IV.A.5).

Les zéros de $D(k, p)$ sont donnés par l'équation :

$$1 - \frac{a^2}{k^2} \int \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{v}} \frac{d\bar{v}}{\lambda + \bar{v}}$$

où $a^2 = e^2/m\varepsilon_0$ et $\lambda = -ip/k$.

Si $\partial \bar{\mu}/\partial \bar{v}$ et $\bar{v} \partial \bar{\mu}/\partial \bar{v}$ sont des fonctions sommables bornées et holomorphes au voisinage de l'axe réel, lorsque k tend vers l'infini, $I_m \lambda$ ne peut pas tendre vers zéro et $\text{Re } p$ est nécessairement négatif. Donc, si k est assez grand, les résidus des pôles correspondant aux zéros de $D(k, p)$ et $D(-k, p')$ ont un comportement très rapidement amorti dans le temps. Il existe donc un nombre k_0 tel que si $k > k_0$, après un très court intervalle de temps, la formule (IV.C.6) sera valable et on aura d'après (IV.C.1) :

$$\frac{d\sigma_{\bar{k}}}{dt} = - \frac{\pi e^4}{m^2 \varepsilon_0^2 k^3} \int \bar{k} \frac{\partial \mu_1}{\partial \bar{v}_1} \frac{1}{\mu_1} \bar{k} \frac{\bar{\mu}_1}{|D(\bar{k}_1 - i\bar{k}_1 \bar{v}_1)|^2} \frac{\partial \bar{\mu}_1}{\partial \bar{v}_1} d\bar{v}_1. \quad (\text{IV.C.7})$$

On sait que le second membre de cette équation est négatif [1]. En effet, on peut encore écrire (IV.C.7) :

$$\frac{d\sigma_{\bar{k}}}{dt} = - \frac{\pi e^4}{m^2 \varepsilon_0^2 k^3} \int \frac{dv_{||}}{|D(k_1 - ikv_{||})|^2} \left[\int \mu_1 d\bar{v}_\perp \int \frac{1}{\mu_1} \left(\frac{\partial \mu_1}{\partial v_{||}} \right)^2 d\bar{v}_\perp - \left(\int \frac{\partial \mu_1}{\partial v_{||}} d\bar{v}_\perp \right)^2 \right]$$

avec $v_{||} = \frac{\bar{k} \cdot \bar{v}_1}{k}$ et $\bar{v}_\perp = \bar{v}_1 - \frac{\bar{k} v_{||}}{k}$

L'inégalité de Schwartz donne alors :

$$\left[\int \frac{\partial \mu_1}{\partial v_{||}} d\bar{v}_\perp \right]^2 - \int \mu_1 d\bar{v}_\perp \int \frac{1}{\mu_1} \left(\frac{\partial \mu_1}{\partial v_{||}} \right)^2 d\bar{v}_\perp \leq 0$$

et on ne peut avoir égalité que si :

$$\partial \mu_1 / \partial v_{||} = \lambda(v_{||}) \mu_1 \quad (\text{IV.C.8})$$

où λ est une constante. Comme k peut prendre n'importe quelle direction, on en déduit facilement que

la seule solution de (IV.C.8) est une fonction de la forme :

$$\mu_1 = \exp \left[-\frac{1}{2} A |v_1|^2 + \bar{B} \cdot \bar{v}_1 + C \right] \quad (\text{IV.C.9})$$

donc, si $k > k_0$, on a :

$$d\sigma_{\bar{k}}/dt \leq 0$$

et l'équation (IV.A.7) prend la forme :

$$\frac{d}{dt} \left[H + \int_{k < k_0} \sigma_{\bar{k}} d\bar{k} \right] = - \frac{d}{dt} \int_{k > k_0} \sigma_{\bar{k}} d\bar{k}$$

soit encore

$$\frac{d}{dt} \left[H + \int_{k < k_0} \sigma_{\bar{k}} d\bar{k} \right] \geq 0 \quad (\text{IV.C.10})$$

où l'égalité ne peut avoir lieu que si μ_1 est maxwellienne. L'inégalité (IV.C.10) indique un comportement non réversible : il est dû à la forte absorption des ondes électrostatiques de courte longueur d'onde par effet Landau. Or H est borné supérieurement et $\sigma_{\bar{k}}$ est négatif. Donc lorsque t tend vers l'infini, μ_1 doit tendre vers une fonction telle que :

$$\frac{d}{dt} \left[H + \int_{k < k_0} \sigma_{\bar{k}} d\bar{k} \right] = 0$$

donc vers une maxwellienne.

