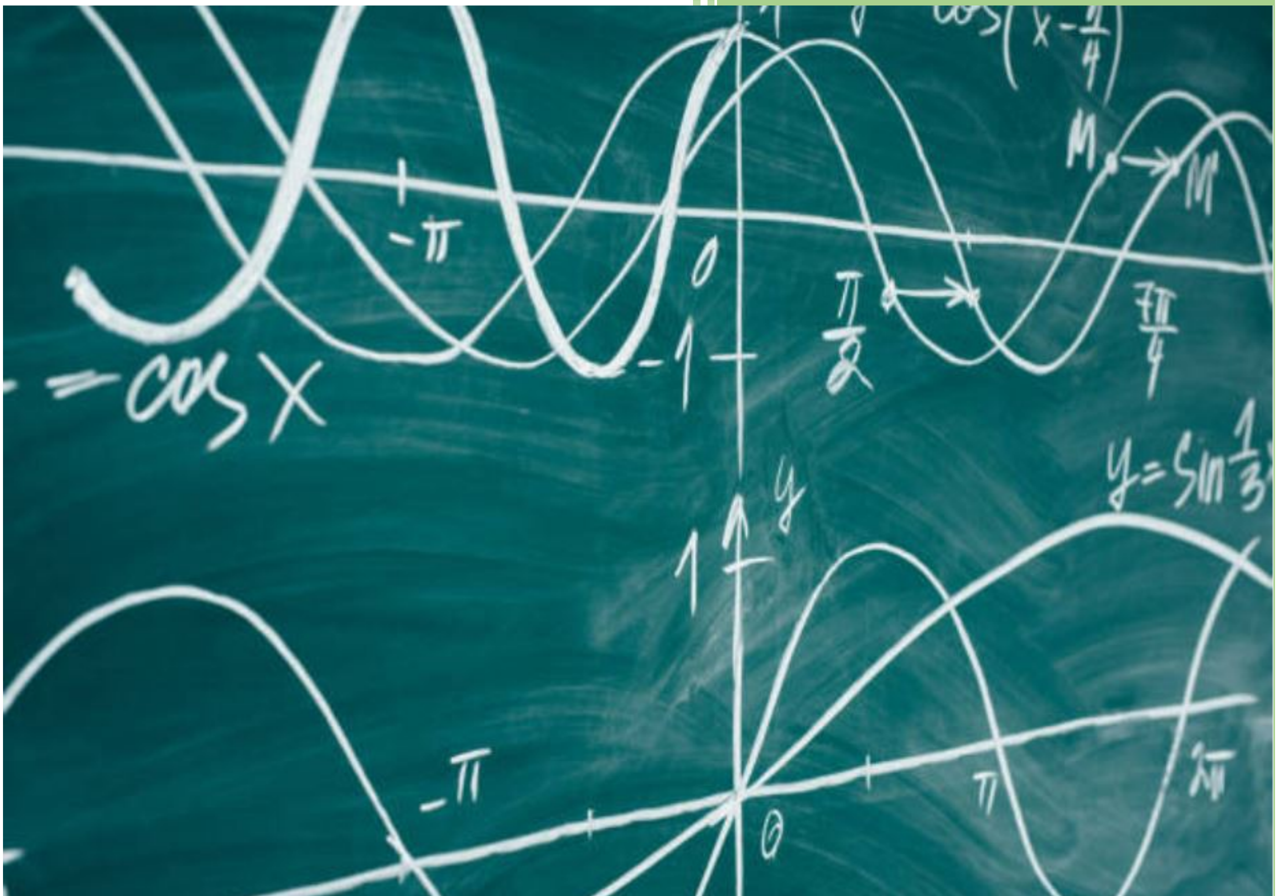
Bases mathématiques pour l'étude des signaux

Emmanuel Jalade

Bases mathématiques pour l'étude des signaux

T1 : Mathématiques générales



Emmanuel JALADE

Table des matières

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Le contenu de ce livre est basé sur mon cours de mathématiques appliquées à l'électricité et à la théorie du signal, au département GEII de l'IUT de Marseille. Mais il s'agit d'une version enrichie, beaucoup plus complète que celle que je présente habituellement à mes étudiants, car les contraintes horaires empêchent souvent, pendant les heures de cours, d'illustrer et de développer toutes les propriétés et les idées nécessaires pour bien comprendre les théories abordées ici. C'est la raison pour laquelle cet ouvrage a été écrit.

Il est ainsi conçu pour tout étudiant venant de terminer sa formation au Lycée, ayant suivi les enseignements mathématiques adéquats, et maîtrisant les rudiments essentiels. En raison des profils disparates de ces étudiants, de nombreux rappels de cours sont faits sur les notions les plus essentielles vues dans le secondaire. L'objectif est d'amener les élèves de faible niveau à comprendre au mieux les concepts exposés ici, à condition qu'ils soient assez motivés pour fournir les efforts et la persévérance nécessaires à tout apprentissage scientifique. Mais cet ouvrage devrait pouvoir intéresser aussi les étudiants plus avancés, et désirant approfondir certaines questions, notamment à travers les exercices les plus poussés de ce cours, signalés par le symbole (*).

Nous allons ici étudier les mathématiques nécessaires à l'étude physique de l'électricité et de la théorie du signal. Il s'agit d'un cours de mathématiques dites « appliquées », dont le but est de présenter les outils incontournables pour les sujets d'applications qui nous intéressent. Le premier tome de ce livre développe des aspects géométriques et algébriques (nombres complexes, polynômes et fractions rationnelles), tandis que le second est centré sur l'analyse (étude de fonctions, intégration, équations différentielles, séries...). Le dernier tome, d'un niveau plus élevé, aborde l'analyse harmonique et les transformations qui y sont associées (Fourier, Laplace et Transformation en Z). Je me suis attaché à donner les preuves de la quasi totalité des propriétés et théorèmes par les moyens les plus élémentaires possibles. Malgré cela, certaines démonstrations restent complexes et peuvent bien sûr être mises de côté en première lecture.

Chaque chapitre se termine par de nombreux exercices et problèmes de niveaux très divers, avec les corrigés détaillés à la fin. En effet, le travail sur des situations-problèmes les plus variées possibles est indispensable pour s'approprier le cours et développer les compétences nécessaires pour l'utiliser. De la simple application du cours aux problèmes plus complexes et originaux (mais toujours bien guidés par de nombreuses questions intermédiaires) dont l'intérêt est souvent lié à une situation physique, tous ces exercices permettront d'assimiler, peu à peu, les objets mathématiques présentés ici. Ce n'est qu'après un véritable travail personnel de réflexion qu'une correction détaillée guidera le lecteur pour acquérir une démarche et une méthode efficace de résolution de problèmes mathématiques. Ce travail de recherche sur un exercice donné, même s'il n'aboutit pas à la réponse, est le seul moyen d'assimiler efficacement les notions.présentées dans ce livre : l'idée qu'un cours de mathématiques puisse être un livre de recette n'est qu'une illusion dangereuse.

Le grand nombre d'exemples, de démonstrations et d'exercices fournis dans cet ouvrage en explique le volume assez conséquent. J'ai pris le parti d'approfondir autant que possible chaque notion abordée. Pour cela, j'ai dû faire le choix de laisser de côté certaines théories mathématiques, pourtant fondamentales elles aussi pour l'étude des signaux, mais qui pourraient être travaillées dans un second temps, comme les probabilités ou l'algèbre linéaire. Sont absents également certains thèmes fondamentaux des programmes de Licence ou de CPGE scientifiques, comme les espaces vectoriels normés ou certains théorèmes d'analyse. Ces notions ont pu être contournées dans ce cours, en adaptant la présentation et les démonstrations des propriétés étudiées.

J'ai écrit cet ouvrage avec l'idée de le faire fonctionner à plusieurs niveaux de lecture : les points du cours, démonstrations et exercices qui me semblaient être les plus délicats ou relever d'un niveau plus avancé sont précédés d'un astérisque (*). J'espère ainsi que ce cours pourra toucher un public le plus divers possible, ou être étudié aux divers stades d'un même cursus d'apprentissage. Les étudiants de BUT secondaire, de faculté de sciences ou d'école d'ingénieur, devraient pouvoir y trouver matière à travailler, chacun à son niveau, en particulier dans le tome 3 qui présente des notions abordées assez tard dans les cursus étudiants, ou de façon assez succincte en BUT. Certains exercices, sortant des sentiers battus ou présentant des énoncés peu classiques, pourront même intéresser un public encore plus large.

Je tiens à remercier Michel Cristofol pour son travail de relecture et les conseils utiles qu'il ma donnés sur le contenu de ce cours et des exercices. Mes remerciements vont aussi vers Frédéric Smadja pour son aide sur certains problèmes informatiques de traitement de texte.

Le 22 Août 2022

A - QUELQUES POINTS DE TRIGONOMÉTRIE

La trigonométrie est une branche importante des mathématiques qui, comme l'étymologie de ce mot le montre, concernait à l'origine l'étude des mesures dans un triangle et s'est centrée par la suite sur celle des fonctions sinus et cosinus.
La trigonométrie apparaît partout en mathématiques, et en particulier dans des domaines qui nous intéressent tout particulièrement dans ce cours :

les nombres complexes (comment se passer de la notion d'argument ?)

l'intégration (sans trigonométrie, pas de formule d'intégration générale de fonction rationnelle)

les équations différentielles (comment travailler sur les solutions de l'équation différentielle $y''+y=0$ sans trigonométrie?)

les séries et la transformation de Fourier

les fonctions clés de la théorie du signal (fonctions sinusoïdale, Sinus Cardinal...)

Cette liste d'exemples (qui est loin d'être exhaustive !) illustre comment des notions issues de la géométrie pure peuvent devenir essentielles en analyse. Plus généralement, il est toujours très intéressant de constater en mathématiques comment des idées, apparemment très éloignées les unes des autres, parviennent à converger pour en façonner de nouvelles.

La trigonométrie étant une notion plus ou moins abordée pendant les études secondaires, il paraît utile dans le cadre de ce cours d'en fixer certaines bases importantes et surtout de profiter pour donner les preuves de propriétés clés pour les chapitres ultérieurs.

I) Lignes trigonométriques

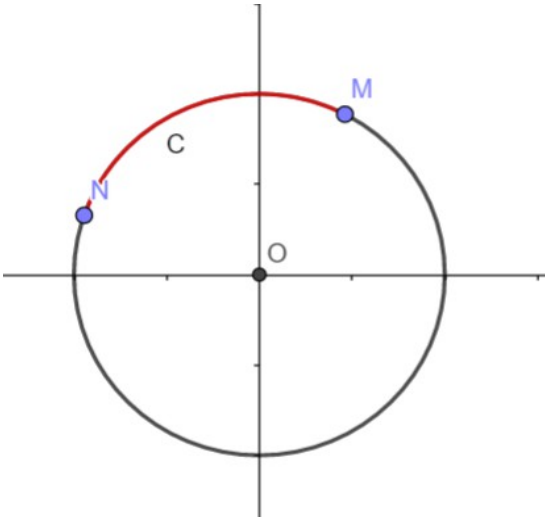
On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O:\vec{u};\vec{v})$, c'est à dire que $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|=1$ et que les vecteurs $(\vec{u};\vec{v})$ ont des directions orthogonales (on dit qu'on munit le plan d'une structure euclidienne pour pouvoir parler de norme d'un vecteur et d'orthogonalité).
Le <u>cercle trigonométrique</u> (C) est défini comme l'ensemble des points M du plan tels que la distance de O à M, notée OM , vérifie $OM=1$. Si M a pour coordonnées $(x;y)$ dans le repère $(O:\vec{u};\vec{v})$, alors $M\in(C)\Leftrightarrow x^2+y^2=1$. Cette dernière équation est appelée <u>équation du cercle</u> (C) :elle doit être vue comme un critère d'appartenance au cercle (C) pour le point M .

Le périmètre de ce cercle vaut 2π et son aire vaut π (en notant que ces notions de longueur et d'aire ont une signification mathématique bien définie mais que nous ne rentrerons pas dans ces considérations dans le cadre de ce cours).
On appellera <u>sens positif</u> le sens de parcours du cercle (C) inverse des aiguilles d'une montre (on dit que l'on oriente le plan euclidien).

Étant donnés deux points distincts $M\in(C)$ et $N\in(C)$, on peut définir deux arcs de cercle orientés (que l'on notera indifféremment $(\overrightarrow{MN})$), portions orientées de cercle délimitées par les points M et N, de longueurs en générale différentes (sauf si M et N sont diamétralement opposés) : on appellera <u>petit arc</u> le plus court de ces deux arcs.

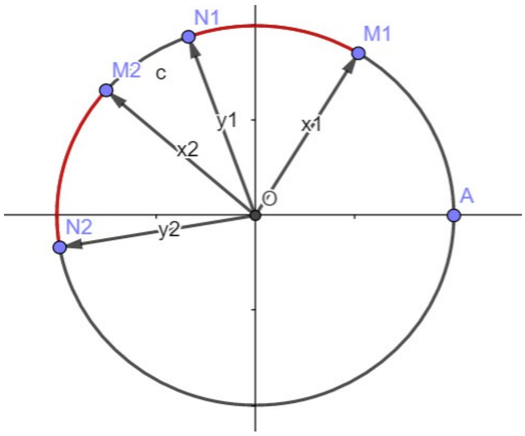
On appellera <u>mesure principale</u> de $(\overrightarrow{MN})$ la longueur du petit arc affecté du signe + si le parcours de M vers N via le petit arc se fait dans le sens positif, et affecté du signe – sinon. Il s'agit, en quelque sorte, de définir le plus court chemin de M vers N en suivant le cercle (C). Dans le cas où les deux points M et N sont diamétralement opposée, on posera égale à $+\pi$ la mesure principale de $(\overrightarrow{MN})$ (ce qui revient à privilégier arbitrairement le sens positif en cas d'égalité des longueurs des deux arcs) et si $M=N$, on la posera égale à 0.
On obtient toutes les mesures possibles d'un arc $(\overrightarrow{MN})$ en ajoutant à sa mesure principale un nombre de la forme $2k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$. Un arc $(\overrightarrow{MN})$ peut donc être vu comme un couple de point de (C), et on peut lui associer une infinité de mesures possibles, mais qui diffèrent toutes d'un multiple de 2π, et qui correspondent à tous les parcours possibles joignant le point M au point N, quitte à faire des tours « inutiles ».

Fig 1 : Illustration de la notion d'arc



On considère maintenant deux couples de vecteurs non nuls $(\vec{x}_1;\vec{y}_1)$ et $(\vec{x}_2;\vec{y}_2)$. Pour $i=1,2$ soit M_i le point d'intersection de la demi-droite $(O;\vec{x}_i)$ avec (C) et N_i le point d'intersection de la demi-droite $(O;\vec{y}_i)$ avec (C) (voir *Fig 2*). On dira que les couples $(\vec{x}_1;\vec{y}_1)$ et $(\vec{x}_2;\vec{y}_2)$ forment <u>un même angle</u> si les arcs $(\overrightarrow{M_1N_1})$ et $(\overrightarrow{M_2N_2})$ ont la même mesure principale (c'est à dire les mêmes mesures à 2π près), ce que l'on notera $\widehat{(\vec{x}_1;\vec{y}_1)}=\widehat{(\vec{x}_2;\vec{y}_2)}$. Nous pourrons alors associer à l'angle $\widehat{(\vec{x}_1;\vec{y}_1)}$ sa <u>mesure principale</u> comme étant celle de l' arc $(\overrightarrow{M_1N_1})$, et plus généralement, lui associer n'importe quel mesure en ajoutant à sa mesure principale un nombre de la forme $2k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$.

Fig 2 : notion d'angle



A partir de maintenant, on fixe le point $A\in(C)$ avec $A(1;0)$: c'est à partir de ce point que nous allons mesurer tous les arcs de (C), c'est à dire que nous particularisons ce point de (C) pour en faire un point de référence. Pour chaque réel θ, il existe un unique point $M_\theta\in(C)$ tel que l'arc $(\overrightarrow{AM_\theta})$ ait pour mesure θ, ou, de façon équivalente, l'angle $\widehat{(\vec{u};\overrightarrow{OM_\theta})}$ ait pour mesure θ à 2π près, ce que nous noterons $\widehat{(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM_\theta})}\equiv\theta\quad[2\pi]$. On dira que M_θ est le point de (C) <u>repéré par le nombre</u> θ.

Une conséquence directe de la définition de la mesure d'angle via celle de mesure d'arc est la propriété suivante (type « propriété de Chasles ») :

Propriété 1 Si $\vec{x}$, $\vec{y}$ et $\vec{z}$ sont trois vecteurs non nuls du plan, on a alors :

$$\widehat{(\vec{x};\vec{y})}+\widehat{(\vec{y};\vec{z})}\equiv\widehat{(\vec{x};\vec{z})}\quad[2\pi],$$

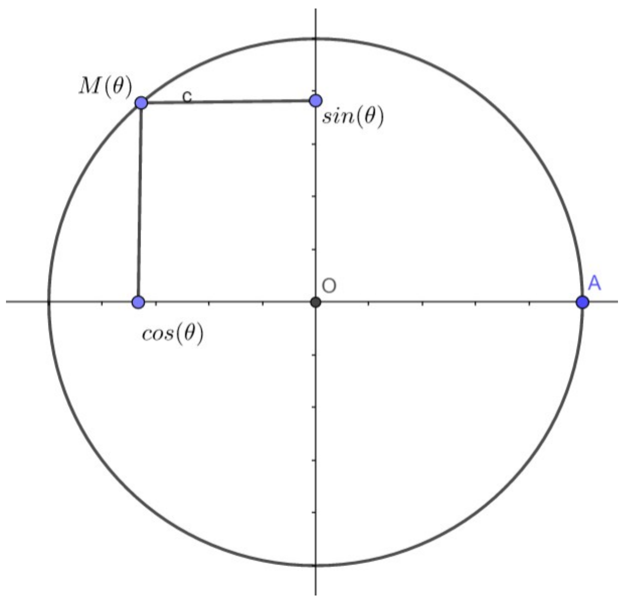
ce qui signifie que si θ_1, θ_2 et θ_3 sont respectivement des mesures de $\widehat{(\vec{x};\vec{y})}$, $\widehat{(\vec{y};\vec{z})}$ et $\widehat{(\vec{x};\vec{z})}$, alors $\theta_1+\theta_2-\theta_3$ est un multiple de 2π.

Définition 1 Le cosinus de θ, noté $\cos(\theta)$, est l'abscisse du point M_θ dans le repère orthonormé $(O:\vec{u};\vec{v})$, et le sinus de θ, noté $\sin(\theta)$, est son ordonnée.

Exemple : si $\theta=\frac{3\pi}{2}$, M_θ est le point de coordonnées $M_\theta(0;-1)$ d'où $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-1$.

Puisque $M_\theta\in(C)$, les coordonnées de ce point vérifient l'équation du cercle (C) d'où la première relation fondamentale :

Propriété 2 : $\forall\theta\in\mathbb{R},\ \cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)=1$.



Terminons ce paragraphe par quelques remarques bien utiles.

Les relations ci-dessous doivent être connues par cœur :

$\cos(0)=1,\ \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,\ \cos(\pi)=-1,\ \cos\left(\frac{-\pi}{2}\right)=0$

$\sin(0)=0,\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,\ \sin(\pi)=0,\ \sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)=-1.$

Soit $\theta\in]-\pi;\pi]$ la mesure principale d'un angle. Alors on a les relations :

$\cos(\theta)\geqslant 0$ et $\sin(\theta)\geqslant 0\Rightarrow\theta\in[0;\frac{\pi}{2}]$, $\cos(\theta)\geqslant 0$ et $\sin(\theta)\leqslant 0\Rightarrow\theta\in[-\frac{\pi}{2};0]$

$\cos(\theta)\leqslant 0$ et $\sin(\theta)\geqslant 0\Rightarrow\theta\in[\frac{\pi}{2};\pi]$ et $\cos(\theta)\leqslant 0$ et $\sin(\theta)\leqslant 0\Rightarrow\theta\in]-\pi;-\frac{\pi}{2}]$.

II) Formule d'addition des angles et conséquences

L'objet de ce paragraphe est d'établir la propriété suivante :

Propriété 3: $\forall a\in\mathbb{R},\ \forall b\in\mathbb{R},\ \cos(b-a)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b).$

Cette égalité a pour conséquence des propriétés essentielles dans les chapitres suivants de ce cours, telles que le comportement du module et de l'argument des nombres complexes vis à vis du produit dans $\mathbb{C}$ ou la dérivabilité des fonctions sinus et cosinus. Ce dernier point fera l'objet du paragraphe III) de ce chapitre,.

II.1) Une propriété d'invariance par changement de repère orthonormé.

Nous établissons ici une propriété, liée à la notion de produit scalaire, qui servira de point de départ à la preuve de la propriété 3:

Propriété 4 : Considérons deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ de coordonnées respectives $\vec{a}:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{b}:\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ exprimés dans un repère orthonormé $(O:\vec{u};\vec{v})$ (ce qui, on le rappelle, signifie que $\vec{a}=x\vec{u}+y\vec{v}$ et $\vec{b}=x'\vec{u}+y'\vec{v}.$) Alors $xx'+yy'=\frac{1}{4}\left(\|\vec{a}+\vec{b}\|^2-\|\vec{a}-\vec{b}\|^2\right)$.

<u>Preuve</u> : On rappelle que si $\vec{w}$ a pour coordonnées $\vec{w}:\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ dans le repère $(O:\vec{u};\vec{v})$, le caractère orthonormé de ce dernier implique que $\|\vec{w}\|^2=X^2+Y^2.$

On a ainsi dans le repère orthonormé $(O:\vec{u};\vec{v})$: $\vec{a}+\vec{b}:\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$ et $\vec{a}-\vec{b}:\begin{pmatrix}x-x'\\y-y'\end{pmatrix}$ donc

$\frac{1}{4}\left(\|\vec{a}+\vec{b}\|^2-\|\vec{a}-\vec{b}\|^2\right)=\frac{1}{4}\left((x+x')^2+(y+y')^2-(x-x')^2-(y-y')^2\right)=xx'+yy'$ après simplifications.

Remarque : pour nous, la conséquence la plus intéressante de cette propriété est le fait que la quantité $xx'+yy'$ soit indépendante du choix du repère orthonormé $(O:\vec{u};\vec{v})$, alors que, bien entendu, chacun des réels x, x', y et y' dépendent du repère orthonormal choisi. Nous appellerons par la suite cette quantité le <u>produit scalaire</u> des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, et le noterons $(\vec{a}.\vec{b})$. On a donc

$(\vec{a}.\vec{b})=\frac{1}{4}\left(\|\vec{a}+\vec{b}\|^2-\|\vec{a}-\vec{b}\|^2\right)=xx'+yy'.$

II.2) Formule d'addition des cosinus

Nous prouvons la propriété 3.

Nous nous plaçons toujours dans un repère orthonormé $(O:\vec{u}\,;\vec{v})$. Soient *a* et *b* deux réels quelconques et $\vec{z_a},\ \vec{z_b}$ les deux vecteurs de coordonnées respectives $\vec{z_a}:\begin{pmatrix}\cos(a)\\ \sin(a)\end{pmatrix},\ \vec{z_b}:\begin{pmatrix}\cos(b)\\ \sin(b)\end{pmatrix}$. On a donc $(\vec{z_a}.\vec{z_b})=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$. Il faut déjà remarquer que les vecteurs $\vec{z_a}$ et $\vec{z_b}$ sont de norme 1 par la propriété 2 et que, par la définition 1, on a $\widehat{(\vec{u}\,;\vec{z_a})}\equiv a\ \ [2\pi]$ et $\widehat{(\vec{u}\,;\vec{z_b})}\equiv b\ \ [2\pi]$.

Nous allons maintenant exprimer le produit scalaire $(\vec{z_a}.\vec{z_b})$ en nous plaçant dans un autre repère orthonormé.

Posons $\vec{u'}=\vec{z_a}$ et $\vec{v'}$ l'unique vecteur de norme 1 tel que $\widehat{(\vec{u'}\,;\vec{v'})}\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. On voit facilement que le repère $(O:\vec{u'}\,;\vec{v'})$ est orthonormé.

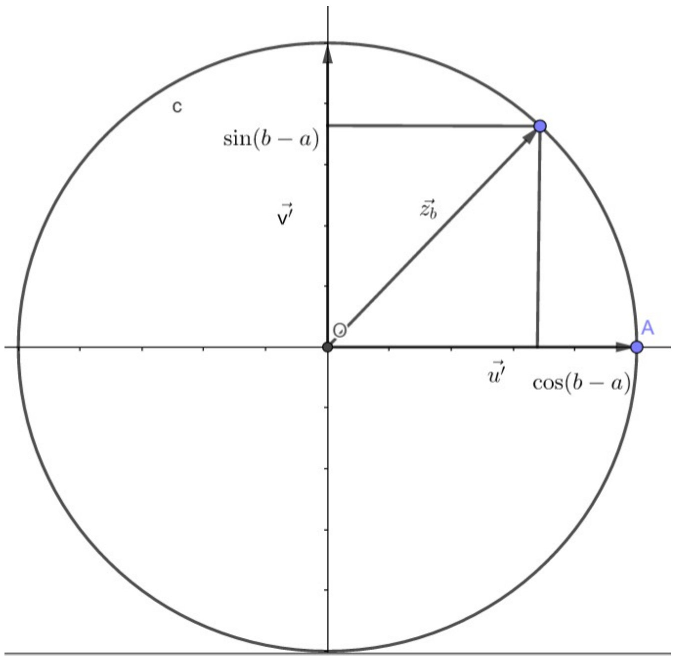
La propriété 1 donne $a+\widehat{(\vec{u'}\,;\vec{z_b})}=\widehat{(\vec{u}\,;\vec{z_a})}+\widehat{(\vec{u'}\,;\vec{z_b})}=\widehat{(\vec{u}\,;\vec{u'})}+\widehat{(\vec{u'}\,;\vec{z_b})}\equiv\widehat{(\vec{u}\,;\vec{z_b})}\equiv b\ \ [2\pi]$

donc $\widehat{(\vec{u'}\,;\vec{z_b})}\equiv b-a\ \ [2\pi]$.

Par la définition 1, cela signifie que les coordonnées <u>dans le repère orthonormé</u> $(O:\vec{u'}\,;\vec{v'})$ de $\vec{z_b}$ (qui on le rappelle est de norme 1) sont $\vec{z_b}:\begin{pmatrix}\cos(b-a)\\ \sin(b-a)\end{pmatrix}$, et, dans ce même repère, on a bien entendu $\vec{z_a}:\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$.

En calculant $\vec{z_a}.\vec{z_b}$ dans le repère orthonormé $(O:\vec{u'}\,;\vec{v'})$, il vient que $\vec{z_a}.\vec{z_b}=\cos(b-a)$.

En comparant les deux expressions trouvées pour $(\vec{z_a}.\vec{z_b})$ on en déduit la propriété 3.



Remarque : le lecteur qui connaît déjà les nombres complexes doit comprendre la nécessité de démontrer cette formule sans utiliser les formules d'Euler, ce qui constituerait sinon une grave erreur de logique.
En effet, nous verrons dans le chapitre dédié aux nombres complexes que la propriété 3, avec la construction de l'ensemble des nombres complexes qui a été choisie dans ce cours, est nécessaire pour démontrer la distributivité du produit sur l'addition, propriété qui serait implicitement utilisée si l'on démontre la propriété 3 à l'aide des formules d'Euler.
Il existe d'autres constructions possibles de l'ensemble des nombres complexes, mais la propriété 3 reste alors nécessaire pour démontrer le théorème de sommation des arguments vis à vis du produit complexe, théorème aussi implicitement utilisé par les formules d'Euler. Il y a donc, dans tous les cas, nécessité de démontrer la propriété 3 par des moyens « élémentaires ».
Nous tomberons dans le paragraphe III) sur le même écueil d'ordre logique lorsque nous aurons besoin de démontrer la formule $\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}=1$. Il n'y a pas de sens logique à démontrer cette formule par dérivation en 0 de la fonction sinus sachant que la formule $\frac{d}{dt}(\sin(t))=\cos(t)$ se démontre justement à partir de la relation $\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}=1$!! Cette dernière formule devra donc, elle aussi, être démontrée de façon « élémentaire », ce qui sera l'objet du paragraphe 3.

II.3) Quelques premières conséquences.

Propriété 5 : On a les égalités :

(i) $\forall a\in\mathbb{R},\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\sin(a)$

(ii) $\forall a\in\mathbb{R},\ \cos(-a)=\cos(a)$

(iii) $\forall a\in\mathbb{R},\ \sin(-a)=-\sin(a)$

(iv) $\forall a\in\mathbb{R},\ \forall b\in\mathbb{R},\ \cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$.

(v) $\forall a\in\mathbb{R},\ \forall b\in\mathbb{R},\ \sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)$.

(vi) $\forall a\in\mathbb{R},\ \cos(2a)=2\cos^2(a)-1=1-2\sin^2(a),\quad \forall a\in\mathbb{R},\ \sin(2a)=2\sin(a)\cos(a)$.

Preuve : Soit $a\in\mathbb{R}$. En posant $b=\frac{\pi}{2}$ dans l'égalité de la propriété 3, on obtient

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\cos(a)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sin(a)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin(a)$ ce qui donne le point (i) .

En posant cette fois $b=0$ dans l'égalité de la propriété 3, on obtient

$\cos(-a)=\cos(a)\cos(0)+\sin(a)\sin(0)=\cos(a)$ ce qui donne le point (ii).

En utilisant le résultat du point (i) puis celui du point (ii) on a :

$\sin(-a)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+a\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{2}-a\right)$. En appliquant la propriété 3, il vient

$\sin(-a)=\cos\left(-\frac{\pi}{2}-a\right)=\cos(a)\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\sin(a)=-\sin(a)$ ce qui prouve le point (iii).

En remplaçant a par $-a$ dans la propriété 3, on a

$\forall a\in\mathbb{R},\ \forall b\in\mathbb{R},\ \cos(a+b)=\cos(-a)\cos(b)+\sin(-a)\sin(b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$

par les points (ii) et (iii). Cela prouve le (iv).

Pour prouver le (v), on a par le (i) : $\sin(a+b)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(a+b)\right)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-a\right)-b\right)$ ce qui donne, par la propriété 3 :

$\sin(a+b)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right).\cos(b)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right).\sin(b)$

d'où, par le point (i) :

$$\sin(a+b)=\sin(a).\cos(b)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\right).\sin(b)=\sin(a).\cos(b)+\cos(a).\sin(b) \quad .$$

Enfin, pour prouver les formules du (vi), l'égalité $\forall a\in\mathbb{R},\ \sin(2a)=2\sin(a)\cos(a)$ s'obtient directement en posant $a=b$ dans le (v), et par la même méthode on déduit du (iv) :

$\forall a\in\mathbb{R},\ \cos(2a)=\cos^2(a)-\sin^2(a)$ et la relation :

$\forall a\in\mathbb{R},\ \cos(2a)=2\cos^2(a)-1=1-2\sin^2(a)$

s'obtient par la première relation fondamentale (propriété 2).

