

Mesure du rapport des chaleurs massiques d'un gaz. Variation en fonction de la fréquence des évolutions imposées. Mesure d'un temps de relaxation

Huetz-Aubert, Berroir, Huetz

► To cite this version:

Huetz-Aubert, Berroir, Huetz. Mesure du rapport des chaleurs massiques d'un gaz. Variation en fonction de la fréquence des évolutions imposées. Mesure d'un temps de relaxation. Journal de Physique, 1966, 27 (1-2), pp.72-82. 10.1051/jphys:01966002701-207200. jpa-00206370

HAL Id: jpa-00206370 https://hal.science/jpa-00206370

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers. L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

MESURE DU RAPPORT DES CHALEURS MASSIQUES D'UN GAZ. VARIATION EN FONCTION DE LA FRÉQUENCE DES ÉVOLUTIONS IMPOSÉES. MESURE D'UN TEMPS DE RELAXATION

Par Mme HUETZ-AUBERT, MM. BERROIR et HUETZ,

Laboratoire de Mécanique et d'Énergétique Générales « Mention Thermique », Faculté des Sciences de Paris.

Résumé. — Deux récipients contenant, l'un le gaz d'étude, l'autre le gaz de référence, sont séparés par un ensemble M et subissent des variations harmoniques de volume grâce à deux membranes métalliques, vibrant en phase à une même fréquence imposée mais avec des amplitudes différentes. Pour un rapport convenable de ces dernières, et à basse fréquence, la différence de pression entre les deux compartiments peut être rendue nulle. Ce réglage est effectué grâce à l'ensemble détecteur M qui comporte une membrane mince dont la fixité est contrôlée par des procédés interférométriques. La mesure du rapport des amplitudes conduit à la détermination du coefficient de compressibilité isentropique X_S , donc du rapport γ des chaleurs massiques Lorsque la fréquence augmente, l'appareil permet de déceler des échanges anormaux entre la translation et la rotation ou la vibration des molécules, ce qui crée un déphasage entre les pressions des deux récipients et provoque des oscillations de la membrane mince M. On en déduit la mesure des temps de relaxation de rotation ou de vibration.

Abstract. — Two vessels containing the gas to be studied and the reference gas, respectively, are separated by a unit M and made to undergo harmonic variations of volume by means of two metal diaphragms vibrating in phase at the same imposed frequency but with different amplitudes. At low frequency, and given a suitable ratio between these amplitudes, the difference in pressure between the two compartments can be reduced to zero. The adjustment is effected by means of the sensing unit M which comprises a thin diaphragm the stability of which is checked by interferometric methods. Measurement of the amplitude ratio leads to determination of the isentropic compressibility coefficient χ_s , and hence of the ratio γ of the mass heats. As the frequency increases, the apparatus permits detection of abnormal transfer between the translation and the rotation or the vibration of the molecules, thus producing a phase shift between the pressures in the two vessels and causing oscillation of the thin diaphragm M. From this it is possible to deduce the rotational or vibrational relaxation times.

I. Phénomène de relaxation intramoléculaire dans les gaz polyatomiques. — En désignant par t, r, srespectivement le nombre de degrés de liberté de translation, de rotation et de vibration d'une molécule d'atomicité $n \ge 2$, on sait que :

t = 3

r = 2 pour une répartition linéaire des atomes (1) r = 3 pour une répartition non linéaire des atomes s = 3n - (t + r).

Lors d'une perturbation, l'énergie fournie se transmet à l'ensemble du gaz par l'intermédiaire d'un nombre de chocs qui dépend essentiellement du degré de liberté considéré ; celui-ci est qualifié d' « externe » (indice ε) s'il évolue de façon quasi instantanée ou d' « interne » (indice i) si la durée de sa variation est mesurable et caractérisée par un « temps de relaxation $\tau \gg [1]$. L'excédent d'énergie emmagasinée par les degrés externes est ensuite cédé progressivement aux degrés internes jusqu'à obtention d'un nouvel état d'équilibre si aucune autre perturbation n'intervient. Au cours de cet échange, les deux groupes externe et interne évoluent le plus souvent chacun en bloc et sont affectés de deux températures distinctes Θ_{ε} , Θ_{i} ; ces dernières sont liées aux énergies des différents états de translation, de rotation ou de vibration, calculées en adoptant une répartition d'équilibre pour les populations sur chaque niveau quantique. La translation, comme nous le supposerons ici, fait généralement partie des degrés externes ; on peut alors poser $\Theta_{\varepsilon} = \Theta$, la température Θ retrouvant sa définition habituelle à partir de l'énergie cinétique décoordonnée des molécules. Nous admettrons également qu'il n'existe pas de degrés « gelés » qui conserveraient en permanence leur énergie initiale sans modification possible.

L'équation de relaxation règle, après la perturbation, la vitesse d'évolution des degrés internes; elle s'établit à partir des probabilités d'excitation ou de désexcitation au cours d'un choc et, malgré les hypothèses simplificatrices, elle se présente sous une forme relativement compliquée [2]; mais, pour des évolutions de faible amplitude et en première approximation, elle devient, le point représentant la dérivée par rapport au temps t:

$$\frac{\partial \Theta_{i}}{\partial t} = \dot{\Theta}_{i} = \frac{1}{\tau} \left[\Theta - \Theta_{i} \right]$$
(2)

à condition de traiter les chaleurs molaires C_p , C_v à pression et à volume constant ainsi que le temps de relaxation τ comme des constantes, c'est-à-dire en négligeant les variations de ces paramètres en fonction de Θ .

Les deux systèmes énergétiques, l'un à Θ , l'autre à Θ_i , figurent deux sources à températures non infiniment voisines et, par conséquent, les échanges d'énergie déterminés par (2) sont irréversibles. Une évolution sans échange de chaleur Q avec l'extérieur apparaît comme adiabatique mais non isentropique et il faut dissocier les deux contributions en écrivant [1]:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \dot{Q} = \dot{Q}_{\epsilon} + \dot{Q}_{i} = C_{v\epsilon} \dot{\Theta} + \Theta \frac{\alpha_{p}}{\chi_{o}} \dot{\Psi} + C_{i} \dot{\Theta}_{i} = 0 \quad (3)$$

 $\alpha_{\mathbf{p}}$, coefficient de dilatation, χ_{Θ} . coefficient de compressibilité isotherme, \Im volume molaire, $C_{\mathbf{vz}}$, C_i chaleurs molaires respectives des degrés externes et internes : $C_{\mathbf{v}} = C_{\mathbf{vz}} + C_i$. L'élimination de Θ_i entre (2) et (3), puis le rem-

