Etude théorique du rendement du four électrique à haute frequence alimenté par alternateur

G. Ribaud

ETUDE THÉORIQUE DU RENDEMENT DU FOUR ÉLECTRIQUE A HAUTE FRÉQUENCE ALIMENTÉ PAR ALTERNATEUR

par M. G. RIBAUD

Faculté des Sciences de Strasbourg.

Sommaire. — Dans la présente étude, l'auteur se propose de compléter une étude du rendement du four électrique à haute fréquence publiée antérieurement par lui ([1]), en l'étendant aux fours alimentés par un courant sinusoïdal entretenu (alternateur). Les calculs analogues entrepris par Northrup perdent beaucoup de leur intérêt en raison des hypothèses simplificatrices admises par l'auteur et qui ne sont en rien justifiées.

Le travail ci-dessous permet de conclure que, pour un four et une substance donnés, il existe une fréquence à partir de laquelle le rendement du four devient maximum et constant. Ce rendement maximum est pratiquement indépendant des dimensions du four, il décroît quand la résistivité de la substance chauffée diminue

Pour que le rendement maximum soit pratiquement atteint, il est nécessaire que l'épaisseur de la couche de skin effect dans la substance reste faible par rapport au rayon de la substance et que, en outre, l'épaisseur de la couche de skin effect dans le métal de l'enroulement reste faible par rapport à l'épaisseur du tube qui constitue l'enroulement.

Des courbes résument, pour des substances de diverses résistivités, la variation du rendement du four avec la fréquence du courant d'alimentation.

1. **Introduction.** — Dans un précédent mémoire théorique ([1]), nous nous étions proposé plus spécialement l'étude du rendement électrique d'un four à haute fréquence alimenté par une installation à étincelle; nous voudrions, ici, compléter cette étude par la discussion du rendement électrique d'un four supposé alimenté par un courant sinusoïdal entretenu de fréquence constante. L'expérience a montré que, pour des fours de laboratoire de petites dimensions (diamètre de la substance ne dépassant 20 cm), les puissances à mettre en jeu peuvent être avantageusement fournies par des installations à étincelles, moins coûteuses et plus aisément maniables. Par contre, lorsqu'on désire atteindre des puissances dépassant 50 ou 100 kilowatts, il semble préférable de faire appel à des alternateurs à haute fréquence; l'industrie réalise actuellement de tels alternateurs susceptibles de fournir, avec d'excellents rendements, des fréquences de 500 à 10 000 s^{-1} et des puissances de plusieurs centaines de kilowatts. Dans la suite, nous admettrons que la substance est constituée par un cylindre plein de hauteur h, de diamètre d, de résistivité ρ, placé à l'intérieur d'un solénoïde inducteur composé de n spires, occupant la même hauteur h que la substance; nous simplifierons les calculs en admettant que le champ est uniforme dans le solénoïde inducteur. Pour que nos calculs se rapprochent autant que possible de la pratique, nous supposerons, en outre, que l'enroulement inducteur est fait de tube de cuivre.

Notations : ω, pulsation; N, fréquence du courant d'alimentation. R, résistance; L, self-inductance de l'enroulement; I, courant dans l'enroulement; E, différence de potentiel aux bornes du four en charge. r, résistance; l, self-inductance de la substance; i, courant induit dans la substance; M, coefficient d'induction mutuelle de l'enroulement et de la substance; d, diamètre de la substance; h, hauteur de l'enroulement et de la substance; n, nombre de tours de l'enroulement; ρ, résistivité de la substance (en unités électroma-

([1]) G. Ribaud, *Journal de Physique*, t. 4 (1923), p. 185.

gnétiques cgs); ε, épaisseur de la couche de skin effect dans la substance; ρ', résistivité du métal de l'enroulement; ε', épaisseur de la couche de skin effect dans le métal de l'enroulement; d', diamètre extérieur du tube de l'enroulement; e', épaisseur du tube de l'enroulement.

