



**HAL**  
open science

# Sur les forces qui portent les aéroplanes et leur relation avec les actions hydrodynamiques à distance

V. Bjerknes

► **To cite this version:**

V. Bjerknes. Sur les forces qui portent les aéroplanes et leur relation avec les actions hydrodynamiques à distance. *Journal de Physique et le Radium*, 1924, 5 (12), pp.353-367. 10.1051/jphys-rad:01924005012035300 . jpa-00205168

**HAL Id: jpa-00205168**

**<https://hal.science/jpa-00205168>**

Submitted on 4 Feb 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## LE JOURNAL DE PHYSIQUE

ET

## LE RADIUM

SUR LES FORCES QUI PORTENT LES AÉROPLANES ET LEUR RELATION  
AVEC LES ACTIONS HYDRODYNAMIQUES A DISTANCE

par M. V. BJERKNES.

**Sommaire.** — L'auteur développe une méthode de transformation des équations du mouvement d'un corps continu. Cette transformation porte sur le terme d'inertie, et peut donc s'appliquer dans tous les cas, quelle que soit la forme des tensions internes (fluide, solide). Elle permet d'établir une analogie profonde avec les équations de l'électromagnétisme, moyennant certaines correspondances de notations; le champ hydrodynamique présente, pendant chaque phase du mouvement, une structure géométrique identique à celle d'un certain champ électrique (ou magnétique) stationnaire et exerce des *forces égales et de signe contraire* aux forces de ce champ.

Différents exemples de cette analogie sont alors présentés; plusieurs avaient été signalés par le père de l'auteur. Des capsules pulsantes, des sphères pulsantes, des corps cylindriques en rotation permettent de réaliser des champs hydrodynamiques analogues aux champs de charges, de doublets, ou de courants électriques. Les vérifications expérimentales sont tout à fait démonstratives.

La force portante d'une aile d'aéroplane s'explique par le tourbillon qui se développe au-dessous de cette aile; ce tourbillon, placé dans le vent général, subit une force égale, au signe près, à celle qu'exerce un champ magnétique (dirigé suivant le vent) sur un courant électrique (parallèle à l'aile, ou à l'axe du tourbillon). Cette analogie se vérifie expérimentalement et se trouve à la base des théories de Lanchester et Prandtl.

**1. Introduction.** — La force qui rend possible l'aviation se présente aujourd'hui comme un cas particulier des forces hydrodynamiques et l'analogie remarquable que présentent ces forces avec celles du champ électromagnétique nous permet de réduire certains problèmes d'aviation à des problèmes électromagnétiques.

Considérons donc cette analogie. Mon père y était arrivé par des calculs longs et pénibles en donnant la solution explicite de problèmes spéciaux sur le mouvement simultané de corps sphériques ou cylindriques dans le fluide. Mais, depuis une vingtaine d'années, je suis en possession d'une méthode plus simple et plus effective, basée sur une transformation générale, non seulement des équations hydrodynamiques, mais des équations de mouvement de tout milieu matériel continu. Car, comme nous allons le voir, ce qu'on transforme c'est le terme d'inertie qui est identiquement le même dans toutes ces équations.

**2. Formules préalables.** — Souvenons-nous d'abord de la relation eulérienne qui existe entre les deux dérivées par rapport au temps : la dérivée  $\frac{d}{dt}$  se rapportant à l'individu

physique, et  $\frac{\partial}{\partial t}$  se rapportant à la localité géométrique. On peut écrire cette relation, d'un côté explicitement, d'autre part avec les symboles vectoriels (notations de Gibbs) :

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t} + \nabla \mathbf{v}, \quad (1)$$

$v_x, v_y, v_z$  représentant les projections du vecteur vitesse  $\mathbf{v}$  sur les axes.

Quand cette opération est effectuée sur un vecteur quelconque  $\mathbf{A}$ , le terme  $\mathbf{v}\nabla\mathbf{A}$  représente un vecteur qui a les composantes

$$\begin{aligned}(\mathbf{v}\nabla\mathbf{A})_x &= v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial A_x}{\partial z}, \\(\mathbf{v}\nabla\mathbf{A})_y &= v_x \frac{\partial A_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial A_y}{\partial z}, \\(\mathbf{v}\nabla\mathbf{A})_z &= v_x \frac{\partial A_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial A_z}{\partial z}.\end{aligned}$$

Convenons d'autre part de représenter par le signe  $\mathbf{v}\mathbf{A}\nabla$  un vecteur de composantes

$$\begin{aligned}(\mathbf{v}\mathbf{A}\nabla)_x &= v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial A_z}{\partial x}, \\(\mathbf{v}\mathbf{A}\nabla)_y &= v_x \frac{\partial A_x}{\partial y} + v_y \frac{\partial A_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial A_z}{\partial y}, \\(\mathbf{v}\mathbf{A}\nabla)_z &= v_x \frac{\partial A_x}{\partial z} + v_y \frac{\partial A_y}{\partial z} + v_z \frac{\partial A_z}{\partial z}.\end{aligned}$$

En retranchant ces équations des précédentes, nous obtenons trois équations scalaires représentant une équation vectorielle que nous pouvons écrire

$$\mathbf{v}\nabla\mathbf{A} = \mathbf{v}\mathbf{A}\nabla + (\text{curl } \mathbf{A}) \times \mathbf{v} \quad (2)$$

et dont nous allons nous servir tout à l'heure.

Considérons maintenant un milieu matériel continu quelconque; appelons  $\rho$  sa densité et  $\sigma$ , son volume spécifique; on a ainsi

$$\sigma = \frac{1}{\rho}; \quad \rho = \frac{1}{\sigma}; \quad (3)$$

$\mathbf{v}$  étant, comme ci-dessus, la vitesse, désignons par  $\mathbf{V}$  le produit de la vitesse par la densité, c'est-à-dire la quantité de mouvement ou impulsion spécifique :

$$\mathbf{V} = \rho\mathbf{v}; \quad \mathbf{v} = \sigma\mathbf{V}. \quad (4)$$

Le principe de la conservation de la masse dans un tel milieu en mouvement s'exprime par l'équation de continuité, qui est une relation entre les quantités (3) et (4). En l'exprimant en fonction de la vitesse et du volume spécifique, elle prend la forme

$$\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dt} = \text{div } \mathbf{v}. \quad (5)$$

Enfin, le terme d'inertie dans l'équation de mouvement d'un tel milieu a toujours la forme du produit de la densité par l'accélération. Exprimant l'accélération en fonction de la vitesse et la densité en fonction du volume spécifique, nous pouvons écrire ce terme d'inertie sous la forme

$$\frac{1}{\sigma} \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad (6)$$

C'est le terme dont nous allons nous occuper.

**3. Forme transformée du terme d'inertie.** — Proposons-nous de représenter le mouvement actuel du milieu comme la somme de deux mouvements partiels : le mouvement « imprimé » et le mouvement « libre ». Ajoutons un astérisque aux vecteurs cinématiques qui se rapportent au premier, un indice  $f$  à ceux qui se rapportent au second mouvement partiel. Ainsi  $\mathbf{v}^*$  et  $\mathbf{V}^*$  sont la vitesse et l'impulsion spécifique du mouvement imprimé;  $\mathbf{v}_f$  et  $\mathbf{V}_f$ , ceux du mouvement libre. Comme nous avons  $\mathbf{V}_f = \rho\mathbf{v}_f$  ou  $\mathbf{v}_f = \sigma\mathbf{V}_f$ , nous pouvons écrire la vitesse libre sous la forme  $\sigma\mathbf{V}_f$ .

