HAL open science

Copules, probabilités inférieures et ensembles aléatoires : comment et quand les appliquer ?

Roman Malinowski, Sébastien Destercke

▶ **To cite this version:**

Roman Malinowski, Sébastien Destercke. Copules, probabilités inférieures et ensembles aléatoires : comment et quand les appliquer ?. 31ièmes Rencontres Francophones sur la Logique Floue et ses Applications (LFA 2022), Oct 2022, Toulouse, France. hal-03794230

HAL Id: hal-03794230

https://hal.science/hal-03794230

Submitted on 3 Oct 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Copules, probabilités inférieures et ensembles aléatoires : comment et quand les appliquer ?

Copulas, lower probabilities and random sets : how and when to apply them ?

Roman Malinowski[1] Sébastien Destercke[2]
[1] CNES/CS Group/Université de Technologie de Compiègne
[2] UMR CNRS 7253 Heudiasyc, Université de Technologie de Compiègne

CS 60319 - 60203 Compiègne, {roman.malinowski, sebastien.destercke}@hds.utc.fr

Résumé :
Cet article est en partie une traduction d'un article présenté lors de la conférence SMPS2022. Une copule est une fonction d'agrégation, qui peut être utilisée comme modèle de dépendance. Toute fonction de distribution multivariée peut être caractérisée par ses marginales ainsi qu'une copule. Lorsqu'on introduit de l'incertitude sur ces fonctions de distribution, différentes solutions sont disponibles pour agréger les modèles d'incertitude univariés en modèles multivariés via une copule. Nous présentons ici certaines de ces solutions, et discutons de leurs inclusions respectives pour des cas particuliers : indépendance, fonctions de nécessité et p-boîtes.

Mots-clés :
Copules, probabilités inférieures, fonctions de croyance, mesures de nécessité, p-boîtes

Abstract:
This article is a translation from our work presented at the conference SMPS2022. A copula is an aggregation function, that can be used as a dependency model. Any multivariate distribution function can be characterized by its marginals and a copula. When introducing imprecision in the modelling of those distribution functions, different solutions are available to aggregate the univariate uncertainty representations into a multivariate one via the copula. We present some of those solutions, and discuss their respective inclusions for special cases : independence, necessity functions and p-boxes.

Keywords:
Copulas, lower probabilities, belief functions, necessity measures, p-boxes

1 Introduction

Les ensembles crédaux, ou ensembles convexes de distributions de probabilités, sont des outils utiles pour traiter l'incertitude, notamment en présence d'imprécision. Ils comprennent de nombreux modèles d'incertitude, tels que les fonctions de croyance, les p-boîtes, etc [4]. Comment combiner ces modèles univariés en modèles multivariés reste une question de recherche très active, et de nombreux chercheurs étudient comment les outils utilisés dans le cadre précis peuvent être étendus au cadre imprécis, notamment en utilisant des copules [7, 8].

Lorsqu'on considère des probabilités précises, il a été prouvé que les copules sont capables de modéliser n'importe quelle structure de dépendance entre des distributions cumulées de probabilité. Ceci n'est plus vrai lorsqu'on ajoute de l'imprécision aux probabilités [8], pour diverses raisons, notamment le fait qu' il n'existe pas toujours de correspondance unique entre les distributions cumulées imprécises et les ensembles crédaux. Dans cet article, nous présentons d'abord une brève revue des différents modèles d'incertitude (Section 2), puis nous présentons plusieurs façons de combiner les ensembles crédaux ou leurs enveloppes inférieures avec une copule (Section 3). Dans la section 4, nous étudions enfin leurs relations d'inclusions pour divers cas spécifiques.

2 Préliminaires

Dans cette section, nous présentons les différents modèles d'incertitude considérés ainsi que les copules, qui sont des fonctions d'agrégation utilisées pour modéliser les dépendances entre plusieurs variables aléatoires. Nous travaillons sur des espaces

finis.