2. **Résistance et self-inductance apparentes du four en charge.** — Avec les notations ci-dessus, les équations relatives aux circuits inducteur et induit peuvent s'écrire :

$$L\frac{dI}{dt} + RI + M\frac{di}{dt} = E, \qquad (a)$$

$$l\frac{di}{dt} + ri + M\frac{dI}{dt} = 0, \qquad (b)$$

en appelant E, la force électromotrice aux bornes du four en charge. Si l'intensité I débitée par l'alternateur dans le four en charge est représentée par

$$I = I_0 \sin \omega t,$$

l'intensité i dans la substance, fournie par l'équation (b), a pour expression

$$i = -\frac{MI_0\omega}{\sqrt{r^2 + l^2\omega^2}} \cos(\omega t - \varphi), \qquad \text{avec} \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{l\omega}{r};$$

cette valeur de i, transportée dans (a), fournit pour E la valeur :

$$E = I_0\left(R + \frac{M^2\omega^2 r}{r^2 + l^2\omega^2}\right)\sin\omega t + I_0\omega\left(L - \frac{M^2\omega^2 l}{r^2 + l^2\omega^2}\right)\cos\omega t.$$

Cette expression montre que le four en charge se comporte comme un circuit dont la résistance et la self-inductance seraient données respectivement par :

$$R' = R + \frac{M^2\omega^2 r}{r^2 + l^2\omega^2} \qquad \text{et} \qquad L' = L - \frac{M^2\omega^2 l}{r^2 + l^2\omega^2}.$$

En pratique, d'ailleurs, par l'addition d'une capacité convenable placée en série sur le circuit du four, on compense la self-inductance apparente du four de façon à réaliser la résonance extérieure. Dans ces conditions, la force électromotrice efficace $E_{\text{eff.}}$ aux bornes de l'alternateur, l'intensité efficace $I_{\text{eff.}}$ dans l'inducteur, la résistance apparente R' du four en charge, et la puissance W fournie par l'alternateur sont reliées entre elles par les relations :

$$W = \frac{(E_{\text{eff}})^2}{R'}, \qquad I_{\text{eff}} = \frac{E_{\text{eff}}}{R'},$$

permettant d'avoir l'ordre de grandeur des caractéristiques (E et I) de l'alternateur destiné à alimenter un four donné.

3. **Expression générale du rendement électrique du four.** — L'énergie $R'I^2_{\text{eff}}$ fournie au four par l'alternateur se retrouve en partie dans l'enroulement inducteur, RI^2_{eff}, et en partie dans la substance,

$$\frac{M^2\omega^2 r}{r^2 + l^2\omega^2} I^2_{\text{eff}},$$

et le rendement électrique $\mathcal{R}$ du four peut se mettre sous la forme générale suivante [1] :

$$\mathcal{R} = \frac{\dfrac{M^2\omega^2 r}{r^2 + l^2\omega^2}}{R + \dfrac{M^2\omega^2 r}{r^2 + l^2\omega^2}}. \tag{A}$$

Northrup, dans une importante étude théorique [2], a abordé la question, mais certaines de ses hypothèses simplificatrices, non justifiées [3], enlèvent tout caractère de généralité aux résultats des calculs.

4. **Cas des fréquences très élevées. Rendement maximum.** — Nous considérerons comme fréquences très élevées les fréquences pour lesquelles l'épaisseur de la couche de « skin effect » dans la substance est négligeable par rapport au diamètre, pour lesquelles également l'épaisseur de la couche de « skin effect » dans le cuivre de l'enroulement peut être considérée comme négligeable par rapport à l'épaisseur du tube.

Dans ces conditions, les quantités l, r et M qui figurent dans l'expression (A) du rendement peuvent s'écrire :

$$l = \frac{\pi^2 d^2}{h}, \qquad r = \frac{2\pi^2 d}{h}\cdot\sqrt{\rho N}, \qquad M = \frac{\pi^2 n d^2}{h} = nl, \tag{B}$$

N désignant la fréquence de l'alternateur. L'expression

$$\frac{l\omega}{r} = \pi d\sqrt{\frac{N}{\rho}}$$

montre que, du moins pour les corps très conducteurs (métaux solides et fondus) et pour des fréquences supérieures à 10 000 s^{-1}, r est tout à fait négligeable devant $l\omega$ [4].

L'énergie $w = \dfrac{M^2\omega^2 r}{r^2 + l^2\omega^2}$ recueillie par seconde dans la substance prend alors la valeur simple

$$w = n^2 r I^2_{\text{eff}}.$$

Cette énergie est, pour un enroulement donné, proportionnelle au carré des ampères-tours efficaces, proportionnelle au diamètre occupé par la substance dans le four, proportionnelle aux racines carrées de la résistivité et de la fréquence [4].