L'élimination de Θ_i entre (2) et (3), puis le remplacement de la variable Θ par la pression p conduit, en supprimant les termes à partir du second ordre à [équation II.22, référence 1]:

$$\dot{p}_{\epsilon} + \omega_{\mathbf{w}} p_{\mathbf{e}} + \frac{1}{\chi_{\mathbf{S}\epsilon}} \frac{\dot{\mathbf{v}}_{\mathbf{e}}}{\mathbf{v}_{\mathbf{0}}} + \frac{\omega_{\mathbf{w}}}{\chi_{\mathbf{S}}} \frac{\mathbf{v}_{\mathbf{e}}}{\mathbf{v}_{\mathbf{0}}} = 0.$$
(4)

L'indice e désigne les faibles variation de p ou de \mathfrak{V} autour de leurs valeurs d'équilibre initiales p_0 , \mathfrak{V}_0 ; χ_{s} est le coefficient de compressibilité isentropique, $\chi_{s\varepsilon}$ celui réservé aux seuls degrés externes ; ω_w a les dimensions d'une pulsation et se relie à τ par :

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{w}} = (1/\tau) (C_{\mathbf{v}}/C_{\mathbf{v}\varepsilon}). \tag{5}$$

Rappelons également que :

$$\gamma = C_{\mathfrak{p}}/C_{\mathfrak{r}} = \chi_{\Theta}/\chi_{\mathfrak{s}}, \quad \gamma_{\mathfrak{s}} = C_{\mathfrak{p}\mathfrak{s}}/C_{\mathfrak{r}\mathfrak{s}} = \chi_{\Theta}/\chi_{\mathfrak{s}\mathfrak{s}}. \quad (6)$$

L'équation (4) règle les variations de pression et de volume au cours d'une évolution adiabatique où le phénomène de relaxation intervient ; elle remplace la relation classique :

$$p_{\mathbf{e}} = - (1/\chi_{\mathbf{s}}) (\mathfrak{V}_{\mathbf{e}}/\mathfrak{V}_{\mathbf{0}}) \qquad (4 \ bis)$$

applicable à un phénomène isentropique pour lequel $\tau = 0$, $\omega_w = \infty$.

Nous avons essayé de mesurer ω_w donc τ (5), en imposant à un gaz des compressions et détentes sinusoïdales en fonction du temps, suffisamment

rapides, c'est-à-dire de pulsation ω voisine de $\omega_{\mathbf{w}}$; les termes contenant les dérivées \dot{p}_e et $\dot{\mathfrak{V}}_e$ dans (4) deviennent du même ordre de grandeur que les deux autres, ce qui permet de différencier nettement (4) et (4 bis).

II. Montage expérimental. — II.1. PRINCIPE. — Le principe de toute mesure de τ , fondé sur des perturbations périodiques, implique tout d'abord une prévision de l'ordre de grandeur de ce paramètre. Selon sa valeur, les procédés expérimentaux sont très différents.

Les compressions et détentes successives qu'imposent des ondes ultrasonores stationnaires dans un échantillon du gaz constituent une méthode très employée bien que limitée, les fréquences ultrasonores ne pouvant guère descendre au-dessous de 20 000 Hertz. Lorsque la fréquence décroît encore, la propagation plane disparaît au profit d'une propagation sphérique : la théorie de la relaxation créée par une évolution tridirectionnelle devient très compliquée ainsi que les appareillages expérimentaux dont la taille croît avec la longueur d'onde. C'est pour cette raison que les procédés de mesure directe des temps de relaxation longs ou moyens échappent à cette méthode.

Le principe utilisé ici a pour but de compléter les déterminations ultrasonores en permettant l'exploration du domaine $0 - 20\ 000$ Hertz. Il autorise les mesures comparatives d'où l'on peut cependant tirer des résultats absolus pour τ .

Envisageons deux récipients C_A , C_B (fig. 1), identiques pour simplifier, et possédant une surface commune : dans celle-ci est installé un détecteur M



de différence de pression capable de « suivre » des variations éventuelles à des fréquences inférieures à 20 000 Hertz. Les deux compartiments sont pourvus de deux dispositifs mécaniques mobiles M_A et M_B auxquels on impose des mouvements, sinusoïdaux, en phase, de pulsations ω identiques et variables continuement ; les amplitudes peuvent être réglées séparément. On agit d'abord sur ces dernières pour obtenir, à une fréquence quelconque mais basse, l'égalité des pressions dans les deux compartiments ; le détecteur M ne fournit aucun signal tant que (4 *bis*) reste vérifiée. Quand la fréquence croît, si les termes en \dot{p}_{e} et $\dot{\mathbf{V}}_{e}$ (4) prennent de l'importance pour l'un des gaz et non pour l'autre, l'amplitude de la pression correspondante comme sa phase changent. Le détecteur M accuse une différence de pression due à ce double effet. L'apparition de la relaxation est ainsi décelée à la fréquence correspondante. Les exigences de la réalisation ressortent facilement de l'examen du principe :

En premier lieu, compressions et détentes doivent réaliser dans l'ensemble d'un compartiment l'homogénéité des variables thermodynamiques. Il faut éviter la propagation dans le récipient d'une onde sonore qui provoquerait un système de nœuds et de ventres. Il est indispensable d'obtenir à un instant donné des paramètres p, Θ indépendants de la position de l'élément de volume considéré. Ceci impose des dimensions géométriques aussi faibles que possible et en tous cas inférieures au 1/10 de la longueur d'onde sonore correspondant à la fréquence du piston.

La diminution des dimensions géométriques trouve par ailleurs une autre limitation. Le calcul des pressions développées par le mouvement des pistons implique l'adiabaticité qu'il devient plus difficile de maintenir quand le rapport S/V de la surface du récipient à son volume croît. Il s'agit donc de trouver un compromis. Les récipients adoptés ont une contenance voisine du litre et sont aussi voisins que possible de la forme sphérique.

Enfin, deux points que nous allons examiner successivement sont particulièrement délicats : la détection des différences de pression par un dispositif à inertie faible ; la manière d'imposer mécaniquement les compressions et détentes aux deux compartiments.

II.2. LA DÉTECTION DES DIFFÉRENCES DE PRES-SION. — Une membrane mince en verre ou en mica est collée par ses bords sur la cloison commune aux deux compartiments. La cloison est évidée sur un diamètre inférieur de 5 mm à celui de la membrane. L'obligation d'assurer l'étanchéité entre les deux compartiments conduit à réaliser ainsi un encastrement parfait.

