HAL
open science

L'agitation moléculaire et les lois du rayonnement thermique

Léon Brillouin

▶ To cite this version:

Léon Brillouin. L'agitation moléculaire et les lois du rayonnement thermique. Journal de Physique et le Radium, 1921, 2 (5), pp.142-155. 10.1051/jphysrad:0192100205014200 . jpa-00204278

HAL Id: jpa-00204278
https://hal.science/jpa-00204278

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

L'AGITATION MOLÉCULAIRE ET LES LOIS DU RAYONNEMENT THERMIQUE

par Léon BRILLOUIN.

1. **Exposé.** — Une enceinte vide, à température déterminée T, se trouve parcourue en tous sens par des rayonnements électromagnétiques de toutes fréquences. Ces radiations suivent les lois bien connues du corps noir. Si, dans l'enceinte, se trouvent quelques particules matérielles, la thermodynamique statistique nous apprend que ces particules prendront une agitation telle que, suivant chaque axe de coordonnées, leur énergie cinétique moyenne soit égale à $\frac{1}{2} kT$. Comment peut-on relier les deux aspects que nous venons de rappeler? Les particules ont des propriétés optiques déterminées; elles absorbent, émettent ou réfléchissent les radiations; dès lors, elles subissent des impulsions, dues aux pressions de radiation. Il faut démontrer que ces impulsions leur communiqueront l'énergie d'agitation $\frac{1}{2} kT$ (suivant chaque axe). Nous allons donc chercher le mouvement brownien de particules placées dans l'enceinte vide isotherme, du fait des réactions des radiations sur les particules.

Ce problème a été posé dès 1910 par Einstein et Hopf (1), qui étudièrent le mouvement d'un doublet sous l'influence des radiations thermiques. Ces auteurs évaluaient les fluctuations du rayonnement, en tenant uniquement compte des interférences. Ils concluaient à la nécessité de la loi de Rayleigh pour le rayonnement; or cette loi est en contradiction complète avec l'expérience. Einstein (2) publiait, vers la même époque, des raisonnements fort ingénieux qui permettent de calculer thermodynamiquement les fluctuations d'énergie; nous avons rappelé et développé ces idées dans un récent article (3).

Nous appliquerons ces résultats au problème du mouvement brownien d'une particule, et nous montrerons que l'étude détaillée aboutit simplement à une démonstration nouvelle de la loi de Wien pour le rayonnement thermique. La loi de Rayleigh est la loi de rayonnement pour laquelle les fluctuations sont dues aux interférences seules. Pour toute autre loi, les fluctuations sont d'apparence plus complexe. Einstein a traité, plus récemment (4) un cas particulier fort intéressant : il considère une molécule ou

(1) A. Einstein et Hopf. *Ann. der Phys.*, 1910, t. xxxiii, p. 1105.
(2) A. Einstein. *Phys. Zeitschr.*, 1909, t. x, p. 185.
(3) L. Brillouin. *Journ. de Phys.*, 1921, t. ii, p. 65.
(4) A. Einstein. *Phys. Zeitschr.*, 1917, t. xviii, p. 121.

Article published online by EDP Sciences and available at http://dx.doi.org/10.1051/jphysrad:0192100205014200

atome du type Bohr, précise les lois de probabilité pour l'absorption ou l'émission d'un quantum, et aboutit, au moyen de la loi de rayonnement de Planck, à démontrer que sa molécule prend un mouvement d'agitation convenable. Je renverrai, pour quelques détails de calcul, à l'un ou l'autre des articles d'Einstein.

2. **Impulsions et résistance visqueuse.** — Dans toutes les théories de mouvement brownien, on à l'habitude de partir des hypothèses suivantes : L'action du milieu continu (ici, le rayonnement isotherme) sur la particule est décomposée en deux termes :

1° Une résistance visqueuse, c'est-à-dire une force proportionnelle à la vitesse,

$$f_x = -Rv_x.$$

2° Des impulsions irrégulières, en tous sens, dues aux fluctuations du milieu ambiant. Ces impulsions sont, en première approximation, indépendantes de la vitesse v de la particule. Nous notons X l'impulsion suivant Ox pendant le temps τ.