L'équation

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^* + \sigma \mathbf{V}_f \tag{7}$$

exprime alors la vitesse actuelle comme la somme des deux vitesses partielles.

Appliquant cette relation ainsi que les différentes relations (1), (2), (5), et effectuant des transformations tout à fait élémentaires, on obtient successivement le terme d'inertie (6) sous les formes données dans le tableau suivant :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sigma} \frac{d\mathbf{v}^*}{dt} + \frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dt} \mathbf{V}_f + \frac{d\mathbf{V}_f}{dt} \\ & \dots + (\text{div } \mathbf{v}) \mathbf{V}_f + \frac{\partial \mathbf{V}_f}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \mathbf{V}_f \\ & \dots + (\text{curl } \mathbf{V}_f) \times \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla \mathbf{V}_f \nabla \\ & \dots + \mathbf{v}^* \nabla \mathbf{V}_f \nabla + \frac{1}{2} \sigma \nabla \mathbf{V}_f^2 \\ & \dots + \nabla \left\{ \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{V}_f + \frac{1}{2} \sigma \mathbf{V}_f^2 \right\} - \mathbf{V}_f \mathbf{v}^* \nabla - \frac{1}{2} \mathbf{V}_f^2 \nabla \sigma. \end{aligned}$$

Dans ce tableau, on a indiqué par des points les termes qui ne sont plus l'objet de changements.

En changeant un peu le groupement des termes, nous pouvons écrire la forme finale comme il suit :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sigma} \frac{d\mathbf{v}^*}{dt} + (\text{div } \mathbf{v}) \mathbf{V}_f - \mathbf{V}_f \mathbf{v}^* \nabla - \frac{1}{2} \mathbf{V}_f^2 \nabla \sigma + (\text{curl } \mathbf{V}_f) \times \mathbf{v} \\ & \quad + \frac{\partial \mathbf{V}_f}{\partial t} + \nabla \left( \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{V}_f + \frac{1}{2} \sigma \mathbf{V}_f^2 \right). \end{aligned} \tag{8}$$

Ici, nous avons réuni dans la première ligne les termes qui se rattacheront au mouvement imprimé; dans la seconde, ceux qui se rattacheront au mouvement libre.

**4. Définition des deux mouvements partiels.** — On obtient l'équation de mouvement d'un milieu matériel quelconque en égalant le terme d'inertie à la somme de la force extérieure **F** et la résultante **G** des tensions intérieures :

$$\frac{1}{\sigma} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + \mathbf{G}. \tag{9}$$

Ecrivons maintenant le terme d'inertie dans la forme développée (8). Par définition, nous obtenons alors les deux mouvements partiels de la manière suivante :

Le mouvement imprimé est défini par l'équation que nous obtenons en égalant la première ligne (8) à la force extérieure **F**, ou bien

$$\frac{1}{\sigma} \frac{d\mathbf{v}^*}{dt} = \mathbf{F} - (\text{div } \mathbf{v}) \mathbf{V}_f + \mathbf{V}_f \mathbf{v}^* \nabla + \frac{1}{2} \mathbf{V}_f^2 \nabla \sigma - (\text{curl } \mathbf{V}_f) \times \mathbf{v}. \tag{10}$$

Le mouvement libre est défini par l'équation que nous obtenons en égalant la seconde ligne (8) à la résultante des tensions **G**, ou

$$\frac{\partial \mathbf{V}_f}{\partial t} = - \nabla \left\{ \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{V}_f + \frac{1}{2} \sigma \mathbf{V}_f^2 \right\} + \mathbf{G}. \tag{11}$$

En superposant les deux mouvements partiels (10) et (11), on retombe sur le mouvement actuel défini par l'équation primaire (9).

**5. Analogie avec l'électromagnétisme.** — Introduisons maintenant, pour comparaison, un certain champ électrique ou magnétique. Suivant les cas, pour la commodité,

comparons avec l'un ou l'autre de ces deux champs. Parallèlement aux anciennes interprétations de nos vecteurs, nous en donnerons ainsi les nouvelles :

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{V}, \text{ intensité de champ électrique ou magnétique} \dots \dots \text{ impulsion spécifique} \\ \mathbf{v}, \text{ induction électrique ou magnétique} \dots \dots \dots \text{ vitesse} \end{array} \right\} \quad (12)$$

Convenons, de plus, de comparer champ libre avec champ libre, et champ imprimé avec champ imprimé. Le champ imprimé électrique ou magnétique est alors celui qui détermine l'état de polarisation intrinsèque, existant dans des corps comme les cristaux pyroélectriques ou les aimants permanents.

Cette correspondance étant établie pour les vecteurs fondamentaux, on en déduit de suite la correspondance que voici pour les autres quantités les plus importantes :

$$\begin{array}{l} \sigma, \text{ inductivité (pouvoir inducteur spécifique, perméabilité magnétique)} \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \text{volume spécifique} \\ \text{vitesse d'expansion par unité de volume de l'élément matériel mobile} \end{array} \right. \\ \text{div } \mathbf{v} = e, \text{ densité électrique vraie (ou densité magnétique vraie, s'il en existe)} \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \text{tourbillon de l'impulsion spécifique libre} \\ \text{perte de masse par unité de temps et de volume dans le champ partiel libre} \end{array} \right. \\ \text{curl } \mathbf{V}_f = \mathbf{c}, \text{ densité du courant électrique vrai ou densité du courant magnétique vrai} \left\{ \begin{array}{l} \text{tourbillon défini par la vitesse actuelle} \end{array} \right. \\ \text{div } \mathbf{V}_f, \text{ densité électrique libre} \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \text{densité magnétique libre} \dots \dots \dots \end{array} \right. \\ \text{curl } \mathbf{v}, \text{ densité de courant électrique libre, densité de courant magnétique libre} \left\{ \begin{array}{l} \end{array} \right. \end{array}$$

[J'ai employé les mots « vrai » et « libre » suivant les définitions de Hertz (1)].

Cette correspondance étant établie, retournons à l'équation (10) du mouvement imprimé. Cette équation décrit ce mouvement partiel comme produit par la force extérieure assistée de quatre forces d'inertie. Et ces forces d'inertie sont égales et de signe contraire aux forces mécaniques élémentaires du champ électrique ou magnétique.

