



**HAL**  
open science

## Sur une méthode itérative de résolution de certaines équations intégrales

Jean Guy, André Sales, Françoise Joly-Cabaret

► **To cite this version:**

Jean Guy, André Sales, Françoise Joly-Cabaret. Sur une méthode itérative de résolution de certaines équations intégrales. Journal de Physique, 1965, 26 (6), pp.335-338. 10.1051/jphys:01965002606033500 . jpa-00205973

**HAL Id: jpa-00205973**

**<https://hal.science/jpa-00205973>**

Submitted on 4 Feb 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## SUR UNE MÉTHODE ITÉRATIVE DE RÉOLUTION DE CERTAINES ÉQUATIONS INTÉGRALES

Par JEAN GUY, ANDRÉ SALES et FRANÇOISE JOLY-CABARET,  
Laboratoire des Recherches Physiques, Sorbonne.

**Résumé** — Les équations du type  $\Delta U = f(M) + g(M) \cdot U(M)$ , fréquemment rencontrées en physique (problèmes de perturbation), peuvent être transformées en des équations intégrales de Fredholm, lorsque les conditions aux limites sont précisées. Malheureusement, les séries de Liouville-Neumann, solutions de ces équations intégrales, sont assez souvent divergentes. Pour atteindre les solutions désirées, on propose une méthode itérative plus générale, permettant de former des suites convergentes après un choix convenable de certaines fonctions *a priori* arbitraires, introduites dans les relations analytiques utilisées.

**Abstract.** — Equations of the form  $\Delta U = f(M) + g(M) \cdot U(M)$  appear frequently in physics (especially in perturbation problems). These equations can be changed into integral equations of Fredholm type, when limit-conditions are given. Unfortunately, the Liouville-Neumann series, solutions of these integral equations, are often divergent. In order to find the desired solutions, a more general iterative process is established. It is possible by this method to set up convergent sequences, after a suitable choice of some *a priori* arbitrary functions, introduced in the analytical formulation.

**I. Principes de la résolution.** — Les équations du type

$$\Delta U = f(M) + g(M) \cdot U(M), \quad (1)$$

où  $U(M)$  représente une fonction de point inconnue (dans l'espace  $\epsilon$  à 1, 2, 3, ... ou  $n$  dimensions) cependant que  $f(M)$  et  $g(M)$  sont des fonctions connues ( $\Delta$  est l'opérateur laplacien dans  $\epsilon$ ), et pour lesquelles la solution à déterminer doit s'annuler aux limites d'un certain domaine  $D$  de  $\epsilon$  ( $D$  peut éventuellement recouvrir la totalité de l'espace  $\epsilon$ ), sont fréquemment rencontrées en physique, en particulier au cours de l'étude de certains problèmes de perturbations.

Soit par exemple l'équation de Schrödinger (2), en l'absence de perturbation extérieure

$$\Delta \psi_0 + 2[E_0 - V(M)] \psi_0 = 0, \quad (2)$$

pour laquelle la solution  $\psi_0$  associée à l'état fondamental  $E_0$  est connue avec toute la précision désirable. Pour déterminer la fonction propre perturbée du premier ordre

$$\psi(M) = \psi_0(M) + \lambda U_1(M), \quad (3)$$

valable lorsque intervient l'action d'une faible perturbation extérieure représentée par  $\lambda V_1(M)$  [ $\lambda$  est une constante que l'on devra considérer comme très petite et  $V_1$  peut être une fonction ou un opérateur quelconque], on écrira

$$\begin{aligned} \Delta[\psi_0 + \lambda U_1 + \lambda^2 U_2 + \dots] \\ + 2[(E_0 - V) + \lambda(E_1 - V_1) + \lambda^2 E_2 + \dots] \\ \times [\psi_0 + \lambda U_1 + \lambda^2 U_2 + \dots] = 0, \quad (4) \end{aligned}$$

d'où, par annulation des termes du premier ordre en  $\lambda$

$$\Delta U_1 + 2(E_0 - V) U_1 + 2(E_1 - V_1) \psi_0 = 0. \quad (5)$$

Dans l'équation (5),  $E_1$  caractérise l'énergie perturbée du premier ordre. Celle-ci est connue par la relation

$$E_1 = \frac{\langle \psi_0 | V_1 | \psi_0 \rangle}{\langle \psi_0 | \psi_0 \rangle} \quad (6)$$

et il s'ensuit bien

$$\Delta U_1 = f(M) + g(M) \cdot U_1(M) \quad (1')$$

en prenant

$$f(M) = 2[V_1(M) - E_1] \psi_0 \text{ et } g(M) = 2[V(M) - E_0]. \quad (7)$$

Or, si  $G(M, M')$  représente une fonction de Green associée à l'opérateur  $\Delta$ , compte tenu des conditions aux limites du domaine  $D$ , par conséquent telle que

$$\Delta U = \varphi(M) \quad (8)$$

admette la solution  $U(M)$  définie par

$$U(M') = \int_D G(M, M') \varphi(M) d\tau \quad (9)$$

( $d\tau$  est l'élément de volume entourant le point  $M$ ), l'équation (1) peut être transformée en l'équation intégrale de Fredholm

$$\begin{aligned} U(M') &= \int_D G(M, M') f(M) d\tau \\ &+ \int_D G(M, M') g(M) U(M) d\tau \\ &= F(M') + \int_D G(M, M') g(M) U(M) d\tau. \quad (10) \end{aligned}$$