2.1 Modèles imprécis

Définition 1 Si l'on considère un ensemble crédal (i.e. un ensemble convexe de distributions de probabilités) $\mathcal{M}$ sur un espace fini $\mathcal{X}$, on définit la probabilité inférieure $\underline{P}$ comme son enveloppe inférieure sur tous les événements de l'ensemble des parties de $\mathcal{X}$, $\mathcal{P}(\mathcal{X})$:

$$\forall A \in \mathcal{P}(\mathcal{X}), \underline{P}(A) = \inf\{P(A)|P \in \mathcal{M}\} \tag{1}$$

Il faut noter que, bien que tous les ensembles crédaux ne puissent être décrits par des probabilités inférieures, nous nous concentrerons principalement sur ces dernières dans cet article afin de conserver une certaine clarté dans nos explications. Comme les ensembles crédaux sont assez génériques, il est intéressant de considérer des modèles plus simples et plus pratiques. Nous définissons maintenant certains de ces modèles d'incertitude qui seront considérés par la suite.

Définition 2 Étant donné un espace fini $\mathcal{X}$ et l'ensemble de ses parties $\mathcal{P}(\mathcal{X})$, une fonction de masse de probabilité ([10]) est une fonction $\mathcal{P}(\mathcal{X}) \to [0,1]$ satisfaisant :

$$m(\emptyset) = 0 \text{ et } \sum_{A \subseteq \mathcal{X}} m(A) = 1 \tag{2}$$

Un ensemble A de $\mathcal{X}$ est appelé *élément focal* si et seulement si $m(A) > 0$ et nous noterons $\mathcal{F}_m$ l'ensemble de tous les éléments focaux. Une telle fonction de masse définit une fonction de croyance $Bel : \mathcal{P}(\mathcal{X}) \to [0,1]$:

$$\forall A \subseteq \mathcal{X}, Bel(A) \;=\; \sum_{B \subseteq A} m(B) \tag{3}$$

$Bel(A)$ peut être interprétée comme notre confiance dans le fait que la vérité se trouve dans A. Une fonction de croyance est une probabilité inférieure (1) induisant un ensemble crédal :

$$\mathcal{M}(Bel) = \{P|\forall A \subseteq \mathcal{X}, Bel(A) \leqslant P(A)\}$$

Définition 3 Une mesure de nécessité Nec est une fonction de croyance minitive. Pour tout A, B de $\mathcal{P}(\mathcal{X})$:

$$Nec(A \cap B) = min(Nec(A), Nec(B)) \tag{4}$$

Dans un espace fini, les éléments focaux d'une fonction de nécessité forment une famille emboîtée d'événements : $\mathcal{F}_m = \{a_1 \subset ... \subset a_k\}$ [5]. En tant que fonction de croyance, une nécessité induit un ensemble crédal :

$$\mathcal{M}(Nec) = \{P|\forall A \subseteq \mathcal{X}, Nec(A) \leqslant P(A)\}$$

Définition 4 Une p-boîte (boîte de probabilité) est une paire de deux fonctions de répartition (qu'on appelera CDF, *Cumulative Distribution Function*) $[\underline{F}, \overline{F}]$ définies sur l'ensemble des réels telles que $\underline{F}(x) \leqslant \overline{F}(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Une p-boîte est l'extension des CDFs aux probabilités imprécises. Elle induit un ensemble crédal, composé de toutes les CDFs dominant $\underline{F}$ et dominées par $\overline{F}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}([\underline{F}, \overline{F}]) = \{P|\forall x \in \mathbb{R},\\ \underline{F}(x) \leqslant P(]-\infty, x]) \leqslant \overline{F}(x)\}\end{aligned} \tag{5}$$

