Propriétés analytiques de la matrice S dans la diffusion par un potentiel, relativement à la force de ce potentiel

R. Nataf, H. Cornille

► To cite this version:

R. Nataf, H. Cornille. Propriétés analytiques de la matrice S dans la diffusion par un potentiel, relativement à la force de ce potentiel. Journal de Physique, 1963, 24 (8), pp.591-603. 10.1051/jphys:01963002408059100 . jpa-00205536

HAL Id: jpa-00205536

<https://hal.science/jpa-00205536>

Submitted on 1 Jan 1963

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

PROPRIÉTÉS ANALYTIQUES DE LA MATRICE S DANS LA DIFFUSION PAR UN POTENTIEL, RELATIVEMENT A LA FORCE DE CE POTENTIEL.

Par R. NATAF et H. CORNILLE,

Laboratoire de Physique Nucléaire Théorique. Institut du Radium, Orsay.

Résumé. — Nous obtenons les propriétés analytiques de la matrice S relativement à la force d'un potentiel quelconque dans l'équation radiale de Schrödinger, en suivant la méthode que Regge a utilisée pour le potentiel centrifuge.

De la même manière, on déduit certaines propriétés des trajectoires analogues de celles de Regge, qui doivent donner des informations sur le rayon de convergence de la série des perturbations. Celles-ci ne sont suffisantes que si l'on précise le potentiel (décroissance au moins exponentielle quand $r \rightarrow \infty$); en fait, nous obtenons une illustration des résultats antérieurs de Jost et Pais [2], Kohn [3] et Davies [4]. Nous établissons des résultats généraux pour les portions de trajectoires relatives aux états anti-liés avec la même hypothèse. En se restreignant aux superpositions de potentiels de Yukawa, on peut préciser encore certains points. Dans la diffusion nucléon-nucléon les forces des potentiels singlet et triplet appartiennent à la même trajectoire. A titre d'exemple, on les a calculées par la méthode de Martin [5], à partir des énergies de liaison du deutéron et de l'état anti-lié 1S_0 avec un potentiel de Yukawa.

Abstract. — Analytical properties of the S matrix are obtained with respect to the strength of any potential in the radial Schrodinger equation, as they were by Regge [1] for the centrifugal potential.

Some properties of the analogues of Regge trajectories are derived in the same way, which should give information on the radius of convergence of Born expansion. We have enough information by restricting to potentials decreasing faster than an exponential at infinite range. Actually, we obtain an illustration of the previous results of Jost and Pais [2], Kohn [3], and Davies [4]. With the same assumption, general results are derived for the branches of the trajectories relative to anti-bound states.

Restriction to superpositions of Yukawa potentials gives more information on some points. In the case of nucleon-nucleon scattering, both strengths of singlet and triplet potentials belong to the same trajectory. As an example, they are calculated by Martin's method [5] in the case of a Yukawa potential from the energies of the deuteron and of the antibound 1S_0 state.

Introduction. — Le travail de Regge [1] nous a paru susceptible d'une extension immédiate au cas où l'on étudierait les propriétés analytiques de la matrice S relativement à la force G d'un potentiel $GV(r)$ quelconque figurant dans l'équation radiale de Schrödinger. Au lieu de prendre l complexe dans le potentiel centrifuge $-\frac{l(l+1)}{r^2}$, on fixe pour l une valeur physique entière, tandis que G est pris complexe. $GV(r)$ n'est d'ailleurs pas nécessairement tout le potentiel agissant. Nous supposons aussi que celui-ci peut être :

$$U(r) \equiv GV(r) + \sum_i G_i V_i(r),$$

$V(r)$ étant de signe constant; mais G seul sera variable et complexe, et les G_i réels fixés.

On peut alors prévoir des résultats très analogues à ceux de Regge, notamment des trajectoires des pôles de $S_l(G; E)$ dans le plan de la variable G , semblables à celles de Regge dans le plan de la variable $-\left(l + \frac{1}{2}\right)^2$. Ces trajectoires $G_l(E)$ obtenues en faisant varier l'énergie E par

valeurs réelles nous ont paru présenter un double intérêt dans le cas où $U \equiv GV(r)$:

1) Elles doivent permettre de déterminer le rayon de convergence de $S_l(G; E)$ en série entière de G , c'est-à-dire le rayon de convergence du développement de Born pour S_l . En effet, $S_l = 1$ pour $G = 0$ quels que soient E et l . Ce rayon $\rho_l(E)$ est donc, dans le plan G , la distance de l'origine à la singularité la plus proche; en particulier, le rayon de convergence uniforme par rapport à E et l , est, à première vue, le rayon ρ du cercle tangent intérieurement à la trajectoire la plus proche (fig. 1) qui doit être une trajectoire

FIG. 1.

$l = 0$: plus l est grand, plus $|G|$ doit être grand pour qu'un état lié existe, ce qui fait prévoir la disposition figure 2.

FIG. 2.

Dans ce travail, nous n'avons démontré que certains de ces résultats qualitatifs prévus intuitivement, qui d'ailleurs, donnent seulement une représentation graphique des résultats antérieurs, de Jost et Pais [2] et de Kohn [3], Davies [4].

2) Dans le cas de la diffusion $n-p$, on a deux valeurs physiques de G , $G_{(\text{singulet})}$, $G_{(\text{triplet})}$, qui se trouvent toutes deux sur la même trajectoire $l = 0$ (fig. 3).

FIG. 3.

$G_{(\text{triplet})}$ est obtenu pour la valeur $E < 0$ de liaison du deuteron 3S_1 (en négligeant la force tenseur) $G_{(\text{singulet})}$ se trouve sur une branche de la trajectoire $l = 0$ que nous n'avions pas considérée en 1); obtenue en prenant la détermination $-i\sqrt{-E}$ pour $k = \sqrt{E}$ (c'est-à-dire un autre feuillet du plan de la variable E coupé le long de l'axe réel > 0). Il est obtenu pour la valeur $E < 0$ correspondant à l'état antilié 1S_0 .

Nous calculons ces valeurs à partir de ces énergies dans le cas où $V(r) = e^{-\mu r}/r$, pour différentes valeurs de μ , en utilisant la méthode de Martin [5].

Certains des résultats que nous établissons par la même méthode que Regge contiennent ceux de cet auteur, $GV(r)$ pouvant être $-l(l+1)/r^2$.

1. Fonctions d'onde partielles, matrice S, et leur symétries. — Nous partons de l'équation radiale de Schrödinger habituelle :

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u_l(r) = U(r) u_l(r), \quad (1-1)$$

les unités étant choisies pour que $k^2 = E$ (sinon $k^2 = 2ME/\hbar^2$, et $U(r) = (2M/\hbar^2) V(r)$, $V(r)$ étant le potentiel).

On définit les deux solutions particulières de (1-1) :

$$\varphi_l(k, G, r) \underset{r \rightarrow 0}{\sim} r^{l+1}, \quad (1-2)$$

$$f_l(k, G, r) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} e^{-ikr}.$$

Ces valeurs sont, pour f_l comme pour φ_l , indépendantes de G , et les coefficients de (1-1) sont analytiques dans tout le plan G ; il en résulte que φ_l et f_l sont aussi analytiques en G (théorème de Poincaré); pour les mêmes raisons φ_l est analytique dans tout le plan k . D'autre part, puisque les conditions initiales pour φ_l ne dépendent pas de G , ni de k , φ_l a les mêmes symétries que (1-1) par rapport à G et k :

$$\varphi_l(k, G, r) = \varphi_l(-k, G, r) = \varphi_l^*(k^*, G^*, r). \quad (1-3)$$

Par contre $f_l(r \rightarrow \infty)$ dépend de k , de sorte que l'on a seulement pour f_l la symétrie en k commune à $f_l(r \rightarrow \infty)$ et à (1-1) c'est-à-dire :

$$f_l(k, G, r) = f_l^*(-k^*, G^*, r), \quad (1-4)$$

produit des deux précédentes.

Ainsi :

$$f_l(k, G, r) \equiv f_l^+ \quad \text{et} \quad f_l(-k, G, r) \equiv f_l^-,$$

sont deux solutions linéairement indépendantes de (1-1), de sorte que :

$$\varphi_l = A f_l(k, G, r) + B f_l(-k, G, r).$$

A et B étant déterminés par (1-2). Pour ce faire, il est commode d'utiliser les Wronskiens [1] :

$$W[f_l^+, \varphi_l] \equiv f_l^+ \varphi_l' - \varphi_l f_l^{+'} \quad (f' \text{ signifiant } df/dr),$$

et

$$W[f_l^-, \varphi_l],$$

$$W[f_l^+, \varphi_l] \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} 2ikB$$

$$\underset{r \rightarrow 0}{\sim} (2l+1) f_l(k, G),$$

où :

$$f_l(k, G) \equiv \lim_{r \rightarrow 0} r^l f_l(k, G, r), \quad (1-5)$$

d'où B en égalant ces deux valeurs, et de même pour A avec le second Wronskien :

$$\varphi_l = \frac{2l+1}{2ik} [f_l(-k, G, r) f_l(k, G)$$

$$- f_l(k, G, r) f_l(-k, G)]. \quad (1-6)$$

φ_l a bien les symétries (1-3), la première évidente, la seconde résultant de (1-4).