Nous montrons ainsi que, même si l'équation de Balescu-Lenard n'est pas valable, il suffit de prendre en compte l'effet des corrélations à l'ordre le plus bas pour assurer la thermalisation de μ_1 . Par contre, on sait que ε_{12} n'atteindra pas la valeur d'équilibre. Mais si μ_1 est maxwellienne, le plasma est fortement stable et l'équation de Balescu-Lenard décrira correctement la fin de l'évolution. La quantité $G_{\bar{k}}$ définie par

$$G_{\bar{k}} = \int \mu_1 \mu_2 \varepsilon_{12}(\bar{k}) d\bar{v}_1 d\bar{v}_2$$

s'écrit alors [6] :

$$G_{\bar{k}} = \int \frac{\mu_1 d\bar{v}_1}{|D(\bar{k}_1 - i\bar{k} \cdot \bar{v}_1)|^2}.$$

Si μ_1 est maxwellienne et de la forme :

$$\mu_1 = n_0 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{-3/2} e^{-\frac{m(v-V)^2}{2kT}} \quad (\text{IV.C.11})$$

on obtient :

$$G_{\bar{k}} = -n_0 \frac{k_D^2}{k^2 + k_D^2} \quad \text{avec} \quad k_D^2 = n_0 \frac{q^2}{\varepsilon_0 kT}. \quad (\text{IV.C.12})$$

Les relations de conservation du nombre de particules, de l'énergie et de la quantité de mouvement ne dépendent que de μ_1 et $G_{\bar{k}}$; donc les paramètres qui entrent dans (IV.C.11) et (IV.C.12) sont complètement déterminés par ces relations. Puisqu'elles doivent être également vérifiées par les fonctions μ_1 et $G_{\bar{k}}$ qui correspondent à l'équilibre thermodynamique et que ces fonctions sont alors de la forme (IV.C.11) et (IV.C.12), on peut affirmer

que μ_1 et G_k atteignent toutes deux leurs valeurs d'équilibre.

Quelle que soit l'équation cinétique à laquelle obéit l'évolution du système, l'état final est le même pour les fonctions μ_1 et G_k . Si le plasma peut être décrit par l'équation de Balescu-Lenard, H est une fonction croissante du temps qui atteint son maximum à l'équilibre thermodynamique. Par contre, dans le cas général, H n'est pas nécessairement une fonction croissante du temps; seule la quantité $H + \int_{k < k_0} \sigma_k \bar{d}k$ possède cette propriété. Pour l'interpréter, on peut se représenter le système comme étant constitué de deux ensembles en interaction : un gaz de particules identiques faiblement couplées par le potentiel de Debye dont la thermalisation serait mesurée par la variation de H et des ondes électrostatiques incohérentes pouvant être émises ou absorbées par les particules. Il est alors normal que l'on puisse démontrer que l'évolution du système total se fait dans un sens déterminé, mais on ne doit pas attendre cette propriété de chacun des systèmes partiels.

ANNEXE I

Nous démontrons ici la formule (II.C.3) lorsque le nombre de particules constituant le système n'est pas déterminé. La méthode est analogue à celle qui permet de montrer que l'entropie de la réunion de deux systèmes est inférieure à la somme des entropies de deux systèmes considérés isolément [2]. Pour cela, nous utilisons l'inégalité

$$-x \log x + x \log y \leq y - x \quad x \geq 0, y \geq 0 \quad (\text{A.I.1})$$

où l'égalité correspond uniquement au cas où $x = y$.