Les déplacements statiques $\varphi_{\mathbf{s}}(0)$ ou dynamiques w_0 du centre sont supérieurs à ceux de tout autre point de la membrane pour une différence de pression donnée. Ce sont eux que l'on repère par des procédés interférométriques, la lame flexible semi argentée créant des anneaux de Newton devant un plan fixe. Avec des lames de verre de 7/100 mm d'épaisseur, la sensibilité est de l'ordre de 2 baryes pour le défilement d'une frange obtenue à partir de la longueur d'onde du sodium, soit pour un déplacement $w_s(0)$ de $\lambda/2 \# 0.3 \mu$. Le défilement de franges créé par la relaxation ou, simplement, par un réglage défectueux des amplitudes relatives des compressions et détentes est en général bien trop rapide pour être suivi à l'œil ; l'étalonnage statique seul s'effectue donc à l'aide d'une lunette ; on lui substitue pour les mesures dynamiques un photomultiplicateur qui commande une échelle de comptage.

La figure 2 donne un schéma général de l'appareillage de détection. Des dispositifs annexes dont il n'a pas été question sont représentés sur le dessin : ouvertures dans les compartiments pour laisser



FIG. 2. — Schéma de principe.

passer le faisceau incident à partir duquel l'ensemble détecteur crée les franges d'interférences, diaphragmes et filtres pour réduire l'échauffement des compartiments par ce faisceau, lentilles imposant un trajet géométrique convenable et la formation des franges sur la couche sensible du photomultiplicateur, dispositifs mécaniques permettant d'orienter ce dernier ou de lui substituer une lunette, etc...

II.3. Les compressions et détentes. - L'ensemble habituel piston-cylindre présente ici des inconvénients dont le principal est l'apport de chaleur au gaz d'étude à partir du frottement des segments ou joints d'étanchéité sur les parois du cylindre. On le remplace avantageusement par des membranes déformables MA, MB minces, de grand diamètre et pincées entre deux couteaux circulaires. Un mouvement harmonique rectiligne et perpendiculaire au plan de la plaque peut être imposé au centre ; le vrai problème est de calculer les volumes déplacés en fonction de la flèche maxima, compte tenu de la charge uniformément répartie qu'implique. l'augmentation de pression du gaz dans le compartiment. La solution est donnée au paragraphe III mais l'obligation de fixer sans ambiguïté les conditions aux limites pour effectuer le calcul nous conduit à préciser les montages utilisés pour cela.

Les membranes pouvant être considérées comme minces en regard de leur diamètre, on tend à réaliser un appui libre sans encastrement appréciable. A cette fin, les couteaux (fig. 3) ont une section méri-



Fig. 3.

dienne telle que l'arête utile est formée par l'intersection de la surface latérale d'un cylindre et d'un cône de même axe, d'angle au sommet égal à 45°. Cette valeur est choisie à la suite d'un compromis. L'effet d'écrasement de l'arête et l'encastrement partiel qui en résulte sont d'autant plus faibles que l'angle est faible. Mais l'étanchéité entre la membrane et le couteau inférieur est meilleure si l'angle est grand. En tout état de cause, les déformations de la membrane, qu'elles restent dans le domaine élastique ou non, n'engendrent pas de dissipation d'énergie appréciable.

Pour créer les déformations génératrices de compressions et de détentes dans les compartiments, les membranes motrices sont reliées mécaniquement à deux excitateurs de vibration, appareils où une ferrite solidaire de l'équipage mobile est attirée par deux bobines placées de part et d'autre de la position d'équilibre, elle-même fixée par deux ressorts antagonistes. Le passage d'un courant sinusoïdal dans les bobines provoque un mouvement d'amplitude proportionnelle à l'intensité maxima. La phase du mouvement par rapport au courant est fonction de la charge de l'excitateur comme de la fréquence.

Les deux excitateurs placés en série sur le générateur de courant sont tout d'abord réglés afin qu'une fois attelés aux deux membranes motrices, elles-mêmes fermées sur les deux compartiments remplis d'un même gaz, ils exercent des compressions et détentes lentes de même amplitude et de même phase, ce que l'on contrôle aisément par l'immobilité du système de franges de la membrane détectrice (fig. 2).

Supposons que l'on augmente progressivement la pulsation ω en conservant l'égalité des phases et des amplitudes. Si une relaxation apparaît dans l'un des compartiments, l'amplitude et la phase de la pression du gaz qui y est contenu, subissent des perturbations : ces dernières laissent inchangées, tout au moins en première approximation, les caractéristiques de l'appareillage moteur mais soumettent le détecteur M à un mouvement sinusoïdal d'amplitude w_0 au centre et de phase ψ par rapport aux membranes motrices. La théorie développée paragraphe III reliant ψ et w_0 au temps de relaxation, il s'agit de mesurer expérimentalement ces deux paramètres.

II.4. MESURE DE LA PHASE ψ ET DE L'AMPLITUDE w_0 DE LA MEMBRANE CENTRALE M. — L'obligation de mesurer ψ conduit à un procédé qui donne à la fois ψ et w_0 . Le temps qui sépare deux franges, donc deux coups consécutifs au compteur, correspond à un déplacement constant de la membrane, à savoir $\lambda/2$. Comme le mouvement est sinusoïdal, le débit des franges est lui-même une fonction sinusoïdale du temps. Schématisons quelque peu pour nous en tenir au principe et admettons que frange brillante et frange noire se succèdent sans transition: la tension aux bornes du photomultiplicateur a alors en fonction du temps l'aspect suivant (fig. 4) :



Deux montées en tension consécutives correspondant à un interfrange, le nombre de ces montées est égal à $8w_0 \omega/2\pi\lambda$ par seconde, ce qui permet la mesure de w_0 . En fait, le nombre de franges comptées est quantifié et doit correspondre à un déplacement total de la membrane grand devant $\lambda/2$. On peut fixer d'une façon assez arbitraire à 10 environ la valeur du rapport à partir de laquelle la précision est admissible, soit :

$$2w_0 > 10 \lambda/2 \# 3 \mu$$

en employant la longueur d'onde λ du doublet du sodium.

On notera que le temps nécessaire au parcours fixe de λf^2 est fonction de la vitesse de la membrane donc de sa position, ce qui explique l'aspect type modulation de fréquence qu'on retrouve aux bornes du photomultiplicateur. Notons cependant la différence essentielle par rapport aux utilisations courantes en radioélectricité. Ici, pour ω donné, la fréquence de la modulation est fixe et c'est la fréquence de la « porteuse » qui évolue dans de larges limites en fonction de l'amplitude du mouvement.

Un circuit intégrateur appliqué au photomultiplicateur restitue le caractère sinusoïdal de pulsation ω pour le mouvement de la membrane détectrice, mouvement qu'il suffit de comparer à celui des membranes motrices à l'aide d'un phasemètre pour obtenir ψ . Là encore, le rapport de fréquence entre la modulation et la porteuse impose un seuil minimum pour l'amplitude de la membrane détectrice. La valeur limite déterminée pour w_0 convient également pour ψ .