Avec les définitions habituelles du déphasage et de la matrice S :

$$\varphi_l \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \text{Cte} \sin \left[kr - l \frac{\pi}{2} + \delta_l(k, G) \right],$$

$$S_l \equiv e^{2i\delta_l} = (-1)^l f_l(k, G) / f_l(-k, G). \quad (1-7)$$

Symétries de S_l .

$$\left. \begin{aligned} S_l(-k, G) &= S_l^{-1}(k, G) \\ S_l(k, G) &= S_l^*(k^*, G^*) \text{ résulte de (1-4), d'où} \\ S_l(k, G) &= S_l^{*-1}(k^*, G^*). \end{aligned} \right\} \quad (1-8)$$

Il résulte de la seconde que pour $k = i\kappa$:

$$S_l(i\kappa, G) = S_l^*(i\kappa, G^*),$$

est une fonction réelle de G .

Rappelons les résultats connus pour G réel et k complexe, et repris ou établis dans [5, 6] :

1) Si $U(r) = 0$ pour $r > a$ (potentiel de portée finie), S_l a seulement des pôles isolés, racines en k de :

$$f_l(-k, G) = 0. \quad (1-9)$$

Ces pôles peuvent se trouver :

a) dans le demi-plan $\text{Im} k > 0$, seulement sur l'axe imaginaire $k = i\kappa$ ($\kappa > 0$) ; ils correspondent à des *états liés* ;

b) dans le demi-plan $\text{Im} k < 0$; ils y sont symétriques deux à deux par rapport à l'axe imaginaire d'après la seconde relation (1-8), à moins qu'ils ne soient sur cet axe.

Chacun de ces pôles, soit K , auquel on peut associer le zéro symétrique K^* d'après (1-8), correspond à une *résonance* (forme de Breit-Wigner pour la section efficace de diffusion) généralement superposée à un fonds continu, le pic de la résonance étant obtenu pour la valeur physique $k_0 = |\text{Re} K|$, tandis que sa demi-largeur est : $|\text{Im} K|$, si l'on prend k pour variable. Dans le cas particulier $\text{Re} K = 0$, où la résonance est centrée sur $k_0 = 0$, on dit que l'on a un état *anti-lié*.

Les pôles éloignés de l'axe réel donnent des résonances très larges pratiquement inobservables, noyées dans le fonds continu. D'ailleurs, ils dépendent beaucoup de la forme analytique exacte du potentiel, non de ses caractéristiques physiques, ce qui rejoint le résultat de 2).

2) Si $U(r)$ n'est plus de portée finie, mais si : $e^{\mu r} U(r) \rightarrow 0$ quand $r \rightarrow \infty$, on prévoit la possibilité de singularités « non physiques » de S_l en dehors d'une bande d'analyticité, délimitée par les parallèles à l'axe réel : $k = \pm i\mu/2$ ⁽¹⁾.

3) Si, plus particulièrement,

$$U(r) = \int_{\mu}^{\infty} C(\alpha) e^{-\alpha r} d\alpha, \\ (\mu > 0, |C(\alpha)| < M\alpha^{1-\varepsilon} \text{ assurant que} \\ \int_0^{\infty} r dr |U(r)| < M)$$

est une superposition d'exponentielles, ces singularités non physiques sont des lignes de discontinuité sur l'axe imaginaire de $i\mu/2$ à $i\infty$ et de $-i\mu/2$ à $-\infty$. Ces coupures ne dépendent pas de $C(\alpha)$. *Contrairement aux pôles précédents qui se déplacent quand G varie, elles ne dépendent donc pas de G* ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ On peut vérifier que ces propriétés restent vraies pour G complexe.

La discontinuité de $(-i\mu/2, -i\infty)$ est d'ailleurs une discontinuité de $f_l(-k, G)$, l'autre étant une discontinuité du numérateur $f_l(k, G)$.

2. Pôles en G correspondant à des états liés.

Dans tout ce qui suit, nous allons considérer les pôles de $S_l(k, G)$ en G , k étant pris comme paramètre, c'est-à-dire les racines en G de (1-9) :

$$f_l(-k, G) = 0,$$

qui ne sont pas racines du numérateur $f_l(k, G)$.

Pour un couple de valeurs k, G satisfaisant à (1-9), (1-6) se réduit à :

$$\varphi_l = \frac{2l+1}{2ik} f_l(-k, G, r) f_l(k, G) \quad (2-1) \\ \sim_{r \rightarrow \infty} \frac{2l+1}{2ik} f_l(k, G) e^{ikr}.$$

Comme (1-6), cette relation n'est valable que là où f_l^+ , f_l^- sont définis, c'est-à-dire en dehors des coupures ⁽²⁾.

a) LES ÉTATS LIÉS CORRESPONDENT AUX SOLUTIONS $k = i\kappa$, G ($\kappa > 0$) POUR LESQUELLES $E = k^2 = -\kappa^2$.

La fonction d'onde φ_l associée satisfait à (1-4) c'est-à-dire :

$$\varphi'' - \frac{l(l+1)}{r^2} \varphi - \kappa^2 \varphi = U(r) \varphi, \quad (2-2)$$

et d'après (2-1) se comporte comme $e^{-\kappa r}$ quand $r \rightarrow \infty$.

Multipliant (2-2) par φ^* et l'équation conjuguée par $-\varphi$, on obtient par combinaison :

$$\varphi^* \varphi'' - \varphi \varphi''^* \equiv (\varphi^* \varphi' - \varphi \varphi'^*)' \\ = [U(r) - U^*(r)] |\varphi|^2 = 2i(\text{Im} G) V(r) |\varphi|^2.$$

D'où, puisque $\varphi(r=0) = 0$ (et φ' fini) :

$$\varphi^* \varphi' - \varphi \varphi'^* \equiv |\varphi|^2 2i \text{Im}(\varphi'/\varphi) \\ = 2i(\text{Im} G) \int_0^r V(r) |\varphi|^2 dr. \quad (2-3)$$

Quand $r \rightarrow \infty$, $|\varphi|^2 \rightarrow 0$ ainsi que $\text{Im}(\varphi'/\varphi)$ puisque $\varphi'/\varphi \rightarrow -\kappa$. On a donc ici :

$$(\text{Im} G) \int_0^{\infty} V(r) |\varphi|^2 dr = 0, \quad (2-4)$$

Nous pouvons en conclure que $\text{Im} G = 0$ (2-5) dans les cas suivants :

1) $V(r)$ garde un signe constant dans $(0, \infty)$.

Alors l'intégrale sur $V(r)$ n'est certainement pas nulle d'où : (2-5).

Comme, pour les valeurs physiques de G , le signe de $GV(r)$ est seul défini, nous pouvons toujours choisir $V(r) > 0$, le signe du produit étant alors celui de G dans le cas physique.

Le potentiel centrifuge de [1] entre dans cette

⁽²⁾ On peut cependant appliquer (1-6) de part et d'autre des coupures puisque φ_l est continu dans tout le plan k . Cf. [7].

classe. Mais, évidemment, 1) n'est pas l'hypothèse la plus générale conduisant à (2-5).

2) $U(r)$ se réduit à $GV(r)$.

Multiplications maintenant (2-2) par φ^* et prenons $\int_0^\infty dr$. Remarquons que :

$$\int \varphi^* \varphi \, dr = \varphi^* \varphi \Big|_0^\infty - \int_0^\infty |\varphi'|^2 \, dr = - \int_0^\infty |\varphi'|^2 \, dr,$$

on obtient une relation dont la partie imaginaire est (2-4), et la partie réelle :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left\{ |\varphi'|^2 + \left[\frac{l(l+1)}{r^2} + \kappa^2 \right] |\varphi|^2 \right\} dr = \\ - \int_0^\infty |\varphi|^2 \operatorname{Re} U(r) \, dr = \\ - (\operatorname{Re} G) \int_0^\infty V(r) |\varphi|^2 \, dr > 0. \end{aligned} \quad (2-6)$$

L'intégrale sur $V(r)$ n'est donc pas nulle. Dans ce cas encore, nous avons donc *pour tout état lié* ($\operatorname{Re} k = 0$, $\operatorname{Im} k > 0$), G réel ; de plus

$$G \int_0^\infty V(r) |\varphi|^2 \, dr < 0. \quad (2-6)$$

On remarquera que le raisonnement conduisant à (2-4) tombe en défaut pour les états anti-liés $\operatorname{Im} k < 0$. Alors, en effet, si $\varphi'/\varphi \rightarrow 0$ quand $r \rightarrow \infty$, $|\varphi|^2 \propto e^{-2\kappa r} \rightarrow \infty$. Nous reviendrons sur ces états aux §§ 4 et 5.

b) VARIATION DE $E = -\kappa^2$ EN FONCTION DE G . Ici encore, la démonstration est analogue à celle de [1]. Écrivons (2-2) $D\varphi = 0$, avec

$$D \equiv \frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} - \kappa^2 - U(r).$$

D est un opérateur réel d'après a). Par suite, φ qui satisfait à des conditions initiales réelles pour $r = 0$, est réelle quel que soit r . Regge utilise l'identité pour une fonction quelconque $F(r, G)$:

$$\begin{aligned} FD \frac{\partial F}{\partial G} - \frac{\partial F}{\partial G} DF = F \frac{\partial F''}{\partial G} - \frac{\partial F}{\partial G} F'' \\ = \frac{d}{dr} \left(F \frac{dF'}{dG} - F' \frac{dF}{dG} \right). \end{aligned}$$