La force

$$- (\text{div } \mathbf{v}) \mathbf{V}_f \quad (13)$$

s'applique aux éléments qui ont une vitesse d'expansion, et est égale et de signe contraire à la force agissant vers un élément portant une charge électrique (ou magnétique). La force

$$\mathbf{V}_f \mathbf{v} \cdot \nabla \quad (14)$$

s'applique aux éléments qui ont acquis une vitesse imprimée, et est égale et de signe contraire à la force agissant vers les éléments à polarisation imprimée (aimant permanent, cristal de tourmaline). La force

$$\frac{1}{2} \mathbf{V}_f^2 \nabla \sigma \quad (15)$$

s'applique aux éléments dans les régions d'hétérogénéité, et est égale et de signe contraire à la force agissant dans les régions d'hétérogénéité du champ électrique ou magnétique (forces dues au magnétisme induit ou à l'influence électrique). La force

$$- (\text{curl } \mathbf{V}_f) \times \mathbf{v} \quad (16)$$

s'applique aux éléments qui possèdent un mouvement tourbillonnaire de l'impulsion libre  $\mathbf{V}_f$ , et est égale et de signe contraire à la force qui agit vers les éléments qui portent un courant électrique ou magnétique.

Cela étant, passons à l'équation du champ libre (11). Dans le cas d'un fluide parfait, la résultante  $\mathbf{G}$  des tensions intérieures se réduit simplement au gradient de pression  $-\nabla p$ . L'équation s'écrit donc

$$\frac{\partial \mathbf{V}_f}{\partial t} = -\nabla \left( p + \mathbf{v} \cdot \mathbf{V}_f + \frac{1}{2} \sigma \mathbf{V}_f^2 \right). \quad (17)$$

(1) HERTZ : Ueber die Grundgleichungen der Elektrodynamik für ruhende Körper. *Annalen der Physik*, t. 40, p. 377; *Werke*, t. 2, p. 208.

En effectuant la dérivation tourbillonnaire, et intégrant ensuite par rapport au temps, on en tire

$$\text{curl } \mathbf{V}_f = \mathbf{c},$$

$\mathbf{c}$  étant un vecteur indépendant du temps. Dans le cas d'un fluide parfait, l'impulsion spécifique libre  $\mathbf{V}_f$  a donc des tourbillons invariables, stationnaires dans l'espace.

A l'équation qui exprime cette propriété nous pouvons ajouter deux autres : l'équation de continuité (5), en y représentant l'expression  $\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dt}$  par le seul symbole  $e$  et l'équation de connexion (7). Cela nous donne le système

$$\begin{aligned} \text{curl } \mathbf{V}_f &= \mathbf{c}, \\ \text{div } \mathbf{v} &= e, \\ \mathbf{v} &= \mathbf{v}^* + \sigma \mathbf{V}_f, \end{aligned} \quad (18)$$

qui définit la structure géométrique du champ de mouvement libre. Mais c'est en même temps le système d'équations qui détermine la structure géométrique d'un champ électrique ou magnétique de nature stationnaire. Le champ magnétique en question serait dû à une distribution  $\mathbf{c}$  de courants stationnaires électriques, une distribution  $e$  de magnétisme vrai, et une distribution  $\mathbf{V}$  de polarisation magnétique imprimée (1).

Nous sommes ainsi arrivés au résultat général que voici :

*Pendant chaque phase du mouvement, le champ hydrodynamique possède une structure géométrique identique à celle d'un certain champ électrique ou magnétique stationnaire, et exerce des forces égales et de signe contraire aux forces de ce champ.*

#### 6. Remarque sur l'analogie au cas d'autres milieux que les fluides parfaits. —

Au lieu d'un fluide parfait, nous pouvons considérer des milieux ayant des propriétés internes plus générales, telles que la propriété de réagir avec des forces élastiques contre les déformations, ou avec des forces gyrostatiques contre les rotations. Dans ces conditions, l'équation du champ imprimé (10) reste toujours la même, tandis que celle du champ libre devient plus générale.

Cette équation conduit alors à des analogies géométriques s'étendant du domaine spécial que nous venons de considérer, où les champs électriques et magnétiques paraissent exister indépendamment l'un de l'autre, au domaine général où ces champs réagissent l'un sur l'autre suivant les lois contenues dans les équations de Maxwell.

Pour faire ressortir l'analogie dans ce cas général, on considère, comme l'on sait, le champ de mouvement du milieu matériel d'une manière particulière : On emploie deux champs dépendant l'un de l'autre : un champ représenté par les vecteurs vitesse et impulsion spécifique, et un champ représenté par les vecteurs rotation et couple spécifique (couple référé à l'unité de volume). Les deux premiers vecteurs sont liés à l'inertie ; les deux derniers, aux propriétés élastiques ou gyrostatiques du milieu. On compare l'une de ces paires de vecteurs avec ceux du champ électrique, l'autre paire avec ceux du champ magnétique.

L'analogie géométrique qui se présente dans ces conditions possède précisément l'étendue de l'équivalence bien connue entre la théorie électromagnétique et les différentes théories mécaniques de la lumière.

Quelle que soit la valeur objective de ces analogies, elles ont en tout cas joué un rôle capital dans le développement de la physique moderne. Car, au fond, c'est à l'aide de ces analogies que Maxwell a été conduit à ses équations électromagnétiques.

Maintenant, on voit que ces analogies possèdent un caractère beaucoup plus profond, et

(1) On écrit généralement les équations (18) d'un champ magnétique stationnaire sous la forme

$$\begin{aligned} \text{curl } \mathbf{V}_f &= 4\pi \mathbf{c} \\ \text{div } \mathbf{v} &= 4\pi e \\ \mathbf{v} &= 4\pi \mathbf{v}^* + \sigma \mathbf{V}_f. \end{aligned} \quad (18')$$

Le facteur  $4\pi$  qui y apparaît n'a pas de signification physique. Il se présente comme la conséquence d'un choix peu convenable d'unités pour les quantités électriques. En employant les unités rationnelles de Heaviside, on arrive à la forme absolument simple (18).

tout à fait particulier : elles ne sont pas restreintes à une ressemblance géométrique tout à fait extérieure. Cette ressemblance géométrique est inséparablement liée à une ressemblance encore plus remarquable des propriétés dynamiques des deux espèces de champs.

On peut se demander s'il ne se cache pas un profond secret de la nature sous le fait singulier de cette analogie géométrique directe combinée avec une analogie dynamique inverse. Remarquons, à propos de cette inversion, qu'une attraction entre les électricités de même signe est justement ce dont on a besoin pour expliquer l'existence des unités positives et négatives qui constituent les atomes.

**7. Corps mobiles dans un fluide.** — Retournons aux milieux mobiles. Appliquons nos résultats à un système fluide consistant en un *fluide général* dans lequel se meuvent des *corps fluides*. Le fluide général est illimité extérieurement, homogène, incompressible ; il n'est assujéti à l'action d'aucune force extérieure, et est animé du mouvement irrotationnel qui est compatible avec ces conditions.

Les corps se distinguent du fluide général par leur densité, par leur compressibilité, et par le fait qu'ils sont assujéti à l'action de forces extérieures qui peuvent leur donner un mouvement quelconque, rotationnel ou irrotationnel. Dans ces conditions, un mouvement imprimé sera produit seulement à l'intérieur des corps. Les corps fluides se comporteront donc à tout instant comme des corps qui sont électriques, ou magnétiques, ou qui conduisent des courants électriques stationnaires. Il se produit alors un champ dont la structure géométrique est défini par les équations complètes (18) dans les espaces intérieurs, et par les mêmes équations quand on y fait  $c = 0$ ,  $l = 0$ ,  $\mathbf{v}^* = 0$  dans l'espace extérieur. Et les corps agissent les uns sur les autres par des forces apparentes à distance qui sont, élément par élément, égales et de signe contraire aux actions à distance dans le champ électrique ou magnétique correspondant.