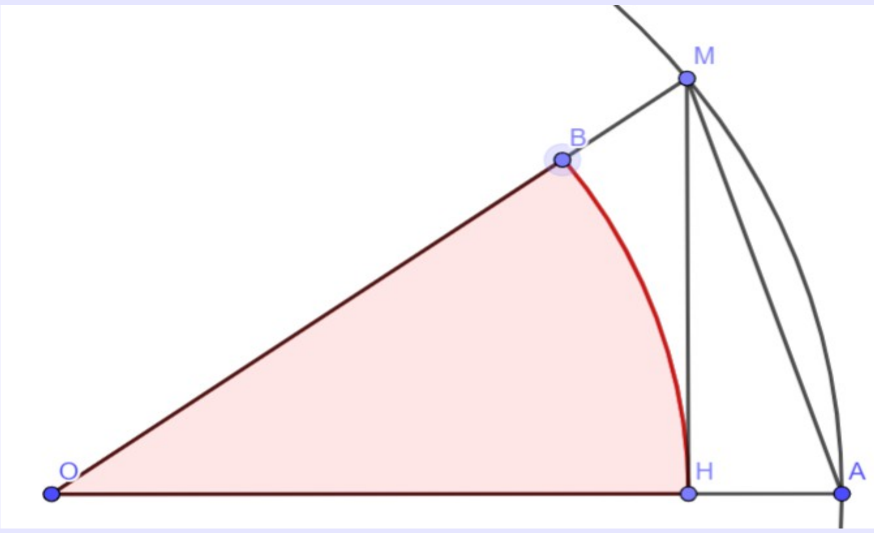
III) Dérivabilité des fonctions cos et sin.

III.1) Une limite fondamentale.

Le résultat suivant est la clé de voûte pour établir les propriétés de dérivabilité des fonctions trigonométriques :

Théorème 1 On a $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}}\dfrac{\sin(h)}{h}=1.$

Preuve : remarquons que $\forall h\neq 0,\ \dfrac{\sin(-h)}{-h}=\dfrac{-\sin(h)}{-h}=\dfrac{\sin(h)}{h}$ donc pour prouver le Théorème, il suffit de démontrer que $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{\sin(h)}{h}=1$. Soit $h\in\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ et M le point du cercle trigonométrique repéré par le nombre h. On considère H, le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses et le point $B\in[OM]$ tel que $OH=OB$.



On a donc $MH=\sin(h)$ et $OH=\cos(h)$.

Remarquons déjà que $MH<AM$ (l'hypoténuse est le plus grand des côtés du triangle rectangle (MHA)) et que la longueur AM est inférieure à celle de l'arc de cercle $(\overrightarrow{AM})$ c'est à dire que $AM<h$. On en déduit que $MH<h$ c'est à dire que :

$$(1)\quad \frac{\sin(h)}{h}<1.$$

Ensuite, on a pour les mêmes raisons $AH < AM < h$ donc $1-\cos(h) < h$ d'où :

$$(2)\quad \cos(h) > 1-h.$$

On remarque ensuite que l'aire de la portion du disque de centre O et délimité par l'arc de cercle $(\overrightarrow{HB})$ est inférieure à celle du triangle OHM d'où l'on tire l'inégalité (*) :

$$\frac{1}{2}h.OH^2 < \frac{1}{2}OH.HM$$

c'est à dire :

$\frac{1}{2}h.OH < \frac{1}{2}HM$ donc $h.\cos(h) < \sin(h)$ d'où l'on déduit $\cos(h) < \frac{\sin(h)}{h}$. Des inégalités (1) et (2) on déduit alors l'encadrement :

$$1-h < \frac{\sin(h)}{h} < 1.$$

Cela étant vrai pour tout réel $h \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, on déduit par encadrement de limites que $\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{\sin(h)}{h}=1$.

(*) On rappelle que l'aire d'un secteur angulaire de rayon R et d'angle α vaut $\frac{\alpha R^2}{2}$

Corollaire du Théorème 1 : On a $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}}\frac{1-\cos(h)}{h}=0$.

<u>Preuve</u> : par le (vi) de la propriété 5 appliqué avec $a=\frac{h}{2}$, , on a $\cos(h)=1-2\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)$ d'où

$$\forall h\neq 0,\ \frac{1-\cos(h)}{h}=2\frac{\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)}{h}=\frac{h}{2}.\left(\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\right)^2.$$

On déduit du Théorème 1 que $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}}\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}=1$ donc par produit de limites,

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}}\frac{1-\cos(h)}{h}=\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}}\frac{h}{2}.\left(\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\right)^2=0.$$

III.2) Dérivée des fonctions cos et sin.

Le lecteur peu familier avec les notions de dérivation pourra se référer au chapitre correspondant de ce cours. Le résultat ci-dessous est bien connu (en général) des étudiants. Nous allons en faire la preuve grâce aux propriétés déjà démontrées ci-dessus.

Théorème 2 Les fonctions $u : x \to \cos(x)$ et $v : x \to \sin(x)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, de dérivées $u' : x \to -\sin(x)$ et $v' : x \to \cos(x)$.

<u>Preuve</u> : Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h \neq 0$ .On a par le (iv) de la propriété 5 :

$$\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h}=\frac{\cos(x)\cos(h)-\sin(x)\sin(h)-\cos(x)}{h}$$

$$=-\cos(x)\frac{1-\cos(h)}{h}-\sin(x).\frac{\sin(h)}{h}.$$

Par le Théorème 1 et son corollaire, on déduit $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}}\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h}=-\sin(x)$, c'est à dire la dérivabilité de la fonction *cos* au point *x*, et son nombre dérivé en ce point est $-\sin(x)$.

On a aussi par le (v) de la propriété 5 :

$$\frac{\sin(x+h)-\cos(x)}{h}=\frac{\sin(x)\cos(h)+\cos(x)\sin(h)-\sin(x)}{h}$$

$$=-\sin(x)\frac{1-\cos(h)}{h}+\cos(x).\frac{\sin(h)}{h}.$$

Par le Théorème 1 et son corollaire, on déduit $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}}\frac{\sin(x+h)-\cos(x)}{h}=\cos(x)$, c'est à dire la dérivabilité de la fonction *sin* au point x, et son nombre dérivé en ce point est $\cos(x)$.

B - QUELQUES PRINCIPES DE RAISONNEMENT

Avertissement: bien que placé en début de cours, car les notions qui y sont présentées interviennent partout, ce chapitre peut être étudié à n'importe quel stade d'avancement du cours. Son but est de faire prendre conscience au lecteur de certains problèmes de logique à l'origine de nombreuses erreurs de raisonnement. Seuls certains points de la logique élémentaire seront abordés car ce sujet est trop vaste.

I) Introduction

Faire des mathématiques, c'est avant tout effectuer des raisonnements logiques, c'est à dire des déductions, à partir de définitions , de propriétés ou de théorèmes, et d'axiomes.

Un axiome est une proposition que l'on pose comme vraie, et qui ne peut donc pas être démontrée. Par exemple, les axiomes de PEANO définissent les entiers naturels, et le dernier d'entre eux affirme :
« si P est une partie de $\mathbb{N}$ contenant 0, et si le successeur de chaque élément de P est encore dans P (le successeur de n est n+1), alors $P=\mathbb{N}$. »
Cet axiome est à la base du raisonnement par récurrence, raisonnement que l'on verra plus loin.

Une définition est une notion proche de celle d'axiome mais elle n'a pas en général le même caractère fondateur ; le but d'une définition est plutôt de s'accorder sur la façon dont on va appeler les choses plutôt que de poser une assertion comme étant vraie.

Exemple : *« un nombre entier divisible par 2 est dit pair »*
Cette définition repose sur une autre définition (celle de divisibilité) et repose indirectement aussi sur les axiomes sur lesquels se fonde l'existence de l'ensemble des nombres entiers.

Un théorème est une proposition que l'on a prouvé comme étant vraie à partir d'autres théorèmes ou axiomes. Dans la même catégorie, on parle aussi de propriété (qui a une portée en général moins grande qu'un théorème et concerne plutôt un objet donné), de corollaire (pour insister qu'il découle de façon plus ou moins directe d'une propriété ou d'un théorème) et de lemme , qui constitue en quelque sorte un théorème « sans valeur commerciale » qui sert avant tout à démontrer une autre propriété ou un théorème que l'on considère comme plus important.

On parle de proposition ou d'assertion pour désigner un énoncé mathématiques dont on ne sait pas à l'avance s'il est vrai ou faux. A noter qu'il pourrait très bien être ni l'un ni l'autre en vertu du Théorème de Gödel qui stipule que « d*ans n'importe quelle théorie récursivement axiomatisable, cohérente et capable de « formaliser l'arithmétique », on peut construire un énoncé arithmétique qui ne peut être ni démontré ni réfuté dans cette théorie.*

II) Quelques règles logiques sur les assertions

Définition 1 Étant données deux assertions A et B, on appelle $A\cup B$ (et on lit « A union B ») la proposition qui est vraie si et seulement si « *au moins une des deux propositions A ou B est vraie* » et on appelle $A\cap B$ (on lit « A inter B »)la proposition qui est vraie si et seulement si « *les deux propositions A et B sont vraies* ».
Enfin, on appellera $\overline{A}$ (le contraire de A) la proposition qui est vraie si et seulement si A est fausse.

Attention : on dit parfois un peu rapidement que $A \cup B$ est la proposition « *A ou B est vraie* ». Il faut alors faire attention au mot *ou* qui n'a pas le sens exclusif qu'il a souvent dans le langage courant (au restaurant , « fromage ou dessert » signifie que vous n'avez droit qu'à l'un des deux !). On peut en revanche définir la proposition $A \Delta B$ qui est vraie si et seulement si *« une seule des deux propositions A ou B est vraie »*

Exemple : Soit $x \in \mathbb{R}$.
A est la proposition : « $x > 2$ » et B est la proposition « $x \leq 3$ »

Alors :
$A \cup B$ est la proposition $x \in \mathbb{R}$: elle est tout le temps vraie dans le cadre de l'hypothèse faite sur *x* au départ.
$A \cap B$ est la proposition $x \in]2;3]$.
$A \Delta B$ est la proposition $x \in]-\infty;2] \cup]3;+\infty[$.
$\overline{A}$ est la proposition $x \leq 2$
$\overline{B}$ est la proposition $x > 3$
(on notera dans cet exemple qu'il faut faire attention au caractère strict ou pas des inégalités.)

On notera l'importance des formules dites de Morgan :

Propriété 1
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
Autrement dit,
le contraire de *« au moins une des deux propositions A ou B est vraie »* est *« les propositions A et B sont toutes les deux fausses »*
le contraire de *« les deux propositions A et B sont vraies »* est *« au moins une des deux propositions A ou B est fausse »*

Exemple : soit $n \in \mathbb{N}$.
Soit A la proposition *« n est pair »* et B la proposition *« n est un multiple de 3 »*. Alors :
le contraire de la proposition *« 2 <u>ou</u> 3 divise n »* est *« n n'est pas divisible par 2 <u>et</u> n'est pas divisible par 3 »*.
le contraire de la proposition *« n est un nombre pair <u>et</u> multiple de 3»* est *« n n'est pas pair <u>ou</u> n'est pas un multiple de 3 »*. Autrement dit, le contraire de *« n est un multiple de 6»* est *« n n'est pas pair ou n'est pas un multiple de 3 »*.

III) Implication, équivalence.

Définition 2 Étant données deux assertions A et B, on dira que l'assertion <u>A implique B</u> , ce que l'on note $A \Rightarrow B$, est vraie si et seulement si $\overline{A} \cup B$ est vraie.
On dira aussi que l'assertion <u>A est équivalent à B</u> ce que l'on note $A \Leftrightarrow B$, est vraie si et seulement si $(A \Rightarrow B) \cap (B \Rightarrow A)$ est vraie.

Par voie de conséquence, on peut dire que si $A \Rightarrow B$ est vrai et si A est vrai, alors B est vrai. En effet, si $A \Rightarrow B$ est vrai et si A est vrai, alors $\overline{A}$ est faux et $\overline{A} \cup B$ est vrai ce qui force B à être vrai.
Enfin, si l'équivalence $A \Leftrightarrow B$ est vraie, alors on peut dire que A est vrai si et seulement si B est vrai.

Remarque : si A est faux, alors $A \Rightarrow B$ est forcément vrai, car $\overline{A}$ est vrai donc automatiquement $\overline{A} \cup B$ est vrai . Le faux peut donc impliquer le vrai !

Exemple 1 : les implications $(1=2)$ et $(4=3)\Rightarrow(1+4=2+3)$ tout comme $(1=2)\Rightarrow(\pi=3)$ sont vraies.
Exemple 2 : soit $x\in\mathbb{R}$. Alors :
$(x^2<1)\Rightarrow(x<1)$ est vraie mais $(x<1)\Rightarrow(x^2<1)$ est faux (exemple $x=-2$) donc l'équivalence $(x^2<1)\Leftrightarrow(x<1)$ est fausse !

Dans la pratique, pour montrer qu'une implication $A\Rightarrow B$ est vraie, on raisonne par <u>disjonction des cas</u> : soit A est faux, donc $A\Rightarrow B$ est automatiquement vraie, soit A est vrai et on prouve alors que B est vrai. D'ailleurs, la plupart du temps, on saute l'étape « soit A est faux, donc $A\Rightarrow B$ est vrai».

Définition 3 L'implication $B\Rightarrow A$ s'appelle <u>l'implication réciproque</u> de $A\Rightarrow B$.

L'exemple 2 ci-dessus montre qu'une implication n'est pas forcément équivalente à son implication réciproque.

Définition 4 L'implication $\overline{B}\Rightarrow\overline{A}$ s'appelle <u>la contraposée</u> de $A\Rightarrow B$.

Remarque : ne pas confondre l'implication réciproque $B\Rightarrow A$, la contraposée $\overline{B}\Rightarrow\overline{A}$ et la négation de $A\Rightarrow B$ qui correspond à $\overline{\overline{A}\cup B}=\overline{\overline{A}}\cap\overline{B}=A\cap\overline{B}$.

Propriété 2 Toute implication est équivalente à sa contraposée.

<u>Preuve</u> : $(\overline{B}\Rightarrow\overline{A})\Leftrightarrow(\overline{\overline{B}}\cup\overline{A})\Leftrightarrow(B\cup\overline{A})\Leftrightarrow(\overline{A}\cup B)\Leftrightarrow(A\Rightarrow B)$
où l'on a utilisé les règles de logique : $\overline{\overline{X}}=X$ (le contraire du contraire d'une proposition est elle même) et $X\cup Y\Leftrightarrow Y\cup X$.

Exemple : soit $x\in\mathbb{R}$. Prouvons que l'implication $(x^2<1)\Rightarrow(x<1)$ est vraie . Il est plus facile de prouver sa contraposée qui lui est équivalente : $(x\geq1)\Rightarrow(x^2\geq1)$.
La fonction carré est croissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$ donc si $x\geq1$ alors la fonction carré ne change pas le sens de l'inégalité d'où $x^2\geq1$.

Théorème 1 (raisonnement par l'absurde)
Soient A et B deux assertions telles que :
l'implication $A\Rightarrow B$ est vraie
et
B est faux.

Alors A est faux.

<u>Preuve</u> : $A\Rightarrow B$ est vraie signifie que $\overline{A}\cup B$ est vrai. Mais puisque B est faux, alors c'est que $\overline{A}$ est vrai donc que A est faux.

Exemple : un exemple des plus classiques est la preuve par l'absurde (connue depuis l'Antiquité) que $\sqrt{2}$ est irrationnel, c'est à dire qu'il ne peut s'écrire sous la forme d'une fraction $\frac{p}{q}$ avec $p\in\mathbb{N}$ et $q\in\mathbb{N}^*$.
Soit A l'assertion « $\sqrt{2}$ est rationnel »: supposons que A soit vraie. Il existe alors deux entiers *p* et *q* (non nul) tels que $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$. On peut supposer que *p* et *q* ne sont pas simultanément pairs (sinon on simplifie la fraction par 2, autant de fois qu'il est nécessaire pour que le numérateur et le dénominateur ne soient pas simultanément pairs).
On a alors $p=q\sqrt{2}$ donc $p^2=2q^2$. On en déduit que p^2 est pair, donc p est pair (si *p* était

impair, p^2 le serait aussi). On a donc $p=2t$ où $t\in\mathbb{N}$, donc la relation $p^2=2q^2$ devient $4t^2=2q^2$ d'où $q^2=2t^2$.
Puisque p est pair et que d'après l'assertion A, p et q sont des entiers naturels non simultanément pairs, on en déduit que q est impair, donc q^2 l'est aussi. Puisque $q^2=2t^2$, on en déduit l'assertion B : « $2t^2$ est un entier impair »

On a donc :
$A\Rightarrow B$ vraie (on vient de le prouver)
B est clairement fausse
donc d'après le principe de raisonnement par l'absurde, A l'est aussi.
On en déduit ainsi que « $\sqrt{2}$ est irrationnel » .

Remarque : une autre forme du raisonnement par l'absurde repose sur le fait que si l'implication $A\Rightarrow\overline{A}$ est vraie, alors A est faux (démonstration en exercice).

IV) Les quantificateurs $\forall$, $\exists$, $\exists!$

IV.1) Assertion à un seul quantificateur

Certaines assertions peuvent dépendre d'un paramètre. Par exemple, étant donnée une fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$, la vérité de l'assertion $A(x):\ f(x)>0$ dépend *a priori* de la valeur de $x\in\mathbb{R}$. On a les trois possibilités suivantes :
$A(x)$ est tout le temps vrai, quelle que soit la valeur de *x*
$A(x)$ est parfois vrai, parfois faux, selon la valeur de *x*
$A(x)$ est tout le temps faux.

L'objectif des quantificateurs est de clarifier la dépendance de la vérité de $A(x)$ selon la valeur de *x*.

Définition 5
Soit une assertion $A(x)$ dont l'énoncé dépend d'un paramètre $x\in X$ où *X* est un ensemble non vide donné. Alors :
l'assertion $\forall x\in X,\ A(x)$ est vraie si et seulement si quelle que soit la valeur de *x*, $A(x)$ est vraie.
l'assertion $\exists x\in X:\ A(x)$ est vraie si et seulement pour au moins une valeur de *x*, $A(x)$ est vraie.
l'assertion $\exists!\, x\in X:\ A(x)$ est vraie si et seulement pour une seule valeur de x, $A(x)$ est vraie.
« $\forall x\in X$, » se lit : « *quel que soit* $x\in X$ »
« $\exists x\in X$: » se lit *: « il existe au moins une valeur de* $x\in X$ *telle que »*
« $\exists!\, x\in X$: *» se lit : « il existe exactement une valeur de* $x\in X$ *telle que »*

Remarque : les logiciens considèrent aussi le cas $X=\emptyset$ ce qui engendre des subtilités que nous n'allons pas développer ici.

On notera que les implications $(\forall x\in X,\ A(x))\Rightarrow(\exists x\in X:\ A(x))$ et $\exists!\, x\in X:\ A(x)\Rightarrow(\exists x\in X:\ A(x))$ sont automatiquement vraies, et ne sont des équivalences que dans le cas où X ne contient qu'un seul élément.

Exemple : $\forall x\in\mathbb{R},\ x^2>-1$ est vrai.
$\exists x\in\mathbb{R}:\ x^2=-1$ est faux

Propriété 3 L'assertion $\overline{\forall x\in X\ ,\ A(x)}$ correspond à $\exists x\in X : \overline{A(x)}$
L'assertion $\overline{\exists x\in X : A(x)}$ correspond à $\forall x\in X\ ,\ \overline{A(x)}$

Exemples :
1) Étant donnée une fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$, si $X=\mathbb{R}$ et si $A(x)$ désigne l'assertion $f(x)=0$, alors l'assertion « *f est la fonction nulle* » s'écrit mathématiquement $\forall x\in X\ ,\ A(x)$ c'est à dire $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=0$. Ainsi l'assertion « *f n'est pas la fonction nulle* » s'écrit $\exists x\in\mathbb{R}:\ f(x)\neq 0$.
2) Etant donnée une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, l'assertion « *la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante* » s'écrit $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}\geq u_n$. On en déduit que l'assertion « *la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *n'est pas croissante* » s'écrit $\exists n\in\mathbb{N}:\ u_n< u_{n+1}$.

Remarque : la propriété 3 implique que pour montrer qu'une assertion de la forme $\forall x\in X,\ A(x)$ est fausse, il suffit de trouver un <u>contre-exemple.</u>

Ainsi, si on considère X l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et si $A(x)$ désigne l'assertion «*la fonction* $t\rightarrow x(t)$ *est dérivable »,* pour prouver que l'assertion *« toute fonction continue sur* $\mathbb{R}$ *est dérivable »* est fausse, il suffit de montrer que l'assertion *«il existe au moins une fonction continue sur* $\mathbb{R}$ *qui n'est pas dérivable »* est vraie, c'est à dire trouver un <u>contre-exemple.</u> Dans le cas qui nous intéresse, la fonction $t\rightarrow |t|$ en est un (parmi d'autres).

IV.2) Assertion à plusieurs quantificateurs

Certaines assertions peuvent dépendre de plusieurs paramètres. Par exemple, l'assertion $A(x;y)$ qui peut s'écrire avec les paramètres réels *x* et *y* : $x+2y>1$. On est alors amené à enchaîner plusieurs quantificateurs.

Exemple : soit une fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$. Alors l'assertion $\exists y\in\mathbb{R}:\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=y$ signifie que la fonction *f* est constante.

Attention : l'ordre des quantificateurs dans une assertion est très important . Si l'on change cet ordre dans l'exemple précédent, on obtient l'assertion $\forall x\in\mathbb{R},\ \exists y\in\mathbb{R}:\ f(x)=y$ qui n'a plus du tout le même sens, puisque elle devient alors tout le temps vraie !
Il en est de même si on échange les lettres *x* et *y* : $\exists x\in\mathbb{R}:\forall y\in\mathbb{R},\ f(x)=y$ devient une assertion fausse car $f(x)$ ne peut prendre qu'une seule valeur, et l'assertion $\forall y\in\mathbb{R},\ \exists x\in\mathbb{R}:\ f(x)=y$ signifie qu'un réel quelconque admet forcément au moins un antécédent par la fonction *f*.
Pour résumer , on a dans cet exemple les quatre assertions qui ont des sens différents :

$\exists y\in\mathbb{R}:\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=y$: f est constante
$\forall x\in\mathbb{R},\ \exists y\in\mathbb{R}:\ f(x)=y$:toujours vrai
$\exists x\in\mathbb{R}:\forall y\in\mathbb{R},\ f(x)=y$: toujours faux
$\forall y\in\mathbb{R},\ \exists x\in\mathbb{R}:\ f(x)=y$:n'importe quel réel possède au moins un antécédent par la fonction *f.*

Pour écrire la négation d'une assertion contenant plusieurs quantificateurs, on applique plusieurs fois la propriété 3.

Par exemple, reprenons la situation où l'on a une fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$. Alors le contraire de l'affirmation « *f est constante* » est :
$\overline{\exists y\in\mathbb{R}:\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=y}$
$\forall y\in\mathbb{R},\ \overline{\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=y}$ (propriété 3)

$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} : \overline{f(x)=y}$ (propriété 3)
$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} : f(x) \neq y$
autrement dit, en langage courant, le contraire de l'affirmation « *f est constante* » est : « *pour tout réel y on peut trouver un réel dont l'image par f est différente de y* ».

Propriété 4 Soit $A(x,y)$ une assertion dépendant de deux paramètres $x \in X$ et $y \in Y$. Alors on a les relations :

$$(\forall x \in X, \forall y \in Y, A(x,y)) \Leftrightarrow (\forall y \in Y, \forall x \in X, A(x,y))$$

$$(\exists x \in X : \exists y \in Y : A(x,y)) \Leftrightarrow (\exists y \in Y : \exists x \in X : A(x,y))$$

$$(\exists x \in X : \forall y \in Y, A(x,y)) \Rightarrow (\forall y \in Y, \exists x \in X : A(x,y))$$

Preuve. Les deux équivalences peuvent être considérées comme évidentes.
La dernière relation n'est qu'une implication : démontrons là.
Supposons l'assertion $(\exists x \in X : \forall y \in Y, A(x,y))$ vraie. On peut donc trouver un élément $x_0 \in X$ tel que l'assertion $\forall y \in Y, A(x_{0,} y)$ est vraie.
Maintenant soit $y \in Y$. Alors puisque $A(x_{0,} y)$ est vraie, l'assertion $\exists x \in X : A(x,y)$ est vraie.
Puisque cela est vrai pour tout *y* , alors on peut dire que l'assertion $(\forall y \in Y, \exists x \in X : A(x,y))$ est vraie, ce qui prouve l'implication $(\exists x \in X : \forall y \in Y, A(x,y)) \Rightarrow (\forall y \in Y, \exists x \in X : A(x,y))$.

Remarque : En général l'implication $(\forall y \in Y, \exists x \in X : A(x,y)) \Rightarrow (\exists x \in X : \forall y \in Y, A(x,y))$ est fausse ! Ainsi, l'assertion $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} : f(x)=y$ n'implique pas $\exists x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R}, f(x)=y$ car , pour la fonction $f(x)=x$ (par exemple), l'assertion $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} : f(x)=y$ est vraie tandis que $\exists x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R}, f(x)=y$ est fausse.

V) Le raisonnement par récurrence.

Le raisonnement par récurrence est un procédé extrêmement puissant qui permet de prouver qu'une assertion de la forme $\forall n \in \mathbb{N}, A(n)$ est vraie. Il est basé sur l'axiome suivant :

Axiome de Peano Si P est une partie de $\mathbb{N}$ contenant 0, et si le successeur de chaque élément de P est encore dans P (le successeur de n est n+1), alors $P=\mathbb{N}$.

Cet axiome permet de prouver le Théorème suivant :

Théorème 2 (raisonnement par récurrence). Considérons une assertion $A(n)$ qui dépend d'un paramètre $n \in \mathbb{N}$ et qui vérifie les deux propriétés suivantes :

$A(0)$ est vraie (initialisation)
l'assertion $\forall n \in \mathbb{N}, A(n) \Rightarrow A(n+1)$ est vraie (hérédité)

Alors l'assertion $\forall n \in \mathbb{N}, A(n)$ est vraie.

Preuve Soit P l'ensemble des entiers *n* tel que $A(n)$ soit vrai. Alors $0 \in P$ car $A(0)$ est supposée vraie. De plus, si $n_0 \in P$, alors $A(n_0)$ est vrai, et puisque l'implication $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ est supposée vraie pour tout entier naturel *n,* elle l'est pour $n=n_0$. On a donc $A(n_0)$ vraie et $A(n_0) \Rightarrow A(n_0+1)$ vraie donc $A(n_0+1)$ est vraie, d'où, par définition de P, $n_0+1 \in P$.
Ainsi , la partie P de $\mathbb{N}$ vérifie l'axiome de Peano, donc $P=\mathbb{N}$ ce qui signifie que l'assertion $\forall n \in \mathbb{N}, A(n)$ est vraie.

Exemple : montrons que $\forall n\in\mathbb{N},\ 2^{2n+1}+1$ est un multiple de 3.

Écrivons $A(n)$: $2^{2n+1}+1$ est un multiple de 3.
$A(0)$ est l'assertion : « *3 est un multiple de 3* » qui est évidemment vraie.
Soit maintenant un entier *n* tel que $A(n)$ soit vraie. Cela signifie que $2^{2n+1}+1=3p$ pour un certain entier *p*. Alors, on a

$2^{2n+1}+1=3p$

$2^{2n+1}=3p-1$

$2^{2(n+1)+1}=2^{2n+3}=2^{2n+1}.2^2=4.2^{2n+1}=4(3p-1)=12p-4$

donc

$2^{2(n+1)+1}+1=12p-4+1=12p-3=3(4p-1)$ qui est un entier de la forme $3q$ avec $q=4p-1$ entier. Donc $A(n+1)$ est alors vraie.

On a prouvé que $A(0)$ est vraie et que $\forall n\in\mathbb{N},\ A(n)\Rightarrow A(n+1)$ est vraie, donc le principe de récurrence dit que l'assertion $\forall n\in\mathbb{N},\ A(n)$ est vraie.

Attention : l'initialisation est une étape indispensable sans laquelle le raisonnement par récurrence n'est pas valable.

Exemple : la propriété $A(n)$: $n=n+1$ est héréditaire car si $n=n+1$, alors $n+1=n+2=(n+1)+1$ donc $\forall n\in\mathbb{N},\ A(n)\Rightarrow A(n+1)$ mais $A(n)$ est fausse pour tout entier naturel.

Remarque : ne pas confondre les assertions « *pour tout entier naturel* $\overline{n\quad A(n)}$ *est faux* » et « *l'assertion* $\forall n\in\mathbb{N},\ A(n)$ *est fausse* » la première s'écrivant « $\forall n\in\mathbb{N},\ \overline{A(n)}$ *est vraie* » et la deuxième s'écrivant « $\exists n\in\mathbb{N}:\ \overline{A(n)}$ *est vraie* »

Remarquer que quelquefois, on initialise un raisonnement par récurrence à un entier $n_0\geq 1$ pour montrer qu'une propriété $A(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n\geq n_0$.
Il faut alors se méfier de certaines erreurs bien cachées dans les raisonnements par récurrence que l'on peut faire. Par exemple, la « preuve » ci-dessous que *n* points du plan sont toujours alignés.

Si n est un entier naturel supérieur ou égal à 2, soit l'assertion $A(n)$: *« n points deux à deux distincts du plan sont toujours alignés»*
$A(2)$ *est vraie deux points distincts sont toujours alignés.*
Soit $n\geq 2$ *tel que la propriété* $A(n)$ *soit vraie. Considérons* $M_1, M_2, \ldots, M_{n+1}$ *n+1 points du plan. Alors, puisque l'on a supposé que* $A(n)$ *est vraie, alors les n points* $M_1, M_2, \ldots, M_n$ *sont sur une droite (d) et il en est de même des n points* $M_2, M_2, \ldots, M_{n+1}$ *qui sont donc sur une même droite (d').*
Puisque M_2 et M_n *font partie tous les deux des ensembles de points* $M_1, M_2, \ldots, M_n$ *et* $M_2, M_2, \ldots, M_{n+1}$ *, c'est que les droites (d) et (d') sont toutes les deux égales à la droite* $(M_2 M_n)$ *donc les n+1 points* $M_1, M_2, \ldots, M_{n+1}$ *sont forcément alignés. Donc* $A(n+1)$ *est vraie. Ainsi :*
$A(2)$ *est vraie (initialisation)*
l'assertion $\forall n\geq 2,\ A(n)\Rightarrow A(n+1)$ *est vraie (hérédité)*

Alors l'assertion $\forall n\geq 2,\ A(n)$ *est vraie.*

Il y a bien sûr une erreur de raisonnement car le résultat trouvé est évidemment faux.

En effet: l'hérédité suppose implicitement que les points M_2 et M_n sont distincts donc que $n \geq 3$. Par contre, s'il était vrai que trois points distincts du plan sont toujours alignés, alors il serait vrai que n points deux à deux distincts du plan sont toujours alignés pour tout $n \geq 2$.

VI) Exercices

Exercice 1
Soit A une assertion telle que l'implication $A \Rightarrow \overline{A}$ soit vraie.
Montrer que A est faux.

Exercice 2
Montrer par l'absurde qu'il n'existe pas de couple d'entiers naturels $(p\,;q)$ qui vérifient $p^2 + p + 1 = 2q$ (on pourra regarder le cas où *p* est pair et le cas où *p* est impair et travailler par disjonction des cas).