D'où, en posant $x = D_{12 \dots N}$ et $y = \frac{\mu_1}{\langle N \rangle} \int D_{12 \dots N} d\Omega_1$, puis en sommant sur l'indice N :

$$\begin{aligned} & - \sum_{N=1}^{\infty} D_{12 \dots N} \log D_{12 \dots N} + \sum_{N=1}^{\infty} D_{12 \dots N} \log \frac{\mu_1}{\langle N \rangle} \\ & \int D_{12 \dots N} d\Omega_1 \leq \frac{\mu_1}{\langle N \rangle} \sum_{N=1}^{\infty} \int D_{12 \dots N} d\Omega_1 - \sum_{N=1}^{\infty} D_{12 \dots N} \end{aligned} \quad (\text{A.I.2})$$

On intègre cette inégalité sur $d\Omega_{12 \dots N}$ et on a :

$$\begin{aligned} & - \sum_{N=1}^{\infty} \int D_{12 \dots N} \log D_{12 \dots N} d\Omega_{12 \dots N} \\ & \leq - \sum_{N=1}^{\infty} \int \frac{\mu_1^N}{N} \log \frac{\mu_1}{\langle N \rangle} d\Omega_1 \\ & - \sum_{N=2}^{\infty} \int d\Omega_{2 \dots N} D_{12 \dots N}^1 \log D_{12 \dots N}^1 - \pi_1 \log \pi_1 \end{aligned} \quad (\text{A.I.3})$$

où

$$D_{12 \dots N}^1 = \int D_{12 \dots N} d\Omega_1 \quad \text{et} \quad \pi_1 = \int D_1 d\Omega_1.$$

En remplaçant dans (A.I.2) $D_{12 \dots N}$ par $D_{12 \dots N}^1$, on obtient une inégalité analogue à (A.I.3) qui permet

de calculer le second membre de (A.I.3) en fonction de $D_{12 \dots N}^2 = \int D_{12 \dots N} d\Omega_{12}$, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait éliminé toutes les fonctions $D_{12 \dots N}$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} & - \sum_{N=1}^{\infty} \int D_{12 \dots N} \log D_{12 \dots N} d\Omega_{12 \dots N} \\ & \leq - \int \mu_1 \log \mu_1 d\Omega_1 + \langle N \rangle \log \langle N \rangle - \sum_{N=1}^{\infty} \pi_N \log \pi_N \end{aligned} \quad (\text{A.I.4})$$

$$\text{avec} \quad \int D_{12 \dots N} d\Omega_{12 \dots N} = \pi_N \quad \text{et} \quad \sum_{N=0}^{\infty} \pi_N = 1.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} k^{-1} S & \leq \int \mu_1 (1 - \log \Gamma(\mu_1)) d\Omega_1 \\ & - \sum_{N=0}^{\infty} \pi_N \log \frac{\pi_N N!}{\langle N \rangle_N \exp - \langle N \rangle}. \end{aligned} \quad (\text{A.I.5})$$

Si, dans (A.I.1), on pose

$$x = \pi_N \quad \text{et} \quad y = \frac{\langle N \rangle^N}{N!} \exp - \langle N \rangle$$

on trouve :

$$\begin{aligned} & - \sum_N \pi_N \log \frac{\pi_N N!}{\langle N \rangle^N \exp - \langle N \rangle} \\ & \leq \sum_N \frac{\langle N \rangle^N}{N!} \exp - \langle N \rangle - 1 = 0 \end{aligned}$$

d'où :

$$k^{-1} S \leq \int \mu_1 (1 - \log \Gamma(\mu_1)) d\Omega_1. \quad (\text{A.I.6})$$

L'égalité n'est strictement réalisée que si le fluide est parfait, c'est-à-dire si :

$$\mu_{12 \dots N} = \mu_1 \mu_2 \dots \mu_N.$$

ANNEXE II

Supposons le plasma homogène et neutralisé globalement. D'après (III.B.1) et (III.B.6), la conservation du nombre de particules et de l'énergie s'écrivent :

$$\int \mu_1 d\bar{v}_1 = N \quad (\text{A.II.1})$$

$$\int \frac{1}{2} m v_1^2 \mu_1 d\bar{v}_1 + \frac{q}{2} \int V_{12} d\bar{r}_2 \int \mu_{12} d\bar{v}_1 d\bar{v}_2 = W \quad (\text{A.II.2})$$