Nous pouvons définir les 'coupes-α' $\mathcal{C}^{\alpha}_{[\underline{F},\overline{F}]}$ ($\alpha \in [0,1]$) d'une p-boîte comme des intervalles $[\underline{x}, \overline{x}]$ dont la limite inférieure (resp. supérieure) est la pseudo-inverse de $\underline{F}$ (resp. $\overline{F}$) en α (Figure 1). Il a été prouvé dans [4] qu'à chaque p-boîte correspond une fonction de croyance Bel telle que :

$$\mathcal{M}([\underline{F}, \overline{F}]) = \mathcal{M}(Bel) \tag{6}$$

De plus, l'ensemble des éléments focaux d'une p-boîte est inclu dans celui des coupes-α : $\mathcal{F}_m \subseteq \mathcal{C}^{\alpha}_{[\underline{F},\overline{F}]}$. Nous noterons $\mathcal{F}_m = \{[\![\underline{x}_k, \overline{x}_k]\!] \mid m([\![\underline{x}_k, \overline{x}_k]\!]) > 0\}$. Comme $\underline{F}$ et $\overline{F}$ sont des fonctions croissantes, les limites

inférieures et supérieures de ces intervalles sont ordonnées. Ainsi, tous les éléments focaux $[\![\underline{x}_k, \overline{x}_k]\!]$ peuvent être ordonnés en utilisant leur ordre naturel :

$$\forall i, j, [\![\underline{x}_i, \overline{x}_i]\!] \leqslant_{nat} [\![\underline{x}_j, \overline{x}_j]\!] \Leftrightarrow \underline{x}_i \leqslant \underline{x}_j \text{ et } \overline{x}_i \leqslant \overline{x_j} \quad (7)$$

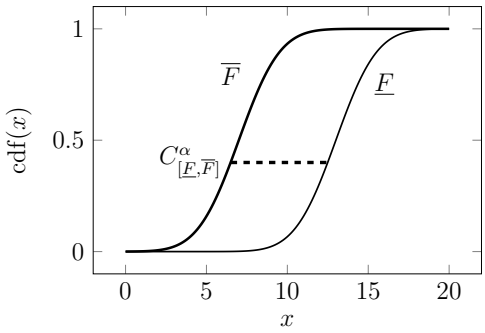

FIGURE 1 – Une p-boîte et l'un de ses éléments focaux $[\![\underline{x}_i, \overline{x}_i]\!]$

2.2 Copules

Définition 5 [9] Une copule est une fonction de distribution multivariée $C : [0,1]^N \to [0,1]$ dont les marginales sont uniformes sur $[0,1]$. Elle peut être vue comme une fonction de répartition de N variables aléatoires. Une copule vérifie un certain nombre de propriétés, exprimées ici dans le cas bivarié. Pour tout $u, u', v, v' \in [0,1]^4$ tels que $u \leqslant u', v \leqslant v'$:

$$C(u,0) = C(0,v) = 0 \quad (8)$$

$$C(u,1) = u,\ C(1,v) = v \quad (9)$$

$$C(u',v') + C(u,v) - C(u,v') - C(u',v) \geqslant 0 \quad (10)$$

L'équation (10) traduit le fait que C est une fonction croissante vis-à-vis de chacune de ses composantes. Il existe deux copules particulières, les copules Łukasiewicz (C_L) et minimale (C_M) (également appelées copules de Fréchet-Hoeffding inférieure et supérieure dans [9]), liant toutes les copules C, i.e. $\forall u, v \in [0,1]$,

$$C(u,v) \geqslant C_L(u,v) \triangleq \max(0, u+v-1)$$
$$C(u,v) \leqslant C_M(u,v) \triangleq \min(u,v)$$

Le célèbre théorème de Sklar affirme qu'une copule, lorsqu'elle est appliquée à des fonctions de répartition précises, peut modéliser n'importe quelle fonction multivariée, et que toute fonction multivariée peut être modélisée par une copule appliquée à ses marginales. Comme dit précédemment, ceci n'est plus vrai dans le cadre imprécis, d'où la nécessité de réétudier la façon dont les copules peuvent être appliquées à des ensembles crédaux génériques et à des probabilités inférieures [8].

3 Comment appliquer les copules aux ensembles crédaux

Il existe de multiples manières d'appliquer une copule à des probabilités inférieures. Nous allons ici en décrire quelques-unes : une méthode robuste sur les probabilités dominées, une méthode sur les fonctions de masse induisant des fonctions de croyance, et une méthode d'agrégation.