Exercice 3
Soient A, B et C trois assertions.
1) Compléter la table de vérité ci-dessous
(F et V désignent respectivement Faux et Vrai)

A	B	C	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
F	F	F	
F	F	V	
F	V	F	
F	V	V	
V	F	F	
V	F	V	
V	V	F	
V	V	V	

2) Même question

A	B	C	$A \cap (B \cup C)$
F	F	F	
F	F	V	
F	V	F	
F	V	V	
V	F	F	
V	F	V	
V	V	F	
V	V	V	

3) Quelle équivalence peut-on déduire ?
4) Déduire du 3) que $(A \cup B) \cap (A \cup C) \Leftrightarrow A \cup (B \cap C)$

Exercice 4

Soient A, B et C trois assertions. Démontrer les relations suivantes (on pourra si besoin utiliser une table de vérité) :

1) $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ 2) $(A \cup B) \Leftrightarrow [(A \Rightarrow B) \Rightarrow B]$ 3) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}))$

4) $[A \Rightarrow (B \cup C)] \Leftrightarrow [B \cup (A \Rightarrow C)]$ 5) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow [(A \cap C) \Rightarrow (B \cap C)]$

6) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow [(A \cup C) \Rightarrow (B \cup C)]$

Exercice 5

Soit *f* une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1) L'assertion « *f est strictement croissante* » s'écrit : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x < y) \Rightarrow (f(x) < f(y))$.

Écrire de façon similaire l'assertion « *f n'est pas strictement croissante* »

2) L'assertion $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ s'écrit $\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, (x > M) \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$.

Écrire la négation de cette assertion.

3)

a) Dessiner une allure possible de la représentation graphique de *f* sachant que l'assertion ci-dessous est vraie : $\exists A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}, A \leq f(x) \leq B$.

On mettra en évidence dans le dessin le rôle des réels A et B .

b) Pour *A, B* et *x* fixés, écrire la négation de l'assertion $A \leq f(x) \leq B$.

c) En déduire l'écriture de la négation de l'assertion $\exists A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}, A \leq f(x) \leq B$.

4)

a) Dessiner une allure possible de la représentation graphique de *f* sachant que l'assertion ci-dessous est vraie : $\exists A > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, (|x| > A) \Rightarrow (f(x) = 0)$.

On mettra en évidence dans le dessin le rôle du réel A .

b) Pour *A* et *x* fixés, écrire la négation de l'assertion $(|x| > A) \Rightarrow (f(x) = 0)$.

c) En déduire l'écriture de la négation de l'assertion : $\exists A > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, (|x| > A) \Rightarrow (f(x) = 0)$.

Exercice 6

Soit une suite réelle *u* vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = 2u_n - 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit les propriétés $A_n : u_n \geq 0$ et $B_n : u_n \geq 1$.

1) Montrer que la propriété A_n n'est pas nécessairement héréditaire.
2) Montrer que la propriété B_n est toujours héréditaire.
3) On suppose que $u_0 \geq 1$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, A_n$ est vraie.

Exercice 7

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel *n,* il existe deux entiers naturels a_n et b_n tels que $(1 + \sqrt{2})^n = a_n + b_n \sqrt{2}$.

VII) Corrigés

Exercice 1

$(A \Rightarrow \overline{A}) \Leftrightarrow (\overline{A} \cup \overline{A}) \Leftrightarrow \overline{A}$ donc si $A \Rightarrow \overline{A}$ est vrai, $\overline{A}$ est vrai donc A est faux.

Exercice 2

Supposons qu'il existe un couple d'entiers naturels $(p\,;q)$ qui vérifie $p^2+p+1=2q$.
Si p est pair, p^2 l'est aussi et $p+1$ est impair, donc p^2+p+1 est impair (« pair+impair=impair ») et ne peut donc pas s'écrire sous la forme $2q$.
Si p est pair, p^2 l'est aussi et $p+1$ est impair, donc p^2+p+1 est impair (« pair+impair=impair ») et ne peut donc pas s'écrire sous la forme $2q$.
Dans ces deux cas, l'hypothèse qu'il existe un couple d'entiers naturels $(p\,;q)$ qui vérifie $p^2+p+1=2q$ conduit à une absurdité, donc est fausse.

Exercice 3

1)

A	B	C	$(A\cap B)\cup(A\cap C)$
F	F	F	F
F	F	V	F
F	V	F	F
F	V	V	F
V	F	F	F
V	F	V	V
V	V	F	V
V	V	V	V

2)

A	B	C	$A\cap(B\cup C)$
F	F	F	F
F	F	V	F
F	V	F	F
F	V	V	F
V	F	F	F
V	F	V	V
V	V	F	V
V	V	V	V

3) On en déduit que $(A\cap B)\cup(A\cap C)\Leftrightarrow A\cap(B\cup C)$, les deux assertions ayant la même table de vérité (principe de distributivité du $\cap$ par rapport à $\cup$)
4) On applique le 3) aux négations de A et de B :
$(\overline{A}\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap\overline{C})\Leftrightarrow\overline{A}\cap(\overline{B}\cup\overline{C})$
et les formules de Morgan donnent :
$(\overline{A\cup B})\cup(\overline{A\cup C})\Leftrightarrow\overline{A}\cap(\overline{B\cap C})$
$\overline{(A\cup B)\cap(A\cup C)}\Leftrightarrow\overline{A\cup(B\cap C)}$
et en passant à la négation on obtient:
$(A\cup B)\cap(A\cup C)\Leftrightarrow A\cup(B\cap C)$.

Exercice 4

1)
$(A\Rightarrow(B\Rightarrow A))\Leftrightarrow(B\Rightarrow A)\cup\overline{A}\Leftrightarrow(A\cup\overline{B})\cup\overline{A}\Leftrightarrow(A\cup\overline{A})\cup\overline{B}$,
cette dernière assertion étant toujours vraie car $A\cup\overline{A}$ est vraie.

2)
$[(A\Rightarrow B)\Rightarrow B]\Leftrightarrow B\cup(\overline{A\Rightarrow B})\Leftrightarrow B\cup(\overline{B\cup\overline{A}})\Leftrightarrow B\cup(\overline{B}\cap A)$ par les formules de Morgan
$\Leftrightarrow(B\cup\overline{B})\cap(B\cup A)$ par le résultat du 4) de l'exercice 3
$\Leftrightarrow(B\cup A)\Leftrightarrow(A\cup B)$ vu que $B\cup\overline{B}$ est toujours vraie.

3)
Faisons une table de vérité pour changer:

A	B	$A\Leftrightarrow B$	$A\cap B$	$\overline{A}\cap\overline{B}$	$(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap\overline{B})$
V	V	V	V	F	V
V	F	F	F	F	F
F	V	F	F	F	F
F	F	V	F	V	V

Les colonnes 3 et 6 étant identiques, cela prouve que $(A\Leftrightarrow B)\Leftrightarrow((A\cap B)\cup(\overline{A}\cap\overline{B}))$

4)
D'une part, on a :
$[A\Rightarrow(B\cup C)]\Leftrightarrow(B\cup C)\cup\overline{A}\Leftrightarrow\overline{A}\cup B\cup C$
et, d'autre part,
$[B\cup(A\Rightarrow C)]\Leftrightarrow B\cup(C\cup\overline{A})\Leftrightarrow\overline{A}\cup B\cup C$.
Les deux événements $[A\Rightarrow(B\cup C)]$ et $[B\cup(A\Rightarrow C)]$ étant équivalents à un même troisième événement, ils sont équivalents.

5)
On procède par une table de vérité (mais d'autres méthodes sont possibles) :

A	B	C	$A \Rightarrow B$	$A \cap C$	$B \cap C$	$(A \cap C) \Rightarrow (B \cap C)$
F	F	F	V	F	F	V
F	F	V	V	F	F	V
F	V	F	V	F	F	V
F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	F
V	V	F	V	F	F	V
V	V	V	V	V	V	V

Cela permet de voir que si $A \Rightarrow B$ est vraie, alors $(A \cap C) \Rightarrow (B \cap C)$ ce qui prouve l'implication $(A \Rightarrow B) \Rightarrow [(A \cap C) \Rightarrow (B \cap C)]$.
Remarque : les colonnes 4 et 7 étant différentes, cela montre que cette implication n'est pas une équivalence.

6)
On refait une table de vérité :

A	B	C	$A \Rightarrow B$	$A \cup C$	$B \cup C$	$(A \cup C) \Rightarrow (B \cup C)$
F	F	F	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	V
F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
V	F	V	F	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V
V	V	V	V	V	V	V

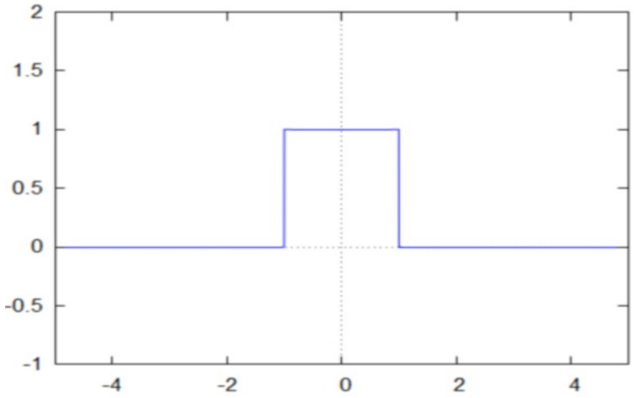
On voit alors que si $A \Rightarrow B$ est vrai, alors $(A \cup C) \Rightarrow (B \cup C)$ est vrai aussi ce qui prouve l'implication $(A \Rightarrow B) \Rightarrow [(A \cup C) \Rightarrow (B \cup C)]$ qui n'est pas non plus une équivalence.

Exercice 5
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
1) $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}$ tq $(x < y)$ et $(f(x) \geq f(y))$ (*N.B* : « tq » abréviation de « tel que », que l'on peut traduire aussi par « : »).

2) $\exists \varepsilon > 0$ tq $\forall M > 0, \exists x \in \mathbb{R}$ tq $(x > M)$ et $(|f(x)| \geq \varepsilon)$.

3)
a) Le graphe de la fonction sinus convient (dans ce cas, on peut considérer que A=-1 et B=1).

b) $A \leq f(x) \leq B$ signifie $(A \leq f(x))$ et $(f(x) \leq B)$ donc la négation de $A \leq f(x) \leq B$ s'écrit $(A > f(x))$ ou $(f(x) > B)$
c) La négation de $\exists A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}, A \leq f(x) \leq B$ est $\forall A \in \mathbb{R}, \forall B \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} : (A > f(x))$ ou $(f(x) > B)$.

4)
a)


On peut dans cet exemple considérer n'importe quel réel A supérieur ou égal à 1.

b) $(|x|>A)$ et $(f(x)\neq 0)$
c) $\forall A>0,\ \exists x\in\mathbb{R}:\ (|x|>A)$ et $(f(x)\neq 0)$.

Exercice 6

1) Si l'on considère la suite vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1}=2u_n-1$ avec, par exemple, la condition initiale $u_0=\frac{1}{3}$, on a A_0 vrai alors que A_1 est faux puisque $u_1=\frac{-1}{3}$. La propriété A_n n'est donc pas nécessairement héréditaire.

2) Si *n* est un entier naturel tel que B_n soit vrai, cela signifie que $u_n\geq 1$ donc $u_{n+1}=2u_n-1\geq 2\times 1-1=0$. On a donc $u_{n+1}\geq 0$ donc B_{n+1} est vraie. Cela signifie que $\forall n\in\mathbb{N},\ B_n\Rightarrow B_{n+1}$ donc que la propriété B_n est toujours héréditaire.

3) Dans ce cas, $u_0\geq 1$ donc B_0 est vraie. Puisque la propriété B_n est héréditaire, le principe de récurrence montre que B_n est vraie pour tout entier naturel *n.*

On a donc $\forall n\in\mathbb{N}, u_n\geq 1$, donc, à plus forte raison, $\forall n\in\mathbb{N}, u_n\geq 0$.

Remarque : démontrer directement par récurrence la propriété $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\geq 0$ aurait été impossible car la propriété A_n n'est pas héréditaire. Cet exemple montre que le choix de la formulation de la propriété que l'on veut démontrer par récurrence est fondamental pour mener à bien le raisonnement.

Exercice 7

Posons pour $n\in\mathbb{N}$ la propriété :

(A_n) : il existe deux entiers naturels a_n et b_n tels que $(1+\sqrt{2})^n=a_n+b_n\sqrt{2}$.

Puisque $(1+\sqrt{2})^0=1=1+0\sqrt{2}$, la propriété (A_0) est vraie avec $a_0=1$ et $b_0=0$.

Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que (A_n) soit vraie : il existe donc deux entiers naturels a_n et b_n tels que $(1+\sqrt{2})^n=a_n+b_n\sqrt{2}$.

On a alors

$$(1+\sqrt{2})^{n+1}=(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^{n}=(1+\sqrt{2})(a_n+b_n\sqrt{2})=(a_n+2b_n)+(a_n+b_n)\sqrt{2}.$$

Cela montre que la propriété (A_{n+1}) est vraie en prenant $a_{n+1}=a_n+2b_n$ et $b_{n+1}=a_n+b_n$.

En conclusion, la propriété (A_0) est vraie et l'implication $(A_n)\Rightarrow(A_{n+1})$ est vraie, donc le principe de récurrence montre que pour tout entier naturel *n,* il existe deux entiers naturels a_n et b_n tels que $(1+\sqrt{2})^{n}=a_n+b_n\sqrt{2}$.

C - NOMBRES COMPLEXES

I) Notions de base

Initialement introduits comme un artifice de calcul pour résoudre les équations polynomiales de degré 3 et 4 avant d'être rigoureusement définis par les mathématiciens, les nombres complexes ont été utilisés dans de nombreux domaines des mathématiques tels que la géométrie plane , l'algèbre ou l'analyse. De même, dans le domaine de la physique, les nombres complexes sont largement utilisés, en particulier en électricité.

I.1) Définition des nombres complexes

Il existe en mathématiques de nombreuses façons de définir l'ensemble des nombres complexes. Les nombres complexes sont habituellement définis comme un ensemble de « nombres » ($\mathbb{C}$) ayant de bonnes propriétés algébriques pour rendre les calculs plus aisés (ce que l'on appelle un corps en mathématiques) , contenant l'ensemble des nombres réels, et tel que l'équation $x^2=-1$ possède au moins une solution (on verra que, plus généralement, toutes les équations du second degré possèdent au moins une solution dans $\mathbb{C}$).
Cette façon de définir l'ensemble des nombres complexes est assez naturelle. En effet, les ensembles de nombres étudiés dans l'enseignement secondaire ont été définis par une démarche similaire. Par exemple, l'équation $x+2=0$ n'ayant pas de solution dans $\mathbb{N}$, on construit $\mathbb{Z}$ pour pouvoir résoudre ce genre d'équation. De même l'équation $2x-1=0$ (par exemple) n'ayant pas de solution dans $\mathbb{Z}$, on a construit $\mathbb{Q}$ (l'ensemble des nombres rationnels) . Entre le $5^{ème}$ et $4^{ème}$ siècle avant notre ère, des mathématiciens grecs ont découvert que certaines grandeurs, telles que la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1, ne peuvent pas être des nombres rationnels. Cela revient à dire dans ce cas précis que l'équation $x^2-2=0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$, c'est à dire que $\sqrt{2}$ est irrationnel : l'idée de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ était née ! Le corps des nombres complexes vient clore (provisoirement) cette succession croissante d'ensemble de nombres $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$ dans le sens où il possède suffisamment de « bonnes » propriétés algébriques pour s'en contenter la plupart du temps. Il faut savoir tout de même que d'autres ensembles de nombres existent, tels que l'ensemble des nombres algébriques qui vient s'intercaler entre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$, ou même des ensembles de nombres plus grand que $\mathbb{C}$, tels que l'ensemble des quaternions, dont l'usage est plus délicat.

La démarche utilisée dans ce cours pour définir l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ n'est pas de nature algébrique, mais géométrique : on part de l'idée qu' un nombre complexe est un vecteur du plan.

Définition 1 : L'ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$, s'identifie à l'ensemble des vecteurs du plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$. On identifie l'axe des abscisses à l'ensemble des nombres réels. Ainsi, le vecteur $\vec{u}$ se note 1 et le vecteur $\vec{v}$ se note i (ou j en électricité : c'est cette dernière notation que l'on choisira donc dans ce cours).

Rappel : l'expression $(O;\vec{u};\vec{v})$ est un repère orthonormé (centré au point O) signifie que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de norme 1 et de directions orthogonales.

NB : On impose en général aussi que $j^2=-1$, mais on a choisi ici de présenter cette propriété comme une conséquence d'une définition du produit sur $\mathbb{C}$ (voir le **II**)

Le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, qui vaut donc $a\vec{u}+b\vec{v}$, se note de façon complexe par son **affixe** $z=a+bj$.
Le nombre réel a est appelé **partie réelle** de z. C'est donc l'abscisse du vecteur correspondant.
Le nombre réel b est appelé **partie imaginaire** de z. C'est l'ordonnée du vecteur correspondant .

Exemple : la partie imaginaire de $z=-3+7j$ est égale à 7, (et non à $7j$ comme on peut parfois être tenté de le dire)

Exemple : le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est représenté par son affixe $z=1+0j=1$.
Si $M(2,-3)$ alors l'affixe de $\overrightarrow{OM}$ est $z=2-3j$.

De même, si M est un point de coordonnées $(a\,;b)$, on définira son affixe par celle du vecteur $\overrightarrow{OM}$, c'est à dire $z_M=a+bj$.

Définition 2: Si z est l'affixe du vecteur $\vec{w}$, le nombre $r=\|\vec{w}\|$ est appelé **module** de z et se note aussi $|z|$.
Si $z\neq 0$ est l'affixe du vecteur $\vec{w}$, l'angle orienté $\theta=\widehat{(\vec{u},\vec{w})}$ est appelé **argument** de z et se note aussi $\mathrm{Arg}(z)$.

Exemple : si $\vec{w}$ est le vecteur de coordonnées $(1\,;1)$ $r=\sqrt{2}$ et $\theta=\frac{\pi}{4}$.

Remarque : Étant une mesure d'angle, un argument est défini à 2π près. Si l'on prend la mesure principale (c'est à dire l'unique mesure appartenant à $]-\pi,\pi]$) on parlera de **mesure principale de l'argument.** Dans la suite de ce cours, lorsque cela ne prêtera pas à confusion, les mesures d'angles données seront de façon sous-entendu données à 2π près.

A retenir : un réel strictement positif a un argument égal à 0
un réel strictement négatif a un argument égal à π
un imaginaire pur de partie imaginaire strictement positive a un argument égal à $\frac{\pi}{2}$
un imaginaire pur de partie imaginaire strictement négative a un argument égal à $-\frac{\pi}{2}$

Il est également utile de retenir que si $z=a+bj$ avec $z\neq 0$, alors :

$$a>0 \text{ et } b>0 \Rightarrow \mathrm{Arg}(z)\in\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$$

$$a>0 \text{ et } b<0 \Rightarrow \mathrm{Arg}(z)\in\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$$

$$a<0 \text{ et } b>0 \Rightarrow \mathrm{Arg}(z)\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$$

$$a<0 \text{ et } b<0 \Rightarrow \mathrm{Arg}(z)\in\left]-\pi,-\frac{\pi}{2}\right[$$

La propriété suivante donne une relation fondamentale entre $(r\,;\theta)$ et $(a\,;b)$.

Propriété 1: $r=\sqrt{a^2+b^2}$, $\cos(\theta)=\frac{a}{r}$, $\sin(\theta)=\frac{b}{r}$

Preuve :Puisque $\vec{w}$ a pour coordonnées $\vec{w}:\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, le caractère orthonormé du repère $(O:\vec{u};\vec{v})$ implique que $r^2=\|\vec{w}\|^2=a^2+b^2$ d'où la relation $r=\sqrt{a^2+b^2}$.
On a, si $r>0$, $\left\|\frac{1}{r}\vec{w}\right\|=1$. De plus, $\theta=(\widehat{\vec{u},\vec{w}})=\left(\widehat{\vec{u},\frac{1}{r}\vec{w}}\right)$, donc d'après la définition 1 du chapitre sur les bases de trigonométrie, on a $\frac{1}{r}\vec{w}:\begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$.

On a aussi $\frac{1}{r}\vec{w}:\begin{pmatrix} \frac{a}{r} \\ \frac{b}{r} \end{pmatrix}$. En identifiant les coordonnées, on obtient la relation $\cos(\theta)=\frac{a}{r}$, $\sin(\theta)=\frac{b}{r}$.

Remarque : nous verrons dans le chapitre sur la fonction tangente et arctangente une façon pratique d'exprimer directement θ en fonction de *a* et de *b*.

Exemple : le nombre complexe $z=3-5\mathrm{j}$ a un module égal à $\sqrt{3^2+(-5)^2}=\sqrt{34}$. Son argument θ n'a pas de mesure remarquable et ne peut pas être exprimée comme une fraction de π , mais on peut dire que $\cos(\theta)=\frac{3}{\sqrt{34}}$, $\sin(\theta)=\frac{-5}{\sqrt{34}}$: la mesure principale de θ est dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2},0[$.

Définition 3 : On a deux façons de voir un même nombre complexe z .
Par sa **forme algébrique** $z=a+bj$ avec $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$
Par sa **forme trigonométrique** $z=r(\cos(\theta)+j\sin(\theta))$ si $z\neq 0$

Remarque : la forme trigonométrique se déduit de la forme algébrique par les relations $\cos(\theta)=\frac{a}{r}$, $\sin(\theta)=\frac{b}{r}$ de la propriété 1.

I.2) La forme exponentielle

Nous supposons connue la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$.

Définition 4: La fonction exponentielle, définie de façon usuelle sur $\mathbb{R}$ se prolonge en une fonction sur $\mathbb{C}$ par la formule :
$\exp(z)=\exp(a+bj)\overset{\text{def}}{=}e^a(\cos(b)+j\sin(b))$.

Remarques:
(i) Si $z\mathbb{R}, z=a$ et $b=0$ donc $\exp(z)=\exp(z+0\mathrm{j})\overset{\text{def}}{=}e^a(\cos(0)+j\sin(0))=e^a.1=e^a$. La définition 4 est bien cohérente avec celle de l'exponentielle réelle.

(ii) On a ainsi $\exp(z)\neq 0$, $|\exp(z)|=e^{\mathrm{Re}(z)}$, $\mathrm{Arg}(\exp(z))=\mathrm{Im}(z)$

En effet, $\exp(z)=e^a(\cos(b)+j\sin(b))$ avec $e^a>0$ (l'exponentielle d'un nombre réel est toujours strictement positive) . On reconnaît une écriture sous forme trigonométrique, donc e^a s'identifie avec $|\exp(z)|$ et b avec $\mathrm{Arg}(\exp(z))$. Il suffit alors de remarquer que $a=\mathrm{Re}(z)$ et $b=\mathrm{Im}(z)$. Puisque $r\neq 0$, on en déduit que $\exp(z)\neq 0$.

(iii) $\exp(j\theta)=\cos(\theta)+j\sin(\theta)$

En effet, il suffit de prendre $a=0$ et $b=\theta$ dans la définition 4 et de se souvenir que $e^0=1$.

Définition 5: L'écriture $z=r.\exp(j\theta)$ que l'on déduit de l'écriture trigonométrique et de la remarque (iii) ci-dessus, est appelée **forme exponentielle** de *z*. On utilisera la notation $z=re^{j\theta}$.

Attention : ne pas confondre la forme exponentielle d'un nombre avec son exponentielle.
Par exemple, si $z=1-j$, sa forme exponentielle vaut $z=\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}$ et son exponentielle vaut $e^z=e^1e^{-j}=e^1\cos(1)-je^1\sin(1)$.
D'autre part, si $z=a+bj$, la forme exponentielle de e^z est e^ae^{bj}.

I.3) Notion de nombre complexe conjugué

Définition 6: Si $z=a+bj$, le **conjugué** de z est $\overline{z}=a-bj$.

Il est utile de remarquer que z et $\overline{z}$ sont toujours les affixes de vecteurs symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Propriété 2: $\forall z\neq 0,\ |\overline{z}|=|z|,\quad \text{Arg}(\overline{z})=-\text{Arg}(z)$

Preuve : On considère la forme trigonométrique $z=r(\cos(\theta)+j\sin(\theta))$ qui donne alors l'égalité $\overline{z}=r(\cos(\theta)-j\sin(\theta))=r(\cos(-\theta)+j\sin(-\theta))$ en vertu du fait que $\cos(-\theta)=\cos(\theta)$ et $\sin(-\theta)=-\sin(\theta)$.
A partir de la forme trigonométrique $\overline{z}=r(\cos(-\theta)+j\sin(-\theta))$ on déduit par identification $|\overline{z}|=|z|,\quad \text{Arg}(\overline{z})=-\text{Arg}(z)$.

Conséquence : $\overline{re^{j\theta}}=re^{-j\theta}$, puisque les deux nombres complexes $re^{j\theta}$ et $re^{-j\theta}$ ont le même module et des arguments opposés.

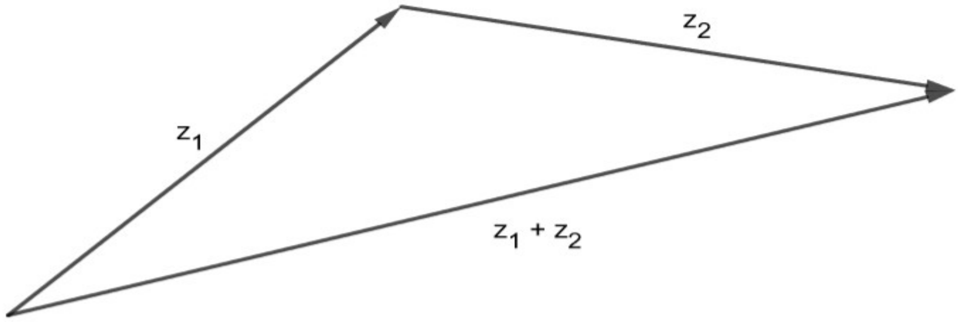
II) Calculs dans $\mathbb{C}$

II.1) Somme

Définition 7: $z\pm z'\overset{\text{def}}{=}(\text{Re}(z)\pm\text{Re}(z'))+j(\text{Im}(z)\pm\text{Im}(z'))$
$\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \lambda z\overset{\text{def}}{=}\lambda\text{Re}(z)+j\lambda\text{Im}(z)$

Cette formule traduit le fait que les parties réelles et imaginaires s'ajoutent. L'addition de deux nombres complexes correspond donc à l'addition usuelle des deux vecteurs correspondant, où l'on ajoute leurs coordonnées. Ainsi, l'affixe de la somme de deux vecteurs est la somme de leurs affixes.
De même, la multiplication d'un nombre complexe par un réel correspond à la multiplication par ce dernier du vecteur correspondant.

Le théorème suivant est la traduction en termes de nombres complexes de la propriété géométrique suivante : dans un triangle, la longueur de chaque côté est inférieure ou égale à la somme des longueurs des deux autres côtés.



Théorème 1 :
Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ alors $|z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|$. De plus, l'égalité $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$ n'a lieu que si l'une des deux conditions est vérifiée :

(i) $z_1=0$ ou $z_2=0$

(ii) $z_1 \neq 0$ et $z_2 \neq 0$ et $\mathrm{Arg}(z_1)=\mathrm{Arg}(z_2)$.

Plus généralement, si $p \geqslant 2$ et si $z_1, \ldots, z_p \in \mathbb{C}$ alors $|z_1+\ldots+z_p| \leqslant |z_1|+\ldots+|z_p|$. De plus, l'égalité $|z_1+\ldots+z_p|=|z_1|+\ldots+|z_p|$ n'a lieu que s'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que pour tout entier *i*, $\mathrm{Arg}(z_i)=\theta$ ou $z_i=0$.

<u>Preuve</u> : on traite le cas $p = 2$, le cas général s'en déduisant par une récurrence assez simple.
Si $z_1=0$ ou $z_2=0$, l'égalité à montrer devient une égalité évidente. On suppose donc que $z_1 \neq 0$ et $z_2 \neq 0$: soient $z_1=r_1 e^{j\theta_1}$ et $z_2=r_2 e^{j\theta_2}$ les formes exponentielles de ces deux nombres.
Alors,

$$|z_1+z_2|^2=|r_1\cos(\theta_1)+r_2\cos(\theta_2)+j(r_1\sin(\theta_1)+r_2\sin(\theta_2))|^2$$

$$=(r_1\cos(\theta_1)+r_2\cos(\theta_2))^2+(r_1\sin(\theta_1)+r_2\sin(\theta_2))^2=r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)$$

en utilisant les relations $\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)=1$ et $\cos(\theta_1)\cos(\theta_2)+\sin(\theta_1)\sin(\theta_2)=\cos(\theta_1-\theta_2)$.
Puisque $\cos(\theta_1-\theta_2) \leqslant 1$ on en déduit que

$$|z_1+z_2|^2=r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2) \leqslant r_1^2+r_2^2+2r_1r_2=(|z_1|+|z_2|)^2$$

d'où

$$|z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|$$

avec égalité si et seulement si $\cos(\theta_1-\theta_2)=1$ c'est à dire si et seulement si $\theta_1=\theta_2+2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

II.2) Produit de deux nombres complexes

Définition 8 : considérons deux nombres complexes non nuls $z=re^{j\theta}$ et $z'=r'e^{j\theta'}$. Alors le produit de *z* par *z'* est défini par $z.z' \stackrel{\text{def}}{=} (rr')e^{j(\theta+\theta')}$. On retiendra donc que les modules se multiplient et les arguments s'ajoutent.
Si un des deux nombres complexes est nul, le produit sera défini comme égal à 0.
On a ainsi $\forall z, z' \in \mathbb{C}, |zz'|=|z||z'|$ et $\forall z, z' \in \mathbb{C} \setminus \{0\},\ \mathrm{Arg}(zz')=\mathrm{Arg}(z)+\mathrm{Arg}(z')$.

Conséquence très importante : $j^2=-1$.
En effet, $j^2=e^{j\frac{\pi}{2}}e^{j\frac{\pi}{2}}=e^{j2\frac{\pi}{2}}=e^{j\pi}=-1$.

Remarque : Cette définition est cohérente avec celle du produit usuel de deux nombres réels. Par exemple, avec cette règle, $2\times(-3)=2e^{0j}3e^{j\pi}=6e^{j(0+\pi)}=-6$ comme attendu ! La règle sur les arguments peut être vue comme une généralisation sur $\mathbb{C}$ de la règle des signes sur $\mathbb{R}$ (la notion d'argument d'un nombre complexe prolonge celle de signe d'un réel , puisqu'on ne peut plus parler de signe dans le cas complexe).

Les deux propriétés suivantes montrent que le produit complexe hérite de certaines propriétés du produit réel :

Propriété 3: $z_1 z_2=0 \Leftrightarrow z_1=0$ ou $z_2=0$.

Preuve : $z_1 z_2=0 \Leftrightarrow |z_1 z_2|=0 \Leftrightarrow |z_1||z_2|=0 \Leftrightarrow |z_1|=0$ ou $|z_2|=0 \Leftrightarrow z_1=0$ ou $z_2=0$.

Exemple : les solutions de l'équation $(z-1)(z-j)=0$ sont 1 et j . Il n'y en n'a pas d'autre.

Propriété 4 : Considérons deux nombres complexes $z_1=x_1+jy_1=r_1e^{j\theta_1}$ et $z_2=x_2+jy_2=r_2e^{j\theta_2}$ écrits respectivement sous forme algébrique et exponentielle (avec la convention que $r_i=\theta_i=0$ si $z_i=0$.). Alors la forme algébrique de $z_1 z_2$ est $z_1 z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+j(x_1y_2+x_2y_1)$.