Le signe contraire des forces étant toujours sous-entendu, on peut dire, en particulier : un corps qui se dilate ou se contracte se comporte comme un corps chargé respectivement d'électricité positive ou négative. Un corps qui a acquis un mouvement imprimé se comporte comme un aimant permanent ou un cristal de tourmaline. Un corps à volume spécifique plus grand que le fluide général se comporte comme un corps ferromagnétique ; un corps à volume spécifique plus petit, comme un corps diamagnétique. Un corps qui forme un tube de tourbillon stationnaire dans l'espace se comporte comme un courant électrique.

En développant ces résultats, nous n'avons pas spécialisé la force extérieure  $\mathbf{F}$  qui s'applique aux corps. Imposons maintenant à cette force, ou à une certaine partie d'elle-même, la condition de donner au corps en question un mouvement comme s'il était rigide, ou solide élastique. Comme on y arrive par des forces mutuelles entre les éléments du corps, il n'en provient pas de résultante. Nos résultats peuvent donc s'appliquer immédiatement aussi à des corps rigides ou à des corps solides élastiques mobiles dans le fluide, pourvu, naturellement, qu'on prenne en considération les vitesses imprimées dues aux forces auxiliaires que nous venons de définir. Comme ces vitesses correspondent à une magnétisation irrégulière, elles auront d'ailleurs, en général, très peu d'importance.

**8. Mouvements permanents et mouvements à oscillations synchrones.** — On peut se demander pourquoi cette analogie, qui existe toujours, ne se présente pas d'une manière plus frappante quand on observe des mouvements fluides.

La raison en est d'abord que, pour la reconnaître, il faut diviser le mouvement en sa partie imprimée et sa partie libre. En général, on n'y arrive que par une analyse intime. Ce sont seulement dans des cas exceptionnels que ces deux mouvements partiels se distinguent l'un de l'autre visiblement. A cela, il faut ajouter que le système hydrodynamique change continuellement de configuration et d'état de mouvement. A chaque nouvel instant, il faut comparer le système hydrodynamique à un nouveau système magnétique, ce qui donne à l'analogie un caractère fugitif.

Mais, dans deux cas spéciaux, cette analogie fluctuante se cristallise en forme nette et saisissable par des expériences : le cas d'oscillations synchrones autour d'une position moyenne invariable, et le cas d'un mouvement permanent. Dans un cas comme dans

l'autre, on gagne cependant cet avantage au prix d'une limitation de l'analogie. Les tourbillons devant être stationnaires et indépendants du temps, ils ne peuvent pas en même temps être périodiques. Il faut donc les annuler dans le cas du mouvement oscillant, et l'analogie avec les phénomènes de courants électriques disparaît. D'autre part, le mouvement permanent demande des surfaces limites immobiles. Les phénomènes dus aux changements de volume ou de place des corps disparaissent donc. On ne garde que les mouvements de circulation permanente, qui donnent l'analogie avec les phénomènes de courants électriques.

**9. Les instruments.** — Les instruments dont je vais me servir pour vérifier les résultats analytiques, sont plus perfectionnés que ceux dont s'est servi mon père il y a quarante-cinq ans.

Un instrument général auxiliaire (fig. 1, I) est le générateur des mouvements vibratoires. Un petit moteur électrique entraîne un arbre ayant deux excentriques, dont chacun meut une petite pompe à double effet. Les pompes consistent en un cylindre et un piston seulement, sans soupapes. Ils forcent quelques centimètres cubes d'air à quitter les cylindres et à y retourner alternativement. Un robinet permet de régler la quantité d'air ainsi mise en mouvement. Aux deux bouts d'un même cylindre, on a à sa disposition des courants oscillatoires de phase opposée. On les conduit par des tubes de caoutchouc aux instruments principaux. Si, au lieu de courants alternatifs, on a besoin de courants continus, on les transforme facilement par un arrangement de soupapes extérieure aux pompes.

Une particularité d'ordre pratique est que les excentriques meuvent les cylindres, au lieu des pistons, ces derniers ne réagissent que par leur inertie contre le mouvement. Cette disposition se montre pratique quand on veut régler l'amplitude du courant alternatif par les soupapes. Le cylindre et le piston sont polis soigneusement, mais fonctionnent sans huile. Une autre particularité de construction est la symétrie complète des masses mobiles et de leurs mouvements, principe important pour éliminer par compensation toute secousse de l'instrument.

Les courants d'air périodiques produits par le générateur servent à produire deux espèces de vibrations : des pulsations ou changements périodiques de volume, et des oscillations ou changements périodiques de position.

Le corps pulsant (fig. 1, II) est un tambour ayant des membranes métalliques qui, grâce à leur longue durée, sont de beaucoup préférables aux membranes de caoutchouc. Ce tambour est fixé au bout d'un tube métallique qui, par un tube de caoutchouc, communique avec le générateur.

En chargeant l'une des membranes d'un tel pulsateur, et en reliant l'autre membrane à une capsule sphérique, qui, montée sur un tube plus grand, entoure le pulsateur, on obtient un oscillateur (fig. 1, III) ; la capsule extérieure et le poids intérieur prennent des oscillations opposées. Le cas favorable d'oscillations égales et opposées se réalise quand la masse du poids intérieur est égale à la masse de la capsule sphérique augmentée de la masse de la demi quantité d'eau déplacée par la sphère. Dans ce cas, le tube du pulsateur restera en repos en vertu du principe de la conservation du centre de gravité, et on peut le guider à la main ou l'insérer dans des supports fixes ou dans des balances sensibles sans que cela gêne les oscillations, et sans qu'il se transmette des oscillations perturbatrices même à des balances délicates.

Par des arrangements différents, on peut donner au pulsateur ou à l'oscillateur la mobilité dont on a besoin pour examiner les forces exercées sur eux. On trouvera en général pratique d'attacher le pulsateur ou l'oscillateur à un flotteur. Si alors le tube conduisant l'air à l'instrument est assez flexible, nous avons simultanément un mouvement de translation et de rotation. Pour réduire la mobilité à une translation pure, on peut disposer les tubes qui conduisent les courant d'air comme une balance de torsion. Il est très avantageux de faire porter aussi le poids de la balance par un flotteur, flottant soit dans le bassin destiné aux expériences, soit dans un vase auxiliaire si l'on veut réserver la cuve exclusivement aux corps avec lesquels on fait les expériences. On peut aussi laisser de côté le tube de torsion, et faire passer l'air, avec une petite perte, directement du tube fixe communiquant avec

le générateur au tube de la balance. Cela donne l'avantage d'un équilibre indifférent du corps fixé à la balance, et c'est l'arrangement indiqué en fig. 1, IV. Quelle que soit la balance employée, on peut y insérer soit le pulsateur, soit l'oscillateur en deux positions principales : pour la mobilité longitudinale, la direction de mobilité coïncidant avec celle des oscillations, et pour la mobilité transversale, la direction de la mobilité étant normale à l'axe des oscillations.