3.1 Méthode robuste sur les probabilités dominées

Considérons une copule C, et deux ensembles crédaux $\mathcal{M}(\underline{P}_X)$ et $\mathcal{M}(\underline{P}_Y)$ définis sur $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ et $\mathcal{P}(\mathcal{Y})$ respectivement. Appliquer C à chaque marginale $P_X \in \mathcal{M}(\underline{P}_X)$ et $P_Y \in \mathcal{M}(\underline{P}_Y)$ donne une probabilité inférieure jointe telle que pour tout $E \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$:

$$\underline{P}_{Robust}(E) = \inf\{P_{XY}(E) | F_{XY}(x,y) = C\left(F_X(x), F_Y(y)\right), \forall (x,y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}\} \quad (11)$$

avec F_X, F_Y les CDFs de P_X, P_Y et $F_{XY}(x,y) = P_{XY}(X \leqslant x,\ Y \leqslant y)$. Comme F_{XY} est une CDF précise, elle détermine complètement P_{XY}, ce qui permet de calculer P_{XY} sur des événements qui ne sont pas des produits Cartésiens. $\underline{P}_{Robust}$ est alors la borne inférieure de ces distributions de probabilité sur E. Notez que pour définir les CDFs sur des espaces finis qui ne sont pas des sous-ensembles de $\mathbb{R}$, des ordonnancements complets sur $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ doivent être définis. Dans les sections suivantes, nous ferons référence

à $\underline{P}_{Robust}$ selon (11) et à son ensemble crédal généré avec deux probabilités inférieures univariées $\underline{P}_X$, $\underline{P}_Y$ et une copule C comme :

$$\mathcal{M}_{Robust}(C, \underline{P}_X, \underline{P}_Y) = \{P_{XY} | \underline{P}_{Robust} \leqslant P_{XY}\} \quad (12)$$

ou $\mathcal{M}_{Robust}$ pour faire court lorsqu'aucune ambiguïté ne peut survenir. Il est intéressant de remarquer que $\mathcal{M}_{Robust}$ est le plus petit ensemble crédal contenant toutes les probabilités des ensembles crédaux marginaux liés via C, mais comme il est convexe, il peut aussi contenir des probabilités liées à leurs marginales avec une copule différente C'.

3.2 Masses jointes à partir de copules

Comme les fonctions de masse induisant des fonctions de croyance peuvent être vues comme des probabilités sur des ensembles, on peut directement appliquer des copules à ces masses cumulées. On retrouve cette approche dans [6]. Il n'existe en général pas d'ordre naturel entre les ensembles focaux $\mathcal{F}_m$ (qui jouent alors le rôle d'atomes). Pour appliquer une copule et définir une masse jointe, nous devons choisir un ordre arbitraire $\leqslant_{arb}$ qui déterminera l'ordre à l'intérieur des ensembles focaux $\mathcal{F}_{m_X} = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ et $\mathcal{F}_{m_Y} = \{b_1, b_2, ..., b_{n'}\}$ avec $a_{i-1} \leqslant_{arb} a_i, \forall i \in [\![1, n]\!]$ et $b_{j-1} \leqslant_{arb} b_j, \ \forall j \in [\![1, n']\!]$ (avec $a_0 = b_0 = \emptyset$). La masse bivariée associée à un élément (a_i, b_j) de $\mathcal{F}_{m_X} \times \mathcal{F}_{m_Y}$ peut être définie en utilisant la différence diagonale :

$$\begin{aligned} m^C_{XY}(a_i \times b_j) &= C(A^i_X, B^j_Y) + C(A^{i-1}_X, B^{j-1}_Y) \\ &- C(A^i_X, B^{j-1}_Y) - C(A^{i-1}_X, B^j_Y) \end{aligned} \quad (13)$$

avec $A^i_X = \sum_{k \leqslant i} m_X(a_k)$ et $B^j_Y = \sum_{k \leqslant j} m_Y(b_k)$ étant les masses cumulées pour a_i et b_j (avec $A^0_X = m_X(a_0) = B^0_Y = m_Y(b_0) = 0$).