Si Mv_x était la quantité de mouvement (suivant Ox) de la particule au temps t_0, cette quantité de mouvement est devenue $Mv_x - Rv_x\tau + X$ au temps $t_0 + \tau$. Le carré moyen conserve sa valeur

$$(\overline{Mv_x})^2 = (\overline{Mv_x - Rv_x\tau + X})^2. \tag{1}$$

Nous écrirons que l'énergie cinétique moyenne est égale à $\frac{1}{2}kT$; de l'équation (1) nous tirons

$$\overline{X^2} = 2RM\overline{v_x^2}\tau + R^2\overline{v_x^2}\tau^2,$$

en omettant les moyennes des termes v_x et v_xX, qui sont nulles. Pour des temps τ assez court, on pourra négliger le 2e terme et écrire

$$\overline{X^2} = 2RkT\tau. \tag{2}$$

Cette formule est d'une application très générale dans tous les problèmes de mouvements browniens [1].

3. **Résistance au mouvement d'une particule, dans le rayonnement isotherme.** — Considérons une particule douée d'un pouvoir absorbant

[1] Voir les articles d'Einstein sur le mouvement brownien, la thèse de Mme De Haas-Lorentz et les conférences de Lorentz au Collège de France en 1913, publiées par Teubner, Leipzig, 1917.

$\alpha(\nu)$ pour les radiations de fréquence ν. Le rayonnement isotherme présente, par rapport à des axes $Oxyz$ au repos, une densité d'énergie.

$$\rho(\nu, T)\,d\nu\,d\omega.$$

pour les radiations de fréquence ν (à $d\nu$ près), dont les rayons sont compris dans un angle solide $d\omega$.

Par rapport aux axes fixes, liés à l'enceinte isotherme, le rayonnement est également diffusé dans toutes les directions; la fonction ρ ne dépend pas de la direction du cône élémentaire $d\omega$. Si nous rapportons ce même rayonnement à des axes $O'x'y'z'$ en mouvement, se déplaçant suivant Ox avec une vitesse $v_x = \beta\, c$ (c vitesse de la lumière), les lois seront différentes. La densité d'énergie s'écrira

$$(3) \qquad \rho'(\nu', T, \varphi')\,d\nu'\,d\omega' = \left\{\rho(\nu') - 3\beta\cos\varphi'\left(\rho(\nu') - \frac{\nu'}{3}\frac{\partial\rho(\nu')}{\partial\nu'}\right)\right\}d\nu'\,d\omega',$$

en notant φ' l'angle du rayon lumineux avec l'axe $O'x'$. L' indice prime se rapporte aux quantités mesurées dans les axes $O'x'y'z'$. Cette formule représente la première approximation, dans la théorie de la relativité; elle est démontrée et utilisée par Einstein, dans les articles cités plus haut.

Une particule en mouvement, à laquelle sont liés les axes $O'x'y'z'$, n'est donc plus entourée d'un rayonnement isotrope; lorsqu'elle absorbe ces radiations, les pressions de radiation ne s'équilibrent pas, et laissent une résultante proportionnelle à la vitesse β. L'énergie absorbée par la particule pendant un temps τ s'écrit

$$(4) \qquad dE = c\tau \int_{\nu'}\int_{\omega'} \alpha(\nu')\,\rho'(\nu', T, \varphi')\,d\nu'\,d\omega'.$$

Remplaçons ρ' par l'expression (3) et intégrons, nous trouvons l'énergie totale absorbée ; cette énergie est indépendante de β. Il n'en est pas de même pour les forces exercées sur la particule. L'absorption d'une énergie lumineuse E_a pendant le temps τ se traduit par une force $\frac{E_a}{c\tau}$ dirigée suivant le rayon lumineux. La composante suivant $O'x'$ de cette force s'écrira

$$f_{x'} = f\cos\varphi' = \alpha(\nu')\,\rho'\,d\nu'\cos\varphi'\,d\omega',$$

soit, au total,

$$(5) \quad f'_{x'} = \int_0^\infty d\nu' \int_0^\pi \alpha(\nu')\,\rho(\nu')\left[1 - 3\beta\cos\varphi'\left(1 - \frac{\nu'}{3\rho}\frac{\partial\rho}{\partial\nu'}\right)\right]\cos\varphi'\,2\pi\sin\varphi'\,d\varphi'.$$

Le phénomène étant de révolution, j'ai remplacé $d\omega'$ par $2\pi\sin\varphi'\,d\varphi'$. L'intégration en φ' donne

$$f_x = -4\pi\beta \int_0^\infty \alpha \left(\rho - \frac{\nu}{3}\frac{\partial\rho}{\partial\nu}\right) d\nu. \tag{6}$$