Enfin, on réalise la mobilité rotatoire de l'oscillateur en le suspendant à un tube de caoutchouc, ou bien en conduisant l'air du tube fixe directement au tube d'un oscillateur porté par un flotteur.

Outre ces instruments, nous employons aussi des corps qui n'ont pas de mouvement propre : une sphère lourde suspendue à un flotteur, une sphère légère maintenue sous l'eau

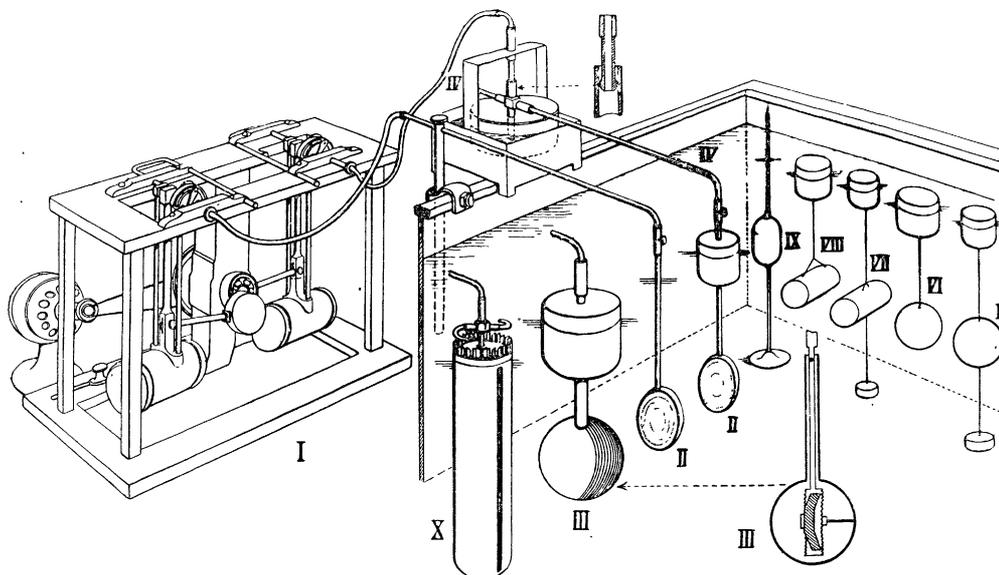


Fig. 1. — Les instruments.

par un poids et suspendue à un flotteur, ainsi que des corps cylindriques suspendus de la même manière (fig. 1, V à VIII).

Enfin, pour examiner le mouvement produit dans le fluide, nous employons un corps léger fixé à une tige élastique (fig. 1, IX). Ce corps est mis en mouvement oscillatoire induit par le fluide environnant et, en choisissant la période de résonance avec les oscillations propres de ce petit instrument, on obtient des oscillations assez intenses pour être enregistrées par un style qui dépasse le niveau de l'eau pour inscrire ses oscillations sur une plaque de verre.

Tous ces instruments sont destinés aux expériences relatives aux corps vibrants. Les mouvements permanents que nous allons considérer seront toujours produits par des cylindres tournants. En introduisant les soupapes, on transforme les courants alternatifs en courants continus, dont on se sert pour faire tourner les cylindres qui portent de petites turbines (fig. 1, X). On peut donc insérer un tel cylindre tournant dans la balance au lieu du pulsateur ou de l'oscillateur, en conduisant un autre cylindre tournant à la main.

**10. Les expériences.** — Les figures 2 et 3 reproduisent quelques diagrammes obtenus avec l'instrument enregistreur, démontrant l'analogie géométrique directe entre les champs hydrodynamiques et magnétiques.

Sur la figure 2, on voit en I les lignes de forces radiales obtenues avec la limaille de fer dans le champ d'un pôle magnétique, et les lignes de flux correspondantes dans le fluide entourant un corps pulsant.

On voit de la même manière (fig. 2. II) les lignes de force du champ de deux pôles magnétiques de même nom, et les lignes de flux dues à deux corps pulsants de même phase ; les lignes de force (fig. 2, III) dues à deux pôles de noms opposés et les lignes de flux dues à

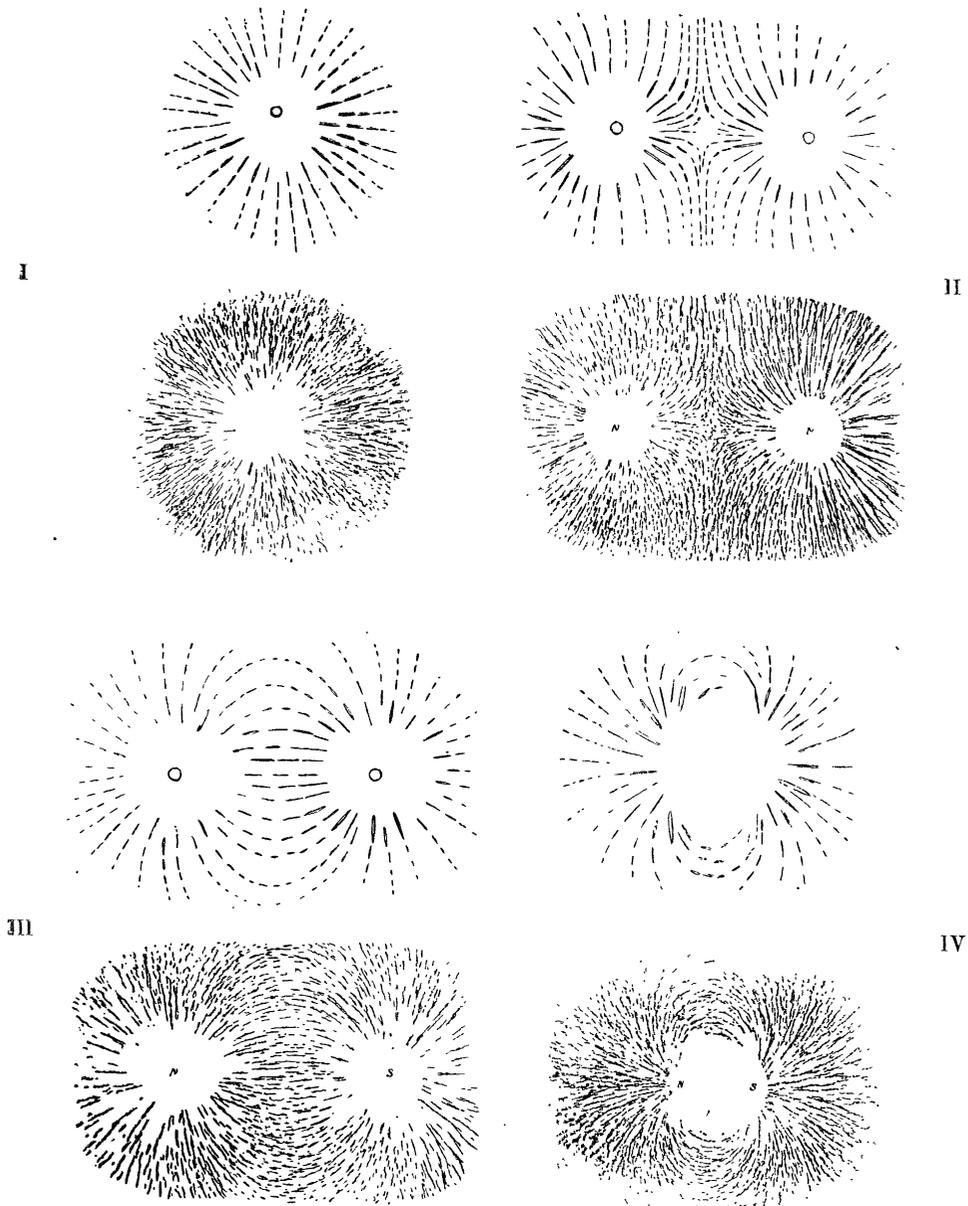


Fig. 2. — Analogie géométrique avec les champs magnétiques statiques.

deux corps pulsants de phases opposées ; les lignes de force (fig. 2, IV) dues à un petit aimant et les lignes de flux dues à un corps oscillant.