Il est facile de vérifier que la masse jointe définie par (13) est une distribution de masse dont les ensembles focaux sont inclus dans le produit Cartésien des ensembles focaux marginaux $\mathcal{F}_{m_X} \times \mathcal{F}_{m_Y}$. La masse jointe décrite par (13) est définie de la même façon que la fonction de masse jointe dans le cas précis (ou densité pour les espaces continus) via le $H-volume$ [9].

Cette masse induit une fonction de croyance Bel_{XY}, et donc aussi un ensemble crédal. Dans les sections suivantes, nous ferons référence à cet ensemble crédal comme :

$$\begin{aligned} &\mathcal{M}_{mass}(C, Bel_X, Bel_Y) = \\ &\{P_{XY} | Bel_{XY} = \sum m^C_{XY} \leqslant P_{XY}\} \end{aligned} \quad (14)$$

ou $\mathcal{M}_{mass}$ lorsqu'aucune confusion n'est possible, avec m^C_{XY} défini par (13). Toutefois, comme le montre l'exemple suivant, le choix de $\leqslant_{arb}$ peut avoir un impact important sur le modèle joint.

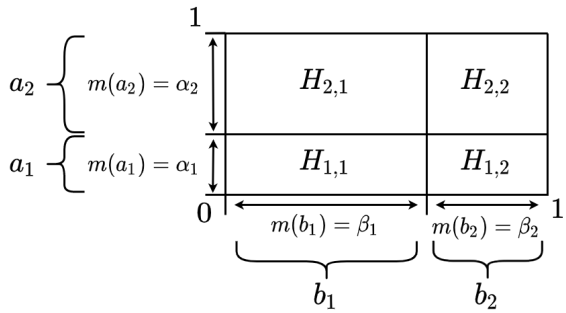

FIGURE 2 – Probabilité jointes sur les évènements A et B

Exemple 1 Soit m_X et m_Y des fonctions de masse définies sur $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ et $\mathcal{P}(\mathcal{Y})$, et dont les ensembles focaux sont $\mathcal{F}_{m_X} = \{a_1, a_2\}$ et $\mathcal{F}_{m_Y} = \{b_1, b_2\}$ (Fig. 2). En supposant que $b_1 \leqslant_{arb} b_2$, on considère l'ordre $\leqslant_{arb}$ suivant sur $\mathcal{F}_{m_X}$:

- Si "$a_1 \leqslant_{arb} a_2$" : $m_{XY}(a_1 \times b_1) = C(\alpha_1, \beta_1)$, $m_{XY}(a_2 \times b_1) = \beta_1 - C(\alpha_1, \beta_1)$
- Si "$a_1 \geqslant_{arb} a_2$" : $m_{XY}(a_1 \times b_1) = \beta_1 - C(\alpha_2, \beta_1)$, $m_{XY}(a_2 \times b_1) = C(\alpha_2, \beta_1)$.

En prenant $C(u, v) = \min(u, v)$ et $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = 0.5$, on obtient dans le premier cas $m_{xy}(a_1 \times b_1) = 0.5$ et dans le second cas $m_{xy}(a_1 \times b_1) = 0$. Il n'y a, en général, aucune raison pour que deux ordres aient la même valeur de masse pour un même produit Cartésien d'événements. Une exception notable est le cas de la copule produit, exploré dans la section 4.1.

Enfin, notons qu'une telle approche est assez couramment rencontrée dans la littérature [7, 1].

3.3 Copule appliquée aux probabilités inférieures

Une autre façon d'agréger deux probabilités inférieures $\underline{P}_X, \underline{P}_Y$ avec une copule C est d'appliquer directement la copule aux probabilités inférieures (on perd alors l'interprétation du théorème de Sklar) :

$$\forall A \in \mathcal{X}, B \in \mathcal{Y}, \\ \underline{P}_{agg}(A \times B) = C(\underline{P}_X(A), \underline{P}_Y(B)) \quad (15)$$