Cette force est proportionnelle à la vitesse β et tend à retarder le mouvement; elle a tous les caractères d'une force visqueuse, avec un coefficient R,

$$R = \frac{4\pi}{c} \int_0^\infty \alpha \left(\rho - \frac{\nu}{3}\frac{\partial\rho}{\partial\nu}\right) d\nu. \tag{7}$$

4. **Mouvement brownien d'un sphérule absorbant.** — Considérons un cas simple : la particule est sphérique, de rayon a, complètement absorbante pour les radiations de fréquences ν à $\nu + d\nu$. On voit facilement que le cofficient α, introduit plus haut, a pour valeur $\alpha = \pi a^2$, pour ν compris entre ν et $\nu + d\nu$, car πa^2 est la surface offerte par la sphère à une onde plane, et notre sphère absorbe *en moyenne* toute l'énergie $\pi a^2 c\rho\tau d\nu$ qui tombe sur sa surface pendant un temps τ. La résistance visqueuse R a donc l'expression suivante

$$R = \frac{4\pi^2 a^2}{c}\left(\rho - \frac{\nu}{3}\frac{\partial\rho}{\partial\nu}\right) d\nu. \tag{8}$$

Voyons maintenant comment peut se faire le calcul des *impulsions*.

Cherchons l'énergie qui tombera sur la sphère, entre les temps t et $t + \tau$, provenant d'une certaine direction RO.

Cette direction RO est la direction moyenne des rayons incidents, qui seront, en réalité, compris dans un angle solide infiniment petit $d\omega$. L'énergie qui tombera, pendant le temps τ. sur la sphère, est comprise entre deux calottes hémisphériques C, C′ (de rayon a), et distantes entre elles de $c\tau$. En effet, par suite de la propagation avec une vitesse c, la calotte C vient au temps t s'appliquer sur la sphère et, au temps $t + \tau$, la calotte C′ l'atteint elle aussi. Le volume compris entre les deux calottes est

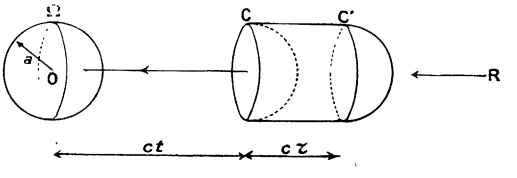

Fig. 1.

$$w = \pi a^2 c\tau.$$

Nous devons chercher quelle énergie de fréquence ν ($d\nu$) et de direction OR (à $d\omega$ près) contient ce volume w? Cette énergie vaut, en moyenne,

$$E_m = w\rho d\nu d\omega.$$

Mais *l'énergie effectivement comprise* dans le volume w peut avoir *une valeur s'écartant un peu de la moyenne.*

Soit

$$E = E_m + \varepsilon.$$

Les calculs de probabilité [1] nous ont donné une évaluation du carré moyen de l'écart ε.

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{\partial E_m}{\partial T} k T^2 = w k T^2 \frac{\partial \rho}{\partial T} d\nu d\omega. \tag{9}$$

Lorsque l'énergie contenue dans le volume w est absorbée par la sphère, une certaine quantité de mouvement est communiquée à celle-ci.

Pour le calcul de cette quantité de mouvement, l'excès ε de l'énergie sur l'énergie moyenne E_m entre seul en ligne de compte. En effet, les pressions de radiation moyennes (dues aux énergies E_m) des rayonnements de toutes directions, tombant sur la sphère, se compensent exactement si la particule est au repos. Et si elle est en mouvement, leur effet est la résistance visqueuse déjà calculée plus haut. Les écarts ε d'énergie, pour toutes ces radiations, sont absolument indépendants les uns des autres, et agissent chacun séparément.