Il nous semble également intéressant de faire remarquer que, toutes choses égales, la résistance r de la substance, ne dépendant que du rapport d/h, sera la même pour tous les fours, quel que soit leur diamètre, pourvu que l'on conserve au rapport d/h une valeur constante, ce que l'on réalise d'ailleurs en fait dans les fours d'usage courant ($d/h = 1/2$ à $1/3$).

Dans la pratique, la grandeur intéressante à considérer n'est pas la quantité w mais le rendement électrique $\mathcal{R}$ défini plus haut, c'est-à-dire le rapport entre l'énergie recueillie dans la substance et l'énergie fournie par l'alternateur.

(1) Cette expression est valable, même lorsque la condition de résonance n'est pas réalisée.

(2) E.-F. Northrup, *Trans. Amer. Electroch. Soc.*, t 35 (1919) p. 69.

(3) Northrup admet, en particulier, que, dans tous les cas, « on peut égaler la résistance ohmique r de la charge et son impédance $l\omega$ » ; il suffit de se reporter à l'expression de $l\omega/r$ donnée dans notre précédent mémoire (voir note 1) (formules 2) pour se convaincre que, dans le cas des très hautes fréquences, cette hypothèse est loin d'être valable. Nous reviendrons d'ailleurs plus loin sur ce point.

(4) Pour plus de détails sur cette discussion, se reporter au mémoire précédent (*loc. cit.*).

Pour les fréquences élevées, $r/l\omega$ étant négligeable devant 1, le rendement prend la valeur simple

$$\mathcal{R} = \frac{n^2 r}{R + n^2 r}, \tag{A'}$$

$n^2 r$, résistance apparente de la substance; R, résistance de l'enroulement du four [1].

Le calcul complet de la résistance R semble impraticable; il faut, en effet, remarquer que la répartition des lignes de courant dans la section d'une spire de l'enroulement est influencée par les spires voisines et que le calcul qui supposerait l'épaisseur de la couche de skin effect identique à celle d'un conducteur isolé conduirait à une valeur incorrecte; il semble même que l'on doive tenir compte des courants induits dans la charge qui tendent à concentrer les lignes de courant dans la partie extérieure du tube de l'enroulement [2].

L'épaisseur ε' de la couche de skin effect, pour un conducteur isolé, est donnée par

$$\varepsilon' = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\rho'}{N}};$$

(ρ' résistivité du métal de l'enroulement); la résistance de l'enroulement formé de n spires de rayon d [3], supposées isolées les unes des autres et bobinées avec du tube de diamètre extérieur d', s'écrirait alors :

$$\rho' \frac{\pi n d}{\pi \varepsilon' d'} \qquad \text{ou} \qquad 2\pi . \frac{nd}{d'}\sqrt{\rho' N}.$$

Nous admettrons, que, à une constante près, la résistance R est égale à celle d'un conducteur isolé, c'est-à-dire peut se mettre sous la forme :

$$a\frac{n.d}{d'}\sqrt{\rho' N}.$$

Nous admettons, en particulier, ce qui semble raisonnable, que la résistance R reste proportionnelle à la racine carrée de la fréquence.

Si l'on introduit, en outre, dans (A') l'expression de r (B), on voit que la *fréquence N s'élimine.*

Autrement dit, *pour un four et une substance donnés, à partir d'une fréquence suffisamment élevée, le rendement reste pratiquement constant et maximum.*

On remarquera en outre que d s'élimine et que le rendement maximum peut se mettre sous la forme :

$$\mathcal{R}_m = \frac{\sqrt{\rho}}{a.\frac{h}{n}.\frac{\sqrt{\rho'}}{d'} + \sqrt{\rho}}. \tag{C}$$

Pour des fours comportant le même nombre de tours par centimètre (n/h constant) *et le même diamètre du tube d'enroulement* (d' constant) *le rendement maximum est indépendant des dimensions du four* [4].

Cette remarque permet de conclure à la possibilité d'obtenir, pour de très grands fours,

(1) On tiendrait compte des pertes dues à la résistance ohmique de l'alternateur en multipliant le rendement ainsi calculé par le rendement de l'alternateur, d'ailleurs toujours très élevé (0,85 à 0,90).

(2) Des mesures en cours utilisant l'échauffement de l'eau de circulation dans l'enroulement permettront d'évaluer l'ordre d'importance de cette correction.

(3) Nous supposons implicitement que l'enroulement a même diamètre que la substance, ce qui, en pratique, est exact en première approximation.