L'appliquant à φ qui vérifie (2-2), c'est-à-dire :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial G} D\varphi = 0 \quad \text{et} \quad \varphi \frac{\partial}{\partial G} D\varphi = 0,$$

on obtient ici :

$$\begin{aligned} \varphi^2 \left[V(r) + \frac{\partial \kappa^2}{\partial G} \right] &= \frac{d}{dr} \left(\varphi \frac{\partial \varphi'}{\partial G} - \varphi' \frac{\partial \varphi}{\partial G} \right) \\ \frac{\partial \kappa^2}{\partial G} \int_0^\infty \varphi^2 \, dr &= - \int_0^\infty \varphi^2 V(r) \, dr, \\ \frac{\partial \kappa^2}{\partial G} &= - \frac{\partial \kappa^2}{\partial G} = \frac{\int_0^\infty \varphi^2 V(r) \, dr}{\int_0^\infty \varphi^2 \, dr} \equiv \langle V(r) \rangle. \end{aligned} \quad (2-7)$$

Si $V(r)$ satisfait à 1), on a, avec notre convention de signe, $\partial E / \partial G > 0$, ou $\partial G_l / \partial E > 0$ en considérant $G_l(E)$. En particulier, tous les $G_l(E) < G_l^c$ correspondent au cas limite $E = 0$, comme il est indiqué sur les figures 1 et 2 pour les parties $E < 0$ des trajectoires.

Bien entendu, pour des valeurs fixées de l et E , l'équation (1-9) a en général plusieurs racines $G_l(E)$, ou même un nombre infini (cf. [2] pour le potentiel de Hulthén). Nos notations $G_l(E)$, G_l^c , sont relatives à l'une d'elles, l'indice (n par exemple) qui la désigne étant omis.

Si l'on a l'hypothèse 2), $\frac{\partial \kappa^2}{\partial G}$ a le signe de G d'après (2-6), donc $\frac{\partial \kappa^2}{\partial G^2} > 0$. (2-8)

Considérant encore la limite d'un état lié $\kappa = 0_+$, on pourra avoir ici G_{ln}^c positif ou négatif : un seul des signes peut être fixé par convention sur le signe de $V(r)$, et les autres en résultent. Mais on aura toujours d'après (2-8) :

$$|G_{ln}(E)| > |G_{ln}^c|.$$

La disposition des trajectoires n'est plus celle des figures 1, 2 dans le cas le plus général, mais celle de la figure 4⁽³⁾

FIG. 4.

Il en résulte que $G_{ln}(E)$ garde un signe constant, celui de G_{ln}^c , et d'après (2-7) que $\frac{\partial G_{ln}}{\partial \kappa^2}$ a le même signe.

3. États résonnants. — On a rappelé au paragraphe 1 qu'ils correspondent aux racines k complexes de (1-9) avec $\operatorname{Im} k < 0$, lorsque tous les autres paramètres sont réels. Nous supposons $\operatorname{Re} k \neq 0$, réservant au paragraphe 4 l'étude des états anti-liés, et considérerons une valeur petite⁽⁴⁾ de $\operatorname{Im} k$ qui correspond à une résonance pratiquement observable.

Si maintenant on a une solution de (1-9) avec k et G complexes, on peut déplacer les valeurs de k , G en maintenant la relation : $f_l(-k, G) = 0$ de manière que G devienne réel et k seul complexe.

⁽³⁾ La disposition indiquée des branches $E > 0$ au départ des points G^c sera établie au § 4.

⁽⁴⁾ Il faut que $|\operatorname{Im} k|$ soit petit devant la différence $|\operatorname{Re} k - \operatorname{Re} k'|$ où k' est le pôle le plus voisin de k .

Pour ce couple de valeurs, $(G_1 \text{ réel}, k_1)$ on a alors en général, conformément au résultat de [4] :

$\text{Re } k_1 \neq 0$, $\text{Im } k_1 < 0$, étant résonnant. Cependant, on pourrait aussi aboutir à un état lié ou anti-lié $\text{Re } k_1 = 0$.

Si l'on considère ainsi au départ les solutions k_0, G_0 dans l'ensemble des plans complexes k, G , on a un très grand arbitraire relativement au problème physique puisque un couple (k_1, G_1) de valeurs physiques peut être obtenu par déplacement à partir de (k_0, G_0) quelconque.

Comme Regge, nous prendrons donc les solutions k réel, G complexe — ce qui présente le même degré d'arbitraire que k complexe, G réel quelconque —. Soit (k_2, G_2) une telle solution avec k_2 réel. Si le déplacement qui conduit à G_1 réel, k_1 complexe est petit, on sera assuré d'aboutir à une résonance $\text{Re } k_1 \neq 0$, $\text{Im } k_1 \neq 0$. Les solutions intéressantes seront donc celles avec $\text{Im } G_2$ petit, k_2 réel $\neq 0$. On peut ensuite conduire G_2 en :

$G_1 = G_2 - i \text{Im } G_2$ par un déplacement parallèle à l'axe imaginaire. Alors :

$$k_2 \rightarrow k_1 = k_2 + \Delta k_2,$$

où :

$$\Delta k_2 \approx - \left(\frac{\partial f_1}{\partial G} \frac{\partial f_1}{\partial k} \right)_{k_1, G_1} i \text{Im } G_2,$$

(k_1, G_1) est une résonance physique si G_1 a la valeur du problème physique ; seuls les points des trajectoires $G(k \text{ réel})$ coupant : $\text{Re } G = G$ physique, ont un intérêt. Dans le problème de diffusion $n - p$ la même trajectoire donne les résonances *singulet et triplet* associées à deux valeurs de G .

a) SITUATION DES TRAJECTOIRES $G(k \text{ RÉEL})$. — Nous prenons donc ici k réel ($E = k^2 > 0$), G complexe. D'autre part, à cause de la 2^e relation de symétrie (1-8) nous nous limitons à $k > 0$ ($k_1 G_1 \rightarrow -k_1 G_1^*$). k^2 remplaçant $-x^2$ dans (2-2), on obtient encore (2-3) :

$$|\varphi|^2 \text{Im} \frac{\varphi'}{\varphi} = (\text{Im } G) \int_0^r V(r) |\varphi|^2 dr. \quad (2-3)$$

Quand

$$r \rightarrow \infty, \text{ ici } |\varphi|^2 \rightarrow \frac{(2l+1)^2}{4k^2} |f_l(kG)^2| \text{ finie } \neq 0,$$

tandis que

$$\text{Im}(\varphi'/\varphi) \rightarrow k.$$

Dans l'hypothèse 1) pour $V(r)$, $\text{Im } G$ a donc le signe de $k > 0$: les trajectoires $G_l(k)$ sont dans le 2^{me} et le 1^{er} quadrant du plan G , comme on l'avait indiqué (fig. 1 et 2).

Dans l'hypothèse 2) on ne peut plus rien affirmer en général sinon que $\text{Im } G \neq 0$ aussi bien que $\int_0^\infty V(r) |\varphi|^2 dr$.

b) Il est instructif de vérifier les propriétés des solution (k_1, G_1) , (k_2, G_2) obtenues par déplacement à partir de (k_0, G_0) dans le cas simple d'un potentiel de portée finie : $U(r) = 0$ pour $r > a$.

Considérant un état S , (1-1) se réduit à :

$$u'' + k^2 u = 0 \quad \text{pour } r > a,$$

d'où :

$$u = \text{Cte} \times [S(k) e^{ikr} - e^{-ikr}],$$

$S(k)$ s'obtient en raccordant cette solution extérieure à la solution intérieure régulière à l'origine par

$$(u'/u)_{r=a+} = (u'/u)_{r=a-},$$

$$ik \frac{S(k) e^{ika} + e^{-ika}}{S(k) e^{ika} - e^{-ika}} = \left(\frac{u'}{u} \right)_a,$$

$$S(k) = e^{-2ika} \frac{(u' + iku)_a}{(u' - iku)_a} = \frac{f_0(k, G)}{f_0(-k, G)}. \quad (3-1)$$

Pour une solution de (1-9), avec $l = 0$, on a donc $(u'/u)_a = ik$. D'autre part, k étant ici complexe, la combinaison (2-3) donne :

$$\begin{aligned} |u|^2 \left(\frac{u'}{u} - \frac{u'^*}{u^*} \right) + (k^2 - k^{*2}) \int_0^r |u|^2 dr \\ = (G - G^*) \int_0^r V |u|^2 dr. \end{aligned}$$

Soit pour $r = a$

$$\begin{aligned} (k + k^*) \left[i |u|^2 + (k + k^*) \int_0^a |u|^2 dr \right] \\ = 2i(\text{Im } G) \int_0^a V |u|^2 dr, \end{aligned}$$

$$\text{Re } k \left[|u| + 2 \text{Im } k \int_0^a |u|^2 dr \right] = \text{Im } G \int_0^a V |u|^2 dr \quad (3-2)$$

(3-2) est vérifié pour k_0, G_0 et $u(k_0, G_0, r)$.