La quantité de mouvement communiquée pendant le temps d'absorption τ est donc

$$\mu = \frac{\varepsilon}{c}.$$

Le carré moyen de μ^2 est

$$\overline{\mu^2} = \frac{\overline{\varepsilon^2}}{c^2} = \frac{\pi a^2}{c} \tau k T^2 \frac{\partial \rho}{\partial T} d\nu d\omega. \tag{10}$$

Les écarts ε d'énergie, pour les radiations de toutes directions tombant sur la sphère, sont indépendants, de sorte que le carré moyen $\overline{\overline{\mu^2}}$ de toutes les impulsions provenant de ces rayonnements s'obtient comme somme de tous les carrés moyens $\overline{\mu^2}$ relatifs à chaque direction. Cette somme des carrés des impulsions est donnée par l'intégration de $d\omega$, soit :

$$\overline{\overline{\mu^2}} = \frac{4\pi^2 a^2}{c} \tau k T^2 \frac{\partial \rho}{\partial T} d\nu, \tag{11}$$

puisque

$$\int d\omega = 4\pi.$$

Le carré moyen des impulsions X^2, suivant un axe, est égal au tiers de

[1] L. Brillouin. *Journ. de Phys. loc. cit.*

cette expression $\overline{\overline{\mu^2}}$; en effet, les impulsions μ ayant toutes les directions possibles, on a

$$\overline{X^2} = \overline{Y^2} = \overline{Z^2} = \frac{1}{3}\overline{\overline{\mu^2}}. \tag{12}$$

Le calcul que nous avons fait nous donne les impulsions dues aux fluctuations dans le rayonnement absorbé. Il faut tenir compte aussi des *fluctuations à l'émission.* Le même raisonnement nous donne aisément le résultat. L'énergie émise dans une direction OR (définie à $d\omega$ près) pendant le temps τ, se trouve, après un certain temps, comprise entre deux hémisphères C, C', distants de $c\tau$. Le calcul des fluctuations possibles de l'énergie comprise dans ce volume, se fera exactement comme nous venons de l'exposer, et donnera le même résultat final. Les fluctuations à l'émission sont entièrement indépendantes des fluctuations à l'absorption. Il suffit donc d'ajouter les carrés moyens des impulsions correspondantes, c'est-à-dire de doubler le résultat obtenu tout à l'heure.

5. **Discussion. Formule de Wien.** — Nous obtenons donc, au total,

$$\overline{X^2} = \frac{2}{3}\frac{4\pi^2 a^2}{c}\tau k T^2 \frac{\partial \rho}{\partial T} d\nu. \tag{13}$$

Comparons maintenant les deux formules (8) et (13) qui nous donnent R et $\overline{X^2}$. et écrivons la relation fondamentale des mouvements browniens.

$$\overline{X^2} = 2RkT\tau. \tag{2}$$

Nous trouvons

$$\frac{T}{3}\frac{\partial \rho}{\partial T} = \rho - \frac{\nu}{3}\frac{\partial \rho}{\partial \nu}. \tag{14}$$

Cette équation aux dérivées partielles est celle que fournit le raisonnement de Wien ; son intégrale générale est

$$\rho = \frac{\nu^3}{c^3} F\left(\frac{\nu}{T}\right). \tag{14 bis}$$

Une remarque s'impose, au sujet de la validité de nos raisonnements. Nous n'avons introduit aucune hypothèse particulière sur le mécanisme de l'absorption ou de l'émission. Il est pourtant évident que le mécanisme de l'émission, par exemple, déterminera par lui-même, la nature et la grandeur des fluctuations dans le rayonnement émis. Nous avons calculé ces fluctuations indirectement, par un raisonnement de probabilité. Cela se justifie aisément. Chaque type de loi du rayonnement noir (chaque expres-

sion de la fonction arbitraire $F\left(\frac{\nu}{T}\right)$ de Wien) correspond à un certain mécanisme d'émission et d'absorption. Ce mécanisme seul est capable de maintenir la loi du rayonnement, et ne peut en maintenir aucune autre. Les lois d'absorption et d'émission détermineront aussi les fluctuations dans le rayonnement, et ceci, de façon à satisfaire toujours exactement à la loi générale indiquée par le calcul des probabilités.

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{\partial E_m}{\partial T} k T^2. \tag{9}$$

Notre démonstration s'étend, par intégration en ν, au cas d'une particule complètement absorbante pour certains intervalles finis de fréquence, ou pour toutes les fréquences. Elle reste aussi valable si le corps, au lieu d'être constamment complètement absorbant, n'est capable d'absorber ou d'émettre le rayonnement que pendant des intervalles de temps donnés, d'ailleurs quelconques. Mais pendant chaque intervalle de temps efficace, il devra être complètement absorbant.