Par conséquent, on a pour tous nombres complexes z, z_1 et z_2:

(i) $z(z_1+z_2)=zz_1+zz_2$ (propriété de distributivité)

(ii) $z_1z_2=z_2z_1$ (propriété de commutativité)

(iii) $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}$

Preuve de la propriété 4 : L'application de la propriété 1 montre que $x_i=r_i\cos(\theta_i)$ et $y_i=r_i\sin(\theta_i)$. On a ainsi :

$$\begin{aligned}&(x_1x_2-y_1y_2)+j(x_1y_2+x_2y_1)\\ &=r_1r_2\big((\cos(\theta_1)\cos(\theta_2)-\sin(\theta_1)\sin(\theta_2))+j(\sin(\theta_1)\cos(\theta_2)+\cos(\theta_1)\sin(\theta_2))\big)\\ &=r_1r_2(\cos(\theta_1+\theta_2)+j\sin(\theta_1+\theta_2))\end{aligned}$$

par les formules d'addition $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$ et $\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)$.

On en déduit $(x_1x_2-y_1y_2)+j(x_1y_2+x_2y_1)=r_1r_2e^{j(\theta_1+\theta_2)}=z_1z_2$ par la définition 8.

Preuve du (i) :

Malgré les apparences, ce résultat, bien connu pour les nombres réels, est loin d'être évident à prouver pour les nombres complexes.

Si l'on considère la forme algébrique de z : $z=x+jy$, par application de la propriété 4, on a :

d'une part, $z(z_1+z_2)=(x(x_1+x_2)-y(y_1+y_2))+j(x(y_1+y_2)+(x_1+x_2)y)$ (1)

d'autre part,

$$\begin{aligned}zz_1+zz_2&=(xx_1-yy_1)+j(xy_1+x_1y)+(xx_2-yy_2)+j(xy_2+x_2y)\\ &=xx_1-yy_1+xx_2-yy_2+j(xy_1+x_1y+xy_2+x_2y)\\ &=x(x_1+x_2)-y(y_1+y_2)+j(x(y_1+y_2)+(x_1+x_2)y)\quad(2)\end{aligned}$$ en factorisant par x et y.

Preuve du (ii) :

Si z_1 ou z_2 sont nuls, c'est évident. Sinon, on remarque que les modules et arguments des deux membres de l'égalité à prouver sont égaux à $|z_1||z_2|$ et $\mathrm{Arg}(z_1)+\mathrm{Arg}(z_2)$ respectivement et bien sûr, $|z_1||z_2|=|z_2||z_1|$ et $\mathrm{Arg}(z_1)+\mathrm{Arg}(z_2)=\mathrm{Arg}(z_2)+\mathrm{Arg}(z_1)$.

Preuve du (iii) :
Si z_1 ou z_2 sont nuls, c'est évident. Sinon, on remarque que d'après la propriété 2, les modules et arguments des deux membres de l'égalité à prouver sont égaux, respectivement à $|z_1||z_2|$ et $-\operatorname{Arg}(z_1)-\operatorname{Arg}(z_2)$.

Conséquence : le produit $(a+bj)(a'+b'j)$ peut se calculer par double distributivité en utilisant le fait que $j^2=-1$.

Exemple : $(2+j)(3+2j)=2(3+2j)+j(3+2j)=6+4j+3j+2j^2=6+7j-2=4+7j$.

Les deux premiers points de la propriété ci-dessous montrent que la fonction exponentielle sur $\mathbb{C}$ garde des propriétés similaires à celle de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$.

Propriété 5: $(1)\quad e^{z_1}e^{z_2}=e^{z_1+z_2}$, $(2)\ \forall n\in\mathbb{Z},\ (e^z)^n=e^{nz}$
$(3)\ z\bar{z}=|z|^2$

Preuve du (1) :
Si
$z_1=x_1+jy_1$ et $z_2=x_2+jy_2$ alors on a (remarque (ii) définition 4) :
$|e^{z_1}e^{z_1}|=|e^{z_1}||e^{z_1}|=e^{x_1}e^{x_2}=e^{x_1+x_2}=e^{\operatorname{Re}(z_1+z_2)}=|e^{z_1+z_1}|$.
$\operatorname{Arg}(e^{z_1}e^{z_1})\equiv\operatorname{Arg}(e^{z_1})+\operatorname{Arg}(e^{z_1})\equiv y_1+y_2\equiv\operatorname{Im}(z_1)+\operatorname{Im}(z_2)\equiv\operatorname{Im}(z_1+z_2)\equiv\operatorname{Arg}(e^{z_1+z_1})\ [2\pi]$
Les deux nombres complexes $e^{z_1}e^{z_2}$ et $e^{z_1+z_2}$ ayant même module et même argument, ils sont égaux.

Preuve du (2) : s'obtient par itération du (1) avec $z'=z$ à chaque fois (autrement dit, par récurrence sur *n*)
.

Preuve du (3) : Si $z=a+bj$, alors
$z\bar{z}=(a+bj)(a-bj)=a^2-(bj)^2=a^2-j^2b^2=a^2+b^2=|z|^2$

Remarque : cette propriété montre que l'exponentielle est bien adaptée pour les calculs de produits.

II.3) Quotient

Propriété 6: Tout nombre complexe non nul est inversible pour la multiplication, c'est à dire que
$\forall a\in\mathbb{C}$ tq $a\neq 0$, $\exists!\, z\in\mathbb{C}$ tq $az=1$. Cet inverse *z*, unique, sera noté $\frac{1}{a}$ et vaut $\frac{1}{a}=\frac{\bar{a}}{|a|^2}$

Preuve : Soit $a\in\mathbb{C}, a\neq 0$. Alors si *z* est tel que $az=1$, alors en multipliant par $\bar{a}$, on obtient
$\bar{a}az=\bar{a}$ ce qui donne en vertu de 3) de la propriété 4) : $|a|^2z=\bar{a}$ d'où $z=\frac{\bar{a}}{|a|^2}$. (la division par
$|a|^2$ ne pose pas de problème car c'est un réel non nul).
Inversement, si $z=\frac{\bar{a}}{|a|^2}$, $az=\frac{1}{|a|^2}a\bar{a}=\frac{|a|^2}{|a|^2}=1$.

Exemple : l'inverse de $e^{j\theta}$ est $\frac{1}{e^{j\theta}}=\frac{\overline{e^{j\theta}}}{|e^{j\theta}|^2}=e^{-j\theta}$

Définition 9 Le quotient de deux nombres complexes $\frac{z_1}{z_2}$ (avec $z_2 \neq 0$) est défini comme le produit $z_1 . \frac{1}{z_2}$. Il s'agit de l'unique solution de l'équation d'inconnue z : $z\, z_2 = z_1$.

Propriété 7: Pour calculer la forme algébrique d' un quotient de deux nombres complexes $\frac{z_1}{z_2}$ (avec $z_2 \neq 0$!) écrits sous forme algébrique, il suffit de multiplier formellement le numérateur et le dénominateur par $\bar{z}_2$, le conjugué du dénominateur.

Preuve : D'après la propriété 5, on a : $\frac{z_1}{z_2} = z_1 . \frac{1}{z_2} = z_1 . \frac{\bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{z_1 . \bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{z_1 . \bar{z}_2}{z_2 . \bar{z}_2}$.

Exemple : $\frac{3+5j}{3-j} = \frac{(3+5j)(3+j)}{(3-j)(3+j)} = \frac{9+3j+15j-5}{|3-j|^2} = \frac{4+18j}{3^2+1^2} = \frac{2}{5} + \frac{9}{5} j$.

Propriété 8: $\frac{r_1 e^{j\theta_1}}{r_2 e^{j\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$ (« les modules se divisent, les arguments se soustraient »)

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

Preuve :

(i) on a $\left(\frac{z_1}{z_2}\right) . z_2 = z_1$ donc la définition 8 implique :

$$|z_1| = \left|\left(\frac{z_1}{z_2}\right) . z_2\right| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| . |z_2|$$

d'où

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad .$$

De même , toujours par la définition 8,

$$\arg(z_1) = \arg\left(\frac{z_1}{z_2} . z_2\right) = \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) + \arg(z_2) \quad \text{d'où} \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) \quad .$$

(ii) on a $\left(\frac{z_1}{z_2}\right) . z_2 = z_1$ donc le (iii) de la propriété 4 dit que

$$\bar{z}_1 = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right) . z_2} = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} . \bar{z}_2$$

d'où

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad .$$

Exemple : vérifions que $\left|\frac{3+5j}{3-j}\right|=\frac{|3+5j|}{|3-j|}$.

On a déjà calculé dans un précédent exemple que $\frac{3+5j}{3-j}=\frac{2}{5}+\frac{9}{5}j$, donc

$\left|\frac{3+5j}{3-j}\right|^2=\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{9}{5}\right)^2=\frac{85}{25}=\frac{17}{5}$, tandis que $\frac{|3+5j|^2}{|3-j|^2}=\frac{9+25}{9+1}=\frac{34}{10}=\frac{17}{5}$.

III) *Quelques propriétés géométriques*

III.1) Affixe d'un vecteur

Si z_A et z_B sont les affixes de deux points du plan complexe, le vecteur $\vec{AB}$ a pour affixe z_B-z_A.
Cela se prouve facilement en remarquant que les coordonnées du vecteur $\vec{AB}$ s'obtiennent en effectuant la différence des coordonnées de B avec celles de A.

III.2) Distance et mesure d'angle

Propriété 9: $AB=|z_B-z_A|$ $\quad(\vec{\alpha};\vec{\beta})=\text{Arg}\left(\frac{z_\beta}{z_\alpha}\right)$ où z_A et z_B sont les affixes des points A et B et

<u>Preuve :</u> Par définition du module, AB est égal au module de l'affixe du vecteur $\vec{AB}$ c'est à dire $|z_B-z_A|$.
D'autre part,

$$(\vec{\alpha};\vec{\beta})=(\vec{\alpha};\vec{u})+(\vec{u};\vec{\beta})=-(\vec{u};\vec{\alpha})+(\vec{u};\vec{\beta})=\text{Arg}(z_\beta)-\text{Arg}(z_\alpha)=\text{Arg}\left(\frac{z_\beta}{z_\alpha}\right)$$

Remarque : Si $\vec{\alpha}$ et $\vec{\beta}$ sont des vecteurs du plan complexe non nuls, on peut écrire

$$(\vec{\alpha};\vec{\beta})=\text{Arg}\left(\frac{z_\beta}{z_\alpha}\right)=\text{Arg}\left(\frac{z_\beta\bar{z}_\alpha}{z_\alpha.\bar{z}_\alpha}\right)=\text{Arg}\left(\frac{z_\beta\bar{z}_\alpha}{|z_\alpha|^2}\right)=\text{Arg}(z_\beta\bar{z}_\alpha)-\text{Arg}(|z_\alpha|^2)=\text{Arg}(z_\beta\bar{z}_\alpha)$$

car $|z_\alpha|^2$ est un réel strictement positif,
d'où la formule quelquefois bien pratique :

Propriété 10 : $(\vec{\alpha};\vec{\beta})=\text{Arg}(z_\beta\bar{z}_\alpha)$.

Exemple : soient les points $A(1;0)$ et $B(2;1)$. Trouvons les coordonnées du point C tel que le triangle ABC soit équilatéral direct. Appelons z l'affixe de C.

On doit avoir CB=CA c'est à dire $|2+j-z|=|1-z|$ donc $\left|\frac{2+j-z}{1-z}\right|=1$.

D'autre part, on doit avoir $(\vec{CA};\vec{CB})=\frac{\pi}{3}$ donc $\frac{\pi}{3}=\text{Arg}\left(\frac{2+j-z}{1-z}\right)$.

On a donc $\dfrac{2+j-z}{1-z}$ qui doit être de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{3}$ donc $\dfrac{2+j-z}{1-z}=e^{j\frac{\pi}{3}}$.

Cela s'écrit aussi $\dfrac{z-2-j}{z-1}=e^{j\frac{\pi}{3}}=\dfrac{1+j\sqrt{3}}{2}$ d'où

$$2z-4-2j=(z-1)(1+j\sqrt{3})=(1+j\sqrt{3})z-1-j\sqrt{3}$$

d'où

$$(1-j\sqrt{3})z=3+(2-\sqrt{3})j$$

$$z=\frac{3+(2-\sqrt{3})j}{1-j\sqrt{3}}=\frac{(3+(2-\sqrt{3})j)(1+j\sqrt{3})}{1+3}=\frac{6-2\sqrt{3}+2j(1+\sqrt{3})}{4}$$

ce qui donne les coordonnées du point C : $C\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{2};\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$.

III.3) Multiplication par $e^{j\theta}$

Propriété 11 : Si z est l'affixe du vecteur $\vec{w}$, alors l'image dans le plan complexe de $e^{j\theta}z$ s'obtient en tournant par rapport à l'origine le vecteur $\vec{w}$ d'un angle θ (on parle de rotation de centre O et d'angle θ).

Preuve : Il suffit de voir que $|e^{j\theta}z|=|e^{j\theta}||z|=|z|$, et $\mathrm{Arg}(e^{j\theta}z)=\mathrm{Arg}(e^{j\theta})+\mathrm{Arg}(z)=\theta+\mathrm{Arg}(z)$.
Cela signifie que l'image dans le plan complexe de $e^{j\theta}z$ a la même norme que le vecteur $\vec{w}$ et son argument s'obtient en ajoutant θ à celui de *z*.

Exemple : Soit $M(3;-4)$. Cherchons les coordonnées de M ', image de M par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$. Si l'on pose $\vec{w}=\overrightarrow{OM}$, on a $z=3-4j$ et

$$e^{j\theta}z=e^{j\frac{\pi}{4}}(3-4j)=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+j)(3-4j)=\frac{\sqrt{2}}{2}(7-j)$$

ce qui permet de dire que M' a pour coordonnées $M'\left(7\dfrac{\sqrt{2}}{2};-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

III.4) Parties réelles et imaginaires d'un nombre complexe

La propriété suivante est très importante en pratique, car elle nous permettra de remplacer des fonctions trigonométriques par des exponentielles, beaucoup plus pratiques pour les calculs.

Propriété 12 (formules d'Euler) : $\forall\theta\in\mathbb{R},\ \cos(\theta)=\dfrac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2},\quad \sin(\theta)=\dfrac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j}$.

Preuve : on part du fait que

$$e^{j\theta}=\cos(\theta)+j\sin(\theta)$$
$$e^{-j\theta}=\cos(\theta)-j\sin(\theta)$$

Par addition et soustraction des deux lignes on a $2\cos(\theta)=e^{j\theta}+e^{-j\theta},\quad 2j\sin(\theta)=e^{j\theta}-e^{-j\theta}$.

Exemple 1 (*A savoir faire*) : Calcul de la forme exponentielle de $e^{j\theta}+e^{j\varphi}$ pour θ et φ quelconques, par exemple la forme exponentielle de $e^{3j}+e^{7j}$.
L'idée est de calculer la moyenne algébrique de 3 et 7, soit 5, et de factoriser l'expression par e^{5j} . On obtient alors, en utilisant la formule d'Euler :
$e^{3j}+e^{7j}=e^{5j-2j}+e^{5j+2j}=e^{5j}\left(e^{-2j}+e^{2j}\right)=2\cos(2)e^{5j}$.
Attention, ce n'est pas terminé ! Il faut vérifier que $\frac{\pi}{2}<2<\pi$ ce qui signifie que $2\cos(2)<0$, donc $2\cos(2)$ n'est pas le module ! Il reste donc à dire que
$e^{3j}+e^{7j}=2\cos(2)e^{5j}=-2\cos(2).(-1).e^{5j}=-2\cos(2).e^{j\pi}.e^{5j}=-2\cos(2).e^{j(\pi+5)}$
et là, on a la forme exponentielle de $e^{3j}+e^{7j}$.

Exemple 2 : on peut maintenant utiliser les formules d'Euler pour linéariser une expression trigonométrique, à savoir transformer une expression écrite comme produit en somme de sinus ou de cosinus.
Par exemple, on va linéariser l'expression $\left(\sin(a)\right)^2$.

$\left(\sin(a)\right)^2=\left(\frac{e^{ja}-e^{-ja}}{2j}\right)^2=\frac{e^{2ja}-2e^{ja}e^{-ja}+e^{-2ja}}{-4}$ (remarquer que $\left(e^{\pm ja}\right)^2=e^{\pm 2ja}$)

$\left(\sin(a)\right)^2=\frac{e^{2ja}-2+e^{-2ja}}{-4}$ car $e^{ja}e^{-ja}=e^0=1$

$\left(\sin(a)\right)^2=\frac{2\cos(2a)-2}{-4}$ car $e^{2ja}+e^{-2ja}=2\cos(2a)$ (première formule d'Euler)

$\left(\sin(a)\right)^2=\frac{1}{2}-\frac{\cos(2a)}{2}$: on dit que l'expression $\left(\sin(a)\right)^2$ a été linéarisée car elle ne contient maintenant plus de produit.

Remarque : tout produit de facteurs de la forme $\cos(at)^k$ ou $\sin(at)^k$ pour $a\in\mathbb{R}$ et $k\in\mathbb{N}$ peut s'écrire comme une somme de termes de la forme $\lambda\cos(\alpha t)$ et $\mu\sin(\alpha t)$: c'est ce que l'on appelle la linéarisation d'une expression trigonométrique.

Propriété 13: $\mathrm{Re}(z)=\frac{1}{2}\left(z+\bar{z}\right)$, $\mathrm{Im}(z)=\frac{1}{2j}\left(z-\bar{z}\right)$

Preuve : on part du fait que $z=\mathrm{Re}(z)+j\,\mathrm{Im}(z)$
$\bar{z}=\mathrm{Re}(z)-j\,\mathrm{Im}(z)$
Par addition et soustraction des deux lignes on a le résultat voulu.

Remarque : si $z=e^{j\theta}$, on retrouve les formules d'Euler.

Exemple : l'image d'un nombre complexe appartient à la droite d'équation $y=2x+1$ si et seulement si $\mathrm{Im}(z)=2\,\mathrm{Re}(z)+1$ ce qui donne : $\frac{1}{2j}\left(z-\bar{z}\right)=\left(z+\bar{z}\right)+1$ ce qui se réécrit
$(1-2j)z-(1+2j)\bar{z}=2j$: on obtient ainsi ce que l'on appelle l'équation complexe de la droite d'équation $y=2x+1$.

III.5) Équation d'un cercle

Soit C le cercle du plan complexe de centre $\Omega(a,b)$ et de rayon R. Alors, si $M(x,y)$ est un point du plan complexe, et si z et z_Ω désignent les affixes de M et Ω respectivement, on peut dire que :

$$M\in C\Leftrightarrow \Omega M^2=R^2\Leftrightarrow |z-z_\Omega|^2=R^2\Leftrightarrow |(x-a)+j(y-b)|^2=R^2\Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

Définition 10 : l'équation $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ est appelée <u>équation cartésienne du cercle C.</u>
C'est, pour le point $M(x,y),$ un critère d'appartenance au cercle.

Exemple : Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$, soient $A(1{,}0)$ et $B(0{,}2)$. On cherche l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $AM^2+BM^2=3$.
On a

$$AM^2+BM^2=3\Leftrightarrow |z_M-z_A|^2+|z_M-z_B|^2=3\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2+x^2+(y-2)^2=3$$
$$\Leftrightarrow 2x^2+2y^2-2x-4y=-2\Leftrightarrow x^2+y^2-x-2y=-1 \quad .$$

On écrit alors (forme canonique d'un polynôme du second degré) :

$x^2-x=(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}$ et $y^2-2y=(y-1)^2-1$ pour obtenir que :

$$AM^2+BM^2=3\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{1}{4} \quad .$$

On reconnaît alors l'équation du cercle de centre $(\frac{1}{2},1)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

IV) *Équation* $z^n=a.$

On s'intéresse au problème suivant : étant donnés un entier naturel <u>non nul</u> n et un nombre complexe $a\neq 0$, résoudre l'équation d'inconnue $z\in\mathbb{C}$:

$$(E) \quad : \quad z^n=a.$$

Nous verrons dans le chapitre sur les polynômes le problème plus général suivant : résoudre l'équation d'inconnue $z\in\mathbb{C}$: $P(z)=0$ où P est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$. Une propriété remarquable est que cette dernière équation possède toujours au moins une solution complexe. Dans le cas précis de l'équation (E) , il y en a exactement n différentes.

IV.1) Résultat théorique

Théorème 1 : l'équation (E) admet exactement n solutions complexes de même module. Si $n=2$, ces 2 solutions sont opposées, et si $n\geq 3$, ces n solutions forment un polygone régulier de centre O.

Remarque : la non unicité des solutions nous interdit de définir $z=\sqrt[n]{a}$ dans le cas où $a\notin\mathbb{R}^+$.
Par exemple, si $n=2$ et $a=-1$, il n'y a pas de sens à parler de « $\sqrt{-1}$ » qui pourrait valoir tout aussi bien j ou $-j$! L'application $\sqrt{\ }$ n'est pas définie de façon univoque sur $\mathbb{C}$.
De toute façon, il n'existe pas de fonction f définie sur $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ telle que $\forall z\in\mathbb{C},\ f(z^2)=z$. En effet, on aurait :

$$-1=f((-1)^2)=f(1)=f(1^2)=1$$

ce qui est absurde.

Preuve : Puisque $a\neq 0$ on peut considérer sa forme exponentielle $a=re^{j\theta}$. Soit $z\neq 0$ (un nombre complexe nul ne peut pas être solution de (E) car $a\neq 0$.) Alors :

$$z^n=a \Leftrightarrow |z|^n=r \text{ et } n\operatorname{Arg}(z)=\theta+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$$
$$z^n=a \Leftrightarrow |z|=\sqrt[n]{r} \text{ et } \operatorname{Arg}(z)=\frac{\theta}{n}+2k\frac{\pi}{n} \quad (k\in\mathbb{Z}) \quad .$$

Un angle étant défini à 2π près ,si nous avons une seule possibilité pour $|z|$ nous en avons n différentes pour $\operatorname{Arg}(z)$: $\frac{\theta}{n},\frac{\theta+2\pi}{n},\frac{\theta+4\pi}{n},\ldots,\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n.}$. On les obtient en prenant n valeurs consécutives pour le paramètre entier k (on a pris ici $k=0,1,\ldots,n-1$.) Nous avons donc exactement n solutions.

IV.2) Mise en pratique par un exemple

Résoudre l'équation $z^3=1+j$.
Le théorème 1 nous dit qu'il y a 3 solutions.
On s'inspire de la preuve du Théorème 1 : ici $r=\sqrt{2}$ et $\theta=\frac{\pi}{4}$ donc $|z|=\sqrt[3]{\sqrt{2}}=\sqrt[6]{2}$ et

$\theta=\frac{\pi}{12},\ \frac{9\pi}{12}=\frac{3\pi}{4},\ \frac{17\pi}{12}$. Nous avons donc les trois solutions

$z=\sqrt[6]{2}e^{j\frac{\pi}{12}},\ z=\sqrt[6]{2}e^{3j\frac{\pi}{4}}$ et $z=\sqrt[6]{2}e^{17j\frac{\pi}{12}}$.

IV.3) Cas particulier $n=2$

L' inconvénient majeur de la méthode générale présentée ci-dessus est qu'elle nécessite la connaissance explicite de la forme exponentielle du nombre a, et en particulier une expression de son argument. Dans le cas où $n=2$, on peut procéder autrement lorsque la forme exponentielle du nombre a n'est pas explicitement connue : on obtient de plus directement les formes algébriques des solutions à l'aide de la fonction racine carrée.

Exemple : Résoudre l'équation $z^2=1+2j$.

Le théorème 1 nous dit qu'il y a 2 solutions opposées.
On a ici $r=\sqrt{5}$ mais la connaissance explicite de θ n'est pas possible (à part si l'on utilise des fonctions trigonométriques inverses) .
Cherchons alors la forme algébrique de z : $z=x+jy$.
On remarque que, comme dans la preuve du Théorème 1, $|z|=\sqrt{r}$ donc $|z|=\sqrt{\sqrt{5}}=\sqrt[4]{5}$ d'où en élevant au carré :

$$x^2+y^2=\sqrt{5}.$$

Ensuite en développant le carré,

$$z^2=1+2j \Leftrightarrow x^2-y^2+2jxy=1+2j \Leftrightarrow x^2-y^2=1 \text{ et } 2xy=2.$$

On a donc trois équations à deux inconnues : $x^2+y^2=\sqrt{5},\quad x^2-y^2=1,\quad xy=1$.
En ajoutant et retranchant les deux premières équations on trouve : $x^2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $y^2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ d'où l'on obtient 4 premières possibilités pour z : $z=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\pm j\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$ (2 possibilités pour la partie réelle et deux pour la partie imaginaire). C'est là qu'intervient la troisième équation qui implique que $xy>0$ ce qui veut dire que x et y sont de même signe.
Il nous reste alors les deux solutions attendues :

$$z=\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}+j\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \text{ ou } z=-\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}-j\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \quad .$$

V) Équation du second degré à coefficients complexes.

A l'instar de l'équation polynomiale étudiée dans la partie IV), nous nous intéressons au cas de l'équation d'inconnue $z\in\mathbb{C}$: $P(z)=0$ où *P* est un polynôme du second degré à coefficients dans $\mathbb{C}$.

V.1) Résultats généraux

Étant donnés trois nombres complexes $a\neq 0$, *b* et *c*, on cherche à résoudre cette fois l'équation d'inconnue *z* : (E) : $a z^2+b z+c=0$

Définition 11 : on appelle **discriminant** de l'équation (E) le nombre complexe $\Delta=b^2-4\text{ac}$. On désignera par δ une solution complexe de l'équation $\delta^2=\Delta$.

Remarque : Si $\Delta\neq 0$ il y a deux possibilités pour le choix de δ .

Par exemple, pour l'équation (E) : $z^2+(1+j)z+2\text{j}=0$, le discriminant vaut $\Delta=(1+j)^2-4*2\text{j}=-6j=6e^{3\text{j}\frac{\pi}{2}}$. On trouve alors un $\delta=\sqrt{6}e^{j3\frac{\pi}{4}}$ (on prend la racine carrée du module de Δ et on divise son argument par 2). On peut réécrire aussi ce nombre sous la forme algébrique : $\delta=\sqrt{6}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}+j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{3}(-1+j)$.

Théorème 2 : l'équation (E) possède une ou deux solution(s) complexe(s). Plus précisément :

si $\Delta=0$ alors, (E) admet comme unique solution $z=\frac{-b}{2a}$

si $\Delta\neq 0$ alors, (E) admet exactement deux solutions $z_1=\frac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2=\frac{-b+\delta}{2a}$

Remarque : il y a toujours au moins une solution dans $\mathbb{C}$ mais pas forcément dans $\mathbb{R}$, même si *a, b* et *c* sont réels.

Par exemple, pour l'équation déjà considérée ci-dessus : (E) : $z^2+(1+j)z+2\text{j}=0$, on trouve deux racines qui sont $z_1=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}-\frac{1+\sqrt{3}}{2}j$ et $z_2=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}+\frac{-1+\sqrt{3}}{2}j$.

Preuve : on commence par démontrer une formule très utile en soi, car elle permet de mettre un polynôme du second degré sous forme canonique (vous pouvez l'apprendre comme une identité remarquable):

Lemme : *Soit* $\alpha\in\mathbb{C}$. *Alors* $\forall x\in\mathbb{C}$, $x^2+\alpha x=\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)^2-\frac{\alpha^2}{4}$

Cela se prouve en développant le second membre.
On revient à notre équation (E) : grâce au lemme, on a :

$$a z^2+b z+c=0\Leftrightarrow z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a}=0 \text{ (car } a\neq 0 \text{)}$$

$$\Leftrightarrow\left(z+\frac{b}{2\text{a}}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=0 \text{ (lemme)}$$

$$\Leftrightarrow\left(z+\frac{b}{2\mathrm{a}}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}=\frac{\Delta}{4a^2}\quad(1)$$. On a deux cas :

Si $\Delta=0$: l'équation (1) donne $\left(z+\frac{b}{2\mathrm{a}}\right)^2=0$ c'est à dire $z+\frac{b}{2\mathrm{a}}=0$ donc $z=\frac{-b}{2a}$.

Si $\Delta\neq0$: l'équation (1) donne $\left(z+\frac{b}{2\mathrm{a}}\right)^2=\frac{\delta^2}{4a^2}\Leftrightarrow\left(z+\frac{b}{2\mathrm{a}}\right)^2-\frac{\delta^2}{4a^2}=0$

$\Leftrightarrow\left(z+\frac{b}{2\mathrm{a}}-\frac{\delta}{2a}\right)\left(z+\frac{b}{2\mathrm{a}}+\frac{\delta}{2a}\right)=0$ (troisième identité remarquable)

$z=\frac{-b-\delta}{2a}$ ou $z=\frac{-b+\delta}{2a}$ grâce à la propriété 3.

V.2) Cas particuliers importants:

(i) $a,b,c\in\mathbb{R}$ et $\Delta<0$.

Dans ce cas, on vérifie que l'on peut prendre $\delta=j\sqrt{-\Delta}$. En effet,
$\delta^2=(j\sqrt{-\Delta})^2=j^2\sqrt{-\Delta}^2=(-1).(-\Delta)=\Delta$.
Les solutions données par le théorème 2 deviennent alors $z_1=\frac{-b-j\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2=\frac{-b+j\sqrt{-\Delta}}{2a}$. Il est important de remarquer que, dans ce cas, on obtient deux solutions conjuguées, de partie réelle $\frac{-b}{2a}$ et de partie imaginaire $\pm\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$. Elles ne sont donc pas réelles.

(ii) $a,b,c\in\mathbb{R}$ et $\Delta>0$.

Dans ce cas, on vérifie que l'on peut prendre $\delta=\sqrt{\Delta}$. Les solutions données par le théorème 2 deviennent alors $z_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$. Les deux solutions sont réelles.

VI) Exercices

Exercice 1

1) Représenter dans le plan complexe les nombres suivants :

a) $z=1+2j$.

b) Le nombre complexe z de module 2 et d'argument $\frac{\pi}{4}$.

b) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j$.

2) Définir à l'aide d'un dessin la région du plan complexe dans laquelle se situent les nombres complexes qui vérifient :

a) $|z-1-j|\leq 1$

b) $\operatorname{Re}(z)>2$.

c) $1<\operatorname{Im}(z)<2$

d) $\operatorname{Re}(z)+\operatorname{Im}(z)=1$.

e) $z=\overline{z}$

f) $(1+2j)z\in\mathbb{R}$.

Exercice 2

Calculer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

a) $z=\frac{1}{1+2j}$

b) $z=\frac{2+3j}{3+2j}$

c) $\frac{x+jy}{3-4j}$

d) j^{n^2} pour $n\in\mathbb{N}$ (discuter selon que n est pair ou impair)

Exercice 3

Soit $a\in\mathbb{R}$ et l'équation $z^2+2az+1=0$.

1) Pour quelles valeurs de a l'équation admet-elle des solutions non réelles ?

2) Pour les valeurs de a trouvées dans la question précédente, prouver que les solutions de l'équation sont de module 1.

Exercice 4

Trouver tous les nombres complexes non nuls z tels que z^2 et $\frac{1}{z^3}$ soient conjugués.