où W et N sont des constantes. D'après (III.A.2), on a donc, puisque $\mu_{12} \geq 0$:

$$\int \frac{1}{2} m v_1^2 \mu_1 d\bar{v}_1 \leq W$$

soit μ_0 une fonction de distribution maxwellienne de la forme :

$$\mu_0 = A e^{-v^2/B}$$

où A et B sont des constantes positives définies par : on déduit de (III.A.3) :

$$W = \int \frac{1}{2} m v_1^2 \mu_0 d\bar{v}_1$$

$$N = \int \mu_0 d\bar{v}_1.$$

On a donc :

$$\int \mu_0 \log \mu_0 d\bar{v}_1 = \int \mu_0 \left[\log A - \frac{v_1^2}{B} \right] d\bar{v}_1$$

$$\text{ou} \quad \int \mu_0 \log \mu_0 d\bar{v}_1 \leq \int \mu_1 \left[\log A - \frac{v_1^2}{B} \right] d\bar{v}_1$$

soit encore :

$$\int \mu_0 \log \mu_0 d\bar{v}_1 \leq \int \mu_1 \log \mu_0 d\bar{v}_1. \quad (\text{A.II.3})$$

Si on pose :

$$H = \int \mu_1 [1 - \log \Gamma \mu_1] d\bar{v}_1$$

$$H_0 = \int \mu_0 [1 - \log \Gamma \mu_0] d\bar{v}_1$$

$$H - H_0 \leq - \int \left[\mu_1 \log \frac{\mu_1}{\mu_0} + \mu_0 - \mu_1 \right] d\bar{v}_1$$

ou, en posant :

$$x = \mu_1 / \mu_0$$

$$H - H_0 \leq - \int \mu_0 [x \log x + 1 - x] d\bar{v}_1$$

soit :

$$H \leq H_0$$

H est donc borné supérieurement par H_0 .

Remerciements. — Nous exprimons notre gratitude à M. le Professeur J. Yvon, à qui nous devons de nombreuses suggestions et critiques. Nous remercions également les Professeurs R. Balescu et D. Pfirsch pour de fructueuses discussions.

Manuscrit reçu le 13 février 1967.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] LENARD (A.), *Ann. physik*, 1960, **3**, 390.
- BALESCU (R.), *Phys. Fluids*, 1960, **3**, 52.
- [2] YVON (J.), Les corrélations et l'entropie, Dunod, 1965.
- [3] NETTLETON (R. E.), GREEN (M. S.), *J. Chem. Physics*, 1958, **29**, 1365.
- [4] YVON (J.), LAVAL (G.), *C. R. Acad. Sc. Paris*, 1965, **261**, 1219-1222.
- [5] YVON (J.), *J. Physique Rad.*, 1958, **19**, 733.
- [6] BALESCU (R.), Statistical Mechanics of Charged Particles, Monographs in Statistical Physics, vol. 4, Interscience Publishers (1963).
- [7] RUTHERFORD (P.), FRIEMAN (E. A.), *Phys. Fluids*, 1963, **6**, 1139.
- [8] KLIMONTOVICH (Yu.), *P.M.T.F.*, 1963, **1**, 14.
- [9] IORDANSKI (S. V.), KULIKOVSKI (A. G.), *Soviet Phys., Doklady*, 1964, **8**, 969.
- [10] BALESCU (R.), *J. Math. Physics*, 1963, **4**, 1009.
- [11] ABRAHAM (B. W.), *J. Math. Physics*, 1965, **6**, 639.
- [12] KADOMTSEV (B. B.), Plasma Turbulence, Academic Press, 1965.
- [13] PRIGOGINE (I.), Non-equilibrium Statistical Mechanics, Monographs in Statistical Physics, vol. 1, Interscience Publishers, 1962.
- [14] LAVAL (G.), PELLAT (R.), EUR-CEA-FC-316, 1965.
- [15] LAVAL (G.), PELLAT (R.), *C. R. Acad. Sc. Paris*, 1964, **258**, 3997.