Ici, nous utilisons directement la copule comme opérateur d'agrégation. En général, nous ne pouvons pas nous attendre à ce que $\underline{P}_{agg}$ induise un ensemble crédal $\mathcal{M}(\underline{P}_{agg})$ non vide. Nous pouvons néanmoins noter que dans le cas de la copule produit, la probabilité inférieure bivariée induite par (15) induit un ensemble crédal non vide si les ensembles crédaux marginaux ne sont pas vides, c'est-à-dire que $\exists P_X \geqslant \underline{P}_X, \exists P_Y \geqslant \underline{P}_Y \implies \exists P_{XY} = P_X \times P_Y \geqslant \underline{P}_{agg}$, du fait que ce soit vrai pour toute probabilité précise. Il s'ensuit que pour toutes les copules C telles que $C_\Pi(u, v) = u \times v \geqslant C(u, v)$, on a :

$$\underline{P}_X \underline{P}_Y \geqslant C(\underline{P}_X, \underline{P}_Y) = \underline{P}_{agg} \\ \implies \mathcal{M}(\underline{P}_{agg}) \neq \emptyset \quad (16)$$

Dans les sections suivantes, nous ferons référence à l'ensemble crédal généré par l'agrégation directe de deux probabilités inférieures univariées avec une copule C comme :

$$\mathcal{M}_{agg}(C, \underline{P}_X, \underline{P}_Y) = \\ \{P_{XY} | \underline{P}_{agg} = C(\underline{P}_X, \underline{P}_Y) \leqslant P_{XY}\} \quad (17)$$

ou $\mathcal{M}_{agg}$ en abrégé, et nous noterons $\underline{P}_{agg}$ son enveloppe inférieure.

Nous avons défini trois façons différentes d'appliquer des copules à des ensembles de probabilités. En général, elles génèrent des ensembles de probabilités différents et incomparables. De plus, si $\mathcal{M}_{Robust}$ est probablement la manière la plus fondée d'étendre les copules, elle peut générer un ensemble complexe, alors que $\mathcal{M}_{mass}$ est garanti d'être induit par une fonction de croyance et que $\mathcal{M}_{agg}$ est facile à calculer et à générer. Dans la section suivante, nous étudions différents cas particuliers où ces ensembles bénéficient de certaines relations spécifiques.

4 Cas particuliers

Cette section explore les cas particuliers de la copule produit, et lorsque les modèles marginaux sont des mesures de nécessité ou des p-boîtes. On cherche ici à répondre à la question : "quand préférer une méthode plutôt qu'une autre ?"

4.1 Copule produit

Dans le cas de la copule produit, on sait d'après [3] que $\underline{P}_{robust}, \underline{P}_{mass}$ et $\underline{P}_{agg}$ se factorisent sur les produits Cartésiens, c'est-à-dire que $\forall (A, B) \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \underline{P}(A \times B) = \underline{P}_X(A) \times \underline{P}_Y(B)$. On sait également d'après [3] que $\mathcal{M}_{Robust} \subseteq \mathcal{M}_{mass}$, l'inclusion étant parfois stricte. De plus, comme $\mathcal{M}_{agg}$ est le plus grand ensemble crédal bénéficiant de ces propriétés de factorisation, alors nécessairement :

$$\mathcal{M}_{Robust}(C_\Pi, Bel_X, Bel_Y) \\ \rotatebox{90}{$\subseteq$} \\ \mathcal{M}_{mass}(C_\Pi, Bel_X, Bel_Y) \\ \rotatebox{90}{$\subseteq$} \\ \mathcal{M}_{agg}(C_\Pi, Bel_X, Bel_Y)$$

Des relations fortes existent donc dans le cas de la copule du produit. De plus, dans ce cas $\mathcal{M}_{mass}$ est insensible au réordonnancement, puisque C_Π correspond à la distribution uniforme sur $[0, 1]^2$.