α) Si maintenant $k_0, G_0 \rightarrow k_1, G_1$ (G_1 réel) on obtient bien :

— Soit $\text{Re } k_1 = 0$: états liés et anti-liés.

— Soit $\text{Re } k_1 \neq 0$, $\text{Im } k_1 < 0$: états résonnants.

β) Si $k_0, G_0 \rightarrow k_2, G_2$ (k_2 réel).

$\text{Im } G_2$ a le signe de $\text{Re } k_2$ dans le cas où $V(r)$ a un signe constant.

4. États anti-liés. Formes des trajectoires. —

a) La difficulté rencontrée avec (2-3) dans le cas des états anti-liés ne se présente plus avec (3-2) pour un potentiel à portée finie : ici $|u|_a^2 \propto e^{-2\kappa a}$ reste fini et l'on peut conclure que $\text{Im } G = 0$.

b) Cas où $e^{\mu r} U(r) \rightarrow 0$ quand $r \rightarrow \infty$.

L'équation (1-9) devient, comme on l'a vu au paragraphe 1, réelle en G pour $k = i\mu$ imaginaire pur. Elle est alors définie pour $\kappa > -\mu/2$, sauf toutefois pour $\kappa = 0$.

En effet, $f_l(-k, G, r)$ est holomorphe dans le demi-plan situé au-dessus de $\text{Im } k = -i\mu/2$, sauf au point $k = 0$ qui, pour $l \neq 0$, est un pôle « cinématique » d'ordre l . Ceci apparaît immédiatement lorsque $U(r) \equiv 0$: $f_l \propto h_l(-kr)$ (où $h_l \propto \sqrt{kr} H_{l+1/2}$). Pour $U \neq 0$, on examine l'équation intégrale de Green correspondant à (1-1) et à la condition asymptotique pour f_l . Utilisant des

majorantes des fonctions de Bessel et Hankel, Newton [8] établit ainsi que :

$$f_l(-k, G, r) - w_l(-kr) \leq C e^{-\alpha r} \left(\frac{1 + |k| r}{|k| r} \right)^l - e^{C\alpha} \int_r^\infty dr' |U(r')| \frac{r'}{1 + |k| r'},$$

où $\alpha = \text{Im } k > 0$, C et α sont des constantes et :

$$w_l(-kr) \equiv e^{ikr} \sum_{p=0}^l \left(\frac{i}{2kr} \right)^p \frac{(l+p)!}{p!(l-p)!} \propto h_l(-kr).$$

D'où pour $|k| < M$:

$$e^{\alpha r} |(-kr)^l f_l(-k, G, r) - (-kr)^l w_l(-kr)| \leq C e^{C\alpha} (1 + Mr)^l \int_r^\infty r' |U(r')| dr', \quad (4-1)$$

dont le 2^e membre $w_l(r)$ ne dépend pas de k , si G est un paramètre indépendant ; si $G = G(k)$ il en est de même pourvu que $|G(k)| < L$ quand $|k| < M : |U(r', G)| < |U(r', L)|$.

Par hypothèse :

$$U(r) < e^{-\lambda r} U_1(r),$$

pour $r > R_1$, ($0 < \lambda \leq \mu$).

$$w_l(r) \leq C e^{C\alpha} (1 + Mr)^l e^{-\lambda r} \int_r^\infty r' |U_1(r')| dr' < \varepsilon,$$

pour $r > R$ (R indépendant de k). Quand $k = i\alpha \rightarrow 0$:

$$\left| \lim_{k \rightarrow 0} e^{\alpha r} (-kr)^l f_l - a_l \right| \leq \varepsilon.$$

Donc :

$$\lim_{k \rightarrow 0} (-k)^l f_l \simeq \frac{a_l}{r^l},$$

où

$$a_l = \frac{(2l)!}{l!} = \text{Cte.}$$

Lorsque $l = 0$, l'hypothèse sur $U(r)$ n'est pas nécessaire puisque

$$w_0(r) \equiv C e^{C\alpha} \int_r^\infty r' |U(r')| dr' \rightarrow 0 \quad \text{quand } r \rightarrow \infty,$$

pourvu qu'il soit défini (intégrale convergente). Dans ce cas :

$$\lim_{k \rightarrow 0} f_0 \simeq 1. \quad (4-2)$$

Lorsque $l \neq 0$, $f_l(-k, G)$ a aussi un pôle d'ordre l en k et, pour éviter cette difficulté, nous remplacerons dans (1-9) f_l par :

$$F_l(-k, G) \equiv (-k)^l f_l(-k, G). \quad (4-3)$$

Alors, dans $\text{Im } k > -i\mu/2$, (1-9) définit une fonction implicite $G_l(k)$ — en général multiforme — analytique en tout point k_0 tel que

$$\left(\frac{\partial F_l}{\partial G} \right)_{k_0, G(k_0)} \neq 0,$$

les points où cette expression s'annule étant des points de branchement de $G_l(k)$.

En particulier pour $\alpha = -ik$ dans $(-\mu/2, +\infty)$, on a :

$$\Gamma_l(\alpha) \equiv G_l(i\alpha),$$

vérifiant :

$$F_l[-i\alpha, \Gamma_l(\alpha)] = F_l^*[-i\alpha, \Gamma_l^*(\alpha)] = 0 \quad (4-4)$$

qui aura des branches réelles, et des branches deux à deux imaginaires conjuguées. Sa dérivée $\Gamma'_l(\alpha)$ est donnée par :

$$-i \left(\frac{\partial F_l}{\partial k} \right)_{k=-i\alpha, \Gamma_l} + \left(\frac{\partial F_l}{\partial G} \right)_{k=-i\alpha, \Gamma_l} \Gamma'_l(\alpha) = 0, \quad (4-4)$$

en tout point où

$$(\partial F_l / \partial G) \neq 0.$$

Pour $\alpha > 0$, on a démontré au paragraphe 2 que les seules branches intéressant le problème physique des états liés étaient les branches réelles.

A la limite, $\alpha \rightarrow 0_+$,

$$\Gamma_l(\alpha) \rightarrow \Gamma_l(0) \equiv G_l^e,$$

$$\Gamma'_l(\alpha) \rightarrow \Gamma'_l(0),$$

réelle si

$$(\partial F_l / \partial G)_e \equiv (\partial F_l / \partial G)_{k=0, G_l^e},$$

n'est pas nul.

Nous nous placerons dans ce cas qui est, *a priori*, le plus général ⁽⁵⁾. En passant à $\alpha < 0$ à partir de ces valeurs initiales pour $\alpha = 0$, on aura une branche réelle de $G_l(\alpha)$, prolongeant celle pour $\alpha > 0$, qui correspondra à des états anti-liés.

Pour préciser la situation de la portion de trajectoire correspondante sur l'axe réel, récrivons (1-6) sous la forme :

$$\varphi_l = \frac{2l+1}{2ik^{2l+1}} [F_l(k, G) F_l(-k, G, r) - F_l(-k, G) F_l(k, G, r)]. \quad (4-5)$$

où :

$$F_l(k, G, r) \equiv k^l f_l(k, G, r).$$

Cette expression (4-5) est indéterminée quand $k \rightarrow 0$, pour G fixé. Mais, si $G = G_l(k)$, on a quel que soit $k \neq 0$ (2-1) ou :

$$\varphi_l[k^2, G_l(k), r] = \frac{2l+1}{2ik^{2l+1}} F_l[k, G_l(k)] F_l[-k, G_l(k), r] \quad (4-6)$$

Passant à la limite $k = i\alpha \rightarrow 0$:

$$\varphi_l(0, G_l^e, r) = \frac{2l+1}{2i} \left\{ \lim_{k \rightarrow 0} \frac{F_l[k, G_l(k)]}{k^{2l+1}} \right\} F_l(0, G_l^e, r), \quad (4-7)$$

⁽⁵⁾ Il est bien réalisé pour $l = 0$ et un potentiel du type de Martin, cf. § 5. D'autre part, nous démontrons qu'il l'est, toujours pour un potentiel de signe constant (Appendice).

où φ_l et F_l sont finies non nulles ($\varphi_l \underset{r \rightarrow 0}{\sim} r^{l+1}$; $F_l \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} au r^{-l}$); il résulte d'ailleurs de l'analyticité de φ_l et F_l de (4-6) au voisinage de $k = 0$, qu'elles sont solutions de (1-4) où l'on fait $k = 0$.

Du fait que l'expression $\{ \quad \}$ est finie non nulle, on peut déduire les conséquences suivantes :

1) $l = 0$

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{F_0[k, G_0(k)]}{2k} \\ = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{F_0[k, G_0(k)] - F_0[-k, G_0(k)]}{2k} \\ = \left(\frac{\partial F_0}{\partial k} \right)_c \neq 0, \text{ fini,} \end{aligned}$$

Donc avec (4-4), $\Gamma'_0(0) \neq 0$, fini.

Or, on a vu au paragraphe 2 que $\Gamma'_l(x)$ a un signe constant pour $x > 0$: dans l'hypothèse 1) où $V(r) > 0$, ce signe est négatif; 2) ce signe est celui de G_l , c'est-à-dire celui de G'_l (fig. 4).