Sur la figure 3, sont données en I les lignes de force circulaires autour d'un courant électrique, et les lignes de flux autour d'un cylindre tournant. Cette expérience et les suivantes

sont faites avec des cylindres qui ont un mouvement de rotation oscillatoire dans un fluide très visqueux, ce qui permet de les combiner directement avec les expériences à mouvements oscillatoires précédentes. Mais le phénomène est précisément le même avec des rotations continues dans de l'eau.

La figure 3 nous montre en II les lignes de forces en forme de lemniscate dues à deux

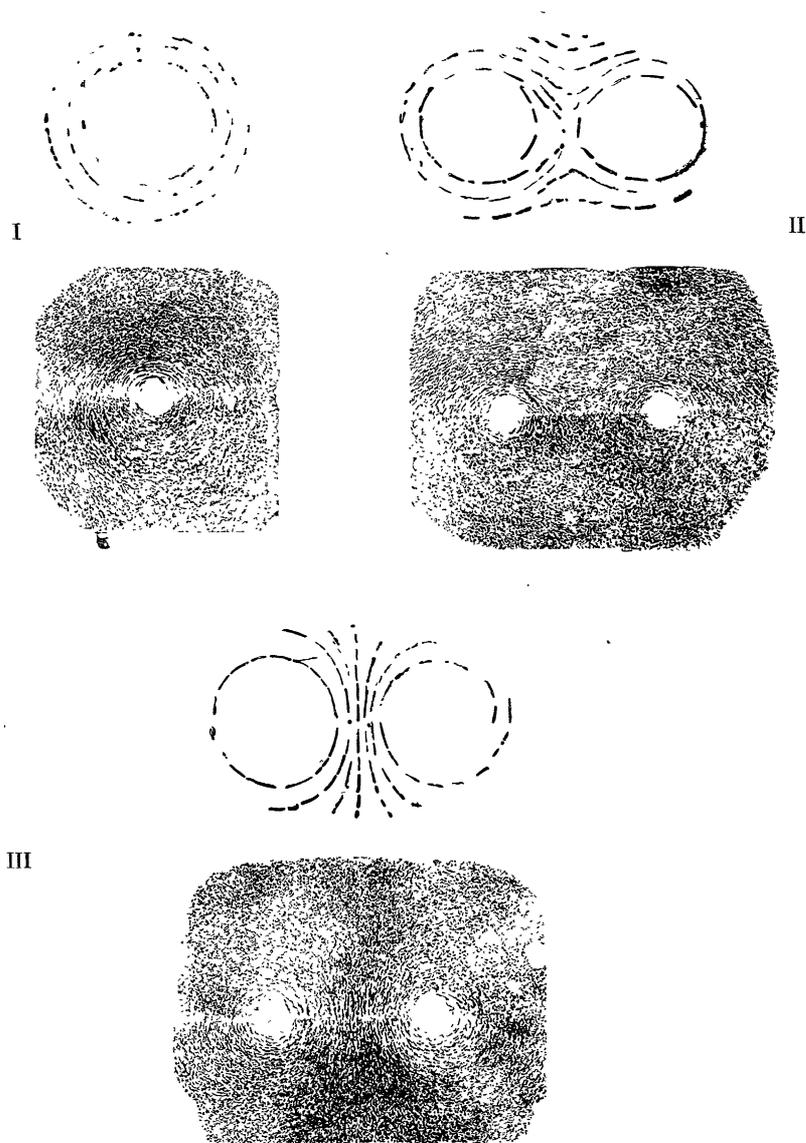


Fig. 3. — Analogie géométrique avec les champs magnétiques stationnaires.

courants de même direction et les lignes de flux correspondantes dues à deux cylindres tournant dans le même sens ; en III, les lignes de force dues à deux courants parallèles de directions opposées, et les lignes de flux dues à deux cylindres parallèles qui tournent dans des sens opposés.

Ces diagrammes montrent donc, dans ses grands traits, l'analogie géométrique directe

entre les deux espèces de champs, dans l'espace extérieur et à quelque distance des corps agissants. Par des méthodes plus délicates, on peut poursuivre l'analogie des deux espèces de champs jusqu'aux surfaces des corps agissants, et par des méthodes indirectes, même dans l'intérieur des corps. Et l'on trouve toujours une analogie absolue. J'indique seulement les faits suivants : un corps léger prend des oscillations induites plus grandes que les masses fluides environnantes, et de ce fait, les lignes de flux convergent vers ce corps pour le traverser en nombre plus grand, précisément comme un corps magnétique prend un magnétisme induit plus fort que le milieu environnant, avec le même effet de convergence des lignes de force vers le corps pour le traverser en nombre plus grand. Et vice-versa : un corps plus lourd que l'eau prend des oscillations induites plus petites que les masses environnantes, et les lignes de flux le contournent, précisément comme un corps diamagnétique prend un magnétisme induit plus faible que le milieu environnant, ce qui oblige les lignes de force à contourner ce corps, et à le traverser en nombre plus faible.

Enfin, dans le cas d'un corps léger ou d'un corps lourd qui, sous l'action d'une force extérieure, exécute des oscillations forcées, il faut distinguer entre le champ appliqué dû directement à l'action de cette force, et le champ induit par la réaction du fluide sur ce mouvement imprimé du corps. Ces champs imprimés et induits (self-induits) correspondent précisément aux champs imprimés et induits dans l'intérieur d'un aimant.

Passant ensuite aux phénomènes dynamiques, j'introduis d'abord un pulsateur dans la balance, et en prends un autre dans la main. Dans le cas de pulsations de même phase, on obtient une attraction très marquée, et, si l'on change la phase, l'attraction se change momentanément en une répulsion de même intensité. Ainsi, dans le cas de champs géométriquement identiques à ceux des pôles magnétiques, on obtient des forces pondéromotrices opposées.

Au lieu du pulsateur, je prends maintenant dans la main un oscillateur. On voit de suite que celui-ci possède, vis-à-vis du corps pulsant, deux pôles, un pôle attractif et un pôle répulsif, précisément comme un aimant complet vis-à-vis d'un pôle magnétique isolé. On peut poursuivre l'analogie même dans les détails les plus insignifiants. Ainsi, je peux placer l'oscillateur à axe d'oscillations transverse dans le prolongement de la balance. Le corps pulsant subit un petit déplacement latéral, tendant à s'approcher autant que possible du pôle attractif. En tournant l'oscillateur de 180°, on obtient le même déplacement dans la direction opposée.