6. **Corps incomplètement absorbant.** — Considérons un sphérule doué, pour les radiations de fréquence ν ($d\nu$), d'un pouvoir absorbant quelconque. Soit χ la valeur du coefficient d'absorption par unité de volume. Je suppose, pour ne pas compliquer inutilement, que la particule a le même indice de réfraction que le milieu environnant, et se trouve caractérisée uniquement par son volume

$$\Omega = \frac{4}{3}\pi a^3,$$

et son pouvoir absorbant χ.

Lorsqu'une onde, de densité d'énergie $\rho\, d\nu\, d\omega$, traverse le sphérule, l'énergie absorbée pendant un petit temps τ s'écrit

$$dE_a = \Omega\chi\rho c\, d\nu\, d\omega\, \tau. \tag{15}$$

L'énergie émise par le granule, pour la fréquence $d\nu$, dans un angle solide $d\omega$, a la même expression que ci-dessus ; il faut seulement supposer que ρ y représente la densité d'énergie du rayonnement isotherme à la température T. D'après cette expression, on voit que le coefficient arbitraire α introduit plus haut (formule 4) dans le calcul de R, a la valeur

$$\alpha = \Omega\chi. \tag{16}$$

Il nous faut établir maintenant le calcul des fluctuations. Ceci sera un

peu plus compliqué que dans le problème précédent, car les causes de fluctuations sont au nombre de trois :

1° Fluctuations d'énergie du rayonnement incident.

2° Fluctuations dans la proportion absorbée.

3° Fluctuations dans l'émission.

7. **Les fluctuations d'origines diverses.** — Nous allons, pour l'évaluation de ces différents termes, suivre une voie analogue à celle déjà indiquée pour le cas du sphérule absorbant.

Considérons un intervalle de temps τ, que je suppose grand devant le temps que met un rayon lumineux à traverser le sphérule Ω (fig. 1). L'énergie qui, provenant d'une direction OR, (définie à $d\omega$ près), tombera en un temps τ sur le sphérule, est comprise auparavant dans un certain volume cylindrique w, de longueur $c\tau$, limité par deux calottes hémisphériques C, C'.

L'énergie moyenne contenue dans ce volume w est

$$E_m = w\rho d\nu d\omega, \qquad w = \pi a^2 c\tau. \tag{17}$$

L'énergie effectivement comprise dans ce volume est

$$E = E_m + \varepsilon.$$

Les calculs de probabilité, déjà rappelés plus haut, nous donnent la valeur du carré moyen de la fluctuation ε

$$\overline{\varepsilon^2} = wkT^2 \frac{\partial \rho}{\partial T} d\nu d\omega. \tag{18}$$

Pendant l'intervalle de temps τ, nous devons supposer les phénomènes suivants :

1° Absorption d'une fraction de l'énergie E,

$$e_a = \frac{4}{3} a\chi E = \frac{4}{3} \pi a^3 \chi c\tau\rho d\nu d\omega + \frac{4}{3} a\chi\varepsilon; \tag{19}$$

l'onde incidente traverse, en effet, le sphérule sous une épaisseur moyenne $\frac{4}{3} a$.

2° Il pourra y avoir un *écart dans la loi d'absorption*. Le coefficient χ ne définit pas la loi d'absorption instantanée, mais sa valeur moyenne. Représentons par ε_1 l'énergie absorbée, en surplus de ce que nous avons écrit ci-dessus, pendant le temps τ.

3° Il y aura aussi des *fluctuations dans l'énergie émise*, soit ε_2, de

sorte que l'énergie émise par le sphérule pendant le temps τ, dans la direction OR (définie à $d\omega$ près) s'écrit

$$e_e = \frac{4}{3}\pi a^3 \chi c \tau \rho \, d\nu \, d\omega + \varepsilon_2. \tag{20}$$

Après que le volume w, supposé entraîné par les ondes avec la vitesse c, a traversé le sphérule, quelle énergie va-t-il contenir?

L'énergie comprise dans ce nouveau volume w' est

$$E' = E - e_a - \varepsilon_1 + e_e = E_m + \varepsilon\left(1 - \frac{4}{3}a\chi\right) - \varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$

L'écart ε' correspondant s'écrit donc

$$\varepsilon' = \varepsilon\left(1 - \frac{4}{3}a\chi\right) - \varepsilon_1 + \varepsilon_2. \tag{21}$$

Mais le carré moyen de ε' doit avoir la même valeur que le carré moyen de ε, car on doit supposer que les lois d'émission et d'absorption de la particule matérielle laissent inaltérées les lois et fluctuations moyennes du rayonnement.