Exercice 5

Trouver la forme exponentielle des nombres complexes suivants :

a) $z=-1$

b) $z=-3j$

c) $z=1+j$

d) $z=-\sqrt{6}+j\sqrt{2}$

e) $z=je^{-j\frac{\pi}{5}}$

f) $z=(1+j\sqrt{3})^8$

Exercice 6

Soit $P(z)=z^2+4z+2$.

1) Montrer que $P(e^{j\theta})=e^{j\theta}((4+3\cos(\theta))-j\sin(\theta))$.

2) En déduire que $|P(e^{j\theta})|^2=8\cos^2(\theta)+24\cos(\theta)+17$.

3) Soit $Q(t)=8t^2+24t+17$.

a) Montrer que Q est strictement croissante sur $[-1;1]$.

b) En déduire que $\forall\theta\in\mathbb{R},\ 1\leq|P(e^{j\theta})|\leq 7$

Exercice 7

a) Soit un nombre complexe de module 1 $z=e^{j\theta}$. Démontrer que si $z\neq-1$, $\dfrac{z-1}{z+1}$ est imaginaire pur.

b) Inversement, montrer que si m est un nombre complexe imaginaire pur, alors l'équation d'inconnue z :

$\dfrac{z-1}{z+1}=m$ admet une seule solution z, et que cette dernière est de module 1.

Exercice 8

Résoudre les équations d'inconnue z suivantes :

1) $e^z=2j$
2) $e^z=1+j$
3) $z^4=j$
4) $\bar{z}=\dfrac{j}{z^4}$
5) $e^z=3e^{1+j}$
6) $z^6=e^{3+2j}$

Exercice 9

1) Dans cette question, on s'intéresse à l'équation : $(a+jb)^2=\dfrac{-4+3j}{8}$, avec $a,b\in\mathbb{R}$.

a) En raisonnant sur les modules, montrer que $a^2+b^2=\dfrac{5}{8}$.

b) En raisonnant sur les parties réelles et imaginaires, montrer que $a^2-b^2=\dfrac{-1}{2}$ et que $ab>0$.

c) En déduire les deux valeurs possibles du nombre complexe $a+jb$.

Le but de la suite de cet exercice est de résoudre l'équation $e^z+e^{-z}=\dfrac{3+j}{2}$.

2) On pose $X=e^z$. Vérifier que $X^2-\left(\dfrac{3+j}{2}\right)X+1=0$.

3) Déduire de la question précédente que $\left(X-\dfrac{3+j}{4}\right)^2=\dfrac{-4+3j}{8}$.

4) A l'aide du 1), trouver la ou les valeurs de X.

5) Résoudre enfin l'équation $e^z+e^{-z}=\dfrac{3+j}{2}$.

Exercice 10

Montrer que quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\left(1+e^{j\frac{\pi}{n}}\right)^n$ est imaginaire pur.

Exercice 11

Soit $z_0 = e^{j\frac{\pi}{10}}$.

1) Calculer la forme exponentielle de $z_0^2 + a\,z_0 + 1$ si $a > 0$.

2) Calculer le module de $z_0^2 + z_0 - 1$.

3) De manière générale, montrer que $\forall z \in \mathbb{C}$ avec $|z| = 1$, on a $|z^2 + z - 1| \geqslant 1$.

Exercice 12

Résoudre l'équation d'inconnue z $e^{2z} = 2(e^z - 1)$.

Exercice 13

Trouver tous les nombres complexes z vérifiant $|z-1| = |z-j| = \sqrt{13}$

(*) Exercice 14

1) Pour quelles valeurs de θ a-t-on $|\exp(e^{j\theta})| = 1$?

2) Montrer que $\exp(e^{j\theta})$ n'est jamais imaginaire pur.

3) Existe-t-il des nombres complexes z de module $|z| = 2020$ tels que $\exp(z)$ soit imaginaire pur ? Si oui, combien ?

Exercice 15

Soit un nombre complexe $z \notin \mathbb{R}$. On suppose que $\mathrm{Re}(z) = -1$. Montrer que les points d'affixes 1, z et z^2 forment un triangle rectangle en 1.

Exercice 16

Soit $a \in [0, 2\pi[$.

1) Vérifier que $1 + e^{ja} = 2\cos\left(\frac{a}{2}\right)e^{j\frac{a}{2}}$.
2) Trouver toutes les valeurs de a telles que $|1 + e^{ja}| = 1$
3) Montrer que, quel que soit l'entier naturel n non nul, $\left(1 + e^{j\frac{\pi}{n}}\right)^n$ est imaginaire pur.

(*) Exercice 17

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. On s'intéresse à l'équation (E) : $(z+1)^n = z^n$.

1) a) Vérifier que si $n=2$ et $n=3$, l'équation (E) se réécrit respectivement sous la forme $2z + 1 = 0$ et $3z^2 + 3z + 1 = 0$.
 b) Résoudre alors (E) dans les cas $n=2$ et $n=3$.

2) a) Montrer que si $z \in \mathbb{C}$ est solution de (E), alors $OM = BM$ où O, B et M sont les points d'affixes respectives 0, -1 et z dans le plan complexe.
 b) Montrer alors que si z est solution de (E), alors $\mathrm{Re}(z) = -\frac{1}{2}$.

3) Prouver qu'il y a n-1 solutions distinctes de (E), et qu'elle s'écrivent sous la forme :

$$z=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}j\right) \quad \text{pour} \quad k\in\{1,\dots,n-1\}.$$

Exercice 18

1) Développer et réduire $(z-1)(1+z+z^2+z^3+z^4)$
2) En déduire que :
   a) $1+e^{j2\frac{\pi}{5}}+e^{j4\frac{\pi}{5}}+e^{j6\frac{\pi}{5}}+e^{j8\frac{\pi}{5}}=0$
   b) $1+\cos\left(2\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(4\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(6\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(8\frac{\pi}{5}\right)=0$
3) Vérifier que $\cos\left(2\frac{\pi}{5}\right)=\cos\left(8\frac{\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(4\frac{\pi}{5}\right)=\cos\left(6\frac{\pi}{5}\right)$.
4) En utilisant la formule d'Euler, montrer que $\cos\left(4\frac{\pi}{5}\right)=2\cos^2\left(2\frac{\pi}{5}\right)-1$.
5) Déduire des questions précédentes la valeur exacte de $\cos\left(2\frac{\pi}{5}\right)$.

(*) Exercice 19

Soit $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$. Le but de cet exercice est de déterminer si les équations d'inconnues $z\in\mathbb{C}$:

(E_1): $z^n+z+1=0$ et (E_2): $z^n-z-1=0$

possèdent des solutions de module 1, et si oui, les déterminer.

Dans tout l'exercice, on pose $z=e^{j\theta}$, avec $\theta\in]-\pi;\pi]$.

A) *Questions préliminaires.*

1) Montrer qu'on peut supposer que $\theta\neq\pi$.
2) Vérifier que pour les équations (E_1) et (E_2) , z est solution si et seulement si $\bar{z}$ l'est aussi. En déduire qu'on peut se restreindre au cas $\theta\in]0;\pi[$.
3) Montrer que $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)>0$.
4) Déterminer à l'aide de θ le module et un argument de $1+z$ pour $z=e^{j\theta}$, avec $\theta\in]0;\pi[$.

B) *Équation* (E_2)

On suppose ici que z est une solution de module 1 de (E_2) .

1) A l'aide du calcul du module de $1+z$, montrer que $\theta=\frac{2\pi}{3}$.
2) A l'aide du calcul d'un argument de $1+z$, montrer que θ est de la forme $\theta=\frac{4k\pi}{2n-1}$ où $k\in\mathbb{Z}$.
3) En déduire que nécessairement, $6k=2n-1$. .En déduire en raisonnant par l'absurde que z n'existe pas !

C) *Équation* (E_1)

On suppose ici que z est une solution de module 1 de (E_1) .

1) Prouver que z solution de (E_1) équivaut à : $e^{j(n-\frac{1}{2})\theta}=-2\cos(\frac{\theta}{2})$

2) En déduire que $\theta=\frac{2\pi}{3}$ (on pourra raisonner sur les modules dans le résultat de la question précédente).

3) En travaillant sur les arguments dans la relation de la question 1), prouver que n est de la forme $n=3k+2$ avec $k\in\mathbb{N}$.

4) Réciproquement, montrer que si n est de la forme $n=3k+2$ avec $k\in\mathbb{N}$, , alors $e^{2j\frac{\pi}{3}}$ et $e^{-2j\frac{\pi}{3}}$ sont les seules solutions de module 1 de (E_1) .

Exercice 20

1) Vérifier que $(2-j)^2=3-4j$.

2) On veut résoudre l'équation $z^2-3jz+(-3+j)=0$.

a) Calculer Δ.

b) En utilisant le résultat de la question 1), trouver les solutions de cette équation.

c) Soit z_1 la solution de partie réelle positive et z_2 la solution de partie réelle négative. Soient M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z_1 et z_2 et O le point d'affixe 0.On pose $\theta=(\overrightarrow{OM_1},\overrightarrow{OM_2})$. Calculer $\cos(\theta)$.

Exercice 21

Montrer à l'aide des formules d'Euler que

$$\forall t\in\mathbb{R},\ \sin^2(t)\cos(3t)=-\frac{1}{4}\cos(t)+\frac{1}{2}\cos(3t)-\frac{1}{4}\cos(5t)$$

Exercice 22

Résoudre l'équation $z^2-(1+j)z+2-j=0$. On écrira la ou les solutions sous forme algébrique.

Exercice 23

Résoudre $\cos(2x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ pour $x\in[-\pi;\pi]$.

Exercice 24

Soit $\theta\in]0;2\pi[$. Posons $z=\frac{1+e^{j\theta}}{1-e^{j\theta}}$.

1) Montrer que z est imaginaire pur.
2) On suppose que $z=3j$. Calculez les valeurs exactes de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

(*) Exercice 25

On travaille dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{u};\vec{v})$. Soit C le cercle trigonométrique, et soient A et B les points d'affixes respectives $z_A=1+j$ et $z_B=1-j$.
Soit M un point de C d'affixe $e^{j\theta}$.

But du problème : *Comment construire* $M \in C$ *de sorte que le produit* $MA.MB$ *soit minimal ?*

1° Calculer la valeur exacte du produit $MA.MB$ dans les cas particuliers suivants :

a) M est le point d'affixe $z=1$
b) M est le point d'affixe $z=j$
c) M est le point d'affixe $z=e^{j\frac{\pi}{4}}$

On considère , pour $z\in\mathbb{C}$, le polynôme $P(z)=z^2-2z+2$

2° Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$. Que remarque-t-on ?

3° Soit M un point de C d'affixe $e^{j\theta}$.

a) Vérifier que $MA.MB=|P(e^{j\theta})|$ (*on rappelle que d'après le cours, on a :* $MA=|z_M-z_A|$ *et que* $MB=|z_M-z_B|$).

b) En utilisant la formule $z\bar{z}=|z|^2$ ainsi que les formules d'Euler , montrer que : $|P(e^{j\theta})|^2=4\cos(2\theta)-12\cos(\theta)+9$.

c) A l'aide du formulaire, en déduire que $|P(e^{j\theta})|^2=8\cos^2(\theta)-12\cos(\theta)+5$.

4° On considère la fonction *f* définie pour $t\in[-1\,;1]$ par l'expression $f(t)=8t^2-12t+5$.

a) Etablir le tableau de variations de *f* sur l'intervalle $[-1\,;1]$
b) En déduire la valeur que doit avoir $\cos(\theta)$ pour que l'expression $|P(e^{j\theta})|^2=8\cos^2(\theta)-12\cos(\theta)+5$ soit minimale.
c) Conclure : quelle doit être l'abscisse du point $M\in C$ pour que la quantité $MA.MB$ soit minimale ? Quelle est donc la valeur minimale de ce produit ?

Exercice 26
On travaille dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{u}\,;\vec{v})$. Soit $\vec{w}$ le vecteur d'affixe $2+3j$. Si M est un point d'affixe, *z* on définit M' le point d'affixe z' de sorte que M' soit le symétrique de M par rapport à la droite $(O,\vec{w})$.

1) Si $M\notin(O,\vec{w})$, comparer les modules et les arguments de $\frac{z}{2+3j}$ et de $\frac{z'}{2+3j}$ (on les interprétera comme des rapports de longueurs et des mesures d'angles).
2) En déduire que si $M\notin(O,\vec{w})$, alors $z'=\frac{1}{13}(-5+12j)\bar{z}$. Montrer que cette relation reste vraie si $M\in(O,\vec{w})$.
3) Application, si $M(4\,;3)$ calculer les coordonnées de M' .

(*)Exercice 27
Résoudre les équations d'inconnue *z* :

1) $\dfrac{z+1}{\bar{z}-2}=1+j.$ 2) $\dfrac{z}{\bar{z}}=\dfrac{3+4j}{5}$ 3) $\dfrac{\bar{z}}{z^3}=\dfrac{1+j}{2\sqrt{2}}$ 4) $z^2=6\bar{z}-9$

5) Combien de solutions possède l'équation $z^2=6\bar{z}+a$ où a est un paramètre réel (discuter selon le paramètre a).

(*)Exercice 28

Dans le plan complexe, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A=1$ et $z_B=-1.$
Soit $\theta\in]-\pi,\pi]$. On s'intéresse dans cet exercice à l'ensemble des points M , différents de A et de B, et d'affixe *z* , tels que l'angle $(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA})$ soit égal à la constante θ . On appellera Γ_θ cet ensemble de points.

1) Décrire Γ_0 et Γ_π

On suppose à partir de maintenant que $\theta\neq 0$ et $\theta\neq\pi$.
2) Démontrer la relation (E) $\forall z\in\mathbb{C},\ (z-1)(\bar{z}+1)=|z|^2-1+2\,j\,\mathrm{Im}(z)$
3) Dans cette question, on suppose que $\theta=\dfrac{\pi}{2}$. Soit un point M d'affixe *z* . A l'aide de la relation *(E)* décrire géométriquement l'ensemble $\Gamma_{\frac{\pi}{2}}$. Décrire de même l'ensemble $\Gamma_{\frac{-\pi}{2}}$.

On revient maintenant au cas général.

4) Soit M un point d'affixe $z=x+jy$. A l'aide de la relation *(E)* , montrer que
$M\in\Gamma_\theta\Leftrightarrow\exists r>0:\ |z|^2=1+r\cos(\theta)$ et $\mathrm{Im}(z)=\dfrac{1}{2}r\sin(\theta)$

5) En déduire que $M\in\Gamma_\theta\Leftrightarrow x^2+y^2-2\dfrac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}y-1=0$ et y est du signe de $\sin(\theta)$.

6) Vérifier que $\forall x\in\mathbb{R},\forall y\in\mathbb{R}$, $x^2+y^2-2\dfrac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}y=x^2+\left(y-\dfrac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)^2-\dfrac{\cos^2(\theta)}{\sin^2(\theta)}$.
7) En déduire la nature géométrique de Γ_θ et préciser les paramètres associés. On distinguera les cas $\theta>0$ et $\theta<0$. Que se passe-t-il si θ tend vers 0 ?

Exercice 29
Soit $a\in\mathbb{C}$. Résoudre l'équation d'inconnue $z\in\mathbb{C}$ $z^2+az+a^2=0.$

(*) Exercice 30
Dans un repère orthonormé, on considère les points A et B de coordonnées $(1;0)$ et $(-1;0)$ respectivement. Soit $\lambda>0$ tel que $\lambda\neq 1.$
Démontrer que l'ensemble des points M vérifiant $AM=\lambda.BM$ est un cercle. Préciser son centre et son rayon.

(**) Exercice 31 (différentes structures algébriques de $\mathbb{C}$).
On considère une opération sur $\mathbb{C}$ que l'on notera par $*$ (c'est à dire une application qui à tout couple de nombres complexes $(z_1 ; z_2)$ associe un nombre complexe $z_1 * z_2$) vérifiant :

(i) $\forall z_1 \in \mathbb{C}, \forall z_2 \in \mathbb{C}, \ z_1 * z_2 = z_2 * z_1$. (commutativité)
(ii) $\forall z_1 \in \mathbb{C}, \forall z_2 \in \mathbb{C}, \forall t \in \mathbb{R}, \ z_1 * (t z_2) = t(z_1 * z_2)$.
(iii) $\forall z_1 \in \mathbb{C}, \forall z_2 \in \mathbb{C}, \forall z_3 \in \mathbb{C}, \ z_1 * (z_2 + z_3) = z_1 * z_2 + z_1 * z_3$ (distributivité)
(iv) $\forall z \in \mathbb{C}, \ 1 * z = z$. (élément neutre)

1) Montrer que $\forall s \in \mathbb{R}, \ \forall z \in \mathbb{C}, \ s * z = s z$.

2) On pose $j * j = \alpha + j \beta$. Montrer que :
$\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, \ (a + bj) * (c + dj) = (ac + \alpha bd) + j(ad + bc + \beta bd)$.
Cela montre que l'opération $*$ est parfaitement définie du moment que l'on connaît la forme algébrique de $j * j$. On admet (la vérification est possible mais fastidieuse via l'égalité ci-dessus) l'associativité de la multiplication, à savoir que
(v) $\forall z_1 \in \mathbb{C}, \forall z_2 \in \mathbb{C}, \forall z_3 \in \mathbb{C}, \ (z_1 * z_2) * z_3 = z_1 * (z_2 * z_3)$.

3) Dans cette question, on suppose que l'opération $*$ vérifie la condition supplémentaire
(vi) $\forall z_1 \in \mathbb{C}, \forall z_2 \in \mathbb{C}, \ |z_1 * z_2| = |z_1||z_2|$ .En travaillant sur les nombres $j * j$ et $(1 - j) * (1 + j)$, démontrer que $j * j = -1$. Quelle remarque peut-on faire ?

On dira que la multiplication * est intègre, si :
(vii) $\forall z_1 \in \mathbb{C}, \forall z_2 \in \mathbb{C}, \ z_1 * z_2 = 0 \Rightarrow (z_1 = 0 \text{ ou } z_2 = 0)$.

4) Prouver que $(vii) \Leftrightarrow \forall z_1 \in \mathbb{C}, \forall z_2 \in \mathbb{C}, \ (z_1 \neq 0 \text{ et } z_2 \neq 0) \Rightarrow z_1 * z_2 \neq 0$.
5) Vérifier que la propriété $(z_1 \neq 0 \text{ et } z_2 \neq 0) \Rightarrow z_1 * z_2 \neq 0$ est automatiquement vraie si $z_1 \in \mathbb{R}$ ou $z_2 \in \mathbb{R}$. En déduire que $(vii) \Leftrightarrow \forall z_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \forall z_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \ z_1 * z_2 \neq 0$.
6) Montrer que $(vii) \Leftrightarrow \forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \ (a + j) * (b + j) \neq 0$.
7) En déduire que (vii) équivaut à ce que le système $\begin{cases} a + b = -\beta \\ ab = -\alpha \end{cases}$ n'ait pas de couple solution $(a ; b)$ de nombres réels.
8) Montrer l'équivalence $\left(\exists a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R} \text{ t.q } \begin{cases} a + b = -\beta \\ ab = -\alpha \end{cases} \right) \Leftrightarrow 4\alpha + \beta^2 \geq 0$.
9) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur α et β pour que la multiplication * soit intègre.

On dira que la multiplication * vérifie la propriété d'inversion si
$(viii)$ $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \exists z' \in \mathbb{C}, \text{ t.q } z * z' = 1$

10) Dans cette question, on suppose que la multiplication * vérifie la propriété d'inversion $(viii)$. .
a) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et soient $z'_1 \in \mathbb{C}$ et $z'_2 \in \mathbb{C}$ tels que $z * z'_1 = z * z'_2 = 1$ .En considérant la quantité $z'_1 * (z * z'_2)$ et la propriété d'associativité (v) , montrer que $z'_1 = z'_2$. Le nombre $z'_1 = z'_2$ sera appelé inverse de *z* pour la multiplication *.
b) Soient $z_1 \in \mathbb{C}, z_2 \in \mathbb{C}$ tels que $z_1 \neq 0$ et $z_2 \neq 0$. En utilisant les inverses de z_1 et z_2 , montrer par l'absurde que $z_1 * z_2 \neq 0$. En déduire que le produit * est intègre.

11) On suppose dans cette question que le produit * vérifie la propriété (vii) c'est à dire qu'il est intègre.
a) Montrer que tout réel non nul possède un inverse pour le produit *.

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $z = a + bj$ sa forme algébrique, avec donc $b \neq 0$.

b) Démontrer qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $z*(t+j) \in \mathbb{R}$. Montrer en utilisant la propriété (vii) qu'alors $z*(t+j) \neq 0$.
c) En déduire que z possède un inverse que l'on exprimera en fonction de a, b, α et β.

12) Conclure quant aux propriétés (vii) et $(viii)$.

Exercice 32 (*impédances*)

En électricité, on travaille avec des impédances qui correspondent mathématiquement à des nombres complexes de partie réelle positive ou nulle .
Une impédance *Z* sera dite capacitive si $\mathrm{Im}(Z) < 0$ et inductive si $\mathrm{Im}(Z) > 0$.

Remarque : en fait, la partie imaginaire d'une impédance dépend d'un paramètre ν correspondant physiquement à la fréquence des tensions et intensités de courant sinusoïdales considérées. Ici, nous nous plaçons dans le cadre d'un régime purement sinusoïdal de pulsation fixe afin de simplifier les calculs et d'avoir des impédances de valeur complexe fixe, bien qu'il soit, en pratique, nécessaire de tenir compte de la dépendance par rapport à la fréquence à laquelle on se place.

1) On considère deux impédances Z_1 et Z_2 .
a) Est ce que le nombre complexe $Z_1 + Z_2$ est une impédance ? Justifier.
b) Même question pour le nombre complexe $Z_1 . Z_2$.

2) Dans cette question, on considère les deux impédances Z_1 et Z_2 et l'on suppose que $Z_1 \neq 0$ et $Z_2 \neq 0$
a) Montrer que les nombres complexes $\frac{1}{Z_1}$ et $\frac{1}{Z_2}$ sont des impédances.
b) En déduire qu'il en est de même de $\frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$.

3) Montrer que si Z_1 et Z_2 sont inductives, alors $\frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$ l'est aussi, (ce qui s'interprète en disant que l'association en parallèle d'impédances inductives est équivalente à une impédance inductive).

4) Même question si Z_1 et Z_2 sont capacitives.

5) On suppose dans cette question que $Z_1 = 2 - 3j$ (impédance capacitive) et que que $Z_2 = 1 + aj$ pour un certain nombre réel $a > 0$ (impédance inductive).
Pour quelles valeurs de $a > 0$ l'association en parallèle des impédances Z_1 et Z_2 est-elle inductive, c'est à dire que $\mathrm{Im}\left(\frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}\right) > 0$?

6) Dans cette question, on considère $z \neq -1$ un nombre complexe non nul et θ la mesure principale de son argument. On suppose que $\pi \geqslant \theta \geqslant 0$. Notre but est de montrer que $\mathrm{Arg}(1+z) \in [0 ; \theta]$ à 2π près. Appelons θ' la mesure principale de $1+z$.

a) Montrer que $\theta' \geqslant 0$.

b)Prouver que $\theta-\theta'=\operatorname{Arg}\left(z+|z|^{2}\right)$ à 2π près. En déduire que $\theta' \in[0;\theta]$

(*) 7) On considère deux impédances Z_1 et Z_2 <u>non nulles</u> et soient θ_1, θ_2 les mesures principales respectives de leurs arguments. Sans perte de généralité (quitte à permuter les rôles de Z_1 et Z_2) on supposera que $\theta_1 \leqslant \theta_2$.

A l'aide du résultat de la question 6), montrer que si $Z_1+Z_2 \neq 0$, alors $\operatorname{Arg}\left(Z_1+Z_2\right) \in[\theta_1;\theta_2]$ à 2π près et que $\operatorname{Arg}\left(\dfrac{Z_1 Z_2}{Z_1+Z_2}\right) \in[\theta_1;\theta_2]$ à 2π également.

(On pourra considérer $z=\dfrac{Z_2}{Z_1}$).

(*) 8) On considère deux impédances Z_1 et Z_2 et on pose $R_1=\operatorname{Re}(Z_1)$ et $R_2=\operatorname{Re}(Z_2)$: ces deux réels correspondent à ce que l'on appelle les parties résistives de Z_1 et Z_2 . On suppose $R_1>0$ et $R_2>0$ (c'est à dire que les parties résistives sont non nulles).

Le but de cette dernière question est d'affiner le résultat trouvé au 2)b) en montrant que la partie résistive de l'association en parallèle des deux impédance Z_1 et Z_2 est toujours au moins égale à la résistance équivalente à la mise en parallèle de R_1 et R_2 c'est à dire que

$$\operatorname{Re}\left(\frac{Z_1 Z_2}{Z_1+Z_2}\right) \geqslant \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}.$$

a) Montrer qu'il existe α et β tels que $Z_1=R_1(1+j\alpha)$ et $Z_2=R_2(1+j\beta)$.

b) Vérifier que $\operatorname{Re}\left(\dfrac{Z_1 Z_2}{Z_1+Z_2}\right)-\dfrac{R_1 R_2}{R_1+R_2}=-\dfrac{R_1 R_2}{R_1+R_2}\left(\dfrac{(m-\alpha)(m-\beta)}{1+m^2}\right)$

où $m=\dfrac{\alpha R_1+\beta R_2}{R_1+R_2}$.

c) Montrer que *m* est compris entre α et β . Conclure .

d) En considérant le cas particulier où $Z_1=R_1+jnR_2$ et $Z_2=R_2-jnR_1$ avec *n* un entier naturel, montrer que pour $R_1>0$ et $R_2>0$ fixés, on ne peut pas trouver de constante *C* qui ne dépend que de R_1 et de R_2 et telle que $\operatorname{Re}\left(\dfrac{Z_1 Z_2}{Z_1+Z_2}\right) \leqslant C$. Interprétation physique ?

(*) 9) Dans cette question, on considère que l'impédance Z_1 est fixée à une certaine valeur complexe telle que $\operatorname{Re}(Z_1)>0$. On lui associe en parallèle une impédance Z quelconque (mais de partie réelle strictement positive). On s'intéresse ici à l'ensemble des valeurs possibles de l'impédance équivalente à l'association en parallèle de Z_1 et de Z . Mathématiquement, cela revient à considérer l'ensemble des nombres complexes de la forme $\left\{\dfrac{Z Z_1}{Z+Z_1} \,/\, Z \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re}(Z)>0\right\}$.

Soit $Z \in \mathbb{C}$, tel que $\operatorname{Re}(Z)>0$. Posons $\dfrac{Z Z_1}{Z+Z_1}=a+bj$ avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que $Z_1 \neq a+bj$ et que $Z=\dfrac{Z_1(a+bj)}{Z_1-(a+bj)}$.

b) Prouver que la condition $\operatorname{Re}(Z)>0$ implique que $a.|Z_1|^2-\operatorname{Re}(Z_1)(a^2+b^2)>0$.

c) En déduire que l'image dans le plan complexe de $a+bj$ est à l'intérieur d'un cercle dont on précisera les coordonnées du centre et le rayon en fonction de $|Z_1|$ et de $\operatorname{Re}(Z_1)$.

d) Montrer que l'image dans le plan complexe de Z_1 appartient au cercle défini ci-dessus.

e) Montrer que réciproquement, si un nombre complexe $\alpha+\beta j$ est à l'intérieur du cercle déterminé dans la question précédente, alors $\alpha+\beta j \in \{\frac{Z Z_1}{Z+Z_1} \ / \ Z\in\mathbb{C},\ \mathrm{Re}(Z)>0\}$.

f) Déduire des questions précédentes que $\forall Z\in\mathbb{C},\ \mathrm{Re}(Z)>0 \Rightarrow \left|\frac{Z Z_1}{Z+Z_1}\right| \leqslant \frac{|Z_1|^2}{\mathrm{Re}(Z_1)}$.

VII) Corrigés

Exercice 1

1)

a) On trace le point de coordonnées (1;2)

b) On trace le point d'abscisse positive situé à l'intersection du cercle de centre O et de rayon 2 et de la droite d'équation $y=x$.

b) On trace le point d'abscisse égale à $\frac{1}{2}$ et d'ordonnée négative situé sur le cercle de centre O et de rayon 1.

2)

a) On trace le disque de centre $(1;1)$ et de rayon 1.

b) Demi-plan d'inéquation $x>2$.

c) Bande horizontale délimitée par les droites d'équation y=1 et y=2.

d) Droite d'équation $y=-x+1$.

e) Axe des nombres réels.

f) Droite d'équation $y=-2\mathrm{x}$.

Exercice 2

a) $z=\frac{1}{5}-\frac{2}{5}j$

b) $z=\frac{12}{13}+\frac{5}{13}j$

c) $\frac{x+jy}{3-4\mathrm{j}}$ $z=\frac{3\mathrm{x}-4\mathrm{y}}{25}+\frac{4\mathrm{x}+3y}{25}j$

d) Si n est pair, $j^{n^2}=1$ et si n est impair, $j^{n^2}=j$.

Exercice 3

1) On a $\Delta=4(a^2-1)$ donc l'équation admet des solutions non réelles si et seulement si $a\in]-1;1[$.

2) $z=-a\pm j\sqrt{1-a^2}$ donc $|z|^2=a^2+1-a^2=1$.

Exercice 4

Soit $z=re^{j\theta}$ la forme exponentielle de z avec $\theta\in[0;2\pi[$. On a $z^2=r^2e^{2\mathrm{j}\theta}$ et $\frac{1}{z^3}=\frac{1}{r^3}e^{-3\mathrm{j}\theta}$

conjugués ssi $r^2=\frac{1}{r^3}$ et $2\theta=-3\theta+2\mathrm{k}\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

Cela donne $z\in\{1;e^{\frac{2\pi}{5}j};e^{\frac{4\pi}{5}j};e^{\frac{6\pi}{5}j};e^{\frac{8\pi}{5}j}\}$.

Exercice 5

a) $z=e^{j\pi}$ b) $z=3e^{-j\frac{\pi}{2}}$ c) $z=\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$ d) $z=2\sqrt{2}e^{5\mathrm{j}\frac{\pi}{6}}$ e) $z=e^{3\mathrm{j}\frac{\pi}{10}}$ f) $z=256e^{2\mathrm{j}\frac{\pi}{3}}$

Exercice 6

1)
$$P(e^{j\theta})=e^{2j\theta}+4e^{j\theta}+2=e^{j\theta}\left(e^{j\theta}+4+2e^{-j\theta}\right)=e^{j\theta}\left(\cos(\theta)+j\sin(\theta)+4+2\cos(\theta)-2j\sin(\theta)\right)$$
$$=e^{j\theta}\left((4+3\cos(\theta))-j\sin(\theta)\right) \quad .$$

2)
$$\left|P(e^{j\theta})\right|^2=\left|e^{j\theta}\right|^2\left|(4+3\cos(\theta))-j\sin(\theta)\right|^2=\left(4+3\cos(\theta)\right)^2+\sin^2(\theta)=8\cos^2(\theta)+24\cos(\theta)+17$$
en utilisant la relation $\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)=1$.

3)

a) $\forall t\in[-1\,;1],\, Q'(t)>0$ donc la fonction Q est strictement croissante sur l'intervalle considéré.

b) D'après le 2), $\left|P(e^{j\theta})\right|^2=Q(\cos(\theta))$.