III. Étude des oscillations forcées de la membrane M. — III.1. DÉFORMÉE D'UNE MEMBRANE SOUMISE A UNE PRESSION STATIQUE. — D'après la théorie [3] des membranes minces circulaires de rayon R, à bords encastrés et dont les deux faces sont soumises à une différence de pression statique $[\Delta p]_{s}$, la flèche w_{s} de M à une distance r de son axe est telle que :

$$w_{\mathbf{s}}(r) = \frac{\lfloor \Delta p \rfloor_{\mathbf{s}}}{64D} \left[R^2 - r^2 \right]^2. \tag{7}$$

La rigidité D à la flexion est liée au module d'Young E, à l'épaisseur e de la plaque ($e \ll R$) et au coefficient de Poisson ζ par :

$$D = Ee^{3} / 12(1 - \zeta^{2})$$

D peut se déterminer aussi expérimentalement par la mesure de la flèche au centre $w_s(0)$ et de $[\Delta p]_s(7)$:

$$D = [\Delta p]_{\mathbf{s}} R^4 / 64 \omega_{\mathbf{s}}(0). \tag{8}$$

Le tableau I indique les deux groupes de valeurs adoptés pour R, e, D, pour la masse volumique ρ du matériau constituant la membrane M, pour la masse $\mu = e\rho$ par unité de surface et pour la pulsation propre ω_p de M (voir plus loin, équation 23 bis).

III.2. Amplitude et déphasage des oscillations sinusoïdales de M. — Dans l'appareil schématisé (fig. 1), les déplacements imposés aux deux membranes motrices M_A et M_B provoquent, dans les deux compartiments C_A , C_B des variations sinusoïdales de volume qu'on peut représenter respectivement par A(t) et B(t):

$$A(t) = A e^{i\omega t} \qquad B(t) = B e^{i\omega t}.$$
 (9)

La déformée pour des membranes posées sur appui [3] affecte l'allure d'un arc de cercle, de flèche au centre maxima w_{0A} ou w_{0B} ; on écrit en première approximation :

$$A = (\pi R_{\mathbf{A}}^2 / 2) w_{\mathbf{0}_{\mathbf{A}}} \quad B = (\pi R_{\mathbf{B}}^2 / 2) w_{\mathbf{0}_{\mathbf{B}}} \quad (10)$$

(les valeurs de $\pi R_{\rm A}^2/2 = \pi R_{\rm B}^2/2$ sont indiquées tableau II).

Si nous supposons que C_A contient un gaz étalon ne présentant pas de phénomène de relaxation, un gaz monoatomique par exemple, les variations de pression p_{eA} dans le récipient C_A sont données par (4 bis) soit :

$$p_{\mathbf{e}_{\mathbf{A}}} = \frac{1}{\chi_{\mathbf{s}_{\mathbf{A}}} V_{\mathbf{0}_{\mathbf{A}}}} \left[A(t) - V(t) \right] \tag{11}$$

où V(t) représente le volume engendré par les déplacements de M repérés positivement de C_A vers C_B.

Par contre, C_B se trouve rempli par le gaz d'étude tributaire *a priori* de l'équation (4) ; donc :

$$\dot{p}_{\mathbf{e}\mathbf{B}} + \omega_{\mathbf{w}} p_{\mathbf{e}\mathbf{B}} = \frac{1}{\chi_{\mathbf{s}\mathbf{e}\mathbf{B}} V_{\mathbf{0}\mathbf{B}}} \left[\dot{B}(t) + \dot{V}(t) \right] \\ + \frac{\omega_{\mathbf{w}}}{\chi_{\mathbf{s}\mathbf{B}} V_{\mathbf{0}\mathbf{B}}} \left[B(t) + V(t) \right]. \quad (12)$$

La flèche W(r, t) de M à une distance r de son axe et à un instant t quelconque est déterminée par [3]:

$$D\Delta\Delta W + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = p_{\mathbf{e}_{\mathbf{A}}} - p_{\mathbf{e}_{\mathbf{B}}} \qquad (13)$$

 Δ désignant l'opérateur Laplacien. Après disparition des régimes transitoires, on peut poser :

$$W(r, t) = \varphi(r) e^{i(\omega t + \psi)}$$
(14)

et, par conséquent :

$$V(t) = \int_0^R w(r) e^{i(\omega t + \psi)} 2\pi r \, \mathrm{d}r = V e^{i\omega t} \quad (15)$$

où V est un nombre complexe d'argument ψ , de module fonction de ω et de la flèche maxima au centre w_0 . En explicitant dans (13) $p_e - p_{eB}$ à l'aide de (9) (11), (12) et (15), il vient :

$$D\Delta\Delta\omega(r) - \mu\omega^{2} \omega(r)$$

$$= -\left\{-F \frac{\omega_{1} + i\omega}{\omega_{w} + i\omega} + EV \frac{\omega_{2} + i\omega}{\omega_{w} - i\omega}\right\} e^{-i\Psi} \quad (16)$$

soit :

$$D\Delta\Delta w(r) - \mu \omega^2 w(r) = -K \quad (16 \ bis)$$

avec

$$F = \frac{A}{\chi_{SA} V_{0A}} - \frac{B}{\chi_{S\epsilon B} V_{0B}}$$

$$E = \frac{1}{\chi_{SA} V_{0A}} + \frac{1}{\chi_{S\epsilon B} V_{0B}}$$

$$\omega_{1} = \omega_{w} \frac{(A/\chi_{SA} V_{0A}) - (B/\chi_{SB} V_{0B})}{F}$$

$$\omega_{2} = \omega_{w} \frac{(1/\chi_{SA} V_{0A}) + (1/\chi_{SB} V_{0B})}{E} \quad (17)$$

La solution générale de (16), finie pour r = 0, s'écrit :

$$\omega(\mathbf{r}) = \alpha \mathfrak{I}_{0}(\Lambda R) + \beta I_{0}(\Lambda R) + \delta \qquad (18)$$

 $\mathfrak{I}_0(\Lambda R)$ fonction de Bessel de première espèce d'ordre 0 et :

$$I_0(\Lambda R) = \mathfrak{I}_0(i\Lambda R)$$

$$\Lambda^4 = \mu\omega^2/D, \qquad \delta = K/\mu\omega^2. \qquad (19)$$

Les cinq inconnues, α , β , δ , la flèche au centre w_0 et l'argument ψ sont déterminées par deux conditions d'encastrement :

$$\mathbf{r} = R \qquad \mathscr{W}(R) = 0 \qquad (20a)$$

$$w'(R) = 0 \tag{20b}$$

ainsi que par les définitions de w_0 :

$$r = 0 \qquad w(0) = \alpha + \beta + \delta = w_0 \qquad (20c)$$

et de V(15):

$$V e^{-i\Psi} = \frac{2\pi R}{\Lambda} \left[\alpha \mathfrak{I}_{1}(\Lambda R) + \beta I_{1}(\Lambda R) \right] + \pi R^{2} \delta.$$
(20 d)