Ceci nous donne la relation

$$\overline{\varepsilon_1^2} + \overline{\varepsilon_2^2} = \overline{\varepsilon^2}\left[\frac{8}{3}a\chi - \left(\frac{4}{3}a\chi\right)^2\right]. \tag{22}$$

Cette relation a été indiquée à plusieurs reprises par Einstein, à propos des théories du corps noir.

J'ai supposé implicitement, en prenant les moyennes, que les trois types de fluctuations sont des phénomènes indépendants les uns des autres, de sorte que les moyennes des produits tels que

$$\overline{\varepsilon\varepsilon_1}, \quad \overline{\varepsilon_1\varepsilon_2}, \quad \overline{\varepsilon\varepsilon_2},$$

sont nulles.

8. **Impulsions**. — Nous devons passer maintenant au calcul des quantités de nouvement communiquées à la particule.

Nous avons supposé que les fluctuations à l'émission, ε_2 sont des phénomènes dirigés, c'est-à-dire que les fluctuations de l'énergie émise dans un angle solide $d\omega$ sont tout à fait indépendantes de celles qui prennent place dans un autre petit angle solide quelconque.

Chaque excès ε_n d'énergie émise ou absorbée communique alors à la particule une quantité de mouvement $\frac{\varepsilon_n}{c}$. Les trois phénomènes que nous avons distingués dans l'absorption et l'émission étant supposés indépen-

dants les uns des autres, leurs carrés moyens s'ajoutent, et nous trouvons le carré moyen de l'impulsion $\overline{\mu^2}$ par la formule

$$\overline{\mu^2} = \frac{1}{c^2}\left[\overline{\varepsilon_1^2} + \overline{\varepsilon_2^2} + \left(\frac{4}{3}\overline{a\chi\varepsilon}\right)^2\right] = \frac{8}{3}a\chi\frac{\overline{\varepsilon^2}}{c^2} \quad . \tag{23}$$

La seconde expression a été obtenue en remplaçant $\overline{\varepsilon^2}_1 + \overline{\varepsilon^2}_2$ par la valeur calculée un peu plus haut (formule 22). Mais l'expression de $\overline{\varepsilon^2}$ nous est déjà connue (18), et nous donne

$$\overline{\mu^2} = \frac{8}{3}\frac{\pi a^3}{c}\chi\tau k T^2 \frac{\partial\rho}{\partial T}\,\mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}\omega. \tag{24}$$

Intégrons pour toutes les directions de rayonnement, c'est-à-dire pour tous les angles solides $\mathrm{d}\omega$. La somme s'obtient en remplaçant $\mathrm{d}\omega$ par 4π dans l'expression ci-dessus. Le carré moyen $\overline{X^2}$ des impulsions suivant un axe est égal au tiers du carré des impulsions $\overline{\overline{\mu^2}}$ en tous sens

$$\overline{X^2} = \frac{2}{3}\Omega\chi\frac{4\pi}{c}\tau k T^2 \frac{\partial\rho}{\partial T}\,\mathrm{d}\nu. \tag{25}$$

Il nous reste à écrire que la relation fondamentale du mouvement brownien est satisfaite

$$X^2 = 2RkT\tau,$$

et nous retrouvons la même équation en ρ que dans le problème précédent :

$$\frac{T}{3}\frac{\partial\rho}{\partial T} = \rho - \frac{\nu}{3}\frac{\partial\rho}{\partial\nu}, \tag{14}$$

relation qui est l'expression différentielle de la loi de Wien.

9. **Remarques.** — Il a été indispensable, ici comme dans le problème du corpuscule complètement absorbant, de supposer que les fluctuations dans l'émission sont des phénomènes dirigés. Ceci est un trait commun de toutes ces théories. Cette affirmation est logique lorsqu'on considère des grains pas trop petits, comme nous l'avons fait ici ; elle devient très surprenante, si l'on doit l'appliquer au phénomène élémentaire de l'émission de rayonnement par un atome isolé. Pourtant ce sera la seule façon possible de généraliser les raisonnements ci-dessus et de les appliquer au cas de l'atome. Einstein a montré [1], que l'on devait nécessairement faire cette hypothèse pour un atome tel que l'atome de Bohr. Nos raisonnements généraux nous mettent donc en évidence deux points :

[1] A. Einstein ; Zur quanten Theorie der Strahlung. *Phys. Zeitschr.*, 1917, xviii, p. 121.