α) Supposons d'abord

$$G_0^c < 0 \rightarrow \Gamma'_0(x) < 0.$$

On aura donc $\Gamma'_0(0_+) < 0$, et à partir de $x = 0$, pour x petit négatif :

$$\Gamma_0(x) - \Gamma_0(0) \simeq x \Gamma'_0(0) > 0.$$

Nous passons donc à droite de G_0^c sur l'axe réel comme il est indiqué figure 3.

En introduisant ces nouvelles valeurs dans (4-4)', on obtient encore $\Gamma'_0(x)$ réel ≤ 0 . S'il n'est pas nul, on pourra prolonger vers la droite et ainsi de suite de proche en proche jusqu'à ce que l'on trouve soit $\Gamma'_0(x) = 0$ (retour de la trajectoire vers la gauche), soit $(\partial F / \partial G) = 0$ (point de branchement)⁽⁶⁾ ou que l'on arrive à $x = -\mu/2$. Dans ces deux derniers cas on ne peut plus prolonger $\Gamma_0(x)$.

β) Si l'on suppose

$$G_0^c > 0 \rightarrow \Gamma'_0(x) > 0,$$

on obtient les signes opposés aux précédents, c'est-à-dire une disposition symétrique de celle de α (symétrique de fig. 3).

2° $l \neq 0$.

Il faut que : $F_l[k, G_l(k)] = O(k^{2l+1})$, cette fonction étant analytique au voisinage de $k = 0$, puisque :

$$F_l[k, G] = \sum_{\substack{m=0 \\ n=0}}^{\infty} a_{mn} (G - G^c)^m k^n,$$

près de $k = 0$, $G = G^c$ tandis que :

$$G(k) - G^c = \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_p k^p.$$

⁽⁶⁾ Ce cas est exclu si $V(r)$ a un signe constant (cf. appendice).

Annulant les coefficients des puissances de k successives :

$$\begin{aligned} \left(\frac{dF_l}{dk} \right)_0 &= \left(\frac{d^2 F_l}{dk^2} \right)_0 = \dots = \left(\frac{d^{2l} F_l}{dk^{2l}} \right)_0 = 0, \\ \left(\frac{dF_l}{dk} \right) &= \left(\frac{\partial F_l}{\partial k} \right)_c + G'_l(0) \left(\frac{\partial F_l}{\partial G} \right)_c = 0, \end{aligned}$$

alors que :

$$0 = - \left(\frac{\partial F_l}{\partial k} \right)_c + G'_l(0) \left(\frac{\partial F_l}{\partial G} \right)_c \text{ par (4-4)'}$$

D'où :

$$\left(\frac{\partial F_l}{\partial k} \right)_c = 0,$$

en accord avec [8] et

$$G'_l(0) = 0 = \Gamma'_l(0),$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2 F_l}{dk^2} \right)_0 &= \left(\frac{\partial^2 F_l}{\partial k^2} \right)_c + 2 G'_l(0) \left(\frac{\partial^2 F_l}{\partial k \partial G} \right)_c \\ &\quad + G_l'^2(0) \left(\frac{\partial^2 F_l}{\partial G^2} \right)_c + G''_l(0) \left(\frac{\partial F_l}{\partial G} \right)_c = 0, \\ 0 &= \left(\frac{\partial^2 F_l}{\partial k^2} \right)_c - 2 G'_l(0) \left(\frac{\partial^2 F_l}{\partial k \partial G} \right)_c \\ &\quad + G_l'^2(0) \left(\frac{\partial^2 F_l}{\partial G^2} \right)_c + G''_l(0) \left(\frac{\partial F_l}{\partial G} \right)_c, \end{aligned}$$

se réduit à une seule relation compte tenu de $G'_l(0) = 0$. La valeur $G''_l(0) \neq 0$ en général, ainsi que $\left(\frac{\partial^2 F_l}{\partial k^2} \right)_c$ etc. A l'ordre 3, on trouve $G''_l(0) = 0$.

Montrons que toutes les dérivées d'ordre impair sont nulles jusqu'à $G_l^{(2l-1)}(0)$. En effet, $G_l(k)$ vérifie l'identité (4-4) qui peut s'écrire aussi :

$$F_l[k, G_l(-k)] \equiv 0 \text{ pour } x < \mu/2, \quad (4-8)$$

tandis que l'on étudie : $F_l[k, G_l(k)]$ pour $k \simeq 0$.

Soit :

$$\begin{aligned} G_l(k) &\equiv P_l(k) + I_l(k), \\ G_l(-k) &\equiv P_l(k) - I_l(k), \end{aligned}$$

en séparant les fonctions paire et impaire de k

$$\begin{aligned} F_l[k, G_l(k)] &\equiv F_l[k, P_l(k) + I_l(k)] \\ &= F_l[k, P_l(k) - I_l(k)] \\ &\quad + 2 I_l(k) \left(\frac{\partial F_l}{\partial G} \right) + \frac{1}{2!} 4 I_l^2(k) \left(\frac{\partial^2 F_l}{\partial G^2} \right) + \dots (4-9) \end{aligned}$$

où $(\partial F_l / \partial G) \dots$ etc, sont les valeurs de ces expressions pour : $G = P_l(k) - I_l(k)$. Le 1^{er} terme de (4-9) est identiquement nul par (4-8).

Quand $k \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F_l}{\partial G} \right) &\rightarrow \left(\frac{\partial F_l}{\partial G} \right)_c \neq 0, \\ \left(\frac{\partial^2 F_l}{\partial G^2} \right) &\rightarrow \left(\frac{\partial^2 F_l}{\partial G^2} \right)_c \text{ etc....} \end{aligned}$$

et l'on a donc :

$$F_l[k, G_l(k)] \underset{k \rightarrow 0}{\simeq} 2 c_s k^s \left(\frac{\partial F_l}{\partial G} \right)_c,$$

si :

$$I_l(k) \simeq c_s k^s.$$

Ceci impose : $s = 2l + 1$ pour la première puissance non nulle de k dans le développement de $I_l(k)$, c'est-à-dire le résultat énoncé.

$$\alpha - \underline{G_l^e} < 0 \rightarrow \underline{\Gamma_l'(x)} < 0 \quad \text{pour } x > 0,$$

$$\Gamma_l(x) - \Gamma_l(0) \simeq \frac{1}{2} x^2 \Gamma_l''(0),$$

a le signe de $\Gamma_l''(0) < 0$, comme celui de $\frac{\Gamma_l'(x) - \Gamma_l'(0)}{x}$ pour $x > 0$.

La trajectoire revient sur la gauche à partir de G_l^e .

β) $\underline{G_l^e} > 0$ donne la disposition symétrique de la précédente.

c) *Départ des trajectoires $G_l(k)$ réel en G^e .*
Pour $x = -ik$ réel, on a par définition :

$$\Gamma_l'(x) = iG_l'(ix),$$

d'où

$$G_l'(0) = -i\Gamma_l'(0) \quad \text{pour } x \rightarrow 0.$$

1° $\underline{l = 0}$.

$$\Delta G_0 \equiv G_0(k) - G_0^e \simeq_{k \rightarrow 0} ik[-\Gamma_0'(0)].$$

Si l'on suppose :

$$\begin{cases} G_0^e < 0 \rightarrow \Gamma_0'(0) < 0, \\ \text{Im } \Delta G_0 \simeq k[-\Gamma_0'(0)] > 0 \text{ pour } k > 0, \\ \text{Re } \Delta G_0 \simeq 0. \end{cases}$$

La trajectoire $G_0(k)$ part donc *perpendiculairement* à l'axe réel dans le 2° quadrant, comme il est indiqué figures 1 à 3, en accord avec le résultat sur $\text{Im } G$ du paragraphe 3. *A priori*, elle peut partir vers la droite ou vers la gauche. Mais un pôle $G^{(2)}$ complexe, $k^{(2)}$ réel sur cette portion de trajectoire conduit par déplacement dans les plans G , k à :

$$G^{(1)} = \text{Re } G^{(2)} \text{ réel}, \quad k^{(1)} = k^{(2)} - \frac{i \text{Im } G^{(2)}}{(dG/dk)_{(2)}}$$

complexe tel que :

$$\text{Im } k^{(1)} = -\frac{\text{Im } G^{(2)}}{(d \text{Re } G/dk)_{(2)}} < 0,$$

Il faut donc que :

$$(d \text{Re } G/dk)_{(2)} > 0,$$

puisque

$$\text{Im } G^{(2)} > 0.$$

La trajectoire $G_1(k)$ est donc vers la droite.

Avec $G_0^e > 0$, on obtient la disposition symétrique de la précédente par rapport à l'origine, comme il est indiqué figure 4 (où il faut prendre $l = l' = 0$).

2° $\underline{l \neq 0}$.

En posant :

$$\begin{cases} P_l(k) \equiv G_l^e + Q_l(k^2), \\ I_l(k) \equiv ikJ_l(k^2). \end{cases}$$

$$G_l(k) = G_l^e + Q_l(k^2) + ikJ_l(k^2). \quad (4-10)$$

Pour $k = ix$:

$$\Gamma_l(x) \equiv G_l(ix) = G_l^e + Q_l(-x^2) - xJ_l(-x^2),$$

est réelle ; les fonctions Q_l et J_l sont donc réelles.