La dernière relation portant sur des imaginaires se décompose en deux ; $\mathfrak{I}_1(\Lambda R)$ est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre 1 et

$$I_1(\Lambda R) = -i\mathfrak{I}_1(i\Lambda R).$$

Après élimination de α , β , δ , les deux grandeurs intéressantes ω_0 et ψ sont finalement données par :

$$w_0 e^{i\psi} = \frac{FR^4}{16D} \frac{\omega_1 + i\omega}{\omega_w + i\omega} \frac{G(u)}{u} \frac{1}{1 - \frac{\pi R^6 E}{16D} \frac{\omega_2 + i\omega}{\omega_w + i\omega} \frac{H(u)}{u}}.$$
(21)

On a posé :

$$G(u) = \frac{I_1(\Lambda R) + \mathfrak{I}_1(\Lambda R) - \mathfrak{I}_0(\Lambda R) I_1(\Lambda R) - I_0(\Lambda R) \mathfrak{I}_1(\Lambda R)}{\mathfrak{I}_0(\Lambda R) I_1(\Lambda R) + I_0(\Lambda R) \mathfrak{I}_1(\Lambda R)}$$
(22)

et:

$$\begin{split} H(u) = 1 - \frac{4}{\Lambda R} \frac{I_{1}(\Lambda R) \ \mathfrak{I}_{1}(\Lambda R)}{I_{0}(\Lambda R) \ \mathfrak{I}_{1}(\Lambda R) + \ \mathfrak{I}_{0}(\Lambda R) \ I_{1}(\Lambda R)} \end{split}$$

avec :

$$u = [\Lambda R/2]^4 = (\mu R^4/16D) \omega^2.$$

Il est à remarquer que l'équation (13) sans second membre $(p_{e\mathbf{A}} - p_{e\mathbf{B}} = 0)$ correspond aux oscillations libres et que sa résolution conduit à la condition :

$$\mathfrak{I}_{0}(\Lambda R) I_{1}(\Lambda R) + I_{0}(\Lambda R) \mathfrak{I}_{1}(\Lambda R) = 0. \quad (23)$$

Les premières racines $\Lambda_p R$ de (23) données par les tables ont pour valeurs successives :

$$\Lambda_{p} R = 3,200$$
 6,304 9,440 etc...

On en déduit les pulsations propres ω_p de

$$v_{p} = \frac{\mu R^{4}}{16D} \omega_{p}^{2} = \left[\frac{\Lambda_{p} R}{2}\right]^{4}$$

= 6,554 98,70 496,27 etc... (23 bis)

la membrane M (voir tableau I) telles que:

Par ailleurs, en utilisant les propriétés des fonctions de Bessel, G(u) f u et H(u) f u se mettent sous la forme

$$\frac{G(u)}{u} = \frac{\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{u^p}{(2p+1)!} \left\{ \frac{1}{(2p)!} - \frac{(-1)^p}{(p!)^2} \right\}}{u \sum_{p=0}^{p=\infty} \left(\frac{(-1)^p u^p}{(p!)^2 (2p+1)!} \right)}$$
(24)

$$\frac{H(u)}{u} = \frac{\sum_{p=1}^{p=\infty} \left(\frac{(-1)^p u^p}{(p-1)! (p+1)! (2p+1)!} \right)}{u \sum_{p=0}^{p=\infty} \left(\frac{(-1)^p u^p}{(p!)^2 (2p+1)!} \right)}$$
(24 bis)

De (21) on tire le déphasage ψ et l'amplitude ω_0 :

$$tg \ \psi = \frac{\omega(\omega_{w} - \omega_{1})}{\omega_{1}\omega_{w} + \omega^{2}} \frac{\left[1 - \frac{\pi R^{6}E}{16D} \frac{H(u)}{u} \frac{\omega_{2} - \omega_{1}}{\omega_{w} - \omega_{1}}\right]}{\left[1 - \frac{\pi R^{6}E}{16D} \frac{H(u)}{u} \frac{\omega_{1} \omega_{2} + \omega^{2}}{\omega_{1} \omega_{w} + \omega^{2}}\right]}$$
(25)
$$w_{0}^{2} = \frac{\frac{R^{8}}{(16D)^{2}} \left\{ \left[\frac{A}{\chi_{SA} V_{0A}} - \frac{B}{\chi_{SEB} V_{0B}}\right]^{2} \omega^{2} + \left[\frac{A}{\chi_{SA} V_{0A}} - \frac{B}{\chi_{SB} V_{0B}}\right]^{2} \omega_{w}^{2} \right\} \left[\frac{G(u)}{u}\right]^{2}}{\omega_{w}^{2} \left[1 - \frac{\pi R^{6}E}{16D} \frac{H(u)}{u} \frac{\omega_{2}}{\omega_{w}}\right]^{2} + \omega^{2} \left[1 - \frac{\pi R^{6}E}{16D} \frac{H(u)}{u}\right]^{2}}$$
(25 bis)

Ces relations (25) et (25 *bis*) ont été calculées dans le cas général où le gaz de C_B est susceptible de présenter un phénomène de relaxation. Si celui-ci ne se produit pas, il suffit de poser $\tau = 0$; ω_w (5), ω_1 , ω_2 (17), deviennent infinis et (25), (25 *bis*) se transforment en :

$$\operatorname{tg} \psi^* = 0, \quad \psi = 0 \tag{26}$$

$$w_{0}^{*} = \frac{\frac{R^{4}}{16 D} \left[\frac{A}{\chi_{SA} V_{0A}} - \frac{B}{\chi_{SB} V_{0B}} \right] \frac{G(u)}{u}}{1 - \frac{\pi R^{6}}{16 D} \left[\frac{1}{\chi_{SA} V_{0A}} + \frac{1}{\chi_{SB} V_{0B}} \right] \frac{H(u)}{u}}$$
(27)

Le déphasage ψ^* et l'amplitude w_0 sont affectés d'un astérisque pour les distinguer des quantités précédentes.