1° Le mouvement brownien d'une particule dans un champ de radiation ne permet pas de trouver la loi du rayonnement noir, il conduit simplement à des démontrations de la loi de Wien.

2° Il est indispensable pour établir les raisonnement de supposer que l'émission de rayonnement est un phénomène strictement dirigé.

10. **Sphère réfléchissante.** — Pour compléter la démonstration, nous allons traiter le cas d'une sphère parfaitement réfléchissante. Il n'y a pas ici de difficultés relativement à l'émision, puisque la sphère n'émet aucune radiation, et le raisonnement ne porte que sur les propriétés de l'éther électromagnétique lui-même.

Il nous faut tout d'abord rappeler quelle est la pression de radiation exercée par une onde plane sur une sphère réfléchissante. Considérons une onde plane tombant, dans la direction RO, sur la sphère, et cherchons la pression exercée sur un petit élément de surface $d\sigma$ de la sphère, voisin d'un point I. Cet élément de surface sera défini par la variation $d\theta$ de l'angle IOR $= \theta$ et par un petit angle $d\psi$ de rotation du plan de la figure autour de OR

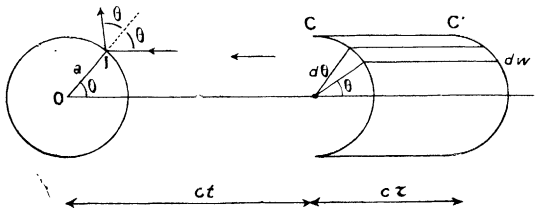

Fig. 2.

$$d\sigma = a^2 \sin\theta\, d\theta\, d\psi. \tag{26}$$

L'énergie qui tombe sur $d\sigma$, est en un temps dt,

$$dE = c\rho\, d\sigma \cos\theta\, dt,$$

si ρ représente la densité d'énergie de l'onde. La force exercée par suite de la réflexion est dirigée suivant IO et vaut

$$2\,\frac{dE}{c\,dt}\cos\theta.$$

La pression totale étant dirigée suivant OR, je prends la projection de cette force sur OR

$$df = 2\,\frac{dE}{c\,dt}\cos^2\theta = 2\rho a^2 \cos^3\theta \sin\theta\, d\theta\, d\psi. \tag{27}$$

La force totale s'obtient en intégrant ψ de 0 à 2π et θ de 0 à $\frac{\pi}{2}$, ce qui donne

(28) $$F = \pi a^2 \rho.$$

Cette force a la même valeur que si la particule était complètement absorbante. Ceci s'explique, car on vérifie aisément que le rayonnement réfléchi par la sphère a même intensité suivant deux rayons réfléchis dans des directions exactement opposées. L'ensemble des forces exercées par les rayons réfléchis est donc nul et il ne reste que les pressions de l'onde incidente, tout comme sur un corps absorbant. Le coefficient de résistance visqueuse R, calculé plus haut, aura la même valeur que pour la sphère absorbante

(29) $$R = \frac{4\pi^2 a^2}{c}\left(\rho - \frac{\nu}{3}\frac{\partial \rho}{\partial \nu}\right) d\nu.$$

11. **Impulsions.** — Cherchons maintenant les impulsions que subit la sphère. Nous ferons le calcul suivant une méthode tout à fait analogue à celle que nous avons appliquée aux problèmes précédents. L'énergie qui tombera pendant un temps τ sur la sphère est contenue dans un volume w

$$w = \pi a^2 c \tau,$$

et a ses directions de propagation comprises dans un angle solide infiniment petit $d\omega$ autour de OR. Les différentes parties du volume w ne jouent plus maintenant des rôles équivalents car les rayons de propagation correspondants tombent sur la sphère avec des angles d'incidence θ variables.

Prenons un petit volume dw défini par un élément de surface $d\sigma$ de la calotte C et par la hauteur $c\tau$. Cet élément a la grandeur.

$$d\sigma = a^2 \sin\theta d\theta d\psi,$$

(30) $$dw = a^2 c\tau \sin\theta \cos\theta d\theta d\psi.$$

L'énergie contenue dans ce volume est

(31) $$E = E_m + \varepsilon; \qquad E_m = \rho dw d\omega d\nu,$$

E_m représentant l'énergie moyenne du rayonnement de fréquence ν ($d\nu$) contenu dans le volume dw, et dont les directions de propagation soient comprises dans l'angle solide $d\omega$.