La méthode de Fredholm de recherche du noyau résolvant [1, 2] est en pratique inopérante pour

les problèmes physiques envisagés. Par ailleurs, la méthode itérative de Liouville-Neumann [1, 2], suivant laquelle on pose pour les solutions approchées successives

$$\begin{cases} U_0(M') = F(M') \\ U_n(M') = F(M') + \int_D G(M, M') g(M) U_{n-1}(M) d\tau, \end{cases} \quad (11)$$

conduit fréquemment à une suite  $U_n(M')$  soit divergente, soit à convergence faible, en particulier lorsque l'équation (10) est singulière (cas notamment où le domaine d'intégration  $D$  s'étend jusqu'à l'infini) [3].

Considérons maintenant une nouvelle fonction  $\Gamma(M, M')$ , apparentée à la fonction de Green  $G(M, M')$  par

$$\Gamma(M, M') = G(M, M') + \alpha(M') h(M), \quad (12)$$

où  $h(M)$  est une fonction dérivable jusqu'au second ordre sans discontinuité et s'annulant aux limites du domaine  $D$ . Cette fonction  $\Gamma$  conserve ainsi la discontinuité caractéristique des dérivées premières de  $G$  pour  $M$  confondu avec  $M'$ . L'équation (1) peut être mise sous la forme intégrale

$$\begin{aligned} \int_D \Delta U(M) \cdot \Gamma(M, M') d\tau \\ = \int_D [f(M) + g(M) U(M)] \Gamma(M, M') d\tau, \end{aligned} \quad (13)$$

soit encore, après deux intégrations par parties du premier membre, et en tenant compte de l'annulation de  $h(M)$  aux limites du domaine  $D$

$$\begin{aligned} U(M') = F(M') + \int_D g(M) U(M) \Gamma(M, M') d\tau \\ + \alpha(M') \left\{ \int_D f(M) h(M) d\tau + \int_D g(M) h(M) U(M) d\tau \right. \\ \left. - \int_D \Delta h(M) \cdot U(M) d\tau \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

L'intégrale définie  $\int_D f(M) h(M) d\tau$  représente

un nombre  $A$  parfaitement déterminé dès que la fonction  $h(M)$  a été effectivement choisie. Introduisant une nouvelle fonction arbitraire  $\xi(M')$ , nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} U(M') = \{ F(M') + A\xi(M') \alpha(M') \} \\ + \left\{ A[1 - \xi(M')] \alpha(M') \right. \\ + \alpha(M') \int_D [g(M) h(M) - \Delta h(M)] U(M) d\tau \\ \left. + \int_D g(M) U(M) G(M, M') d\tau \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

La relation (15) suggère le procédé d'itération suivant : on déterminera la fonction  $\alpha(M')$  par annulation de la deuxième parenthèse du second membre de (15), soit

$$\alpha(M') = - \frac{\int_D g(M) U(M) G(M, M') d\tau}{A[1 - \xi(M')] + \int_D [g(M) h(M) - \Delta h(M)] U(M) d\tau}, \quad (16)$$

en prenant par exemple comme point de départ  $U_0(M) = F(M)$ . La fonction  $\alpha(M')$  ainsi calculée permettra la détermination de la solution appro-

chée suivante pour  $U(M)$  en écrivant que  $U_1(M')$  est identifiable à la première parenthèse du deuxième membre de (15). Le procédé itératif sera poursuivi conformément aux relations

$$\begin{cases} (a) \quad \alpha_n(M') = - \frac{\int_D g(M) U_n(M) G(M, M') d\tau}{A[1 - \xi(M')] + \int_D [g(M) h(M) - \Delta h(M)] U_n(M) d\tau} \\ (b) \quad U_{n+1}(M') = F(M') + A\xi(M') \alpha_n(M'). \end{cases} \quad (17)$$