Lorsque la pulsation ω devient nulle, $\psi \rightarrow \psi^* = 0$; de même, w_0 et w_0^* tendent vers la même valeur.

$$w_{0}(\omega \rightarrow 0) = \frac{\frac{R^{4}}{64D} \left[\frac{A}{\chi_{\mathbf{SA}} V_{\mathbf{0}_{\mathbf{A}}}} - \frac{B}{\chi_{\mathbf{SB}} V_{\mathbf{0}_{\mathbf{B}}}} \right]}{1 + \frac{\pi R^{6}}{192D} \left[\frac{1}{\chi_{\mathbf{SA}} V_{\mathbf{0}_{\mathbf{A}}}} + \frac{1}{\chi_{\mathbf{SB}} V_{\mathbf{0}_{\mathbf{B}}}} \right]}$$
(28)

D'après (23) en effet,

$$G(u) \not u \rightarrow 1 \not /4$$
 et $H(u) \not u \rightarrow -1 \not /12$

pour $u \to 0$.

IV. Principe de la mesure du coefficient isentropique $\chi_{s.}$ — Détermination du rapport des chaleurs massiques. — Que le gaz étudié contenu dans le récipient C_B présente ou non le phénomène de relaxation, le déphasage et l'amplitude au centre de la membrane M s'expriment à basse fréquence par les mêmes expressions (26, 27 et 28); en particulier, le repérage de $w_0(\omega \rightarrow 0)$ permet d'obtenir le coefficient isentropique χ_{sB} . Il suffit pour cela, après remplissage de l'appareil, d'imposer aux membranes M_A et M_B des oscillations en phase, aussi lentes que possible, et d'amplitude w_{0A} , w_{0B} telles que M reste immobile, ce qu'on vérifie par interférométrie (voir § II). D'après (28), $w_0(\omega \rightarrow 0) = 0$ si :

$$A/\chi_{\mathbf{SA}} V_{\mathbf{0}\mathbf{A}} = B/\chi_{\mathbf{SB}} V_{\mathbf{0}\mathbf{B}}.$$
 (29)

Par conséquent, avec deux compartiments C_A , C_B identiques ($V_{0A} = V_{0B}$, $R_A = R_B$), w_{0A} et w_{0B} sont liées par :

$$w_{\mathbf{0}_{\mathbf{A}}}/\chi_{\mathbf{S}\mathbf{A}} = w_{\mathbf{0}_{\mathbf{B}}}/\chi_{\mathbf{S}\mathbf{B}}.$$
(30)

La mesure de w_{0A} et w_{0B} conduit donc à χ_{SB} , χ_{SA} étant supposé connu. On passe de χ_{SB} au rapport des chaleurs massiques γ_B par (6) à condition de calculer χ_{Θ} par l'équation d'état du gaz de C_B. Si celui-ci est voisin de l'état parfait, ce que nous supposerons dorénavant, on peut se contenter de la relation :

$$\gamma_{\rm B} = 1/p_0 \,\chi_{\rm SB}.\tag{31}$$

V. Principe de la mesure d'un temps de relaxation intramoléculaire: Application à la relaxation de vibration. — Le réglage précédent (29) étant maintenu et l'amplitude de M nulle à basse fréquence, on augmente progressivement la pulsation ω ; si M demeure immobile, le gaz étudié ne présente pas de relaxation ou, tout au moins, le paramètre ω_w est très supérieur aux valeurs maxima de ω réalisables avec le montage (6 000 rd/s). On peut donc en conclure que le temps de relaxation éventuel serait tel que :

$$\tau \ll 10$$
-4 s.

Lorsque τ dépasse 10⁻⁵ s environ, des oscillations de M apparaissert avec un déphasage ψ (25) et une amplitude w_0 (25 *bis*) fonctions de ω ; ψ et w_0 sont mesurés par la méthode précédemment indiquée (§ II) et le tracé de l'une ou l'autre courbe $\psi(\omega), w_0(\omega)$ conduit à la détermination de ω_w , donc de τ ; $\chi_{\rm SB}$ est maintenant connu (29) et les courbes théoriques (25), (25 *bis*), doivent passer par les points expérimentaux, ce qui permet de déduire à la fois $\chi_{\rm SEB}$ et ω_w . Remarquons du reste que le plus souvent $\chi_{\rm SEB}$ s'obtient à partir de $\chi_{\rm SB}$. En effet, pour un gaz parfait (§ I):

$$-\operatorname{si} \qquad \gamma_{\mathrm{B}} = \frac{1}{p_{0} \chi_{\mathrm{SB}}} \ge 1 + \frac{2}{(t+r)}$$
$$\gamma_{\varepsilon \mathrm{B}} = \frac{1}{p_{0} \chi_{\mathrm{SB}\varepsilon}} = 1 + \frac{2}{t}$$
$$-\operatorname{si} \quad \gamma_{\mathrm{B}} < 1 + \frac{2}{t+r} \quad \gamma_{\varepsilon \mathrm{B}} = 1 + \frac{2}{t+r}$$

79

Dans le premier cas, il s'agit d'une relaxation de rotation, dans le second, d'une relaxation de vibration.

Nous allons préciser ces indications en étudiant deux réglages possibles (I) et (II) qui n'ont aucun caractère obligatoire mais apparaissent particulièrement commodes et précis :

— dans le réglage I, la condition d'amplitude $w_0(\omega \rightarrow 0)$ nulle à basse fréquence est maintenue lorsque ω croît : on a donc constamment en cours d'expérience :

$$A / \chi_{\mathbf{S}\mathbf{A}} \, V_{\mathbf{0}_{\mathbf{A}}} = B / \chi_{\mathbf{S}\mathbf{B}} \, V_{\mathbf{0}_{\mathbf{B}}} \tag{29}$$

- dans le réglage II, on n'impose plus à l'amplitude $w_0(\omega \rightarrow 0)$ d'être nulle ; mais w_{0A} et w_{0B} sont réglées en permanence pour que :

$$A/\chi_{\mathbf{S}\mathbf{A}} V_{\mathbf{0}\mathbf{A}} = B/\chi_{\mathbf{S}\mathbf{c}\mathbf{B}} V_{\mathbf{0}\mathbf{B}}.$$
 (33)

V.1. RÉGLAGE I : AMPLITUDE NULLE A BASSE FRÉQUENCE POUR M. — Le tableau III indique ce que deviennent les relations générales (25) et (25 bis) quand on impose la condition (29) et quelques simplifications ($V_{0A} = V_{0B} = V_0$, $R_A = R_B$, gaz parfaits).