La quantité de mouvement communiquée à la sphère, lors de la réflexion de ces radiations est dirigée suivant IO et a pour valeur

$$\mu = \frac{2\varepsilon}{c}\cos\theta.$$

Les écarts ε seuls entrent en ligne de compte, car les pressions moyennes s'équilibrent.

Le carré moyen de l'impulsion $\overline{\mu^2}$ s'écrit

$$\overline{\mu^2} = \frac{4\cos^2\theta}{c^2}\overline{\varepsilon^2} = \frac{4a^2}{c}\tau k T^2 \frac{\partial \rho}{\partial T} \sin\theta \cos^3\theta \, d\nu \, d\theta \, d\psi \, d\omega. \tag{32}$$

Nous avons remplacé $\overline{\varepsilon^2}$ par sa valeur, en utilisant la formule, déjà citée plusieurs fois,

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{\partial E_m}{\partial T} k T^2.$$

La somme de tous les carrés moyens des impulsions élémentaires donne le carré moyen de l'impulsion totale. En effet, les fluctuations dans chaque volume dw sont tout à fait indépendantes de celles des autres volumes.

Nous devons intégrer θ de 0 à $\frac{\pi}{2}$, ψ de 0 à 2π, et $d\omega$, dont l'intégrale est 4π.

Ceci nous donne

$$\overline{\overline{\mu^2}} = \frac{8\pi^2 a^2}{c}\tau k T^2 \frac{\partial \rho}{\partial T} d\nu. \tag{33}$$

Le carré moyen X^2 des impulsions suivant un axe donné est égal à $\frac{1}{3}\overline{\overline{\mu^2}}$. Si nous écrivons la relation fondamentale

$$\overline{X^2} = 2RkT\tau.$$

nous retrouvons, cette fois encore, la formule de Wien sous sa forme différentielle.

$$\frac{T}{3}\frac{\partial \rho}{\partial T} = \rho - \frac{\nu}{3}\frac{\partial \rho}{\partial \nu}. \tag{14}$$

Nous avons donc démontré qu'une sphère réfléchissante prend, sous l'action du rayonnement, un mouvement d'agitation, dont l'énergie cinétique moyenne relativement à un axe est $\frac{1}{2}kT$, conformément au résultat de la théorie cinétique des gaz.

12. **Résumé.** — J'ai repris en détail le calcul des impulsions et du mouvement brownien d'une particule matérielle placée dans une enceinte vide parcourue par des radiations isothermes. Trois cas ont été envisagés : particule complètement absorbante, partiellement absorbante, ou réflé-

chissante. Pour éviter toutes difficultés, et laisser au raisonnement sa généralité complète, j'ai pris des particules pas trop petites, de façon à pouvoir les supposer douées des propriétés optiques classiques. Les fluctuations ont été évaluées par la méthode thermodynamique résumée dans un article précédent.

Dans tous les cas étudiés, le calcul aboutit à une démonstration de la loi du déplacement de Wien. Il est impossible de tirer, de ces raisonnements généraux, une précision quelconque sur la loi du corps noir.

Si certains auteurs ont pu déduire, de raisonnements analogues, une formule du corps noir, c'est que leurs calculs de fluctuations comportaient, implicitement, une hypothèse particulière. En évaluant les fluctuations par les seules interférences, on aboutit à la loi de Rayleigh ; en se servant des quanta ou des lois d'émission d'un atome du type Bohr, on arrive à la formule de Planck.

Mon raisonnement très général suppose seulement que les lois élémentaires d'émission et d'absorption, non précisées, maintiennent la loi de répartition du corps noir et, en même temps, les fluctuations qui doivent, statistiquement, y correspondre. Notons, enfin, qu'il a été nécessaire d'utiliser l'hypothèse que l'émission du rayonnement est dirigée ; j'ai indiqué (§ 9) le rôle de ce postulat dans le cas des particules absorbantes. Pour la sphère réfléchissante j'ai dû supposer, ce qui revient au même, l'indépendance des fluctuations dans les différentes parties d'une onde plane. Cette difficulté, signalée déjà par Einstein, subsiste donc, même dans nos raisonnements généraux.

Manuscrit reçu le 15 novembre 1920.