(4) Il est logique, en effet, d'admettre que, pour de tels fours dans lesquels le serrage et la forme de la section des spires restent les mêmes, le coefficient a conserve une valeur constante.

des rendements maxima de même valeur que ceux fournis par des fours de faibles dimensions.

La formule (C) montre en outre que, d' et h/n restant pratiquement proportionnels entre eux lorsqu'on change le diamètre du tube de l'enroulement, le rendement maximum doit rester, dans de larges limites, à peu près indépendant du nombre de spires de l'enroulement.

De la formule (C), on déduit enfin que, *pour des substances de résistivités ρ différentes, le rendement maximum est d'autant plus élevé que la résistivité est plus grande*; la quantité

$$a\,\frac{h}{n}\cdot\frac{\sqrt{\rho'}}{d'}$$

ne dépend en effet que des caractéristiques de l'enroulement; un four qui fournirait avec le graphite ($\rho = 3.10^6$) un rendement 0,90 donnera respectivement, avec le mercure ($\rho = 10^5$), le plomb ($\rho = 2.10^4$) et le cuivre ($\rho = 2.10^3$), des rendements 0,64, 0,45 et 0,23.

5. **Fréquences permettant d'atteindre le rendement maximum.** — *Influence de la substance chauffée.* — L'expression (A') donnée pour le rendement suppose $r/l\omega$ négligeable devant l'unité. Cherchons la valeur de la fréquence à partir de laquelle cette condition se trouve réalisée.

Il nous semble intéressant de remarquer que, pour les fréquences élevées, le rapport $r/l\omega$ (voir formule B) est précisément égal au rapport entre l'épaisseur ε de la couche de skin effect et le rayon de la substance; autrement dit *pour que le rendement maximum soit atteint, il faut que l'épaisseur de la couche de skin effect dans la substance reste faible par rapport au rayon de la substance chauffée.*

Si nous voulons, par exemple, que

$$\frac{r}{l\omega} = \frac{1}{\pi d}\sqrt{\frac{\rho}{N}}$$

reste inférieur à une quantité faible α, cela entraîne

$$\frac{\rho}{\pi^2 d^2 N} \leqq \alpha^2 \quad \text{ou} \quad N \geqq \frac{\rho}{10\,\alpha^2 d^2}. \tag{D}$$

(pour $\alpha^2 = 0,1$ par exemple, $N \geqq \rho/d^2$).

Cette formule nous montre que *la fréquence nécessaire pour atteindre le rendement maximum est d'autant plus basse que la résistivité de la substance est plus faible et le four de plus grand diamètre.*

Autrement dit, pour des substances très conductrices et des fours de très grandes dimensions, les fréquences pourront descendre à des valeurs notablement moins élevées que pour les substances peu conductrices et pour des fours de faible puissance.

Il convient d'ailleurs de bien faire remarquer que le *rendement maximum ne peut être atteint que si l'épaisseur du tube qui constitue l'enroulement est supérieure à l'épaisseur ε' de la couche de skin effect dans le métal du tube, pour la fréquence utilisée*; la formule (C) suppose, en effet, cette condition remplie et, sans qu'il soit nécessaire de faire aucun calcul, il est évident que si l'épaisseur du tube devient inférieure à ε', la résistance R est supérieure à $\rho'\,\dfrac{n\,d}{d'\varepsilon'}$ (valeur admise dans les calculs du rendement maximum) et, par suite, le rendement se trouve diminué.

En pratique, d'ailleurs, du moins pour le chauffage de corps relativement conducteurs, c'est cette dernière condition qui limitera les fréquences à utiliser.

6. Etude de la variation du rendement d'un four donné en fonction de la fréquence du courant d'alimentation. — Le calcul complet de l'expression du rendement électrique d'un four donné devient impraticable dès que les deux conditions indiquées ci-dessus ne sont pas simultanément réalisées.

On peut toutefois l'entreprendre encore dans le cas où l'épaisseur de la couche de skin effect dans la substance reste faible par rapport au rayon de la substance et où, au contraire, l'épaisseur de la couche de skin effect dans le métal de l'enroulement devient grande par rapport à l'épaisseur e' du tube de l'enroulement (tube de cuivre de 1 mm d'épaisseur, par exemple, et fréquences inférieures à 500 s^{-1}).

Dans ces conditions, on peut admettre, en première approximation, que la résistance de l'enroulement reste indépendante de la fréquence, le métal de l'enroulement se comportant comme il le ferait en courant continu.