L'application numérique porte sur la détermination d'un temps de relaxation de vibration d'un diatomique ou polyatomique linéaire à l'état parfait de sorte que :

$$1/\chi_{seB} = p_0 \gamma_{eB} = p_0 [1 + (2/5)] = 1,40 p_0. \quad (34)$$

Le gaz étalon ne doit pas posséder de niveaux excités en vibration pour ne pas présenter de relaxation. Par conséquent :

$$1/\chi_{SA} = p_0 \gamma_A = 1,40 p_0 \text{ ou } \gamma_A = \gamma_{\varepsilon B} = 1,40.$$
(35)

Les données numériques pour le gaz étudié et pour la membrane M (tableau I) correspondent, dans les conditions ordinaires de température et de pression, aux deux cas particuliers suivants :

$$\begin{array}{l} --\cos a) \ \gamma_{\rm B} = 1,30 \qquad \omega_{\rm P} = 6\ 625 \\ 250 < \omega_{\rm w} < 30\ 000 \\ 4 \ \times 10^{-3} \ {\rm s} > \tau > 3 \ \times 10^{-5} \ {\rm s} \end{array} \tag{36}$$
$$\begin{array}{l} --\cos b) \ \gamma_{\rm B} = 1,395 \quad \omega_{\rm P} = 2\ 317 \\ 90 < \omega_{\rm w} < 9\ 000 \\ 10^{-2} \ {\rm s} > \tau > 10^{-4} \ {\rm s} \end{array}$$

Le premier s'applique, entre autres, à CO_2 , le second à O_2 . Les valeurs des temps de relaxation recherchés τ sont d'autant plus faibles que γ_B diminue, c'est-à-dire que la vibration est davantage excitée; c'est pourquoi il convient de choisir, selon le γ_B adopté, des valeurs différentes pour ω_P et pour le domaine de variation de ω_w .



Fig. 6. — Réglage I. Cas $a : \gamma_{\rm R} = 1,300 \ \omega_{\rm p} = 6.625$.

Les figures 5, 6 et 7 montrent les courbes donnant le déphasage ψ et le rapport des amplitudes $\mathscr{W}_0 f \mathscr{W}_{0\mathbf{v}}$

Nº 1-2



Fig. 7. — Réglage I, Cas b: $\gamma_B = 1,395$ $\omega_p = 2.317$.

en fonction de ω . Dans les deux exemples traités *a* et *b* (36) l'expression :

$$\frac{1 - \frac{\tau R^{6}}{16D} \frac{p_{0}}{V_{0}} (\gamma_{\mathrm{A}} + \gamma_{\mathrm{EB}}) \frac{H(u)}{u}}{1 - \frac{\pi R^{6}}{16D} \frac{p_{0}}{V_{0}} (\gamma_{\mathrm{A}} + \gamma_{\mathrm{B}}) \frac{H(u)}{u}}$$

reste suffisamment voisine de 1 pour que :

$$\operatorname{tg} \psi \ \# \ \omega_w / \omega = \sqrt{u_w / u}. \tag{37}$$

Par contre, les courbes de w_0/w_{0A} ne sont pas tout à tait identiques pour $\gamma_B = 1,30$ et pour $\gamma_B = 1,395$, mais elles conservent le même aspect.

V.2. RÉGLAGE II : AMPLITUDE NON NULLE A BASSE FRÉQUENCE POUR M. — Lorsqu'on connaît γ_B par le réglage I (29) à basse fréquence et qu'on a déduit γ_{EB} des considérations (32), on peut renoncer



à imposer une amplitude nulle pour M à basse fréquence, mais régler w_{0A} , w_{0B} pour que la relation (33) soit satisfaite. Il en résulte les formules indiquées tableau IV.

Dans le cadre des hypothèses (34) et (35), les figures 8, 9 et 10 représentent les courbes de $\psi(\omega)$ et de $(w_0 f w_{0A})(\omega)$. Pour la raison déjà invoquée dans le paragraphe précédent, on peut adopter :

$$\operatorname{tg} \psi \# - \omega / \omega_w = -\sqrt{u/u_w}.$$

Le rapport $(w_0 I_{w_0 A})(\omega)$ passe, pour les faibles valeurs de ω_w , par un minimum aplati dont l'abscisse se déplace de u = 0 à u voisin de 3 lorsque ω_w diminue. Ce réglage II permet des mesures plus précises que le premier pour $u_w < 1$, donc pour les longs temps de relaxation τ ; mais la précision est moins bonne lorsque u_w devient supérieur à 10.

TABLEAU I

Caractéristiques de la membrane M

	R	e	ρ	μ	$\frac{[\Delta p]_{s}}{w_{s}(0)}$ avec $w_{s}(0) = 0,2945 \ \mu$	D	ωρ
Unités	\mathbf{cm}	cm	g/cm^3	g/cm^2	C. G. S.	C. G. S.	rd/s
Membrane en verre dur	2,80	$7 imes 10^{-3}$	2,51	$17,6 \times 10^{-3}$	$5,77~ imes~10^4$	$5,54~ imes~10^4$	2 317
(borosilicate)	$2,\!80$	2×10^{-2}	2,51	50,2 $ imes$ 10 $^{-3}$	1,346 $ imes$ 106	$1,292 imes 10^6$	6 625



Fig. 9. — Réglage II. Cas $a : \gamma_B = 1,300 \quad \omega_p = 6625.$

TABLEAU II

CARACTÉRISTIQUES DES DEUX RÉCIPIENTS CA ET CB

$\frac{\pi R_{\mathrm{A}}^2}{2} = \frac{\pi R_{\mathrm{B}}^2}{2}$	$V_{0_{\mathbf{A}}} = V_{0_{\mathbf{B}}} = V_{0}$		
cm^2	$\mathbf{cm^3}$		
37,7	1 080		
	$\frac{\frac{\pi R_{\mathbf{A}}^2}{2} = \frac{\pi R_{\mathbf{B}}^2}{2}}{\underset{37,7}{\overset{\mathrm{cm}^2}}}$		



Fig. 10. — Réglage II. Cas $b: \gamma_B = 1,395 \omega_p = 2317$.

L'examen des figures 5 à 10 montre qu'il est possible, avec le montage présenté, de mesurer à la pression ordinaire des temps de relaxation compris entre 10^{-5} s et 10^{-2} s. τ étant inversement proportionnel à p_0 , une modification de la pression de remplissage p_0 permet d'étendre l'échelle des mesures. Nous nous proposons de déterminer par cette méthode les temps de relaxation d'abord de

TABLEAU III

 $v_{0A} = u$ $u = \mu$ Réglage I :

 $V_{0_{A}} = V_{0_{B}} = V_{0} \qquad R_{A} = R_{B} \qquad A = \pi R_{A}^{2} w_{0_{A}}/2, \qquad \text{gaz parfaits}$ $u = \mu R^{4} \omega^{2}/16D \qquad u_{w} = \mu R^{4} \omega^{2}_{w}/16D \qquad u_{p} = \mu R^{4} \omega^{2}_{p}/16D = 6,554$ $A/(\chi_{SA} V_{0_{A}}) = B/(\chi_{SB} V_{0_{B}}) \qquad (29) \quad \text{ou} \quad w_{0_{A}} \gamma_{A} = w_{0B} \gamma_{B}$ amplitude sans relaxation $w_{0}^{*} = 0$

$$\begin{aligned} \sup_{\mathbf{w}_{0}} \inf_{\mathbf{w}_{0}} &= \frac{\lim_{\mathbf{w}_{0}} \operatorname{red} \operatorname{r$$

gaz purs, diatomiques en particulier, puis de ces un gaz inerte sans relaxation. Un prochain article mêmes gaz lorsqu'ils font partie d'un mélange avec indiquera les résultats obtenus.