On a $-1\leq\cos(\theta)\leq 1$ et la fonction Q est strictement croissante sur l'intervalle $[-1\,;1]$ donc $Q(-1)\leq Q(\cos(\theta))\leq Q(1)$ c'est à dire $1\leq Q(\cos(\theta))\leq 49$ donc $1\leq\left|P(e^{j\theta})\right|^2\leq 49$ d'où $\forall\theta\in\mathbb{R},\ 1\leq\left|P(e^{j\theta})\right|\leq 7$.

Exercice 7

a) On a $\operatorname{Re}\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)=\dfrac{z-1}{z+1}+\overline{\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)}=\dfrac{z-1}{z+1}+\left(\dfrac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1}\right)=\dfrac{2|z|^2-2}{(z+1)(\bar{z}+1)}=0$ car $|z|=1$.

b) Si $m=ip$ avec $p\in\mathbb{R}$, alors $\dfrac{z-1}{z+1}=m=ip$ équivaut à $z=\dfrac{1+ip}{1-ip}$ ce qui donne une seule solution de module $|z|=\dfrac{|1+ip|}{|1-ip|}=\sqrt{\dfrac{1+p^2}{1+p^2}}=1$.

Exercice 8

1) $z=\ln(2)+j\left(\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right),\ k\in\mathbb{Z}.$

2) $z=\dfrac{\ln(2)}{2}+j\left(\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\right),\ k\in\mathbb{Z}.$

3) $z\in\{e^{j\frac{\pi}{8}};e^{5j\frac{\pi}{8}};e^{9j\frac{\pi}{8}};e^{13j\frac{\pi}{8}}\}$

4) $\bar{z}=\dfrac{j}{z^4}$ On cherche z non nul, donc on peut considérer sa forme exponentielle $z=re^{j\theta}$.

On montre que $\bar{z}=\dfrac{j}{z^4}\Leftrightarrow r^5e^{3j\theta}=e^{j\frac{\pi}{2}}\Leftrightarrow r=1$ et $\theta=\dfrac{\pi}{6},\,5\dfrac{\pi}{6},\,9\dfrac{\pi}{6}$ donc $z\in\{e^{j\frac{\pi}{6}};e^{5j\frac{\pi}{6}};e^{3j\frac{\pi}{2}}\}$

5) $z=1+\ln(3)+j(1+2k\pi),\ k\in\mathbb{Z}.$

6) $z\in\{e^{\frac{1}{2}+\frac{j}{3}};e^{\frac{1}{2}+\frac{j}{3}(1+\pi)};e^{\frac{1}{2}+\frac{j}{3}(1+2\pi)};e^{\frac{1}{2}+\frac{j}{3}(1+3\pi)};e^{\frac{1}{2}+\frac{j}{3}(1+4\pi)};e^{\frac{1}{2}+\frac{j}{3}(1+5\pi)}\}$

Exercice 9

1)

a) $a^2+b^2=|a+jb|^2=|(a+jb)^2|=\left|\frac{-4+3j}{8}\right|=\frac{5}{8}$.

b) $(a+jb)^2=\frac{-4+3j}{8}\Leftrightarrow a^2-b^2+2abj=\frac{-4+3j}{8}$.

En égalant les parties réelles et imaginaires de cette égalité, on obtient $a^2-b^2=\frac{-1}{2}$ et $ab=\frac{3}{16}>0$.

c) On a donc le système $\begin{cases} a^2+b^2=\frac{5}{8} \\ a^2-b^2=\frac{-1}{2} \end{cases}$ qui donne $a=\frac{\pm 1}{4}$ et $b=\frac{\pm 3}{4}$. La condition $ab=\frac{3}{16}>0$ montre que *a* et *b* ont les mêmes signes, ce qui donne les deux possibilités $z=\pm\left(\frac{1+3j}{4}\right)$.

2) $e^z+e^{-z}=\frac{3+j}{2}\Leftrightarrow X+\frac{1}{X}=\frac{3+j}{2}\Leftrightarrow X^2-\left(\frac{3+j}{2}\right)X+1=0$.

3) En développant, on a :

$\left(X-\frac{3+j}{4}\right)^2=X^2-\frac{3+j}{2}X+\frac{8+6j}{16}=\left(X^2-\frac{3+j}{2}X\right)+\frac{8+6j}{16}=-1+\frac{8+6j}{16}$ d'après le 2)

ce qui donne $\left(X-\frac{3+j}{4}\right)^2=\frac{-4+3j}{8}$.

4) D'après le 1), $\left(X-\frac{3+j}{4}\right)^2=\frac{-4+3j}{8}$ signifie que $X-\frac{3+j}{4}=\pm\left(\frac{1+3j}{4}\right)$. On obtient les deux solutions $X_1=1+j$ et $X_2=\frac{1}{2}-\frac{j}{2}$.

5) D'après les questions précédentes, $e^z+e^{-z}=\frac{3+j}{2}$ équivaut à ce que $e^z=X_1=1+j$ ou $e^z=X_2=\frac{1}{2}-\frac{j}{2}$. Cela donne $z=\frac{\ln(2)}{2}+j\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right),\ k\in\mathbb{Z}$ ou $z=\frac{-\ln(2)}{2}+j\left(\frac{-\pi}{4}+2k\pi\right),\ k\in\mathbb{Z}$.

Exercice 10

On a $1+e^{j\frac{\pi}{n}}=\left(e^{j\frac{\pi}{2n}}+e^{-j\frac{\pi}{2n}}\right)e^{j\frac{\pi}{2n}}=2\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)e^{j\frac{\pi}{2n}}$ donc

$\left(1+e^{j\frac{\pi}{n}}\right)^n=2^n\cos^n\left(\frac{\pi}{2n}\right)e^{j\frac{\pi}{2}}=2^n\cos^n\left(\frac{\pi}{2n}\right)j$ qui est bien imaginaire pur.

Exercice 11

Soit $z_0=e^{j\frac{\pi}{10}}$.

1) $z_0^2+az_0+1=z_0\left(a+z_0+\dfrac{1}{z_0}\right)=e^{j\frac{\pi}{10}}\left(a+e^{j\frac{\pi}{10}}+e^{-j\frac{\pi}{10}}\right)=\left(a+2\cos\left(\dfrac{\pi}{10}\right)\right)e^{j\frac{\pi}{10}}$.

On a $a>0$ et $\cos\left(\dfrac{\pi}{10}\right)>0$ car $\dfrac{\pi}{10}\in[0\,;\dfrac{\pi}{2}[$ donc $\left(a+2\cos\left(\dfrac{\pi}{10}\right)\right)e^{j\frac{\pi}{10}}$ est bien la forme exponentielle recherchée.

2) Par une méthode similaire au 1), on a $z_0^2+z_0-1=\left(1+2j\sin\left(\dfrac{\pi}{10}\right)\right)e^{j\frac{\pi}{10}}$ donc

$\left|z_0^2+z_0-1\right|=\left|1+2j\sin\left(\dfrac{\pi}{10}\right)\right|=\sqrt{1+4\sin^2\left(\dfrac{\pi}{10}\right)}$.

3) Par une méthode similaire au 2), on a, pour $z=e^{j\theta}$ avec $\theta\in\mathbb{R}$,

$\left|z^2+z-1\right|=\left|1+2j\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right|=\sqrt{1+4\sin^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}\geq 1$.

Exercice 12

Si on pose $X=e^z$, l'équation se ramène à $X^2-2X+2=0$. Cela donne $X=1\pm j$ donc

$z=\dfrac{\ln(2)}{2}+j\left(\dfrac{\pm\pi}{4}+2k\pi\right),\ k\in\mathbb{Z}$.

Exercice 13

On a $\begin{cases}|z-1|=\sqrt{13}\\|z-j|=\sqrt{13}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(z-1)(\bar{z}-1)=13\\(z-j)(\bar{z}+j)=13\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|z|^2-2\,\mathrm{Re}(z)=12\\|z|^2-2\,\mathrm{Im}(z)=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|z|^2-2\,\mathrm{Re}(z)=12\\\mathrm{Im}(z)=\mathrm{Re}(z)\end{cases}$.

En remarquant que $|z|^2=\mathrm{Re}^2(z)+\mathrm{Im}^2(z)$ on obtient

$\begin{cases}|z-1|=\sqrt{13}\\|z-j|=\sqrt{13}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\mathrm{Re}(z)^2-\mathrm{Re}(z)=6\\\mathrm{Im}(z)=\mathrm{Re}(z)\end{cases}$

d'où l'on obtient les deux solutions $z_1=-2(1+j)$ et $z_2=3(1+j)$.

Exercice 14

1) $\left|\exp(e^{j\theta})\right|=1\Leftrightarrow\exp(\mathrm{Re}(e^{j\theta}))=1\Leftrightarrow\exp(\cos(\theta))=1\Leftrightarrow\cos(\theta)=0\Leftrightarrow\theta=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

2) $\exp(e^{j\theta})=\exp(\cos(\theta)+j\sin(\theta))=\exp(\cos(\theta))(\cos(\sin(\theta))+j\sin(\sin(\theta)))$.

$\exp(e^{j\theta})$ est imaginaire pur si et seulement si $\cos(\sin(\theta))=0$ c'est à dire $\sin(\theta)=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. Cela est impossible car $\forall k\in\mathbb{Z},\left|\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right|\geq\dfrac{\pi}{2}>1$, et on a toujours $|\sin(\theta)|\leq 1$!

3) Posons cette fois $z=a+bj$. On a $\mathrm{Re}(\exp(z))=e^a\cos(b)$ donc $\exp(z)$ est imaginaire pur si et seulement si $b=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ pour un certain entier relatif *k*.

Ainsi, *z* est un nombre complexes *z* de module $|z|=2020$ tel que $\exp(z)$ est imaginaire pur si et seulement si $z=a+j\left(\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right),\ k\in\mathbb{Z}$ et $a^2+\left(\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)^2=2020^2$. Le réel *a* existe si et seulement si $\left(\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)^2\leqslant 2020^2$ c'est à dire

$$-2020 \leqslant \frac{\pi}{2} + k\pi \leqslant 2020$$

c'est à dire

$$-\frac{1}{2} - \frac{2020}{\pi} \leqslant k \leqslant \frac{2020}{\pi} - \frac{1}{2}$$

$$-643 \leqslant k \leqslant 642$$

ce qui fait 1286 possibilités pour *k*.
Mais, pour un tel entier *k* fixé, il y a deux possibilités différentes pour *a*, c'est à dire

$$a = \pm\sqrt{2020^2 - \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^2}$$

(on n'a jamais $\frac{\pi}{2} + k\pi = \pm 2020$ car π est irrationnel)
ce qui fait un total de 2572 solutions différentes......

Exercice 15
Soient A, M et N les points d'affixes respectives 1, *z* et z^2. Ils forment un triangle rectangle en A si et seulement si ils sont deux à deux distincts et $(\overrightarrow{AM}\,;\overrightarrow{AN}) = \pm\frac{\pi}{2}$. On doit donc avoir $z \neq -1$ (les deux autres cas *z=0* et *z=1* pour lesquels les points A,M et N ne sont pas deux à deux distincts sont impossibles vu que $\mathrm{Re}(z) = -1$.)
On calcule donc $(\overrightarrow{AM}\,;\overrightarrow{AN}) = \mathrm{Arg}\left(\frac{z^2-1}{z-1}\right) = \mathrm{Arg}\left(\frac{(z-1)(z+1)}{z-1}\right) = \mathrm{Arg}(z+1) = \frac{\pm\pi}{2}$ car la condition $\mathrm{Re}(z) = -1$ signifie que z+1 est imaginaire pur.

Exercice 16
Soit $a \in [0, 2\pi[$.

1) On a $1 + e^{ja} = \left(e^{\frac{ja}{2}} + e^{-j\frac{a}{2}}\right)e^{j\frac{a}{2}} = 2\cos\left(\frac{a}{2}\right)e^{j\frac{a}{2}}$ par les formules d'Euler.
2) $|1 + e^{ja}| = 1 \Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{a}{2}\right) = \pm 1$ d'après le 1), ce qui donne, avec la condition $a \in [0, 2\pi[$, $a = \frac{2\pi}{3}$ ou $a = \frac{4\pi}{3}$.
3) On a $1 + e^{j\frac{\pi}{n}} = \left(e^{j\frac{\pi}{2n}} + e^{-j\frac{\pi}{2n}}\right)e^{j\frac{\pi}{2n}} = 2\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)e^{j\frac{\pi}{2n}}$ donc
$\left(1 + e^{j\frac{\pi}{n}}\right)^n = 2^n\cos^n\left(\frac{\pi}{2n}\right)e^{j\frac{\pi}{2}} = 2^n\cos^n\left(\frac{\pi}{2n}\right)j$ qui est bien imaginaire pur.

Exercice 17

1) a) Il suffit de développer $(z+1)^2$ (respectivement $(z+1)^3$) et de soustraire z^2 (respectivement z^3) .

b) Si $n=2$, on trouve la solution $z = \frac{-1}{2}$ et si $n=3$, on trouve les deux solutions $z = \frac{-1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{6}$

2) a) Si $z\in\mathbb{C}$ est solution de (E), alors $z\notin\{-1\,;0\}$ et $\left(\frac{BM}{OM}\right)^n=\frac{|z+1|^n}{|z|^n}=\left|\left(\frac{z+1}{z}\right)^n\right|=1^n=1.$

On en déduit $OM=BM$.

b) Ce qui précède prouve que M appartient à la médiatrice du segment [OB], qui est la droite d'équation $x=\frac{-1}{2}$. Cela se traduit par $\mathrm{Re}(z)=-\frac{1}{2}$.

3) D'après la question précédente, on peut chercher les solutions sous la forme $z=\frac{-1}{2}+tj,\ t\in\mathbb{R}$.

On a donc $(z+1)^n=z^n\Leftrightarrow\left(1+\frac{1}{z}\right)^n=1\Leftrightarrow\exists k\in\{0,1,\dots,n-1\}$ tq $1+\frac{1}{z}=e^{2\mathrm{j}k\frac{\pi}{n}}$

ce qui équivaut à l'assertion $\exists k\in\{1,\dots,n-1\}$ tq $z=\frac{1}{e^{2\mathrm{j}k\frac{\pi}{n}}-1}$ (le cas k=0 est impossible).

Sachant que $z=\frac{-1}{2}+tj,\ t\in\mathbb{R}$, cela revient à dire

$$\exists k\in\{1,\dots,n-1\}\text{ tq } t=\frac{1}{j}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{e^{2\mathrm{j}k\frac{\pi}{n}}-1}\right)=\frac{e^{2\mathrm{j}k\frac{\pi}{n}}+1}{2\mathrm{j}\left(e^{2\mathrm{j}k\frac{\pi}{n}}-1\right)}=\frac{e^{jk\frac{\pi}{n}}+e^{-jk\frac{\pi}{n}}}{2\mathrm{j}\left(e^{jk\frac{\pi}{n}}-e^{-jk\frac{\pi}{n}}\right)}=\frac{-\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$$

d'où l'équivalence « z solution de (E) » avec $z=\frac{-1}{2}-\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}j=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}j\right)$ pour un certain entier $k\in\{1,\dots,n-1\}$.

Exercice 18

1) $(z-1)(1+z+z^2+z^3+z^4)=z^5-1$

2)

a) On applique l'égalité trouvée au 1) à $z=e^{2\mathrm{j}\frac{\pi}{5}}$:

$$\left(e^{2\mathrm{j}\frac{\pi}{5}}-1\right)\left(1+e^{j2\frac{\pi}{5}}+e^{j4\frac{\pi}{5}}+e^{j6\frac{\pi}{5}}+e^{j8\frac{\pi}{5}}\right)=\left(e^{2\mathrm{j}\frac{\pi}{5}}\right)^5-1=e^{2\mathrm{j}\pi}-1=0\ .$$

Puisque $e^{2\mathrm{j}\frac{\pi}{5}}-1\neq 0$ cela donne $1+e^{j2\frac{\pi}{5}}+e^{j4\frac{\pi}{5}}+e^{j6\frac{\pi}{5}}+e^{j8\frac{\pi}{5}}=0$.

b)Il suffit de prendre la partie réelle de l'égalité obtenue à la question précédente pour obtenir l'égalité voulue.

3) On a $\cos\left(8\frac{\pi}{5}\right)=\cos\left(2\pi-8\frac{\pi}{5}\right)=\cos\left(2\frac{\pi}{5}\right)$.

Et de même, $\cos\left(6\frac{\pi}{5}\right)=\cos\left(2\pi-6\frac{\pi}{5}\right)=\cos\left(4\frac{\pi}{5}\right)$

4) $2\cos^2\left(2\frac{\pi}{5}\right)-1=2\left(\frac{e^{2j\frac{\pi}{5}}+e^{-2j\frac{\pi}{5}}}{2}\right)^2-1=\frac{1}{2}\left(e^{4j\frac{\pi}{5}}+e^{-4j\frac{\pi}{5}}+2\right)-1=\frac{e^{4j\frac{\pi}{5}}+e^{-4j\frac{\pi}{5}}}{2}=\cos\left(4\frac{\pi}{5}\right).$

5) On a $1+\cos\left(2\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(4\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(6\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(8\frac{\pi}{5}\right)=0$ (question 2)b))

$1+2\cos\left(2\frac{\pi}{5}\right)+2\cos\left(4\frac{\pi}{5}\right)=0$ (question 3))

$$1+2\cos\left(2\frac{\pi}{5}\right)+2\left(2\cos^2\left(2\frac{\pi}{5}\right)-1\right)=0 \quad \text{(question 4))}$$

c'est à dire $4\cos^2\left(2\frac{\pi}{5}\right)+2\cos\left(2\frac{\pi}{5}\right)-1=0$.

La résolution de l'équation du second degré donne deux possibilités : $\cos\left(2\frac{\pi}{5}\right)=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ ou $\cos\left(2\frac{\pi}{5}\right)=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$, cette dernière possibilité étant impossible car $\frac{2\pi}{5}\in[0;\frac{\pi}{2}]$ donc $\cos\left(2\frac{\pi}{5}\right)\geq 0$.

On a donc $\cos\left(2\frac{\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Exercice 19

A) *Questions préliminaires.*

1) On vérifie que -1 n'est jamais solution de ces deux équations, donc $\theta\neq\pi$.

2) On a $z^n+z+1=0$ si et seulement si

$\overline{z^n+z+1}=0$

$\overline{z^n}+\overline{z}+1=0$

$\overline{z}^n+\overline{z}+1=0$

donc z est solution de (E_1) si et seulement si $\overline{z}$ l'est aussi. Cela revient à dire que $e^{j\theta}$ est solution de (E_1) si et seulement si $e^{-j\theta}$ l'est aussi. On peut donc se retreindre à $\theta\geq 0$ donc $\theta\in]0;\pi[$. Même raisonnement pour (E_2) .

3) Évident car $\frac{\theta}{2}\in]0;\frac{\pi}{2}[$.

4) On a $1+e^{j\theta}=\left(e^{j\frac{\theta}{2}}+e^{-j\frac{\theta}{2}}\right)e^{j\frac{\theta}{2}}=2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{j\frac{\theta}{2}}$ par les formules d'Euler.

On a $2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)>0$ donc $|1+e^{j\theta}|=2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et $\mathrm{Arg}\left(1+e^{j\theta}\right)=\frac{\theta}{2.}$

B) *Équation* (E_2)

1) Puisque $z^n=z+1$, on a $|z|^n=|z+1|$ donc $1=2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$. Vu que $\frac{\theta}{2}\in]0;\frac{\pi}{2}[$, la seule possibilité est $\frac{\theta}{2}=\frac{\pi}{3}$ donc $\theta=\frac{2\pi}{3}$.

2)On vient de voir que nécessairement $z=e^{\frac{2j\pi}{3}}$ donc $z^n=z+1$ implique $e^{\frac{2nj\pi}{3}}=2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)e^{j\frac{\pi}{3}}=e^{j\frac{\pi}{3}}$ donc $\exists k\in\mathbb{Z}$ tq $2n\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ c'est à dire que $\theta=\frac{2\pi}{3}=\frac{4k\pi}{2n-1}$.

3) $\frac{2\pi}{3}=\frac{4k\pi}{2n-1}\Rightarrow\frac{1}{3}=\frac{2k}{2n-1}\Rightarrow 6k=2n-1$. C'est absurde car on aurait $n=3k+\frac{1}{2}\notin\mathbb{N}$.

L'hypothèse que z est une racine de module 1 de (E_2) est absurde.

C) *Équation* (E_1)

On suppose ici que z est une solution de (E_1).

1) Le nombre z est solution de (E_1) signifie que $e^{jn\theta}=-1-e^{j\theta}=2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{j\frac{\theta}{2}}$ donc

$e^{-j\frac{\theta}{2}}.e^{jn\theta}=-2\cos(\frac{\theta}{2})$ c'est à dire $e^{j(n-\frac{1}{2})\theta}=-2\cos(\frac{\theta}{2})$.

2) On déduit que $\left|-2\cos(\frac{\theta}{2})\right|=1$ c'est à dire que $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)=\frac{\pm 1}{2}$. . Vu que $\frac{\theta}{2}\in]0;\frac{\pi}{2}[$, la seule possibilité est $\frac{\theta}{2}=\frac{\pi}{3}$ donc $\theta=\frac{2\pi}{3}$.

3) On vient de voir que nécessairement $z=e^{\frac{2j\pi}{3}}$ donc $z^n=-z-1$ implique $e^{\frac{2nj\pi}{3}}=-2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)e^{j\frac{\pi}{3}}=-e^{j\frac{\pi}{3}}=e^{4j\frac{\pi}{3}}$ donc $\exists k\in\mathbb{Z}$ tq $2n\frac{\pi}{3}=4\frac{\pi}{3}+2k\pi$ d'où $\exists k\in\mathbb{Z}$ tq $2n=4+6k$ c'est à dire que $n=3k+2$ avec $k\in\mathbb{N}$.

4) Le résultat du 2) montre que les seules solutions possibles sont $z=e^{2j\frac{\pi}{3}}$ et $z=e^{-2j\frac{\pi}{3}}$ par le 2) de la partie A. Il reste à vérifier qu'elles sont solutions de (E_1).

Si $z=e^{2j\frac{\pi}{3}}$, on a $z^n+z+1=z^{3k+2}+z+1=e^{4j\frac{\pi}{3}+2jk\pi}+e^{2j\frac{\pi}{3}}+1=e^{4j\frac{\pi}{3}}+e^{2j\frac{\pi}{3}}+1=0$ et idem pour $z=e^{-2j\frac{\pi}{3}}$ par passage au conjugué comme dans le 2) de la partie A.

Exercice 20

1) On développe et réduit par une identité remarquable.

2) On veut résoudre l'équation $z^2-3jz+(-3+j)=0$.

a) $\Delta=3-4j$.

b) On peut prendre, d'après le 1), $\delta=2-j$ et les formules du cours donnent les deux solutions $z_1=1+j$ et $z_2=-1+2j$.

c) $\theta=\left(\overrightarrow{OM}_1,\overrightarrow{OM}_2\right)=\text{Arg}(z_2\overline{z_1})=\text{Arg}(1+3j)$ donc $\cos(\theta)=\frac{\text{Re}(1+3j)}{|1+3j|}=\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Exercice 21

$$\sin^2(t)\cos(3t)=\left(\frac{e^{jt}-e^{-jt}}{2j}\right)^2\left(\frac{e^{3jt}+e^{-3jt}}{2}\right)=\frac{-1}{8}\left(e^{2jt}+e^{-2jt}-2\right)\left(e^{3jt}+e^{-3jt}\right)$$
$$=\frac{-1}{8}\left(e^{5jt}+e^{-5jt}-2e^{3jt}-2e^{-3jt}+e^{jt}+e^{jt}\right)=\frac{-1}{8}\left(2\cos(5t)-4\cos(3t)+2\cos(t)\right)$$
$$=-\frac{1}{4}\cos(t)+\frac{1}{2}\cos(3t)-\frac{1}{4}\cos(5t).$$

Exercice 22

On a $\Delta=-8+6j$. Posant $\delta=a+jb$, il vient par la méthode du cours que $a^2+b^2=10$, $a^2-b^2=-8$ et $ab>0$. La résolution de ce système donne $\delta=\pm(1+3j)$ et les formules de résolution d'une équation du second degré donnent $z=-j$ ou $z=1+2j$

Exercice 23

$x\in\{\frac{-7\pi}{8};\frac{-\pi}{8};\frac{\pi}{8};\frac{7\pi}{8}\}$

Exercice 24

1) $2\operatorname{Re}(z)=z+\overline{z}=\frac{1+e^{j\theta}}{1-e^{j\theta}}+\frac{1+e^{-j\theta}}{1-e^{-j\theta}}=\frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}+e^{-j\theta}-e^{j\theta}}{(1-e^{j\theta})(1-e^{-j\theta})}=0$ donc z est imaginaire pur.

2) De $\frac{1+e^{j\theta}}{1-e^{j\theta}}=3j$ on déduit $e^{j\theta}=\frac{-1+3j}{1+3j}=\frac{4}{5}+\frac{3}{5}j$. Par identification avec la forme trigonométrique de $e^{j\theta}$ on trouve $\cos(\theta)=\frac{4}{5}$ et $\sin(\theta)=\frac{3}{5}$. .

Exercice 25

1° a) $MA.MB=|z_M-z_A|.|z_M-z_B|=|-j|.|j|=1.$

b) $MA.MB=|z_M-z_A|.|z_M-z_B|=|-1|.|-1+2j|=\sqrt{5}.$

c)

$$MA.MB=|z_M-z_A|.|z_M-z_B|$$
$$=\left|\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)(1+j)\right|.\left|\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)+\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)j\right|=(\sqrt{2}-1)\sqrt{3}=\sqrt{6}-\sqrt{3}$$

On considère , pour $z\in\mathbb{C}$, le polynôme $P(z)=z^2-2z+2$

2° On trouve $z_A=1+j$ et $z_B=1-j$. On retombe sur les affixes des points A et B.

3° a) On a $MA.MB=|z_M-z_A|.|z_M-z_B|=|e^{j\theta}-1-j|.|e^{j\theta}-1+j|$
$=|(e^{j\theta}-1-j)(e^{j\theta}-1+j)|=|e^{2j\theta}-2e^{j\theta}+2|$ (on développe le produit)
$=|P(e^{j\theta})|$.

b) $|P(e^{j\theta})|^2=P(e^{j\theta}).\overline{P(e^{j\theta})}=(e^{2j\theta}-2e^{j\theta}+2)(e^{-2j\theta}-2e^{-j\theta}+2)$

On développe :

$|P(e^{j\theta})|^2=9-6e^{j\theta}-6e^{-j\theta}+2e^{2j\theta}+2e^{-2j\theta}=4\cos(2\theta)-12\cos(\theta)+9$

par les formules d'Euler.

c) On remplace $\cos(2\theta)$ par $2\cos^2(\theta)-1$ dans le résultat précédent pour obtenir $|P(e^{j\theta})|^2=8\cos^2(\theta)-12\cos(\theta)+5$.

4° a) La fonction *f* décroît sur $[-1;\frac{3}{4}]$ puis croît sur $[\frac{3}{4};1]$: elle admet donc un minimum en $t=\frac{3}{4}$.

b) On doit avoir $\cos(\theta)=\frac{3}{4}$.

c)On doit avoir $x_M=\frac{3}{4}$ et $y_M=\frac{\sqrt{7}}{4}$ pour que la quantité $MA.MB$ soit minimale avec la condition que $M\in C$. Pour ce point M, on a $MA.MB=\sqrt{f\left(\frac{3}{4}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 26

1)La symétrie conserve les longueurs et oppose les angles, donc :

$$\left|\frac{z}{2+3j}\right|=\left|\frac{z'}{2+3j}\right|=\frac{OM}{\sqrt{13}}=\frac{OM'}{\sqrt{13}}$$

et

$$\left(\widehat{\vec{w}\,;\overrightarrow{OM}}\right)=-\left(\widehat{\vec{w}\,;\overrightarrow{OM'}}\right)\Rightarrow \text{Arg}\left(\frac{z}{2+3j}\right)=-\text{Arg}\left(\frac{z'}{2+3j}\right) .$$

2) Les nombres complexes $\frac{z}{2+3j}$ et $\frac{z'}{2+3j}$ ayant même module et des arguments opposés, ils sont conjugués donc $\frac{z'}{2+3j}=\overline{\left(\frac{z}{2+3j}\right)}=\frac{\bar{z}}{2-3j}$ donc $z'=\frac{\bar{z}(2+3j)}{2-3j}=\frac{1}{13}(-5+12j)\bar{z}$.

Si $M\in(O,\vec{w})$, alors $z=z'=\lambda(2+3j)$ pour un certain $\lambda\in\mathbb{R}$. On a donc dans ce cas $\frac{1}{13}(-5+12j)\bar{z}=\frac{\lambda}{13}(-5+12j)(2-3j)=\lambda(2+3j)=z$ donc la relation $z'=\frac{1}{13}(-5+12j)\bar{z}$ reste vraie dans ce cas.

3) On a $z=4+3j$ donc $z'=\frac{1}{13}(-5+12j)\bar{z}=\frac{1}{13}(-5+12j)(4-3j)=\frac{16+63j}{13}$ d'où $M'\left(\frac{16}{13};\frac{63}{13}\right)$.

Exercice 27

1) On pose $z=a+bj,\ a,b\in\mathbb{R}$. En écrivant l'équation sous la forme $z+1=(1+j)(\bar{z}-2),\ z\neq 2$ et en identifiant parties réelles et imaginaires, on trouve *a* et *b* qui donnent une unique solution $z=8+3j$.

2) On pose $z=a+bj,\ a,b\in\mathbb{R}$. En écrivant l'équation sous la forme $5z=(3+4j)\bar{z},\ z\neq 0$ et en identifiant parties réelles et imaginaires, on trouve *a* et *b* qui vérifient la seule relation $a=2b$.
Il y a donc une infinité de solutions : $z\in\{t(2+j)\ /\ t\in\mathbb{R},\ t\neq 0\}$.

3) Le cube suggère de chercher *z* sous forme exponentielle $z=re^{j\theta}$ (le cas z=0 constitue une valeur interdite de l'équation).
On a les relations $\frac{1}{r^2}=\frac{1}{2}$ et $-4\theta=\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ qui donnent 4 solutions :

$$z\in\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\frac{\pi}{16}};\frac{\sqrt{2}}{2}e^{7j\frac{\pi}{16}};\frac{\sqrt{2}}{2}e^{15j\frac{\pi}{16}};\frac{\sqrt{2}}{2}e^{23j\frac{\pi}{16}}\right\} .$$

4) On pose $z=a+bj,\ a,b\in\mathbb{R}$. En identifiant parties réelles et imaginaires, on trouve *a* et *b* qui

vérifient le système $\begin{cases} a^2-b^2-6a+9=0 \\ ab=-3b \end{cases}$.

On a deux cas :

soit $b=0$, alors la première équation donne $a^2-6a+9=0$ c'est à dire $a=3$ et la deuxième est vérifiée

soit $b\neq 0$, donc la deuxième équation donne $a=-3$ et la première $b=\pm 6$.

On trouve 3 solutions : $z\in\{3;-3-6j;-3+6j\}$.

5) On pose $z=x+jy,\ x,y\in\mathbb{R}$. En identifiant parties réelles et imaginaires, on trouve *x* et *y* qui vérifient le système $\begin{cases} x^2-y^2-6x-a=0 \\ xy=-3y \end{cases}$.