En introduisant maintenant l'oscillateur dans la balance, et tenant le pulsateur à la main, on examine les réactions de ce dernier corps sur le premier, correspondant aux actions que nous venons de considérer.

Gardant l'oscillateur dans la balance, et en prenant un autre à la main, on peut examiner les actions réciproques de deux corps oscillants, et en vérifier l'analogie avec les actions réciproques de deux aimants : des attractions, des répulsions et des déplacements latéraux en un grand nombre de combinaisons. Il est très instructif de disposer un petit appareil magnétique correspondant. On peut poursuivre l'analogie de cas en cas dans un nombre très grand d'expériences caractéristiques. La nature inverse de l'analogie se montre par le résultat suivant. Avec les corps oscillants, on a attraction dans le cas de symétrie par rapport à un plan, et répulsion dans le cas d'asymétrie, tandis qu'avec les aimants on a répulsion dans le cas de symétrie et attraction dans le cas d'asymétrie. De même, les déplacements latéraux tendent, dans le cas hydrodynamique, à réaliser un système symétrique par rapport à un plan; dans le cas magnétique, au contraire, un système asymétrique.

Mettant de côté la balance, et disposant un oscillateur à mouvement rotatif, on voit que la sphère oscillante est soumise à un couple quand on en approche un corps pulsant ou oscillant, couple qui est de sens opposé à celui qu'on observe sur une aiguille magnétique suspendue quand on en approche soit un pôle magnétique, soit un aimant complet.

Passant au corps primitivement neutre, on voit qu'un corps léger est repoussé comme un morceau de fer est attiré; et un corps lourd est attiré comme un morceau de bismuth est repoussé. De plus, un cylindre léger prend la position transverse, comme un cylindre de

fer la position longitudinale, et un cylindre lourd prend la position longitudinale comme un cylindre de bismuth la position transversale.

Quittant le cas des mouvements vibratoires, en fixant le cylindre tournant dans la balance, on observe une répulsion si on approche un autre cylindre qui a le même sens de rotation, et une attraction en cas de rotation de sens inverse, phénomènes inversement analogues aux attractions et aux répulsions des courants électriques.

Arrêtons-nous à ce phénomène. Evidemment, le phénomène fondamental est celui-ci. Un cylindre tournant qui se trouve dans un courant, mais qui est empêché d'être entraîné par lui, est assujéti à l'action d'une force qui tend à le mouvoir perpendiculairement au courant, précisément comme un courant électrique se meut dans un champ magnétique. Le courant électrique se meut dans un sens tel que son propre champ soit opposé au champ extérieur, le cylindre tournant dans un sens tel que son propre champ ait la même direction que le champ extérieur. L'intensité du courant « hydroélectrique » se mesure dans les unités rationnelles par la circulation  $i$  de l'impulsion spécifique autour du cylindre. La force par unité de longueur du cylindre sera alors,  $v$  étant la vitesse du champ extérieur,

$$F = iv. \quad (19)$$

En séparant de  $i$  le facteur densité  $\rho$  et appelant  $\Gamma$  la circulation de la vitesse, nous aurons

$$F = \rho \Gamma v. \quad (20)$$

L'analogie avec l'électromagnétisme étant absolument complète, on voit que cette formule a une portée générale. Elle s'applique non seulement au cas spécial de l'expérience avec les cylindres circulaires tournants, mais au cas général où il y existe une circulation  $\Gamma$  autour d'un corps cylindrique à section quelconque, qui se trouve dans un courant fluide à vitesse  $v$ , ou qui se meut relativement au fluide avec cette vitesse. La formule (20) que nous avons déduite de l'analogie est identique à la formule qu'ont donnée MM. Kutta et Joukowski pour la poussée qui porte un aéroplane.

**11. Des aéroplanes.** — Nous connaissons aujourd'hui une application de la force illustrée par la dernière expérience, celle de l'attraction et de la répulsion entre cylindres tournants. Plaçons un seul cylindre horizontal et normal au vent, faisons-le tourner de manière que sa vitesse tangentielle soit dirigée contre le vent en bas, et avec le vent en haut, et empêchons-le d'être entraîné par le vent : une poussée ayant la valeur (20) tendra donc à soulever le cylindre. Ou, en d'autres termes : nous pouvons remplacer les surface portantes d'un aéroplane par un tel cylindre tournant (1). En introduisant des valeurs numériques dans la formule, on verra même qu'il s'agit d'un aéroplane excessivement effectif à la condition que le cylindre puisse réellement communiquer à l'air toute la circulation de sa propre circonférence. Comme il s'agit ici d'un effet de frottement, nous ne pouvons pas le représenter, en nous basant sur la théorie développée des actions hydrodynamiques à distance.

Mais, même si pour cette raison et pour d'autres cet aéroplane théorique ne se prête jamais, peut-être, à l'aviation pratique, il se prêtera d'autant plus à illustrer les principes de l'aviation, précisément comme la machine thermodynamique de Carnot sert à illustrer le principe des machines à vapeur.

Quelle est maintenant la relation entre cet aéroplane théorique et ceux de la pratique à surfaces portantes immobiles ? L'aérodynamique expérimentale, grâce surtout aux travaux de M. Lanchester en Angleterre, et de l'école de M. Prandtl à Göttingue, nous donne la réponse.

(1) Voici une expérience excessivement simple montrant la poussée sur un cylindre tournant : Prenons un cylindre en papier ou carton (comme on en emploie pour des colis postaux), au milieu duquel on enroule un ruban (longueur : un mètre par exemple) dont le bout libre est attaché à une canne légère ; plaçons ce système sur une table horizontale, et tirons violemment à l'aide de la canne le bout libre du ruban au dessous du cylindre le long de la table. On voit alors le cylindre monter en l'air, en décrivant une courbe trochoïdale.

Considérons d'abord un cylindre circulaire reposant dans un courant fluide (fig. 4). Derrière le cylindre se rassemblent des masses d'eau qui ont été soumises à l'action intense du frottement sur une mince couche voisine du cylindre. Ils forment deux tourbillons derrière le cylindre, pour ensuite être emporté par le courant, alternativement d'un côté et de l'autre (expériences de v. Kàrmàn). Mais supposons maintenant le cylindre elliptique, et placé obliquement dans le courant. La symétrie précédente n'existe plus. C'est toujours le tourbillon opposé au vent qui se détache pour être emporté par le vent; l'autre tourbillon restera ancré au cylindre, constituant une circulation autour de lui, allant avec le courant du côté soumis au vent et contre le courant du côté opposé; c'est uniquement cette circulation produite spontanément qui porte les surfaces obliques dans le vent. La théorie de cette formation spontanée de circulations par l'intermédiaire du frottement, sort du cadre des