. .

TABLEAU IV

- 0

.

_

$$\begin{split} V_{0_{A}} &= V_{0_{B}} = V_{0} \qquad R_{A} = R_{B} \qquad A = \pi R_{A}^{2} w_{0_{A}}^{w} l_{A}^{p}, \qquad \text{gaz parfaits} \\ u &= \mu R^{4} \omega^{2} l_{1}^{1} 6D \qquad u_{w} = \mu R^{4} \omega_{0_{A}}^{w} l_{1}^{1} 6D \qquad u_{w} = \mu R^{4} \omega_{0_{A}}^{w} l_{A}^{p} = 6,554 \\ \text{Réglage II :} \qquad A l_{\chi_{BA}} V_{0_{A}} = B l_{\chi_{SB}} V_{0_{B}} (33) \text{ ou } w_{0_{A}} \gamma_{A} = w_{0_{B}} \gamma_{e_{B}} \\ \text{amplitude} \\ \text{sans relaxation} \qquad \qquad \frac{w_{0}^{*}}{w_{0_{A}}} = \frac{\frac{R^{4}}{16D} \frac{p_{0} \gamma_{A} \pi R_{A}^{2}}{1 - \left(\frac{\gamma}{\gamma_{e}}\right)_{B}} \frac{G(u)}{u}}{1 - \frac{\pi R^{6}}{16D} \frac{p_{0}}{V_{0}} (\gamma_{A} + \gamma_{B}) \frac{H(u)}{u}}{1 + \frac{\pi R^{6}}{16D} \frac{p_{0}}{V_{0}} (\gamma_{A} + \gamma_{B})} \\ \text{tg } \psi = -\frac{\omega}{\omega_{w}} \frac{1 - \frac{\pi R^{6}}{16D} \frac{p_{0}}{V_{0}} (\gamma_{A} + \gamma_{EB})}{1 - \frac{\pi R^{6}}{16D} \frac{p_{0}}{V_{0}} (\gamma_{A} + \gamma_{EB})} \frac{H(u)}{u}}{\frac{w_{0}}{u}} \\ \frac{w_{0}}{w_{0_{A}}} = \frac{\frac{R^{4}}{16D} \frac{p_{0} \gamma_{A} \pi R_{A}^{2}}{V_{0}} \left[1 - \left(\frac{\gamma}{\gamma_{e}}\right)_{B} \right]}{1 + \frac{\pi R^{6}}{16D} \frac{p_{0}}{V_{0}} (\gamma_{A} + \gamma_{EB})} \frac{H(u)}{u}}{\frac{w_{0}}{u}} \\ \frac{w_{0}}{w_{0_{A}}} = \frac{\frac{R^{4}}{16D} \frac{p_{0} \gamma_{A} \pi R_{A}^{2}}{V_{0}} \left[1 - \left(\frac{\gamma}{\gamma_{e}}\right)_{E} \right] \frac{G(u)}{u} \sqrt{u_{w}}}{\frac{w_{0}}{u}} \\ \frac{w_{0}}{w_{0_{A}}} = \frac{\frac{R^{4}}{16D} \frac{p_{0} \gamma_{A} \pi R_{A}^{2}}{V_{0}} \left[1 - \left(\frac{\gamma}{\gamma_{e}}\right)_{E} \right] \frac{G(u)}{u} \sqrt{u_{w}}}{\frac{w_{0}}{u}} \\ \frac{w_{0}}{\sqrt{u_{w}}} \frac{\frac{R^{4}}{16D} \frac{p_{0} \gamma_{A} \pi R_{A}^{2}}{V_{0}} \left[1 - \left(\frac{\gamma}{\gamma_{e}}\right)_{E} \right] \frac{G(u)}{u} \sqrt{u_{w}}}{\frac{w_{0}}{u}} \\ \frac{w_{0}}{\sqrt{u_{w}}} \frac{\frac{R^{4}}{16D} \frac{p_{0} \gamma_{A} \pi R_{A}^{2}}{V_{0}} \left[1 - \left(\frac{\gamma}{\gamma_{e}}\right)_{E} \right] \frac{G(u)}{u}} \sqrt{u_{w}}}{\frac{w_{0}}{u}} \\ \frac{w_{0}}{\sqrt{u_{w}}} \frac{\frac{R^{4}}{16D} \frac{p_{0} \gamma_{A} \pi R_{A}^{2}}{V_{0}} \left[1 - \left(\frac{\gamma}{\gamma_{e}}\right)_{E} \right] \frac{G(u)}{u}} \sqrt{u_{w}}}{\frac{w_{0}}{\sqrt{u + u_{w}}}} \\ \frac{w_{0}}{w_{0}} \frac{w_{0}}{\frac{w_{0}}} \frac{\frac{R^{4}}{16D} \frac{p_{0} \gamma_{A} \pi R_{A}^{2}}{V_{0}} \left[1 - \left(\frac{\gamma}{\gamma_{e}}\right)_{E} \right] \frac{G(u)}{u}} \sqrt{u_{w}}} \\ \frac{w_{0}}{\sqrt{u + u_{w}}} \frac{w_{0}}{\sqrt{u + u_{w}}} \frac{R^{4}}{\frac{P_{0}}{2} \frac{P_{0} \gamma_{A} \pi R_{A}^{2}}{V_{0}} \left[1 - \left(\frac{\gamma}{\gamma_{e}}\right)_{E} \right] \frac{G(u)}{\sqrt{u + u_{w}}}} \\ \frac{w_{0}}{\sqrt{u + u_{w}}} \frac{w_{0}}{\sqrt{u + u_{w}}} \frac{W_{0}}{\sqrt{u + u_{w}}} \frac{W_{0}}{\sqrt{u + u_{$$

Manuscrit reçu le 16 juillet 1965.

.

BIBLIOGRAPHIE

 HUETZ-ALBERT (M^{me}) et HUETZ (J.), J. Physique Rad., 1959, 20, 7 et 860; 1960, 21, 1.
 HUETZ-AUBERT (M^{me}), DANG et HUETZ, C. R. Acad. Sc., 1961, 253, 2040, 2323 et 2865. [3] Тімозненко, Théorie des plaques et coques, 2^e édi-tion, Béranger, 1961.

.