On a encore deux cas :

Soit $y=0$, alors la première équation donne $x^2-6x-a=0$ et la deuxième équation est vérifiée. On a alors 0 , 1 ou 2 solutions selon que $\Delta=36+4a$ est négatif, nul ou positif, c'est à dire selon que $a<-9,\ a=-9$ ou $a>-9$.

Soit $y\neq 0$, donc la deuxième équation donne $x=-3$ et la première $y^2=27-a$. On a deux cas : soit $a<27$ et il y a deux solutions pour *y*, soit $a>27$ et il n'y a pas de solution pour *y* (Remarquer que le cas $a=27$ est ici interdit vu que $y\neq 0$)

Conclusion :

a	$a<-9$	$a=-9$	$a\in]-9;27[$	$a\geq 27$
Nombre de solutions	2	3	4	2

Remarque : l'équation ressemble à une équation polynomiale du second degré mais n'en est pas du tout une : en effet, l'expression $z^2-6\bar{z}-a$ n'est pas un polynôme en *z* ! Cela explique pourquoi alors il peut y avoir plus de deux solutions, mais cela ne contredit en rien le Théorème 2.

Exercice 28

1) Γ_0 est l'ensemble des points de l'axe réel situé <u>à l'extérieur</u> du segment [AB].
Γ_π est l'ensemble des points de l'axe réel situé <u>à l'intérieur</u> du segment [AB].

2) On a $\forall z\in\mathbb{C},\ (z-1)(\bar{z}+1)=z\bar{z}+z-\bar{z}-1=|z|^2+2j\,\mathrm{Im}(z)-1$
car $z\bar{z}=|z|^2$ et $z-\bar{z}=2j\,\mathrm{Im}(z)$.

3) On a $M\in\Gamma_{\frac{\pi}{2}}\Leftrightarrow(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA})=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM})=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\mathrm{Arg}((z-1)(\bar{z}+1))=\frac{\pi}{2}$.

On en déduit alors que $M\in\Gamma_{\frac{\pi}{2}}$ si et seulement si $(z-1)(\bar{z}+1)$ est imaginaire pur à partie imaginaire strictement positive, c'est à dire, d'après le 2) , si et seulement si $|z|^2=1$ et $\mathrm{Im}(z)\geq 0$. On en déduit que $\Gamma_{\frac{\pi}{2}}$ est le demi-cercle trigonométrique constitué des points d'ordonnée strictement positive.

De même, on montre que $\Gamma_{\frac{-\pi}{2}}$ est le demi-cercle trigonométrique constitué des points d'ordonnée strictement négative.

4)
$M\in\Gamma_\theta\Leftrightarrow(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA})=\theta\Leftrightarrow(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM})=\theta\Leftrightarrow\mathrm{Arg}((z-1)(\bar{z}+1))=\theta$.

On a alors $M\in\Gamma_\theta$ si et seulement si $(z-1)(\bar{z}+1)=r\cos(\theta)+jr\sin(\theta)$ pour un certain *r>0,* c'est à dire $|z|^2=1+r\cos(\theta)$ et $\mathrm{Im}(z)=\frac{1}{2}r\sin(\theta)$, compte tenu du 2).

5) On rappelle que $z=x+jy$.

Si $M\in\Gamma_\theta$, alors $\exists r>0$ tq $|z|^2=1+r\cos(\theta)$ et $\mathrm{Im}(z)=\frac{1}{2}r\sin(\theta)$ c'est à dire,

$x^2+y^2=1+r\cos(\theta)$ et $y=\frac{1}{2}r\sin(\theta)$ d'où l'on tire $r=\frac{2y}{\sin(\theta)}$ (remarquer que $\sin(\theta)\neq 0$ vu que $\theta\neq 0$ et $\theta\neq\pi$.) On a donc $x^2+y^2=1+r\cos(\theta)=1+2\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}y$ d'où

$x^2+y^2-2\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}y-1=0$ et *y* est du signe de $\sin(\theta)$ car $\frac{y}{\sin(\theta)}=\frac{r}{2}>0$.

Inversement, si $x^2+y^2-2\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}y-1=0$ et y est du signe de $\sin(\theta)$, si l'on pose $r=\frac{2y}{\sin(\theta)}$ alors r > 0 car y est du signe de $\sin(\theta)$, et on a $\mathrm{Im}(z)=y=\frac{1}{2}r\sin(\theta)$ et

$|z|^2=x^2+y^2=1+2\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}y=1+r\cos(\theta)$. On a donc $|z|^2=1+r\cos(\theta)$ et $\mathrm{Im}(z)=\frac{1}{2}r\sin(\theta)$ pour un certain r > 0, donc $M\in\Gamma_\theta$ d'après la question 4) .

6) Il suffit de développer $x^2+\left(y-\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)^2-\frac{\cos^2(\theta)}{\sin^2(\theta)}$ pour obtenir l'égalité demandée.

7) On déduit des deux questions précédentes que

$$M\in\Gamma_\theta\Leftrightarrow x^2+\left(y-\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)^2-\frac{\cos^2(\theta)}{\sin^2(\theta)}-1=0 \text{ et } y \text{ est du signe de } \sin(\theta).$$

On reconnaît via $x^2+\left(y-\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)^2-\frac{\cos^2(\theta)}{\sin^2(\theta)}-1=0$ l'équation d'un cercle.

Si $\theta>0$, Γ_θ est la partie du cercle de centre $\left(0;\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)$ et de rayon

$R=\sqrt{\frac{\cos^2(\theta)}{\sin^2(\theta)}+1}=\frac{1}{\sin(\theta)}$ constitué des points d'ordonnée strictement positive.

Si $\theta<0$, Γ_θ est la partie du cercle de centre $\left(0;\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)$ et de rayon

$R=\sqrt{\frac{\cos^2(\theta)}{\sin^2(\theta)}+1}=-\frac{1}{\sin(\theta)}$ constitué des points d'ordonnée strictement négative.

Exercice 29

On a $\Delta=-3a^2$ donc on peut prendre $\delta=aj\sqrt{3}$.

Si $a=0$, la seule solution est z=0 .

Si $a\neq 0$, il y a les deux solutions $z_1=\frac{a}{2}\left(\frac{-1}{2}+j\sqrt{3}\right)$ et $z_2=\frac{a}{2}\left(\frac{-1}{2}-j\sqrt{3}\right)$

Exercice 30

Soit $z=x+jy$ la forme algébrique de l'affixe de M . Alors

$$AM=\lambda.BM \Leftrightarrow AM^2=\lambda^2.BM^2 \Leftrightarrow |(x-1)+jy|^2=\lambda^2|(x+1)+jy|^2$$

ce qui mène après calculs à

$$AM=\lambda.BM \Leftrightarrow x^2+y^2+2\frac{\lambda^2+1}{\lambda^2-1}x+1=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{\lambda^2+1}{\lambda^2-1}\right)^2+y^2=\frac{4\lambda^2}{(\lambda^2-1)^2} \quad .$$

On reconnaît l'équation du cercle de centre $\left(-\frac{\lambda^2+1}{\lambda^2-1};0\right)$ et de rayon $R=\frac{2\lambda}{|\lambda^2-1|}$

Exercice 31 (différentes structures algébriques de $\mathbb{C}$).

1) On a

$s*z=z*s$ (par le (i))

$=z*(s.1)$

$=s.(z*1)$ (par le (ii))

$=s.(1*z)$ (par le (i))

$=s.z$ (par le (iv))

2) On a :

(1) : $(a+bj)*(c+dj)=(a+bj)*c+(a+bj)*(dj)$ par (iii) .

En utilisant le résultat de la question 1), il vient que :

(2) : $(a+bj)*c=c*(a+bj)$ (par (i)) $=c(a+bj)$.

D'autre part,

$(a+bj)*(dj)=d((a+bj)*j)$ par (ii)

$=d(j*(a+bj))$ par (i)

$=d(j*a+b\,j*j)$ en utilisant (iii) et (ii).

Puisque $j*a=a*j=aj$ par le résultat de la question 1), et puisque $j*j=\alpha+j\beta$, on a

(3) : $(a+bj)*(dj)=d(aj+b(\alpha+j\beta))=\alpha bd+j(ad+bd\beta)$.

En utilisant (3) et (2) dans (1), il vient

$(a+bj)*(c+dj)=c(a+bj)+\alpha bd+j(ad+bd\beta)=(ac+\alpha bd)+j(ad+bc+\beta bd)$.

3) On a

$\alpha^2+\beta^2=|j*j|^2=|j|^2.|j|^2=1$.

D'autre part, $(1-j)*(1+j)=1-\alpha-j\beta$ d'après le 2) donc

$(1-\alpha)^2+\beta^2=|(1-j)*(1+j)|^2=|1-j|^2.|1+j|^2=4$ donc $\alpha^2+\beta^2-2\alpha+1=4$ d'où , en tenant compte de l'équation $\alpha^2+\beta^2=1$, l'on obtient $\alpha=-1$ puis $\beta=0$. On a ainsi $j*j=-1$.

Remarque : le produit * est donc le produit usuel des nombres complexes. La structure algébrique des nombres complexes telle qu'on l'a définie en cours est donc la seule à vérifier la condition (vi).

4) L'assertion $\forall z_1\in\mathbb{C}, \forall z_2\in\mathbb{C}, (z_1\neq 0 \text{ et } z_2\neq 0)\Rightarrow z_1*z_2\neq 0$ est la contraposée de *(vii)* : elle lui est donc logiquement équivalente.

5) Si $z_1\in\mathbb{R}$ ou $z_2\in\mathbb{R}$, d'après le résultat de la question 1, $z_1*z_2=z_1.z_2$ On a donc $(z_1\neq 0 \text{ et } z_2\neq 0)\Rightarrow z_1*z_2\neq 0$ d'après le cours.

On a donc l'équivalence entre les propositions

$\forall z_1\in\mathbb{C}, \forall z_2\in\mathbb{C}, (z_1\neq 0 \text{ et } z_2\neq 0)\Rightarrow z_1*z_2\neq 0$

et

$\forall z_1\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}, \forall z_2\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}, (z_1\neq 0 \text{ et } z_2\neq 0)\Rightarrow z_1*z_2\neq 0.$

Mais puisque dans le cas où $z_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $z_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, l'assertion $(z_1 \neq 0 \text{ et } z_2 \neq 0)$ est vraie, il y a équivalence entre les assertions $\forall z_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \forall z_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, (z_1 \neq 0 \text{ et } z_2 \neq 0) \Rightarrow z_1 * z_2 \neq 0$ et $\forall z_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \forall z_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, z_1 * z_2 \neq 0$. D'après le résultat de la question 4), on a alors l'équivalence $(vii) \Leftrightarrow \forall z_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \forall z_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, z_1 * z_2 \neq 0.$

6) On a clairement d'après la question précédente l'implication $(vii) \Rightarrow \forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, (a+j)*(b+j) \neq 0$ car les nombres complexes $(a+j)$ et $(b+j)$ ne sont pas réels.

Réciproquement, supposons l'assertion $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, (a+j)*(b+j) \neq 0$ vraie. Alors si $z_1 = x_1 + j y_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et si $z_2 = x_2 + j y_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, on a $y_1 y_2 \neq 0$ et $z_1 * z_2 = \frac{1}{y_1 y_2}\left(\frac{x_1}{y_1} + j\right) * \left(\frac{x_2}{y_2} + j\right) \neq 0$ en considérant $a = \frac{x_1}{y_1}$ et $b = \frac{x_2}{y_2}$. On peut alors dire que l'assertion $\forall z_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \forall z_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, z_1 * z_2 \neq 0$ est vraie, c'est à dire que (vii) est vraie.

7) On a $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, (a+j)*(b+j) = (ab+\alpha) + j(a+b+\beta)$.

On déduit de la question 6) que $(vii) \Leftrightarrow \forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, (ab+\alpha) + j(a+b+\beta) \neq 0$ c'est à dire $(vii) \Leftrightarrow \forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, (ab+\alpha) \neq 0 \text{ ou } (a+b+\beta) \neq 0$ ce qui revient à dire que (vii) équivaut à ce que le système $\begin{cases} a+b=-\beta \\ ab=-\alpha \end{cases}$ n'ait pas de couple solution $(a\,;b)$ de nombres réels.

8) Soient *a* et *b* deux réels. Alors $(a\,;b)$ est solution du système $\begin{cases} a+b=-\beta \\ ab=-\alpha \end{cases}$ si et seulement si *a* et *b* sont les racines du polynôme $X^2 + \beta X - \alpha = 0$, donc l'assertion $\left(\exists a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R} \text{ t.q } \begin{cases} a+b=-\beta \\ ab=-\alpha \end{cases}\right)$

est équivalente à ce que le Δ de ce polynôme soit positif ou nul, c'est à dire $4\alpha + \beta^2 \geq 0$.

9) D'après le 7), *(vii)* équivaut à ce que le système $\begin{cases} a+b=-\beta \\ ab=-\alpha \end{cases}$ n'ait pas de couple solution $(a\,;b)$ de nombres réels, ce qui équivaut d'après le 8) à ce que $4\alpha + \beta^2 < 0$.

10) a) On a $z'_1 * (z * z'_2) = z'_1 * 1 = z'_1$.
Mais on a aussi $z'_1 * (z * z'_2) = (z'_1 * z) * z'_2 = 1 * z'_2 = z'_2$.
On en déduit que $z'_1 = z'_2$

b) Si l'on avait $z_1 * z_2 = 0$, alors, puisque $z_1 \neq 0$, il possède un inverse $z'_1 \neq 0$, et $0 = z'_1 * (z_1 * z_2) = (z'_1 * z_1) * z_2 = 1 * z_2 = z_2$ ce qui est absurde.
Donc $z_1 * z_2 \neq 0$. L'implication $\forall z_1 \in \mathbb{C}, \forall z_2 \in \mathbb{C}, (z_1 \neq 0 \text{ et } z_2 \neq 0) \Rightarrow z_1 * z_2 \neq 0$ signifie que le produit est intègre. On a prouvé que $(viii) \Rightarrow (vii)$.

11) a) Si $t \in \mathbb{R}^*$, alors d'après le 1), $\frac{1}{t} * t = \frac{1}{t} . t = 1$ donc *t* possède un inverse pour le produit *, qui est $\frac{1}{t}$.

b) Soit $t \in \mathbb{R}$. On a d'après le 2), $z * (t+j) = (at + \alpha b) + j(a + b\beta + tb)$. Puisque

$b \neq 0$, en posant $t = -\frac{a + b\beta}{b}$ on voit que $z * (t + j) \in \mathbb{R}$.

Puisque $z \neq 0$ et que $t + j \neq 0$, la propriété (vii) implique que $z * (t + j) \neq 0$.

c) On a d'après la question précédente $z * (-\frac{a + b\beta}{b} + j) = -a . \frac{a + b\beta}{b} + \alpha b \neq 0$ c'est à dire

$$z * (-\frac{a + b\beta}{b} + j) = \frac{\alpha b^2 - a^2 - ab\beta}{b} \neq 0 .$$

On en déduit que *z* est inversible d'inverse $z' = (-\frac{a + b\beta}{b} + j) . \frac{b}{\alpha b^2 - a^2 - ab\beta}$ c'est à dire

$$z' = -\frac{a + b\beta}{\alpha b^2 - a^2 - ab\beta} + j \frac{b}{\alpha b^2 - a^2 - ab\beta} .$$

Remarque : si * correspond au produit usuel, on a $\alpha = -1,\ \beta = 0$ donc

$z' = -\frac{a}{-b^2 - a^2} + j \frac{b}{-b^2 - a^2} = \frac{a - bj}{a^2 + b^2} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$ ce qui est la formule vue en cours pour l'inverse « usuel ».

12) Les propriétés (vii) et $(viii)$ sont, dans la situation qui nous concerne, équivalentes.

Exercice 32

1) a) Puisque $\mathrm{Re}(Z_1 + Z_2) = \mathrm{Re}(Z_1) + \mathrm{Re}(Z_2) \geqslant 0$, le nombre complexe $Z_1 + Z_2$ est une impédance.

b) Si l'on considère le cas où $Z_1 = Z_2 = 1 + 2\mathrm{j}$, on a $Z_1 . Z_2 = -3 + 4\mathrm{j}$ qui est de partie réelle strictement négative, donc ce n'est pas une impédance.

2) a) En considérant Z_1 sous sa forme algébrique $Z_1 = \alpha + j\beta$ avec $\alpha \geqslant 0,$ on a

$$\frac{1}{Z_1} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} - j \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$$

donc $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{Z_1}\right) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \geqslant 0 :$ $\frac{1}{Z_1}$ est une impédance.

Même chose pour $\frac{1}{Z_2}$.

b) D'après le 1)a) et le 2)a, $\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$ est une impédance , donc si $Z_1 + Z_2 \neq 0$, par la question 2)a), le nombre complexe $\frac{1}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$ est aussi une impédance.

3) En considérant un nombre complexe $z \neq 0$ quelconque sous sa forme algébrique $z = \alpha + j\beta$, on a $\frac{1}{z} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} - j \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|^2} - j \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|^2}$: cette relation montre que $\mathrm{Im}(z)$ et $\mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}\right)$ sont toujours de signes opposés (ce qui peut aussi se montrer avec les arguments).

Ainsi, puisque $\mathrm{Im}(Z_1) \geqslant 0$ et $\mathrm{Im}(Z_2) \geqslant 0$, on a $\mathrm{Im}\left(\frac{1}{Z_1}\right) \leqslant 0$ et $\mathrm{Im}\left(\frac{1}{Z_2}\right) \leqslant 0$, d'où

$\mathrm{Im}\left(\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}\right)\leqslant 0$ et donc $\mathrm{Im}\left(\frac{1}{\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}}\right)\geqslant 0$, c'est à dire $\mathrm{Im}\left(\frac{Z_1Z_2}{Z_1+Z_2}\right)\geqslant 0$

4) Même preuve en changeant seulement le sens des inégalités.

5) Ici, il n'y a pas trop le choix, il faut plonger dans les calculs...

$$\frac{Z_1Z_2}{Z_1+Z_2}=\frac{(2-3\mathrm{j})(1+aj)}{3+(a-3)j}=\frac{2+3a+j(2\mathrm{a}-3)}{3+(a-3)j}=\frac{(2+3a+j(2\mathrm{a}-3))(3-(a-3)j)}{9+(a-3)^2}$$

$$=\frac{2\mathrm{a}^2+15+j(-3a^2+13a-3)}{9+(a-3)^2}\ .$$

Ainsi, $\mathrm{Im}\left(\frac{Z_1Z_2}{Z_1+Z_2}\right)>0\Leftrightarrow -3\mathrm{a}^2+13\mathrm{a}-3>0\Leftrightarrow a\in\left]\frac{13-\sqrt{133}}{6};\frac{13+\sqrt{133}}{6}\right[$.

6) a) Puisque $\theta\in[0;\pi]$, on a $\mathrm{Im}(z)\geqslant 0$ donc $\mathrm{Im}(1+z)=\mathrm{Im}(z)\geqslant 0$ donc $\theta'>0$.

b)On a $\theta-\theta'\equiv \mathrm{Arg}(z)-\mathrm{Arg}(1+z)\equiv\mathrm{Arg}\left(\frac{z}{1+z}\right)\ [2\pi]$

En remarquant que $\frac{z}{1+z}=\frac{z(1+\bar{z})}{|1+z|^2}$, on en déduit que

$\theta-\theta'\equiv\mathrm{Arg}(z(1+\bar{z}))\equiv\mathrm{Arg}(z+|z|^2)\ [2\pi]$.

Or, $\mathrm{Im}(z+|z|^2)=\mathrm{Im}(z)\geqslant 0$ donc la mesure principale de $\mathrm{Arg}(z+|z|^2)$ appartient à $[0;\pi]$.
Il reste à remarquer que, puisque $\theta\in[0;\pi]$ et $\theta'\in[0;\pi]$, on a $\theta-\theta'\in[-\pi;\pi]$ donc $\theta-\theta'$ est la mesure principale de $\mathrm{Arg}(z+|z|^2)$. Par ce qui précède, $\theta-\theta'\in[0;\pi]$ donc $\theta\geqslant\theta'$.
Par le a), il vient que $\theta'\in[0;\theta]$.

7) On pose $z=\frac{Z_2}{Z_1}$. Puisque les parties réelles de Z_1 et Z_2 sont strictement positives, on a $z\neq 0$ et $Z_1\neq -Z_2$ donc $z\neq -1$. Soit θ la mesure principale de l'argument de z . On a $\mathrm{Arg}(z)\equiv\theta_2-\theta_1$.
Puisque $\mathrm{Re}(Z_1)>0$ et $\mathrm{Re}(Z_2)>0$, on a $\theta_1,\ \theta_2\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ donc $\theta_2-\theta_1\in[0;\pi]$ car $\theta_1\leqslant\theta_2$.

Le résultat du 6) montre que si l'on désigne par θ' la mesure principale de $\mathrm{Arg}\left(1+\frac{Z_2}{Z_1}\right)$ on a $\theta'\in[0;\theta_2-\theta_1]$.

On en déduit que puisque $\mathrm{Arg}(Z_1+Z_2)\equiv\mathrm{Arg}\left(Z_1\left(1+\frac{Z_2}{Z_1}\right)\right)\equiv\mathrm{Arg}(Z_1)+\mathrm{Arg}\left(1+\frac{Z_2}{Z_1}\right)\ [2\pi]$, le nombre $\theta_1+\theta'$ est une mesure de $\mathrm{Arg}(Z_1+Z_2)$.
De la relation $\theta'\in[0;\theta_2-\theta_1]$, on déduit que $\theta_1\leqslant\theta_1+\theta'\leqslant\theta_2$.
D'après le 2)a), $\frac{1}{Z_1}$ et $\frac{1}{Z_2}$ sont des impédances dont les mesures principales respectives des arguments sont $-\theta_1$ et $-\theta_2$. Leurs parties réelles respectives, $\frac{\mathrm{Re}(Z_1)}{|Z_1|^2}$ et $\frac{\mathrm{Re}(Z_2)}{|Z_2|^2}$ sont strictement positives et on déduit par le raisonnement précédent avec $\frac{1}{Z_i}$ au lieu de Z_i que

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}\right)\in[-\theta_2;-\theta_1] \quad \text{à} \quad 2\pi \quad \text{près .}$$

On en déduit que $\operatorname{Arg}\left(\frac{Z_1 Z_2}{Z_1+Z_2}\right)=\operatorname{Arg}\left(\frac{1}{\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}}\right)=-\operatorname{Arg}\left(\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}\right)\in[\theta_1;\theta_2]$ à 2π près .

8) a) On a $Z_1=R_1+j\operatorname{Im}(Z_1)=R_1\left(1+\frac{\operatorname{Im}(Z_1)}{R_1}\right)=R_1(1+j\alpha)$ avec $\alpha=\frac{\operatorname{Im}(Z_1)}{R_1}$.

On a de même $Z_2=R_2(1+j\beta)$ avec $\beta=\frac{\operatorname{Im}(Z_2)}{R_2}$.

b) Il existe peut être des méthodes plus subtiles, mais un calcul (certes un peu brutal) mené consciencieusement peut faire l'affaire ici. On a

$$\frac{Z_1 Z_2}{Z_1+Z_2}=\frac{R_1 R_2(1+j\alpha)(1+j\beta)}{R_1+R_2+j(\alpha R_1+\beta R_2)}=\frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}\left(\frac{(1+j\alpha)(1+j\beta)}{1+jm}\right)=\frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}\left(\frac{1-\alpha\beta+j(\alpha+\beta)}{1+jm}\right)$$
$$=\frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}\frac{(1-\alpha\beta+j(\alpha+\beta))(1-jm)}{1+m^2}=\frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}\frac{1-\alpha\beta+m(\alpha+\beta)+j(\alpha+\beta-m(1-\alpha\beta))}{1+m^2}$$

donc

$$\operatorname{Re}\left(\frac{Z_1 Z_2}{Z_1+Z_2}\right)=\frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}\frac{1-\alpha\beta+m(\alpha+\beta)}{1+m^2} \quad .$$

On en déduit que

$$\operatorname{Re}\left(\frac{Z_1 Z_2}{Z_1+Z_2}\right)-\frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}=\frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}\left(\frac{1-\alpha\beta+m(\alpha+\beta)}{1+m^2}-1\right)=\frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}\left(\frac{-m^2+m(\alpha+\beta)-\alpha\beta}{1+m^2}\right)$$

$=-\frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}\left(\frac{(m-\alpha)(m-\beta)}{1+m^2}\right)$ (on factorise le polynôme du second degré en *m* si l'on sait faire, ou sinon on vérifie que la forme développée donne le bon résultat).

c) Le nombre *m* est la moyenne de α et β coefficientée par R_1 et R_2.

On vérifie que $m-\alpha=\frac{(\beta-\alpha)R_2}{R_1+R_2}$ est du signe de $\beta-\alpha$ et que $m-\beta=\frac{(\alpha-\beta)R_1}{R_1+R_2}$ est du signe de $\alpha-\beta$. Les nombres $m-\alpha$ et $m-\beta$ sont de signes opposés, donc *m* est compris entre α et β.

On en déduit que $(m-\alpha)(m-\beta)\leqslant 0$ donc

$$\operatorname{Re}\left(\frac{Z_1 Z_2}{Z_1+Z_2}\right)-\frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}=-\frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}\left(\frac{(m-\alpha)(m-\beta)}{1+m^2}\right)\geqslant 0.$$

On en déduit que $\operatorname{Re}\left(\frac{Z_1 Z_2}{Z_1+Z_2}\right)\geqslant\frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}$.

d) On a ici $m=\frac{\alpha R_1+\beta R_2}{R_1+R_2}=\frac{nR_2 R_1-nR_1 R_2}{R_1+R_2}=0$ donc, en reprenant les calculs précédents :

$$\operatorname{Re}\left(\frac{Z_1 Z_2}{Z_1+Z_2}\right)=\frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}\frac{1-\alpha\beta+m(\alpha+\beta)}{1+m^2}=\frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}(1-\alpha\beta)=\frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}(1+n^2 R_1 R_2) \quad .$$

Puisque $\lim_{n\to+\infty}\frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}(1+n^2 R_1 R_2)=+\infty$, on en déduit qu'il n'existe pas de constante *C* qui ne dépend que de R_1 et de R_2 et telle que $\mathrm{Re}\left(\frac{Z_1 Z_2}{Z_1+Z_2}\right)\leqslant C$.

Ainsi, même si l'on connaît la partie résistive de deux impédances complexes, on ne peut majorer la partie résistive de leur association en parallèle, puisque cette dernière peut être arbitrairement grande selon les cas. On peut par contre en donner une valeur minimale (cf c)) , qui correspond à la résistance équivalente en parallèle au cas ou les deux impédances complexes sont purement résistives .

9) a) On a $\frac{Z Z_1}{Z+Z_1}=a+b\,j$ donc $Z Z_1=(Z+Z_1)(a+b\,j)=Z(a+b\,j)+Z_1(a+b\,j)$ d'où la relation $Z(Z_1-(a+bj))=Z_1(a+b\,j)$.

Le nombre complexe Z_1 , étant de partie réelle strictement positive, est non nul et par le 2)b), on peut faire le même raisonnement pour $a+bj=\frac{Z Z_1}{Z+Z_1}$. On en déduit que $Z_1(a+b\,j)\neq 0$ et la relation $Z(Z_1-(a+bj))=Z_1(a+b\,j)$ montre alors que $Z_1\neq a+bj$, ce qui permet d'obtenir la relation $Z=\frac{Z_1(a+b\,j)}{Z_1-(a+bj)}$.

b) On a

$$\mathrm{Re}(Z)=\mathrm{Re}\left(\frac{Z_1(a+b\,j)}{Z_1-(a+bj)}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{(Z_1(a+b\,j))(\bar{Z}_1-(a-bj))}{|Z_1-(a+bj)|^2}\right)=\mathrm{Re}\frac{((Z_1(a+b\,j))(\bar{Z}_1-(a-bj)))}{|Z_1-(a+bj)|^2}$$

donc $\mathrm{Re}((Z_1(a+b\,j))(\bar{Z}_1-(a-bj)))>0$.

Puisque $(Z_1(a+b\,j))(\bar{Z}_1-(a-bj))=|Z_1|^2(a+bj)-Z_1(a^2+b^2)$

on a

$$\mathrm{Re}((Z_1(a+b\,j))(\bar{Z}_1-(a-bj)))=a|Z_1|^2-\mathrm{Re}(Z_1)(a^2+b^2)>0 \quad .$$

c) Remarquons que la condition $a|Z_1|^2-\mathrm{Re}(Z_1)(a^2+b^2)>0$ peut se réécrire $a^2+b^2-\frac{|Z_1|^2}{\mathrm{Re}(Z_1)}a<0$

c'est à dire $\left(a-\frac{|Z_1|^2}{2\,\mathrm{Re}(Z_1)}\right)^2+b^2<\frac{|Z_1|^4}{4(\mathrm{Re}(Z_1))^2}$.

On remarque maintenant que le membre de gauche de l'inégalité ci-dessus peut s'écrire

$$\left|a+bj-\frac{|Z_1|^2}{2\,\mathrm{Re}(Z_1)}\right|^2$$

On obtient donc la relation $\left|(a+bj)-\frac{|Z_1|^2}{2\,\mathrm{Re}(Z_1)}\right|^2<\frac{|Z_1|^4}{4(\mathrm{Re}(Z_1))^2}$

Soit Ω le point d'affixe $\frac{|Z_1|^2}{2\,\mathrm{Re}(Z_1)}+0\,j$. Ainsi, l'inégalité ci-dessus équivaut à ce que l'image dans le plan complexe de $a+bj$ soit à l'intérieur du cercle de centre Ω et de rayon $\frac{|Z_1|^2}{2\,\mathrm{Re}(Z_1)}$ (c'est à dire le cercle de centre Ω et passant par l'origine du repère.)

d) On calcule $\left|Z_1-\frac{|Z_1|^2}{2\,\mathrm{Re}(Z_1)}\right|^{2.}$. Pour simplifier les calculs, considérons $Z_1=x+j\,y$ la forme algébrique de Z_1 . On a alors

$$\left|Z_1-\frac{|Z_1|^2}{2\operatorname{Re}(Z_1)}\right|^2=\left|(x+yj)-\frac{x^2+y^2}{2x}\right|^2=\left(\frac{x^2-y^2}{2x}\right)^2+y^2=\frac{x^4+y^4+2x^2y^2}{4x^2}=\left(\frac{x^2+y^2}{2x}\right)^2$$

ce qui se réécrit :

$$\left|Z_1-\frac{|Z_1|^2}{2\operatorname{Re}(Z_1)}\right|=\frac{|Z_1|^2}{2\operatorname{Re}(Z_1)} ,$$

c'est à dire que l'image dans le plan complexe de Z_1 appartient au cercle de centre Ω et de rayon $\frac{|Z_1|^2}{2\operatorname{Re}(Z_1)}$.

Remarque : on peut voir facilement que ce cercle est :

(i) le cercle passant par 0, Z_1 et $\overline{Z_1}$ si $Z_1 \notin \mathbb{R}$

(ii) le cercle de diamètre $[0, Z_1]$ si $Z_1 \in \mathbb{R}$.

e) On a nécessairement $Z_1 \neq \alpha+\beta j$ car d'après le d), Z_1 n'est pas à l'intérieur du cercle déterminé dans la question précédente.