Pour k réel, il résulte alors de (4-10) que :

$$\begin{cases} \text{Re } \Delta G_l \equiv \text{Re}[G_l(k) - G_l^e] = Q_l(k^2), \\ \text{Im } \Delta G_l \equiv kJ_l(k^2) = -iI_l(k), \end{cases}$$

et d'après le résultat de b) que :

$$\begin{cases} \text{Re } \Delta G_l = O(k^2) \\ \text{Im } \Delta G_l = O(k^{2l+1}) \end{cases} \quad (7) \text{ pour } k \simeq 0.$$

La trajectoire $G_l(k)$ part donc *tangentielllement* à l'axe réel avec un contact d'ordre $l + \frac{1}{2}$,

D'ailleurs :

$$\text{Re } \Delta G_l \simeq_{k \rightarrow 0} \frac{1}{2} G''(0) k^2 = -\frac{1}{2} \Gamma_l''(0) k^2.$$

D'où, avec l'hypothèse :

$$G_l^e < 0 \rightarrow \Gamma_l''(0) < 0.$$

La trajectoire $G_l(k)$ part vers la droite et dans le 2° quadrant d'après le résultat général déduit de (2-3), comme en figure 2. $G_l^e > 0$ donne la disposition symétrique.

5. Pôles (k, G) complexes pour des potentiels du type *superposition d'exponentielles*

$$V(r) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\alpha) e^{-\alpha r} d\alpha.$$

$$|C(\alpha)| < C_0 e^{\alpha^{1-\eta}}. \quad (5-1)$$

On va montrer que l'indétermination obtenue pour appliquer (2-3) et (2-6') aux états anti-liés, ainsi que (2-6') aux pôles (k réel, G complexe) peut être levée. On désire aussi étendre au feuillet non physique en E ($\text{Im } k < 0$) les relations simples obtenues entre les parties réelles et imaginaires des pôles de $S_l(k, G)$. Il faut expliciter les potentiels utilisés pour définir le domaine d'existence et de régularité de $F_l(-k, G)$. Pour des potentiels du type que nous supposons, il ne reste plus qu'une coupure de $-i\mu/2$ à $-i\infty$ (avec un pôle d'ordre l pour $k = 0$). Revenons donc à l'équation

$$\varphi_l'' \varphi_l^* + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] |\varphi_l|^2 = GV|\varphi_l|^2, \quad (5-2)$$

(7) On retrouve ce résultat sur (2-3) si l'on y tient compte de (4-6).

que l'on désire intégrer de 0 à ∞ et qui donne les relations simples cherchées.

L'intégrale $\int_0^r V|\varphi|^2 dr$ converge quand $r \rightarrow \infty$ pour $k = i\kappa$ ($\kappa > -\mu/2 + \varepsilon$) et le membre de droite de (5-2) aura donc un sens. Nous devons donc pouvoir donner un sens au membre de gauche. Nous pourrions ainsi prolonger les propriétés obtenues pour $G(\kappa)$ et $\partial G/\partial \kappa$ jusqu'à $\kappa > -\mu/2 + \varepsilon$ et montrer que les états liés et anti-liés pour le couple (k, G) appartiennent bien à la même famille de singularités ($\text{Im } G = 0$, $\text{Re } k = 0$). Vu sous cet angle, l'état anti-lié (1S_0) neutron-proton et le deuteron sont de natures semblables. Ensuite, par étapes successives, donnant un sens au membre de droite de (5-2), pour $r \in [0, \infty]$ dans le demi-plan $\text{Im } k > -\mu/2$ puis pour k en dehors de $[-i\mu/2, -i\infty]$, nous généraliserons les résultats obtenus antérieurement dans des domaines plus restreints, la dernière étape contenant évidemment tous les résultats précédents. Nous supposons toujours que $\int_0^\infty V|\varphi|^2 dr \neq 0$ et k fini. Pour simplifier, nous prenons $l = 0$. A. Martin [5] a étudié les solutions $f(-k, G, r)$, (G réel) pour des potentiels du type (4-1) en utilisant la transformation de Laplace, f s'écrit :

$$f(-k, G, r) = e^{ikr} \left[1 + \int_{\mu}^{\infty} \rho_{-k, G}(\alpha) e^{-\alpha r} d\alpha \right] \\ = e^{ikr} + g(-k, r) = e^{ikr} [1 + \psi(-k, r)]. \quad (5-3)$$

Posons

$$C = \frac{f(k, G)}{2ik},$$

alors pour $f(-k, G) = 0$, on a $\varphi = Cf \underset{r \rightarrow 0}{\simeq} r$ et $g \underset{r \rightarrow 0}{\simeq} -1 + (C^{-1} - ik)r$.

a) *États liés et anti-liés* $k = i\kappa$ (κ fini). Il est facile de montrer d'après l'étude de A. Martin que pour $r > r_0$ (r_0 suffisamment grand et fini), pour $-\mu/2 + \varepsilon < \kappa$ ($\varepsilon > 0$ et petit),

$$|g|, \left| \frac{\partial g}{\partial r} \right|, \left| \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} \right|, \left| \frac{\partial g}{\partial \kappa} \right|, \left| \frac{\partial^2 g}{\partial \kappa \partial r} \right|,$$

sont bornés par des expressions de la forme (5-4): $e^{-\kappa r} e^{-\mu r} |C^{\text{te}}| \times \text{fonction de } r \text{ croissant moins vite que toute exponentielle.}$

On obtient alors d'après (5-2) et quelques intégrations par parties justifiables d'après (5-4).

$$|C|^2 \left[\kappa - \left(\int_0^\infty \kappa^2 |g|^2 + |g'|^2 dr \right) \right] \\ = G \int_0^\infty V|\varphi|^2 dr + \sum_i G_i \int_0^\infty V_i |\varphi|^2 dr. \quad (5-5)$$

Pour $\kappa > 0$, on peut identifier (5-5) avec (2-6') établi directement.

Pour $\kappa > 0$ ou $\kappa < 0$ on a donc *toujours* $\text{Im } G = 0$. D'autre part si le potentiel se réduit à

GV , avec $V > 0$, alors $G(k)$ est < 0 . En outre, (5-5) peut nous permettre de passer à la limite $\kappa \rightarrow 0$ ($\kappa > 0$ ou $\kappa < 0$) puisque $C(\kappa) \rightarrow f'(0)$ finie non nulle comme on l'a vu au paragraphe 4.

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} C(\kappa) = \frac{-\int_0^\infty g'^2(0, r) dr}{\int_0^\infty V(1 + g(0, r))^2 dr} \quad (5-6)$$

$G(0)$ est donc toujours < 0 et fini si $V(r)$ est positif.

Considérons l'équation avec

$$k = 0 : \varphi'' = GV\varphi.$$

Si on définit une solution par $f(r) \underset{r \rightarrow \infty}{\simeq} 1$, on peut montrer que pour les potentiels (5-1) f s'écrit

$$f(r) = 1 + g(r) \quad \text{où} \quad g(r) \underset{r \rightarrow \infty}{\simeq} \text{Cte } e^{-\mu r}.$$

On déduit aisément à partir de l'équation (5-2) correspondante que si $f(r)$ ⁽⁸⁾ s'annule à l'origine alors $\text{Im } G = 0$ et

$$\text{Re } G = \frac{-\int_0^\infty g'(r)^2 dr}{\int_0^\infty V(1 + g(r))^2 dr};$$

comme $g(0, r) = g(r)$ (cf. § 4), cette équation s'identifie à (5-6).

Étudions maintenant le comportement de $\partial G/\partial \kappa$ par continuité des états liés aux états anti-liés toujours avec $-\mu/2 + \varepsilon < \kappa$: φ et g sont réels d'après ce qui précède. Les mêmes opérations que dans le cas des états liés donnent :

$$\varphi \frac{\partial^3 \varphi}{\partial r^2 \partial \kappa} - \frac{\partial \varphi}{\partial \kappa} \frac{\partial \varphi}{\partial r^2} - 2\kappa \varphi^2 = \frac{\partial G}{\partial \kappa} V \varphi^2,$$

Intégrant de 0 à ∞ on obtient finalement :

$$-2\kappa |C|^2 \left[\int_0^\infty (g^2 + 2ge^{-\kappa r}) dr + \frac{1}{2\kappa} \right] \\ = \frac{\partial G}{\partial \kappa} \int_0^\infty V \varphi^2 dr. \quad (5-7)$$

pour $\kappa > 0$ cette formule s'identifie à (2-4) donnant $\partial G/\partial \kappa < 0$ pour $V > 0$, mais pour $\kappa < 0$ on ne peut rien dire sur le signe de $\partial G/\partial \kappa$. On peut encore passer à la limite $\kappa \rightarrow 0$ ($\kappa > 0$ ou $\kappa < 0$)

$$(\partial G/\partial \kappa)_{\kappa=0} = \frac{-1}{\int_0^\infty V(1 + g(r, 0))^2 dr}$$

si $V > 0$, $G'(0)$ est donc toujours < 0 et fini.

b) *demi-plan* $\text{Im } k > -\mu/2 + \varepsilon$.