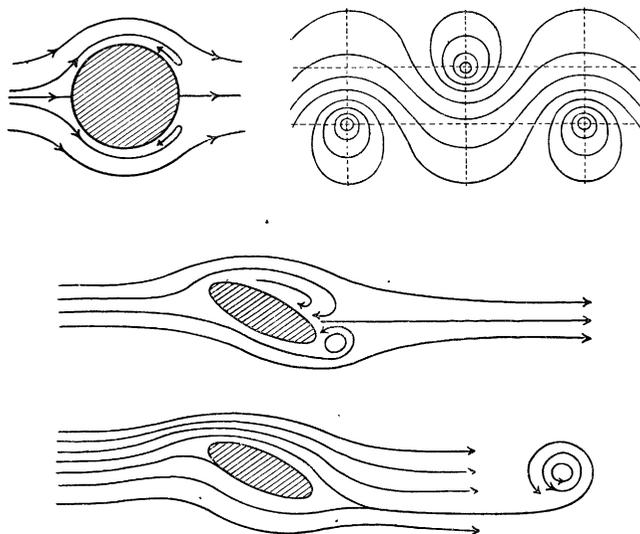


Fig. 4. — Formation des tourbillons derrière différents cylindres.

phénomènes qu'on peut poursuivre à l'aide de l'analogie électro-magnétique. Mais une fois ces circulations ou mouvements tourbillonnaires donnés, on peut se servir de l'analogie pour en calculer les forces, et non seulement la résultante portante, mais aussi la distribution complète des forces sur les différents éléments des surfaces portantes, et les forces résistantes non moins que les forces portantes.

Donnons un exemple d'un calcul sommaire de la force principale résistante.

La figure schématique 5 montre, dans ses traits généraux, le système de tourbillons invariablement lié au mouvement d'un aéroplane. Le tourbillon appartenant au cylindre ou surface portante se continue dans l'air libre en formant un rectangle fermé. Les deux côtés qui sont parallèles au vent augmentent en longueur avec une vitesse égale à celle de l'aéroplane relativement au vent. Les trois sections de tourbillon dans l'air libre exercent maintenant sur la surface portante leurs attractions hydromagnétiques, d'où résulte ce qu'on appelle la résistance induite au mouvement de l'aéroplane.

L'analogie nous permet de suite d'écrire une formule simple qui donne cette résistance dans un cas idéalisé. Soit  $a$  la longueur des côtés parallèles au vent;  $b$ , la longueur de la surface portante, et considérons le tourbillon comme cylindrique avec un rayon  $c$ . Le coefficient de self-induction de ce système de conducteurs est, suivant les calculs de Mascart <sup>(1)</sup>,

<sup>(1)</sup> MASCART. *Comptes Rendus* (1894), p. 278. Pour arriver aux unités rationnelles, on a divisé la formule de Mascart par  $4\pi$ .

$$L = \frac{1}{\pi} \left[ 2(\sqrt{a^2 + b^2} - a - b) + a \log_{\text{nat}} \frac{2ab}{c(\sqrt{a^2 + b^2} + a)} + b \log_{\text{nat}} \frac{2ab}{c(\sqrt{a^2 + b^2} + b)} \right] + \frac{1}{4\pi} (a + b).$$

Par conséquent, l'énergie électromagnétique est  $\frac{1}{2} \rho L \Gamma^2$ ,

En différenciant cette expression par rapport à la longueur  $a$ , on obtient la force  $F$  qui est exercée sur le tourbillon  $b$ . Le calcul donne

$$F = \frac{\Gamma^2}{2\pi} \rho \left[ \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2} + b} - \frac{a - b}{a} + \log_{\text{nat}} \frac{2ab}{c(\sqrt{a^2 + b^2} + a)} \right] + \frac{\Gamma^2}{8\pi} \rho,$$

et, quand  $a$  est devenu très grand,

$$F = \frac{\Gamma^2}{2\pi} \rho \left[ \log_{\text{nat}} \frac{b}{c} + \frac{1}{4} \right].$$

Les tourbillons dans l'air libre s'orientent toujours de manière que la force (14) exercée sur eux disparaisse quand le régime permanent est réalisé. C'est-à-dire qu'ils s'orientent de

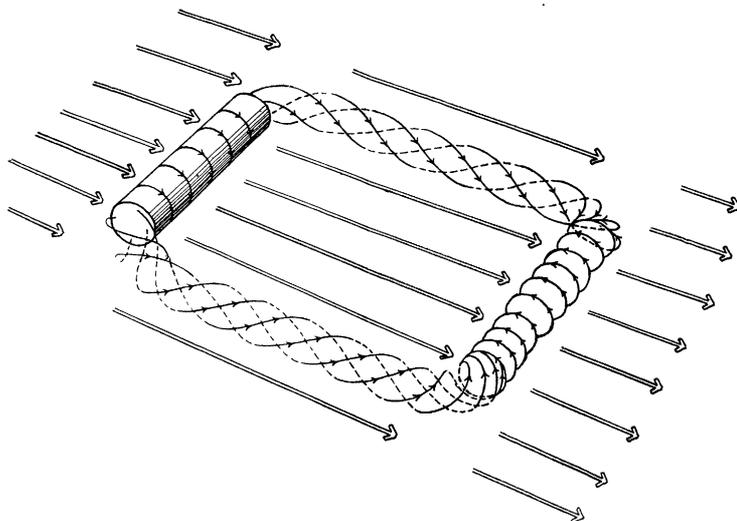


Fig. 5. — Système de tourbillons produits par un aéroplane.

manière que les vecteurs curl  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{v}$  deviennent parallèles, avec l'effet que les lignes de tourbillon soient en même temps des lignes de flux. Cela donne la forme hélicoïdale de ces lignes illustrées par la figure, et une inclinaison de l'axe des hélices vers le bas.

Je me borne à ces remarques générales qui montrent l'avantage qu'on peut tirer de l'analogie électromagnétique pour la théorie des aéroplanes. Quant aux détails techniques, je ferai miennes les paroles de mon père : « Ce n'est pas mon affaire ».

**12. Conclusions.** — Le calcul des forces qui portent les aéroplanes, et de celles qui déterminent la résistance à leur mouvement, ne sont pas les seules applications pratiques de la théorie des actions hydrodynamiques à distance.

En principe, il n'y a pas grande différence entre les ailes portantes d'un aéroplane et

la pale d'une hélice propulsive, ou bien l'aube d'une turbine. Les forces motrices et les forces résistantes appartiennent dans un cas comme dans l'autre à la catégorie des forces hydrodynamiques à distance. On peut se servir des formules de l'électrodynamique pour les calculer.

Cela étant, il est intéressant de considérer les transformations de la force. Considérons une turbine et une machine dynamo qui sont montées sur un même arbre. Sur les pales de la turbine agissent les actions hydrodynamiques à distance, et dans la dynamo les forces correspondantes électromagnétiques. Nous calculons les deux espèces de forces par les mêmes formules, avec seulement un changement de signe quand on passe des unes aux autres. L'une des espèces de forces paraît comme une image de l'autre par réflexion.

N'avons-nous pas ici devant nous une harmonie profonde de la nature? Et en même temps un point de rencontre des questions pratiques les plus importantes et des questions philosophiques les plus profondes?

Quelle est l'intention de la nature dans l'établissement de cette harmonie? Je finirai en posant cette question, et sans oser y formuler une réponse.

Manuscrit reçu le 20 juillet 1924.

---