Si l'équation (1) admet bien une solution conforme aux conditions imposées aux limites de  $D$ , les équations (17) montrent que, pour toute fonction  $h(M)$  rendant convergentes les intégrales présentes au premier tour d'itération, il existe une fonction  $\xi(M)$  rendant  $U_1(M)$  identique à la solution rigoureuse  $U(M)$ , et un tel choix pour  $\xi(M)$  terminerait immédiatement le processus itératif de corrections successives. Évidemment, la fonction  $\xi(M)$  dont il vient d'être question et qui se trouve

particulièrement adaptée au problème proposé, n'est pas plus connue *a priori* que la solution finale  $U(M)$  elle-même. On peut toutefois espérer que des choix empiriques plus ou moins judicieux pour  $\xi(M)$  rendront l'itération (17) très rapide. Il est également intéressant de noter que le processus d'itération (17) contient la série de Liouville-Neuman (11) comme cas particulier-limite, en prenant pour  $\xi(M)$  une constante infiniment grande positive ou négative. En portant dans (17b) la

fonction  $\alpha_n(M')$  définie en (17a), on obtient en effet

$$U_{n+1}(M') = F(M') - \frac{A\xi(M') \int_D g(M) U_n(M) G(M, M') d\tau}{A[1 - \xi(M')] + \int_D [g(M) h(M) - \Delta h(M)] U_n(M) d\tau}, \tag{18}$$

et l'expression (18) s'identifie à (14) pour  $\xi(M)$  infiniment grand.

En pratique, il sera souvent assez commode, du point de vue du calcul numérique, d'examiner pour commencer si une résolution convenable peut être obtenue en prenant  $\xi(M)$  égale à une certaine constante. Cette manière de procéder peut paraître assez éloignée des conditions favorables d'itération qui viennent d'être décrites ; il convient toutefois de ne pas oublier que le choix de la fonction  $h(M)$  est aussi fort important en ce qui concerne la convergence de la suite (17) et les deux exemples simples exposés ci-après montreront que la résolution de l'équation (1) peut souvent être obtenue en posant  $\xi(M) = 1$  dans des cas où la série de Liouville-Neumann est divergente. En fait, la présence des deux fonctions arbitraires  $h(M)$  et  $\xi(M)$  dans les relations (17) confère une grande souplesse à la méthode proposée lors des applications pratiques.

**II. Étude de deux cas particuliers, à titre d'exemples.** — Afin de vérifier l'efficacité de la nouvelle méthode proposée, nous allons maintenant examiner deux cas particuliers complètement résolubles par voie analytique, en nous limitant volontairement au domaine d'intégration  $D$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) de l'espace à une dimension.

a) ÉTUDE DE L'ÉQUATION  $U'' = \sin(2\pi x) + \lambda U$ . — Cette équation admet la solution évidente, s'annulant aux limites de l'intervalle (0,1)

$$U(x) = -\frac{\sin(2\pi x)}{4\pi^2 + \lambda}, \tag{19}$$

quel que soit  $\lambda \neq -4\pi^2$ , fonction antisymétrique par rapport à l'abscisse  $x = 1/2$ .

Nous pouvons utiliser ici la fonction de Green [4]

$$G(x, z) = \begin{cases} (z-1)x & \text{pour } 0 \leq x \leq z \\ (x-1)z & \text{pour } z \leq x \leq 1. \end{cases} \tag{20}$$

L'équation de Fredholm (10) devient

$$U(z) = \int_0^1 \sin(2\pi x) G(x, z) dx + \lambda \int_0^1 U(x) G(x, z) dx \\ = -\frac{\sin(2\pi z)}{4\pi^2} + \lambda \int_0^1 U(x) G(x, z) dx. \tag{21}$$

La suite de Liouville-Neuman (11) est aisément calculable et l'on a

$$\begin{cases} U_0(z) = -\frac{\sin(2\pi z)}{4\pi^2} \\ U_n(z) = -\frac{\sin(2\pi z)}{4\pi^2} \\ \cdot \left[ 1 - \frac{\lambda}{4\pi^2} + \left(\frac{\lambda}{4\pi^2}\right)^2 - \dots + (-1)^n \left(\frac{\lambda}{4\pi^2}\right)^n + \dots \right]. \end{cases} \tag{22}$$

La suite (22) admet le rayon de convergence  $|\lambda| < 4\pi^2$  et donne bien, les conditions de convergence étant satisfaites, la solution exacte (19) pour  $n \rightarrow +\infty$ .