4.2 Fonctions de nécessité

Commençons par comparer $\mathcal{M}_{agg}$ et $\mathcal{M}_{mass}$. Dans le cas des fonctions de nécessité, il existe

un ordre naturel $\leqslant_{nat}$ entre les éléments focaux qui correspond à l'ordre d'inclusion. De ce fait il s'avère que $\sum_{k\leqslant_{nat}i}\sum_{l\leqslant_{nat}j} m_{XY}(a_k \times b_l) = \sum_{a_k\subseteq a_i}\sum_{b_l\subseteq b_j} m_{XY}(a_k \times b_l)$. Calculer la fonction de croyance Bel_{XY} définie par (14) sur tous les éléments focaux a_i de Nec_X et b_j de Nec_Y donne :

$$Bel_{XY}(a_i \times b_j) = C\left(Nec_X(a_i), Nec_Y(b_j)\right)$$

Ainsi, l'enveloppe inférieure de $\mathcal{M}_{agg}$ et de $\mathcal{M}_{mass}$ coïncident sur les produits Cartésiens d'événements. Puisque $\mathcal{M}_{agg}$ est à nouveau le plus grand ensemble avec cette enveloppe inférieure, nous avons $\mathcal{M}_{mass} \subseteq \mathcal{M}_{agg}$ dans le cas des fonctions de nécessité. Cependant, comme le montre l'exemple suivant, il n'y a en général aucune raison pour que

$$\mathcal{M}_{agg} \subseteq \mathcal{M}_{Robust}$$
$$\text{ni}$$
$$\mathcal{M}_{agg} \supseteq \mathcal{M}_{Robust}$$

Exemple 2 Considérons deux fonctions de nécessité Nec_X, Nec_Y définies respectivement sur $\mathcal{X} = \{x_1, x_2\}$ et $\mathcal{Y} = \{y_1, y_2\}$, avec $Nec_X(x_1) = Nec_Y(y_2) = 0$ et $Nec_X(x_2) = Nec_Y(y_1) = 0.9$. Considérons d'abord la copule de Łukasiewicz $C(u, v) = max(0, u+v-1)$ et les événements $x_2 \times y_1$. Il est possible de montrer que sur ces événements $\underline{P}_{Robust} = 0.9 > 0.8 = \underline{P}_{agg}$.

Si l'on considère la copule minimum $C(u, v) = \min(u, v)$, alors en prenant n'importe quel (P_X, P_Y) vérifiant $P_X(x_1) = 0.1$ et $P_Y(y_1) = 0.9$ et en calculant $\underline{P}_{agg}$ et $P_{XY} \in \mathcal{M}_{Robust}$ sur l'événement $x_2 \times y_1$, on obtient $\underline{P}_{agg}(x_2 \times y_1) = 0.9$ et $P_{XY}(x_2 \times y_1) = 0.8$. Il s'avère donc que pour ces événements, $\underline{P}_{agg} = 0.9 > 0.8 \geqslant \underline{P}_{Robust}$.

4.3 P-boîtes

Lorsque l'on considère l'incertitude représentée par deux p-boîtes $[\underline{F}_X, \overline{F}_X]$, $[\underline{F}_Y, \overline{F}_Y]$ (et donc par leurs fonctions de croyance Bel_X, Bel_Y comme dans (6)) il n'est en général pas vrai que $\mathcal{M}_{Robust} \subseteq \mathcal{M}_{agg}$ ni que $\mathcal{M}_{Robust} \supseteq \mathcal{M}_{agg}$. On se réfère à l'exemple 2 en considérant les p-boîtes induits par les fonctions de nécessité comme dans [2]. Il est cependant vrai que :

$$\mathcal{M}_{Robust} \subseteq \mathcal{M}_{mass}$$

Pour prouver cela, il faut considérer une fonction de répartition F issue d'une p-boîte $[\underline{F}, \overline{F}]$ dans le cas continu, ainsi que leur pseudo-inverses $F^{-1}, \underline{F}^{-1}$ et $\overline{F}^{-1}$. Pour tout $A_X \in \mathcal{X}, A_Y \in \mathcal{Y}$, on a :

$$P_{XY}(A_X, A_Y) = \int_{a\in A_X}\int_{b\in A_Y} dF_{XY}(a, b)$$
$$= \int_{\alpha=0}^{1}\int_{\beta=0}^{1} \mathbb{I}(F_X^{-1}(\alpha) \in A_X \& F_Y^{-1}(\beta) \in A_Y) dC(\alpha, \beta)$$