Le rendement peut alors s'écrire, après simplifications :

$$\mathcal{R} = \frac{\sqrt{\rho N}}{\dfrac{h}{2\pi^2 n} \cdot \dfrac{\rho'}{d' e'} + \sqrt{\rho N}}.$$

Le premier terme du dénominateur étant constant et indépendant de la fréquence, le rendement diminue avec la fréquence ; pour les faibles valeurs de la fréquence, pour lesquelles le second terme du dénominateur est faible par rapport au premier, le rendement varie approximativement comme la racine carrée de la fréquence.

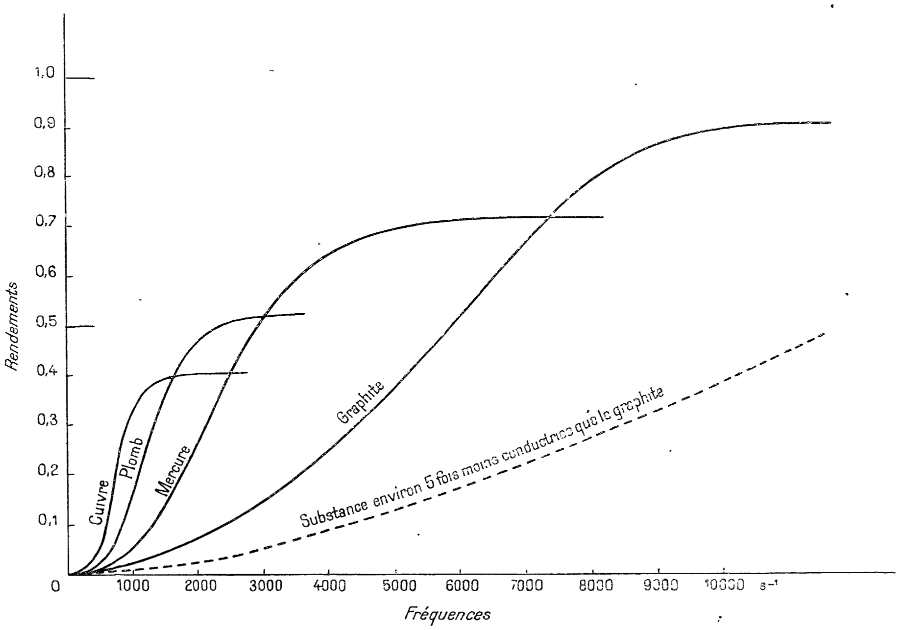

Fig. 1. — Rendements approximatifs du four à haute fréquence alimenté par alternateur en fonction de la fréquence du courant d'alimentation.

Des considérations qui précèdent, on peut déduire l'allure générale des courbes donnant le rendement en fonction de la fréquence pour des substances de résistivités différentes [1] ; les courbes données par la figure 1 ont été approximativement tracées pour des fours de diamètres 20 à 30 centimètres bobinés avec du tube de 1 à 2 mm d'épaisseur. Bien entendu, ces

[1]. On a choisi le mercure pour avoir une résistivité de l'ordre de celle des métaux fondus.

courbes ne peuvent fournir qu'une indication générale sur les ordres de grandeur des rendements; en particulier, elles peuvent varier assez notablement avec les caractéristiques de l'enroulement du four et il semble bien que, seules, des mesures systématiques soient susceptibles de nous fournir les caractéristiques optima répondant à un but donné.

7. **Influence de l'état de division de la substance.** — Les calculs développés plus haut supposent implicitement que la substance affecte la forme d'un cylindre plein et continu; ils sont valables, en particulier, pour un métal porté à la fusion dans un creuset de forme cylindrique. Ils ne s'appliquent nullement au cas d'une charge faite de morceaux discontinus.

On peut, comme nous l'avons fait dans notre précédent mémoire (1) pour les installations à étincelle, discuter l'influence de l'état de division de la substance chauffée; les conclusions restent les mêmes. Pour un four, une substance et une fréquence donnés, il existe un état de division de la substance fournissant un rendement maximum, notablement plus élevé que pour un cylindre plein; le diamètre optimum des grains de substance à utiliser pour atteindre ce rendement maximum est de l'ordre du double de l'épaisseur de la couche de skin effect dans la substance (environ 3 ou 4 fois cette épaisseur).

(1) G. Ribaud, *loc. cit.*

Manuscrit reçu le 14 juin 1926.