Pour $|k|$ fini, on peut trouver pour $|g|, \dots$ des majorations du type (5-4) où $e^{-\kappa r}$ est remplacé par $e^{-(\text{Im } k)r}$. Cependant, l'intégration de (5-2)

⁽⁸⁾ On n'a pas un état lié car f n'est pas normalisable (Newton [8]).

nous donne un premier membre en général complexe.

$$|C|^2 \operatorname{Re} k \left[2 \operatorname{Im} k \int_0^\infty (|g|^2 + 2 \operatorname{Re}(ge^{-ik^*r})) dr + 1 \right] \\ = \operatorname{Im} G \int_0^\infty V |\varphi|^2 dr. \quad (5-9)$$

$$|C|^2 \left[((\operatorname{Re} k)^2 - (\operatorname{Im} k)^2) \int |g|^2 dr - \int |g|^2 dr - 4 \operatorname{Im} k \operatorname{Re} k \int dr \operatorname{Im}(ge^{-ik^*r}) + \operatorname{Im} k \right] = \\ \operatorname{Re} G \int_0^\infty V |\varphi|^2 dr + \sum_i C_i \int V_i |\varphi|^2 dr. \quad (5-10)$$

1) Si $\operatorname{Im} k = 0$; (5-9) se réduit à (2-3) équation reliant k et $\operatorname{Im} G$ pour les pôles k réels. Cependant (5-10) nous donne l'équivalent de (2-6)' que nous ne pouvions obtenir directement

$$|C|^2 \left(\int k^2 |g(r, k)|^2 dr - \int |g'(r, k)|^2 dr \right) \\ = \operatorname{Re} G \int V |\varphi|^2 + \sum_i G_i \int V_i |\varphi|^2 dr. \quad (5-11)$$

Même si le potentiel se réduit à $GV(r)$ et que V est > 0 , nous ne pouvons affirmer que G reste dans le 2^e quadrant.

2) Si $\operatorname{Im} G = 0$ on a deux possibilités :

1. $\operatorname{Re} k = 0$.
2. $\operatorname{Re} k \neq 0$ et

$$2 \operatorname{Im} k \left(\int_0^\infty |g|^2 + 2 \operatorname{Re}(ge^{-ik^*r}) dr + 1 \right) = 0. \quad (5-12)$$

Supposons $\operatorname{Im} k$ positif : (5-12) se réduit à $\operatorname{Im} k \int |f|^2 dr = 0$ ce qui est impossible. Si $\operatorname{Im} k < 0$ alors (5-12) peut avoir des solutions

$\operatorname{Re} k \neq 0$, $\operatorname{Im} k \neq 0$. On retrouve évidemment toutes les possibilités des pôles G réels.

c) Plan k entier privé de la coupure $-i\mu/2$, $-i\infty$.

Si $\operatorname{Im} k < -\mu/2$, même en dehors de la coupure, $V|\varphi|^2$ diverge quand $r \rightarrow \infty$. On va utiliser ψ définie en (4-3). En effet l'étude de la transformée de Laplace ρ de ψ faite par Martin montre qu'en dehors de la coupure et pour $r > r_0$, on a pour ψ et ses dérivées des majorations du type (5-4) où e^{-xr} est remplacé par 1. De l'équation différentielle de Schrödinger de f on déduit aisément celle de ψ . Multipliant l'équation obtenue par $(1 + \psi^*)$ on peut alors intégrer en r de 0 à ∞ pour tout k en dehors de la coupure et comme d'après (5-3) $\psi \underset{r \rightarrow 0}{\simeq} -1 + rC^{-1}$, on obtient finalement :

$$\operatorname{Re} k + 2 \operatorname{Im} k \operatorname{Im} \left(\int_0^\infty \psi \psi'^* dr \right) \\ = \operatorname{Im} G \int_0^\infty V |1 + \psi|^2 dr. \quad (5-13)$$

$$- \int_0^\infty |\psi'|^2 dr - \operatorname{Im} k + 2 \operatorname{Re} k \operatorname{Im} \left(\int_0^\infty \psi \psi'^* dr \right) \\ = \operatorname{Re} G \int_0^\infty V |1 + \psi|^2 dr \\ + \sum G_i \int_0^\infty V_i |1 + \psi|^2 dr. \quad (5-14)$$

d) Si l est $\neq 0$, on peut encore montrer que $\operatorname{Im} G_l = 0$ pour les états anti-liés (en dehors de la coupure). Pour cela on décompose $f_l(-ix, G, r)$ en $i^{l+1} h_l(ixr) + g_l(x, r)$; (g_l et ses dérivées vérifient des bornes du type (5-4)). Il suffit ensuite de soustraire les équations (5-2) pour φ_l et φ_l^* et d'intégrer de 0 à ∞ .

FIG. 5.

Remarque : Nous donnons, dans la figure 5, à titre d'exemple, la courbe $\mathcal{G}(x) = G_0(x) M/\mu^2$, ($\mathcal{G}$ sans dimension) calculée par la méthode de A. Martin [5] (avec 2 itérations de la transformée de Laplace ρ). Ce calcul approché a été fait pour un potentiel de Yukawa correspondant au π_0 .

6. Conclusion. — Nous considérons le cas où $GV(r)$ est tout le potentiel U et décroît plus vite que $e^{-\mu r}$ quand $r \rightarrow \infty$.

1) Avec des valeurs fixées de l et de k (ou E), le rayon de convergence $\rho_l(k)$ de la série des perturbations en G pour S_l est le module du zéro de $f_l(-k, G)$ le plus proche de l'origine, dans le plan G .

a) Le rayon ρ_l du cercle tangent intérieurement à la trajectoire $G_{lo}(k)$ « la plus proche de 0 », c'est-à-dire donnant le plus petit ρ_l , sera le rayon de convergence uniforme par rapport à k . Pour $l \neq 0$, d'après la forme trouvée pour les trajectoires, $\rho_l < |G_{ln}^c|$ quel que soit n , puisque tous les $|G_{ln}(k)|$ commencent par décroître à partir de $G_{ln}^c \equiv G_{ln}(0)$ où la trajectoire est tangente à l'axe réel. Ce résultat avait été signalé par W. Kohn [3] : lorsque $k \simeq 0$, le potentiel centrifuge empêche la particule d'atteindre la région $r \lesssim \mu^{-1}$ où le potentiel $U(r)$ est fort, de sorte que la méthode des perturbations est encore valable pour des valeurs de G assez grandes, la limite $\rho_l(k)$ commençant par diminuer avec k parce que la particule pénètre alors dans la région du potentiel. Cet effet est de plus en plus marqué quand l croît (contact d'ordre $l + \frac{1}{2}$ en G_{ln}^c). D'autre part nous prévoyions intuitivement que $\rho_l(k)$ (pour k fixé) et ρ_l augmentent avec l : pour E fixé, la particule est d'autant plus éloignée de cette région que l est plus grand. De même les G_{ln}^c correspondant aux derniers états liés doivent croître quand le potentiel centrifuge augmente. Kohn a étudié les variations avec l et k des $\rho_l(k)$ (qu'il désigne par $\lambda_c'(k)$; il étudie aussi le rayon de convergence $\lambda_c(k)$ pour $\text{tg } \delta_l$). D'après ses résultats, ces prévisions intuitives sont en moyenne vérifiées.

b) Pour $l = 0$, il n'y a plus de barrière centrifuge. Avec la forme des trajectoires $G_{0n}(k)$, $\rho_0(k)$ peut croître à partir de $k = 0$, comme on l'a représenté en figure 1. S'il en est ainsi, $\rho_0 = \rho_0(0) = |G_{00}^c|$ (cercle de convergence tangent intérieurement en G_{00}^c), et le rayon de courbure de la trajectoire en G_{00}^c est supérieur à ρ_0 . *A priori*, il est possible aussi que $\rho_0(k)$ décroisse d'abord, comme en figure 4.

[3] donne seulement ⁽⁹⁾

$$\rho_0 \geq M^{-1} \quad \text{où} : \quad M \equiv \int_0^\infty r |V(r)| dr.$$

Davies [4] a démontré que la première disposi-

⁽⁹⁾ Cette inégalité est aussi donnée dans Jost et Pais [2].

tion est en fait réalisée pour $U(r)$ de signe constant et de portée finie, et que ρ_0 est alors le rayon de convergence uniforme pour toutes valeurs de k et de l .

Les étapes de sa démonstration sont les suivantes :

1. En examinant l'équation de Schrödinger tridimensionnelle, il la remplace par l'équation intégrale de Green pour une fonction d'onde asymptotiquement plane, et obtient ainsi un développement en puissances de G de l'amplitude de diffusion $f(k)$. Si $U(r)$ est de signe constant cette série converge uniformément dès que $f(k = 0)$ converge.

2. Il étudie la diffusion de l'onde S et, à l'aide d'une équation intégrale de Volterra, obtient un développement toujours convergent pour la fonction régulière :

$$\Phi(r) \underset{r \rightarrow 0}{\simeq} kr,$$

Supposant $U(r)$ de portée finie,

$$\Phi(r) \underset{r \rightarrow \infty}{\simeq} A(k, G) \sin kr + B(k, G) \cos kr,$$

où $A(k, G)$ et $B(k, G)$, ainsi d'ailleurs que $\frac{1}{k} B(k, G)$, ont donc un rayon de convergence infini. On forme alors :

$$\frac{\text{tg } \delta_0}{k} = \frac{1}{k} \frac{B(k, G)}{A(k, G)} \underset{k \rightarrow 0}{\simeq} \frac{1}{k} C(k, G).$$

Calculant le développement de :

$$A^{-1}(k, G) \Phi(r) \equiv \underset{r \rightarrow \infty}{\simeq} \sin kr + C(k, G) \cos kr,$$

(équation intégrale), on trouve que $\lim_{k \rightarrow 0} (\text{tg } \delta_0/k)$ coïncide avec $f(k = 0)$.