Passons à l'application de la relation générale (18) en posant  $\xi(z) = 1$  et en choisissant

$$h(x) = x(x-1)(2x-1). \tag{23}$$

Ce choix de  $h(x)$  correspond à l'utilisation du polynôme le plus simple s'annulant aux limites  $x = 0$  et  $x = 1$  de  $D$  et qui soit antisymétrique par rapport à  $x = 1/2$  ; il est en effet nécessaire que la fonction  $h(x)$  comporte une partie antisymétrique vis-à-vis de l'abscisse  $1/2$  afin que l'intégrale  $A$  ne soit pas nulle. Le calcul des expressions (17) donne

$$\alpha_0(z) = \lambda\pi \sin(2\pi z) / (24\pi^2 + 6\lambda) \text{ et } A = 3/2\pi^3, \tag{24}$$

d'où

$$U_1(z) = -\frac{\sin(2\pi z)}{4\pi^2} + \frac{\lambda \sin(2\pi z)}{\pi^2(16\pi^2 + 4\lambda)} = -\frac{\sin(2\pi z)}{4\pi^2 + \lambda}. \tag{25}$$

La solution définitive est ainsi obtenue dès le premier tour d'itération, quelle que soit la valeur de  $\lambda$  [à l'exception de  $\lambda = -4\pi^2$  correspondant à la valeur propre du noyau  $G(x, z)$ ]. En réalité, cette convergence extrêmement rapide est due à la proportionnalité existant entre  $U''$  et  $U$  pour la solution cherchée, ce qui représente un cas exceptionnel. Il convient surtout de noter que l'itération (17), effectuée dans les conditions qui viennent d'être décrites, permet d'atteindre la solution exacte pour des valeurs de  $\lambda$  extérieures au domaine de convergence de la série de Liouville-Neumann (22).

b) ÉTUDE DE L'ÉQUATION  $U'' = 16Ch(8) + 16U$ . — Examinons pour ce deuxième exemple l'équation générale

$$U'' = k^2 Ch[k/2] + k^2 U, \tag{26}$$

qui admet la solution nulle aux limites de  $D$

$$U(x) = Ch[k(x-1/2)] - Ch[k/2]. \tag{27}$$

Les premiers termes de la suite de Liouville-Neumann (11) sont

$$\begin{cases} U_0(z) = \frac{k^2 Ch(k/2)}{2} z(z-1) \\ U_1(z) = U_0(z) + \frac{k^4 Ch(k/2)}{24} [z^4 - 2z^3 + z] \\ U_2(z) = U_1(z) + \frac{k^6 Ch(k/2)}{720} [z^6 - 3z^5 + 5z^3 - 3z], \end{cases} \tag{28}$$

tandis qu'en choisissant  $h(x) = x(x - 1)$  et  $\xi(z) = 1$ , la suite (18) devient

$$\begin{cases} U_0(z) = \frac{k^2 \operatorname{Ch}(k/2)}{2} z(z - 1) \\ U_1(z) = U_0(z) + \frac{5k^4 \operatorname{Ch}(k/2) (z^4 - 2z^3 + z)}{12(10 + k^2)} \\ U_2(z) = U_0(z) - \frac{35k^4 \operatorname{Ch}(k/2) [k^2(z^6 - 3z^5 + 3z^4 - z^3) + 30(z^4 - 2z^3 + z)]}{3(k^4 - 840k^2 - 8400)} \end{cases} \quad (29)$$

Nous étudierons le cas particulier  $k = 4$  pour lequel la suite de Liouville-Neumann est divergente. Cette circonstance n'a plus lieu si  $k$  est nettement plus faible ; pour  $k = 1$ , nous avons constaté que les deux suites (28) et (29) sont toutes

deux pratiquement de même convergence (erreurs relatives de l'ordre de 0,1 % sur  $U_1$  par la suite (28) et de 0,015 % sur  $U_1$  par la suite (29)). Les résultats numériques sont par ailleurs les suivants pour  $k = 4$  :

TABLEAU DES VALEURS NUMÉRIQUES ( $k = 4$ )

$x$	VRAIE SOLUTION (27) $U(x)$	$U_0(x)$	LIOUVILLE-NEUMANN SUITE (28)		NOUVELLE MÉTHODE SUITE (29)	
			$U_1(x)$	$U_2(x)$	$U_1(x)$	$U_2(x)$
0 et 1	0	0	0	0	0	0
0,1 et 0,9	- 1,185	- 2,709	+ 1,228	- 5,086	- 1,195	- 1,183
0,2 et 0,8	- 1,952	- 4,816	+ 2,633	- 9,372	- 1,951	- 1,951
0,3 et 0,7	- 2,425	- 6,320	+ 3,877	- 12,637	- 2,399	- 2,429
0,4 et 0,6	- 2,681	- 7,223	+ 4,719	- 14,685	- 2,630	- 2,691
0,5	- 2,762	- 7,524	+ 5,016	- 15,383	- 2,701	- 2,774

A la deuxième itération, pour la suite (29), les erreurs relatives sur tout le domaine D sont partout inférieures à 0,5 %.

Manuscrit reçu le 23 avril 1965.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] MARGENAU (H.) et MURPHY (G. M.), The mathematics of physics and chemistry, Van Nostrand édit., New York, 1959.
- [2] MATHEWS (J.) et WALKER (R. L.), Mathematical methods of physics, Benjamin, édit., New York, 1964.
- [3] MIKHLIN (S. G.), Integral equations, Pergamon Press, édit., Londres, 1957.