$$\begin{aligned} Bel_{XY}(A_X, A_Y) \quad &= \\ \int_{\alpha=0}^{1}\int_{\beta=0}^{1} \quad & \mathbb{I}([\overline{F}_X^{-1}(\alpha), \underline{F}_X^{-1}(\alpha)] \subseteq A_X \\ & \&[\overline{F}_Y^{-1}(\beta), \underline{F}_Y^{-1}(\beta)] \subseteq A_Y) dC(\alpha, \beta) \end{aligned}$$

avec $\mathbb{I}$ la fonction indicatrice. Sous certaines hypothèses de régularité $\forall \alpha \in [0, 1], \underline{F}^{-1}(\alpha) \leqslant F^{-1}(\alpha) \leqslant \overline{F}^{-1}(\alpha)$ et donc $P_{XY} \geqslant Bel_{XY}$.

5 Conclusion

Nous avons présenté différentes méthodes pour joindre des modèles d'incertitude avec une copule : une méthode robuste, une méthode basée sur les masses cumulées, et une méthode utilisant la copule comme un opérateur d'agrégation direct. Ces méthodes tentent d'apporter une réponse à la question "Comment utiliser les copules avec des probabilités inférieures ?". Nous avons montré que dans le cas particulier de la copule produit, les probabilités inférieures coïncident sur les produits Cartésiens. En utilisant les fonctions de nécessité, la probabilité inférieure agrégée coïncide avec les masses cumulées sur les produits Cartésiens, et en utilisant les p-boîtes nous avons montré que l'ensemble crédal obtenu avec la méthode robuste est inclus dans l'ensemble crédal de l'approche des masses cumulées. Ces résultats permettent de savoir lorsqu'une méthode est une approximation d'une autre, et donc de répondre à la

question “Quand utiliser une méthode plutôt qu’une autre ?”.

Bien entendu, les résultats présentés ici ne sont qu’une tentative de réponse à ces questions. De nombreuses pistes d’améliorations existent, notamment en considérant d’autres modèles d’incertitude (les *nuages* par exemple), des familles plus spécifiques de copules, ou bien encore en considérant l’utilisation de copules imprécises pour caractériser les structures de dépendances.

Remerciements :
Ce projet a obtenu le soutien financier du CNRS à travers les programmes interdisciplinaires de la MITI et du CNES

Références

[1] D. A. Alvarez, F. Uribe, and J. E. Hurtado. Estimation of the lower and upper bounds on the probability of failure using subset simulation and random set theory. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 100 :782–801, 2018.

[2] C. Baudrit and D. Dubois. Practical representations of incomplete probabilistic knowledge. *Computational Statistics & Data Analysis*, 51 :86–108, Nov. 2006.

[3] I. Couso, S. Moral, and P. Walley. A survey of concepts of independence for imprecise probabilities. *Risk Decision and Policy*, 5 :165–181, June 2000.

[4] S. Destercke, D. Dubois, and E. Chojnacki. Unifying practical uncertainty representations – I : Generalized p-boxes. *International Journal of Approximate Reasoning*, 49 :664–677, Nov. 2008.

[5] D. Dubois and H. Prade. *Possibility Theory*. Springer New York, 2009.

[6] S. Ferson, R. B. Nelsen, J. Hajagos, D. J. Berleant, J. Zhang, W. T. Tucker, L. R. Ginzburg, and W. L. Oberkampf. Dependence in probabilistic modeling, Dempster-Shafer theory, and probability bounds analysis. 2004.

[7] A. Gray, D. Hose, M. De Angelis, M. Hanss, and S. Ferson. Dependent possibilistic arithmetic using copulas. In *International Symposium on Imprecise Probability : Theories and Applications*, pages 169–179. PMLR, 2021.

[8] I. Montes, E. Miranda, R. Pelessoni, and P. Vicig. Sklar’s theorem in an imprecise setting. *Fuzzy Sets and Systems*, 278, Nov. 2015.

[9] R. B. Nelsen. *An introduction to copulas.* Springer, New York, 2006.

[10] G. Shafer. *A mathematical theory of evidence*. Princeton University Press, 1976.