Le rayon de convergence de cette expression est le module du zéro le plus proche de $A(0, G)$.

3. Avec nos notations :

$$\text{tg } \delta_0 = -i \frac{S_0 - 1}{S_0 + 1} = -i \frac{f_0(k, G) - f_0(-k, G)}{f_0(k, G) + f_0(-k, G)},$$

$$\frac{\text{tg } \delta_0}{k} = -2i \frac{f_0(k, G) - f_0(-k, G)}{f_0(k, G) + f_0(-k, G)} \xrightarrow{k \rightarrow 0} -i \frac{\frac{\partial f_0}{\partial k}(0, G)}{f_0(0, G)} \quad (10)$$

Le zéro le plus proche du dénominateur est G_{00}^c , qui, comme on l'a vu au paragraphe 4 n'annule pas le numérateur en général.

$|G_{00}^c|$ est donc le rayon de convergence uniforme pour $f(k)$. Il en résulte que tous les $\rho_l(k) \geq |G_{00}^c|$, puisque :

$$f(k) \equiv f(k, \cos \theta) = \sum_l (2l + 1) \frac{S_l(k) - 1}{2ik} P_l(\cos \theta).$$

⁽¹⁰⁾ On voit que les rayons de convergence de S_i et $\text{tg } \delta_i$ se confondent quand $k \rightarrow 0$: $\lambda_c(0)$ et $\lambda_c'(0)$ de [3].

Dans [4] l'étape 3 est aussi établie indirectement par l'étude de la fonction d'onde des états liés S . Avec nos résultats, cette démonstration est inutile, comme d'ailleurs le calcul de $\Phi(r)$. Examinant seulement l'expression de $(1/k) C(k, G)$, on voit que *l'hypothèse de la portée finie est inutile* : il suffit que $\int_0^\infty r^2 V(r) dr$ existe, ce qui est réalisé avec $e^{\mu r} V(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$.

Indiquons enfin un mémoire important de K. Meetz [9] dont nous avons eu connaissance à la fin de ce travail. Cet auteurs utilise des méthodes mathématiques puissantes en symétrisant le noyau de l'équation intégrale de Green tri-dimensionnelle, lorsque $V(r)$ a un signe constant : il peut alors utiliser les résultats sur la décomposition spectrale de ce noyau symétrique. Ceux-ci peuvent s'étendre d'ailleurs au cas où $V(r)$ a un nombre fini de changements de signe, et le résultat de Davies est établi même dans ce cas : pour que les développements de Born des noyaux soient convergents, il faut et il suffit que ni GV , ni $-GV$ ne donnent d'état lié dans le feuillet « physique » de E (correspondant au $1/2$ plan supérieur de k).

2° Le résultat prévu (fig. 3) pour les portions de trajectoires $k = i\sqrt{-E}$ et $k = -i\sqrt{-E}$ correspondant aux états liés et anti-liés a bien été démontré pour $l = 0$. Il est confirmé par des exemples : ainsi, le trou de potentiel.

On a étudié au paragraphe 5 le cas du potentiel de Yukawa. Indiquons que Bosco [10] a calculé de même la courbe $G_0(x)$ avec $x \leq 0$ pour le potentiel exponentiel.

b) Par contre, pour $l \neq 0$, on a simultanément un état lié $k = i\kappa_{ln}$ et un état anti-lié $k = -i\kappa'_{ln}$ dès que $|G| > |G_c^n|$ tandis qu'il n'y a ni état lié ni état anti-lié correspondant aux nombres quantiques l, n pour $|G| < |G_c^n|$.

Cet effet est dû à l'existence de la barrière centrifuge. L'état lié correspond à une probabilité de présence grande à l'intérieur de la barrière, faible (exponentiellement décroissante) à l'extérieur. L'état anti-lié obtenu pour une valeur voisine de $E < 0$, correspond à une probabilité de présence grande à l'extérieur, faible ($u(r)/u(R) \simeq e^{-\kappa(R-r)}$) à l'intérieur.

Manuscrit reçu le 30 janvier 1963.

APPENDICE

Démonstration de $(\partial F_l / \partial G)_c \neq 0$ pour $V(r)$ de signe constant. Nous supposons toujours que $GV(r)$ est soit la totalité soit une partie du potentiel $U(r)$ qui satisfait à l'hypothèse $e^{\mu r} U(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$ du paragraphe 4b.

Par définition : cf (1-5).

$$(2l + 1) F_l(-k, G) = W[F_l(-k, G, r), \varphi_l(k, G, r)] \quad (\text{A-1})$$

d'où :

$$(2l + 1) \frac{\partial F_l}{\partial G}(-k, G) = W \left[\frac{\partial F_l}{\partial G}(-k, G, r), \varphi_l \right] + W \left[F_l(-k, G, r), \frac{\partial \varphi_l}{\partial G} \right].$$

Si l'on y remplace k, G par une solution de

$$F_l(-k, G) = 0,$$

— dans le domaine $-\mu/2 < \text{Im } k$, où F_l est définie — on a la relation :

$$\varphi_l(k^2, G, r) = C_l F_l(-k, G, r),$$

avec :

$$C_l \equiv \frac{2l + 1}{2ik^{2l+1}} F_l(k, G).$$

Donc :

$$(2l + 1) \frac{\partial F}{\partial G}(-k, G) = C_l W \left[\frac{\partial F_l}{\partial G}(-k, G, r), F_l \right] + C_l^{-1} W \left[\varphi_l, \frac{\partial \varphi_l}{\partial G} \right]. \quad (\text{A-3})^{(11)}$$

Le premier membre étant indépendant de r , le second l'est aussi et les Wronskiens peuvent y être calculés pour une valeur r quelconque.

D'après le calcul du paragraphe 2 qui conduit à (2-7) :

$$\frac{d}{dr} W \left[F_l, \frac{\partial F_l}{\partial G} \right] = V(r) F_l^2.$$

Quand $r \rightarrow \infty$, F_l et $\partial F_l / \partial G \rightarrow 0$ pour les valeurs de $k : 0 < \text{Im } k$. D'où :

$$W \left[F_l, \frac{\partial F_l}{\partial G} \right] = - \int_r^\infty V(r) F_l^2(-k, G, r) dr.$$

Cette relation peut être prolongée dans $-\mu/2 < \text{Im } k$, le second membre gardant un sens. De même :

$$\frac{d}{dr} W \left[\varphi_l, \frac{\partial \varphi_l}{\partial G} \right] = V(r) \varphi_l^2,$$

et comme $\varphi_l, \partial \varphi_l / \partial G \rightarrow 0$ quand $r \rightarrow 0$, quel que soit k :

$$W \left[\varphi_l, \frac{\partial \varphi_l}{\partial G} \right] = \int_0^r V(r) \varphi_l^2(k^2, G, r) dr.$$

(A-3) donne donc :

$$(2l + 1) \frac{\partial F_l}{\partial G} = C_l \int_r^\infty V(r) F_l^2 dr + C_l^{-1} \int_0^r V(r) \varphi_l^2 dr, \quad (\text{A-4})$$

⁽¹¹⁾ Nous suivons ici une méthode de Newton [8] qui écrit des relations analogues.

d'où, en prenant $r = \infty$:

$$(2l+1) \frac{\partial F_l}{\partial G} = C_l^{-1} \int_0^\infty V(r) \phi_l^2 dr.$$

C_l^{-1} est *non nul* pour les valeurs de k , G considérées : il l'est manifestement pour $k \neq 0$ (valeur finie de $F_l(k, G)$), et nous avons vu

au paragraphe 4 qu'il l'est aussi quand $k \rightarrow 0$.

En se restreignant maintenant aux valeurs $k = i\kappa$ ($-\mu/2 < \kappa$), ϕ_l est réelle.

Si $V(r)$ a un signe constant on voit donc que $\partial F_l / \partial G \neq 0$ dans $-\mu/2 < \kappa$: pas de point de branchement pour $\Gamma_l(\kappa)$. En particulier $(\partial F_l / \partial G)_c \neq 0$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] REGGE (T.), <i>Nuovo Cimento</i> , 1959, 14 , 951 et 1960, 18 , 947.	[6] MARTIN (A.), <i>Nuovo Cim.</i> , 1960, 15 , 99.
[2] JOST (R.) et PAIS (A.), <i>Phys. Rev.</i> , 1951, 82 , 840.	[7] CHADAN (R.), <i>Nuovo Cim.</i> , 1962, 24 , 379.
[3] KOHN (W.), <i>Rev. Mod. Physics</i> , 1954, 26 , 292.	[8] NEWTON, <i>Phys. Rev.</i> , 1960, 1 , 319.
[4] DAVIES (H.), <i>Nucl. Physics</i> , 1959, 14 , 465.	[9] MEETZ (K.), <i>J. Math. Physics</i> , 1962, 3 , 690.
[5] MARTIN (A.), <i>Nuovo Cim.</i> , 1959, 14 , 403.	[10] BOSCO (B.) et SUCHER (J.), <i>Nuovo Cim.</i> , 1961, 19 , 1182.