On peut alors poser $Z=\frac{Z_1(\alpha+\beta j)}{Z_1-(\alpha+\beta j)}$ comme suggéré par le calcul fait au 8)a.

On a ainsi d'une part $\frac{ZZ_1}{Z+Z_1}=\frac{\frac{Z_1(\alpha+\beta j)}{Z_1-(\alpha+\beta j)}Z_1}{\frac{Z_1(\alpha+\beta j)}{Z_1-(\alpha+\beta j)}+Z_1}=\frac{Z_1^2(\alpha+\beta j)}{Z_1^2}=\alpha+\beta j$.

D'autre part, en reprenant les calculs des questions précédentes :

$$\operatorname{Re}(Z)=\operatorname{Re}\left(\frac{Z_1(\alpha+\beta j)}{Z_1-(\alpha+\beta j)}\right)=\operatorname{Re}\left(\frac{(Z_1(\alpha+\beta j))(\bar{Z}_1-(\alpha-\beta j))}{|Z_1-(\alpha+\beta j)|^2}\right)=\operatorname{Re}\frac{((Z_1(\alpha+\beta j))(\bar{Z}_1-(\alpha-\beta j)))}{|Z_1-(\alpha+\beta j)|^2}$$

donc $\operatorname{Re}(Z)$ est du signe de $\operatorname{Re}((Z_1(\alpha+\beta j))(\bar{Z}_1-(\alpha-\beta j)))$ et on a en paraphrasant les calculs faits au c) :

$$\operatorname{Re}((Z_1(\alpha+\beta j))(\overline{Z_1}-(\alpha-\beta j)))=\alpha|Z_1|^2-\operatorname{Re}(Z_1)(\alpha^2+\beta^2)=-\operatorname{Re}(Z_1)\left(\alpha^2+\beta^2-\frac{|Z_1|^2}{\operatorname{Re}(Z_1)}\alpha\right)$$

$$=-\operatorname{Re}(Z_1)\left(\left|(\alpha+j\beta)-\frac{|Z_1|^2}{2\operatorname{Re}(Z_1)}\right|^2-\frac{|Z_1|^4}{4(\operatorname{Re}(Z_1))^2}\right)>0$$ car la parenthèse est strictement négative vu que l'image dans le plan complexe de $\alpha+j\beta$ est à l'intérieur du cercle de centre Ω et de rayon $\frac{|Z_1|^2}{2\operatorname{Re}(Z_1)}$.

On en déduit que $\alpha+j\beta$ est de la forme $\alpha+j\beta=\frac{ZZ_1}{Z+Z_1}$ pour un certain nombre complexe Z tel que $\operatorname{Re}(Z)>0$.

Remarque :

On a en fait montré que si Z_1 est fixé, l'ensemble des valeurs complexes de l'impédance équivalente à une association en parallèle entre Z_1 et une autre impédance Z de partie réelle strictement positive est l'intérieur du cercle C de centre $\dfrac{|Z_1|^2}{2\operatorname{Re}(Z_1)}$ et passant par l'origine du repère. Mathématiquement, cela signifie que l'image de l'ensemble des nombres complexes de partie réelle strictement positive par l'application $Z \to \dfrac{Z Z_1}{Z+Z_1}$ est exactement l'intérieur du cercle C .

On remarquera que, par contre, l'ensemble des valeurs complexes de l'impédance équivalente à une association en série entre Z_1 et une autre impédance Z de partie réelle strictement positive est le demi-plan constitué des nombres complexes de partie réelle strictement supérieure à $\operatorname{Re}(Z_1)$.

f) Soit Z un nombre complexe de partie réelle strictement positive. Puisque $\dfrac{Z Z_1}{Z+Z_1}$ est à l'intérieur du cercle de centre Ω et de rayon $\dfrac{|Z_1|^2}{2\operatorname{Re}(Z_1)}$, on a $\left|\dfrac{Z Z_1}{Z+Z_1}-\dfrac{|Z_1|^2}{2\operatorname{Re}(Z_1)}\right| \leqslant \dfrac{|Z_1|^2}{2\operatorname{Re}(Z_1)}$. On en déduit par inégalité triangulaire que

$$\left|\frac{Z Z_1}{Z+Z_1}\right| \leqslant \left|\frac{Z Z_1}{Z+Z_1}-\frac{|Z_1|^2}{2\operatorname{Re}(Z_1)}\right|+\frac{|Z_1|^2}{2\operatorname{Re}(Z_1)} \leqslant \frac{|Z_1|^2}{2\operatorname{Re}(Z_1)}+\frac{|Z_1|^2}{2\operatorname{Re}(Z_1)}=\frac{|Z_1|^2}{\operatorname{Re}(Z_1)}.$$

Remarque : le module de $\dfrac{Z Z_1}{Z+Z_1}$ joue le rôle de résistance en régime sinusoïdal : c'est le rapport entre la valeur efficace de la tension aux bornes du dipôle constitué de l'association en parallèle de deux dipôles d'impédances Z et Z_1 et de celle de l'intensité du courant qui y rentre (ou en sort). On remarque que quelle que soit l'impédance Z, celle de l'association en parallèle reste bornée en module par $\dfrac{|Z_1|^2}{\operatorname{Re}(Z_1)}$.

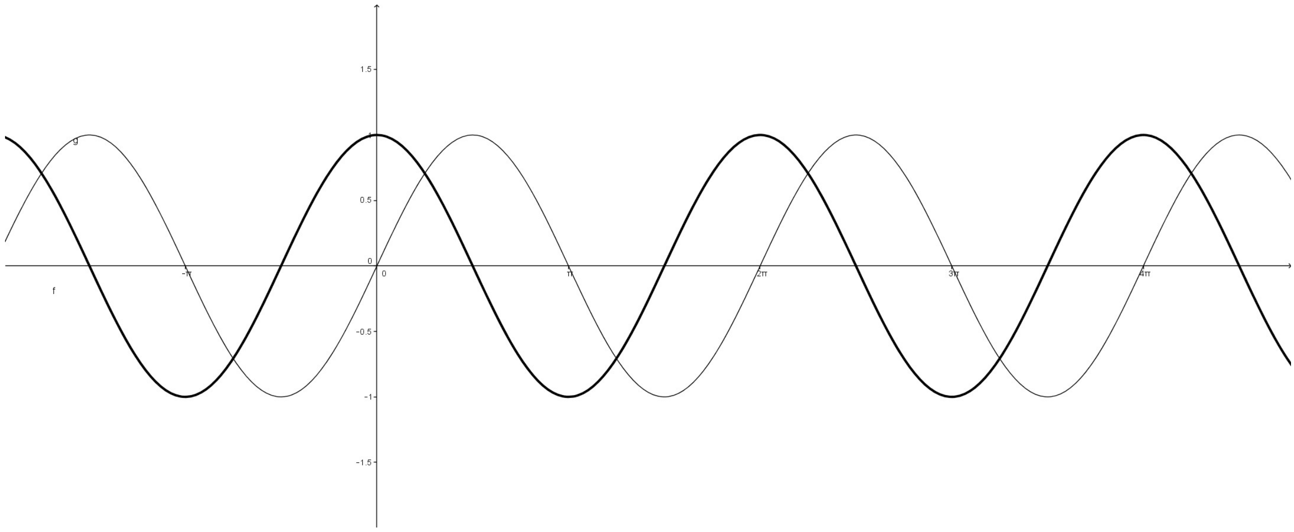
La situation est toute à fait différente pour une association en série de deux dipôles d'impédances Z et Z_1 , puisque le module de l'impédance correspondante peut alors prendre des valeurs aussi grandes que l'on veut : l'impédance $Z+Z_1$ peut être égale à n'importe quel nombre complexe de partie réelle supérieure à $\operatorname{Re}(Z_1)$.

D - SIGNAUX SINUSOÏDAUX

Les fonctions sinusoïdales sont à la base des descriptions mathématiques des phénomènes oscillatoires. En électricité, elles interviennent naturellement dans l'étude du régime sinusoïdal.
Plus généralement, elles interviennent dans la représentation de la plupart des phénomènes périodiques : la théorie des séries de Fourier (que l'on abordera dans un prochain chapitre) permet de décrire un signal périodique à partir de signaux sinusoïdaux.

I) *Fonction sinusoïdale*

La première chose à avoir en tête est la représentation graphique des fonctions sinus et cosinus :



Il faut noter que la courbe représentative du sinus s'obtient à partir de celle du cosinus par une translation horizontale de $\frac{+\pi}{2}$. Cela se traduit algébriquement par la formule $\sin(t)=\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)$.
Il est aussi important de savoir repérer pour quelles valeurs de la variable t les fonctions sinus et cosinus s'annulent, atteignent leurs maxima et minima .
Une fonction sinusoïdale est obtenue à partir de la fonction cosinus par un changement d' échelle et une éventuelle translation horizontale. C'est ce qui est formalisé ci-dessous :

Définition 1 : On appelle fonction sinusoïdale toute fonction $x(t)$ définie sur $\mathbb{R}$ et ayant une expression de la forme $x(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$ avec $A>0$, $\omega>0$ et $\varphi\in\mathbb{R}$.
Le nombre A est appelé amplitude de $x(t)$.
Le nombre ω est appelé pulsation de $x(t)$.
Le nombre φ est appelé déphasage (ou phase à l'origine) de $x(t)$.

On appelle fonction sinusoïdale complexe toute fonction $x(t)$ définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs complexes, ayant une expression de la forme $x(t)=C e^{j\omega t}$ avec $C\in\mathbb{C}$ et $\omega>0$.

Remarques :
(i) le facteur A traduit le changement d'échelle en ordonnées, ω celui en abscisses et φ le décalage horizontal.
(ii) nous verrons que toute fonction sinusoïdale est la partie réelle d'une fonction sinusoïdale complexe.

Exemples :

(i) $x(t)=-3\cos(2t+\frac{\pi}{3})$ est une fonction sinusoïdale. En utilisant en effet la formule $\cos(a+\pi)=-\cos(a)$ on peut écrire $x(t)=3\cos(2t+\frac{\pi}{3}+\pi)=3\cos(2t+\frac{4\pi}{3})$ et donc $A=3,\ \omega=2$ et $\varphi=\frac{4\pi}{3}$.

(ii) $x(t)=(1-j)e^{10jt}$ est une fonction sinusoïdale complexe.

Propriété -Définition 1 : Le nombre $T=\frac{2\pi}{\omega}$ est appelé <u>période fondamentale</u> (ou plus simplement <u>période</u>) du signal. Cela signifie par définition que $\forall t\in\mathbb{R},\ x(t+T)=x(t)$.
Le nombre $\nu=\frac{1}{T}$ est appelé <u>fréquence fondamentale</u> (ou plus simplement <u>fréquence</u>) du signal.

<u>Preuve</u> : $\forall t\in\mathbb{R},\ x(t+T)=A\cos(\omega(t+T)+\varphi)=A\cos(\omega(t+\frac{2\pi}{\omega})+\varphi)$
$=A\cos(\omega t+2\pi+\varphi)=A\cos(\omega t+\varphi)=x(t)$

II) Écriture complexe d'un signal sinusoïdal

L'idée principale de ce paragraphe est de montrer que l'on peut, en quelque sorte, remplacer une sinusoïde par une sinusoïde complexe, objet qui se révèle être beaucoup plus facile à manipuler dans les calculs.
Plus précisément, on écrira, partant de la formule $\cos(\theta)=\mathrm{Re}(e^{j\theta})$, l'égalité :
$\cos(\omega t+\varphi)=\mathrm{Re}\left(e^{j(\omega t+\varphi)}\right)$.
Puisque A est réel, on a donc
$x(t)=A\cos(\omega t+\varphi)=\mathrm{Re}\left(A\,e^{j(\omega t+\varphi)}\right)=\mathrm{Re}\left(A\,e^{j\varphi}e^{j\omega t}\right)$. Il apparaît alors que $x(t)$ est la partie réelle de la sinusoïde complexe $t\rightarrow \underline{A}\,e^{j\omega t}$, où $\underline{A}$ est une constante complexe. Cela permet d'assimiler une fonction sinusoïdale à une exponentielle complexe.

Définition 2 : On définit <u>l' amplitude complexe</u> de $x(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$ comme le nombre complexe $\underline{A}:=A\,e^{j\varphi}$ de sorte que l'on peut écrire $x(t)=\mathrm{Re}\left(\underline{A}\,e^{j\omega t}\right)$. On notera que $|\underline{A}|=A$ et $\mathrm{Arg}(\underline{A})=\varphi$. Ainsi, toute fonction sinusoïdale peut s'écrire comme la partie réelle d'une fonction sinusoïdale complexe.

Remarque :pour éviter toute confusion avec $\underline{A}$, on nommera le réel A <u>amplitude réelle</u> de $x(t)$.

Exemples :

1) Pour $x(t)=-3\cos(2t+\frac{\pi}{3})$, on a $\underline{A}=A\,e^{j\varphi}=3\,e^{j\frac{4\pi}{3}}$. On peut écrire $\underline{A}$ sous forme algébrique (ce qui aura son utilité au paragraphe suivant) ce qui donne $\underline{A}=-\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

2) On a $e^{j\omega t}=\cos(\omega t)+j\sin(\omega t)$, donc $j e^{j\omega t}=-\sin(\omega t)+j\cos(\omega t)$ ce qui donne que $\sin(\omega t)=\mathrm{Re}(-j e^{j\omega t})$: on en déduit que pour $x(t)=\sin(\omega t)$ on a $\underline{A}=-j$.

III) Écriture d'un signal sinusoïdal avec sinus et cosinus

Théorème 1 : Tout signal sinusoïdal $x(t)$ d'amplitude complexe $\underline{A}=\alpha+j\beta$ et de pulsation ω admet une expression de la forme $x(t)=\alpha\cos(\omega t)-\beta\sin(\omega t)$. Inversement, tout signal ayant pour expression $x(t)=\alpha\cos(\omega t)-\beta\sin(\omega t)$ est un signal sinusoïdal de pulsation ω et d'amplitude complexe $\underline{A}=\alpha+j\beta$.

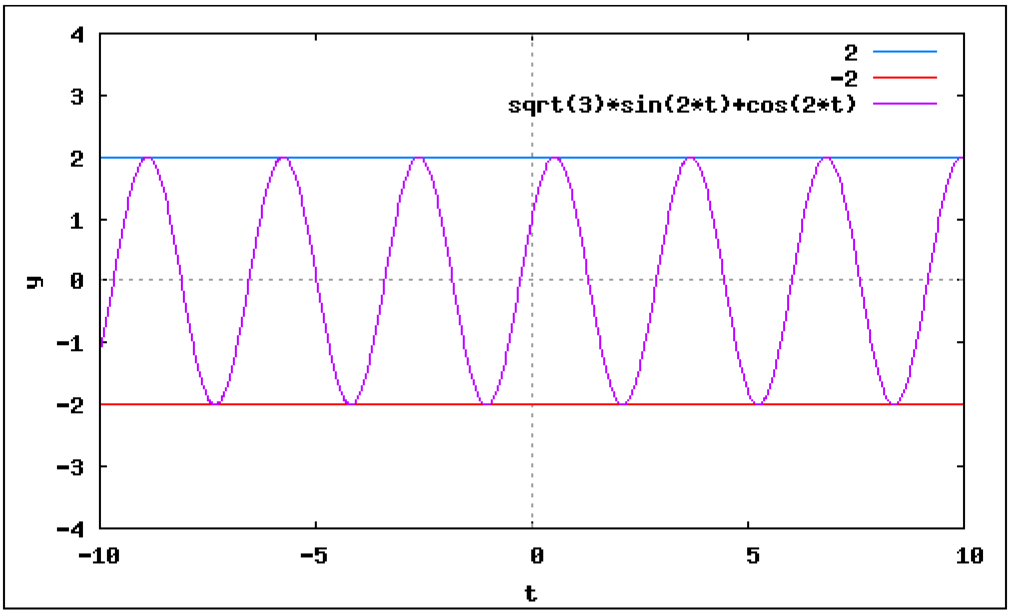
Preuve : Soit un signal sinusoïdal $x(t)$ d'amplitude complexe $\underline{A}=\alpha+j\beta$ et de pulsation ω. Alors

$$x(t)=\mathrm{Re}\left(\underline{A}e^{j\omega t}\right)=\mathrm{Re}\left((\alpha+j\beta)e^{j\omega t}\right)=\mathrm{Re}\left((\alpha+j\beta)(\cos(\omega t)+j\sin(\omega t))\right)$$

$$x(t)=\mathrm{Re}\left(\alpha\cos(\omega t)-\beta\sin(\omega t)+j(\alpha\sin(\omega t)+\beta\cos(\omega t))\right)=\alpha\cos(\omega t)-\beta\sin(\omega t)$$

Réciproquement, si $x(t)=\alpha\cos(\omega t)-\beta\sin(\omega t)$ les calculs ci-dessus montrent que $x(t)=\mathrm{Re}\left((\alpha+j\beta)e^{j\omega t}\right)$ ce qui signifie que $x(t)$ est un signal sinusoïdal de pulsation ω et que $\underline{A}=\alpha+j\beta$

Exemple : $x(t)=\cos(2t)+\sqrt{3}\sin(2t)$ est un signal sinusoïdal de pulsation 2 et d'amplitude complexe $\underline{A}=1-j\sqrt{3}$. La forme exponentielle est $\underline{A}=2e^{-j\frac{\pi}{3}}$ ce qui permet d'écrire $x(t)=\cos(2t)+\sqrt{3}\sin(2t)=2\cos\left(2t-\frac{\pi}{3}\right)$. Son amplitude réelle vaut donc 2 ce qui permet de dire que $-2\le x(t)\le 2$ alors qu'un encadrement brutal de $\cos(2t)$ et $\sin(2t)$ par -1 et 1 donnerait l'encadrement moins précis : $-1-\sqrt{3}\le x(t)\le 1+\sqrt{3}$.



Corollaire 1 : l'amplitude réelle du signal $x(t)=\alpha\cos(\omega t)-\beta\sin(\omega t)$ vaut $A=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$.

Preuve : L'amplitude réelle vaut $|\underline{A}|=|\alpha+j\beta|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$.

Corollaire 2 : une somme de sinusoïdes de mêmes pulsations ω est une sinusoïde de pulsation ω et son amplitude complexe est la somme des amplitudes complexes de chacun des termes de la somme.

Preuve : considérons deux signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sinusoïdaux de pulsation ω et écrivons les sous la forme $x_1(t)=\alpha_1\cos(\omega t)-\beta_1\sin(\omega t)$ et $x_2(t)=\alpha_2\cos(\omega t)-\beta_2\sin(\omega t)$ avec $\alpha_{1,}\ \beta_1\in\mathbb{R}$. Alors $\forall t\in\mathbb{R},\ (x_1+x_2)(t)=(\alpha_1+\alpha_2)\cos(\omega t)-(\beta_1+\beta_2)\sin(\omega t)$ ce qui montre que x_1+x_2 est un signal de pulsation ω et d'amplitude complexe $(\alpha_1+\alpha_2)+j(\beta_1+\beta_2)$ qui est bien la somme des deux amplitudes complexes de $x_1(t)$ et $x_2(t)$, à savoir respectivement $\alpha_1+j\beta_1$ et $\alpha_2+j\beta_2$.

Exemple : le signal x d'expression $x(t)=2\cos(\pi t)+\cos\left(\pi t+\frac{\pi}{3}\right)$ est un signal sinusoïdal de pulsation $\omega=\pi,$ donc de période $T=2$, et d'amplitude complexe $\underline{A}=2+e^{j\frac{\pi}{3}}=\frac{5}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Son amplitude réelle (c'est à dire sa valeur maximale, vaut $|\underline{A}|=\sqrt{7}$.

Attention : contrairement aux amplitudes complexes, les amplitudes réelles ne s'ajoutent pas ! Ainsi, on notera que dans l'exemple ci-dessus, l'amplitude réelle vaut $|\underline{A}|=\sqrt{7}<2+1$.

Remarque *:* Beaucoup de signaux s'écrivent en fait comme somme de fonctions sinusoïdales de pulsations différentes (ce que dit par exemple la théorie des séries de Fourier). En particulier, un produit de sinusoïdes (de pulsations quelconques) peut d'écrire comme somme de sinusoïdes : c'est le principe de linéarisation.

IV) Exercices

Exercice 1.

A) Pour chacun des signaux sinusoïdaux suivants, calculez l'amplitude complexe. Calculer ensuite l'amplitude réelle puis le cosinus et le sinus de la phase.

1) $x(t)=\cos(t)+3\sin(t)$.
2) $x(t)=3\cos(t)-4\sin(t)$.
3) $x(t)=\cos(2t)+\sin\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)$.

B) Soit $\omega>0$ et $\theta\in[0\,;\pi[$. On considère le signal $x(t)=\cos(\omega t)+\cos(\omega t+\theta)$. Calculez son amplitude complexe : écrire cette dernière sous forme algébrique et sous forme exponentielle à l'aide des paramètres ω et θ .

Exercice 2. On considère le signal $x(t)=A+B\cos(\omega t+\varphi)$ où $A\in\mathbb{R}, B>0, \omega>0$ et $\varphi\in[0\,;2\pi[$. On notera que ce signal correspond ainsi à la superposition d'un signal constant et d'un signal sinusoïdal.
Sur l'intervalle $[0\,;8]$ on a le tableau de variations suivant :

t	0		1		4		7		8
$x(t)$	?	$\nearrow$	6	$\searrow$	-2	$\nearrow$	6	$\searrow$	?

1) Que vaut la période du signal ? En déduire ω
2) a) Quelles sont les valeurs numériques de $A+B$ et de $A-B$?
   b) En déduire les valeurs de A et de B.
3) Calculez la valeur de φ .En déduire la valeur de $x(0)$.

Exercice 3.
A l'aide de la formule d'Euler, linéarisez les expressions suivantes :

1) $\cos(2t)\sin(3t)$
2) $\cos^2(2t)\sin(4t)$
3) $\cos^2(2t)\sin^3(4t)$

(*) Exercice 4.
On considère deux signaux sinusoïdaux $x(t)$ et $y(t)$ de même pulsation. On suppose connus :
a) l'expression du signal $x(t)$ qui vaut : $x(t)=4\cos(t)$
b) L'amplitude réelle du signal $y(t)$ qui vaut 5.
c) L'amplitude du signal $x(t)+y(t)$ qui vaut 7.

Le but de l'exercice est d'en déduire l'expression du signal $y(t)$.

On cherche le signal $y(t)$ d'abord sous la forme $y(t)=A\cos(t+\varphi)$.

1) Que vaut A ?
2) Montrer que $x(t)+y(t)=(4+A\cos(\varphi))\cos(t)-A\sin(\varphi)\sin(t)$.
3) En déduire les valeurs de $\cos(\varphi)$ et de $\sin(\varphi)$.
4) Déduire finalement une expression de $y(t)$ sous la forme $y(t)=X\cos(t)+Y\sin(t)$.

Exercice 5

Soit le signal sinusoïdal $x(t)=12.\cos(50\pi t)$.

1) Quelle est la période de $x(t)$? Quelle est son amplitude ?
2) Sur l'intervalle $[0\,;10]$ quel est le nombre de solutions à l'équation $x(t)=5$?
3) Même question pour l'équation $x(t)=-12$

(*)Exercice 6

Pour $z=x+jy$, on pose $N(z)=3x^2+2y^2-2xy$.

1) Vérifier que $\forall\lambda\in\mathbb{R},\ N(\lambda z)=\lambda^2 N(z)$.

2) Montrer que $N(e^{j\theta})=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\cos(2\theta)-\sin(2\theta)$.

3) En déduire que $\forall\theta\in\mathbb{R},\ \frac{5-\sqrt{5}}{2}\leq N(e^{j\theta})\leq\frac{5+\sqrt{5}}{2.}$, puis que

$\forall z\in\mathbb{C},\ \frac{5-\sqrt{5}}{2}|z|^2\leq N(z)\leq\frac{5+\sqrt{5}}{2}|z|^{2.}$

Exercice 7

On considère le signal $x(t)=2\cos(10\mathrm{t})+a\sin(10\mathrm{t})$, où $a\in\mathbb{R}$ est un paramètre quelconque.

1) Calculer la période et la fréquence du signal $x(t)$.
2) Dans cette question, on souhaite trouver les valeurs de *a* telles que, pour tout $t\in\mathbb{R}$, on ait l'encadrement : $-4\leq x(t)\leq 4$.
   a) Calculer l'amplitude complexe de $x(t)$.
   b) En déduire l' amplitude réelle de $x(t)$.
   c) Conclure sur l'ensemble des valeurs possibles de *a*

Exercice 8

On considère le signal sinusoïdal $x(t)=6\cos(2t)+2\sqrt{3}\sin(2t)$.

1) Calculer la période et la fréquence du signal $x(t)$.

2) a) Calculer sous forme algébrique l'amplitude complexe de $x(t)$.
   b) Calculer la forme exponentielle de l'amplitude complexe de $x(t)$.
   c) En déduire une expression de $x(t)$ de la forme $x(t)=A\cos(2\mathrm{t}+\varphi)$

3) Recopier et compléter le tableau de variations de $x(t)$ sur l'intervalle $[0\,;\frac{3\pi}{2}]$ par les valeurs manquantes à la place des ??

t	0		??		??		??		$\frac{3\pi}{2}$
$x(t)$	6	$\nearrow$	??	$\searrow$	??	$\nearrow$	??	$\searrow$	-6

(*) Exercice 9

1) Calculer l'amplitude complexe du signal $x(t)=\cos(\omega t)+\cos\left(\omega t+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(\omega t+\frac{4\pi}{3}\right)$.

   Que remarque-t-on ?
2) Prouver que tout signal sinusoïdal d'amplitude réelle $A\leqslant 3$ peut s'écrire comme somme de trois signaux sinusoïdaux d'amplitude réelle égale à 1 (travailler sur les amplitudes complexes, et traiter dans un premier temps le cas où $\underline{A}\in\mathbb{R}$.)

V) Corrigés

Exercice 1.

A)

	Amplitude complexe	Amplitude réelle	Cosinus phase	Sinus phase
$x(t)=\cos(t)+3\sin(t).$	$1-3j$	$\sqrt{10}$	$\frac{1}{\sqrt{10}}$	$\frac{-3}{\sqrt{10}}$
$x(t)=3\cos(t)-4\sin(t).$	$3+4j$	5	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$
$x(t)=\cos(2t)+\sin(2t+\frac{\pi}{3}).$	$1+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}j$	$\sqrt{2+\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$	$\frac{-\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

B)

$\underline{A}=1+\cos(\theta)+j\sin(\theta)=2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{j\frac{\theta}{2}}$ donc l'amplitude réelle vaut $2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\geq 0$ car $\theta\in[0;\pi[$

.

Exercice 2.

1) $T=7-1=6$ donc $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{3}.$

2) a) $A+B=6$ et $A-B=-2$
   b) $A=2$ et $B=4$

3) On a un maximum en t=1 donc $\omega+\varphi=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ d'où $\varphi=\frac{-\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

Ainsi, $x(0)=A+B\cos(\varphi)=4.$

Exercice 3.

1) $\frac{1}{2}\sin(t)+\frac{1}{2}\sin(5t).$

2) $\frac{1}{2}\sin(4t)+\frac{1}{4}\sin(8t)$

3) $\frac{3}{8}\sin(4t)+\frac{1}{8}\sin(8t)-\frac{1}{8}\sin(12t)-\frac{1}{16}\sin(16t)$

Exercice 4.

1) $A=5$

2) $x(t)+y(t)=4\cos(t)+A\cos(t+\varphi)=4\cos(t)+A(\cos(t)\cos(\varphi)-\sin(t)\sin(\varphi))$
$=(4+A\cos(\varphi))\cos(t)-A\sin(\varphi)\sin(t)=(4+5\cos(\varphi))\cos(t)-5\sin(\varphi)\sin(t).$

.

3) L'amplitude réelle du signal $x(t)+y(t)$ qui vaut 7 donc $(4+5\cos(\varphi))^2+25\sin^2(\varphi)=49$ ce qui donne $16+40\cos(\varphi)+25=49$ d'où $\cos(\varphi)=\frac{1}{5}$.

Pour le sinus on a les deux possibilités $\sin(\varphi)=\frac{\pm 2\sqrt{6}}{5}$.

On a $y(t)=A\cos(t+\varphi)=5\cos(t+\varphi)=5(\cos(t)\cos(\varphi)-\sin(t)\sin(\varphi))$
$=\cos(t)\pm 2\sqrt{6}\sin(t)$.

Exercice 5

1) La période vaut $T=\frac{1}{25}$ et l'amplitude vaut 12.
2) Il y a deux solutions par période, et 250 périodes complètes dans l'intervalle $[0\,;10]$, donc 500 solutions différentes.
3) Il y a une solution par période donc 250 solutions cette fois.

Exercice 6

1) $N(\lambda z)=3(\lambda x)^2+2(\lambda y)^2-2(\lambda x)(\lambda y)=\lambda^2 N(z)$ en factorisant par λ^2 .

2)

$$N(e^{j\theta})=3\cos^2(\theta)+2\sin^2(\theta)-2\cos(\theta)\sin(\theta)$$
$$=\frac{3}{2}(1+\cos(2\theta))+1-\cos(2\theta)-\sin(2\theta)$$
$$=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\cos(2\theta)-\sin(2\theta).$$

3)L'amplitude réelle de la fonction $\theta\to\frac{1}{2}\cos(2\theta)-\sin(2\theta)$ vaut $\frac{\sqrt{5}}{2}$ donc

$\forall\theta\in\mathbb{R},\ \frac{5-\sqrt{5}}{2}\leq\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\cos(2\theta)-\sin(2\theta)\leq\frac{5+\sqrt{5}}{2}$ c'est à dire

$\forall\theta\in\mathbb{R},\ \frac{5-\sqrt{5}}{2}\leq N(e^{j\theta})\leq\frac{5+\sqrt{5}}{2.}$.

Par le 1), on a $\forall\theta\in\mathbb{R},\forall r>0,\ \frac{5-\sqrt{5}}{2}r^2\leq N(re^{j\theta})\leq r^2\frac{5+\sqrt{5}}{2}$ d'où

$\forall z\in\mathbb{C},\ \frac{5-\sqrt{5}}{2}|z|^2\leq N(z)\leq\frac{5+\sqrt{5}}{2}|z|^{2.}$ (les inégalités restant bien sur vraies pour z nul).

Exercice 7

1) La période vaut $\frac{\pi}{5}$ et la fréquence $\frac{5}{\pi}$.

2)
   a) $\underline{A}=2-ja.$
   b) $A=|\underline{A}|=\sqrt{4+a^2}.$
   c) On doit avoir $A\leq 4$ d'où $a\leq 2\sqrt{3}.$

Exercice 8

1) La période vaut π et la fréquence $\frac{1}{\pi}$.
2) a) $\underline{A}=6-2\sqrt{3}\,j$
   b) $\underline{A}=4\sqrt{3}\,e^{-j\frac{\pi}{6}}$.
   c) $x(t)=4\sqrt{3}\cos\left(2t-\frac{\pi}{6}\right)$
3)

t	0		$\frac{\pi}{12}$		$\frac{7\pi}{12}$		$\frac{13\pi}{12}$		$\frac{3\pi}{2}$
$x(t)$	6	$\nearrow$	$4\sqrt{3}$	$\searrow$	$-4\sqrt{3}$	$\nearrow$	$4\sqrt{3}$	$\searrow$	-6

Exercice 9

1) On a $\underline{A}=1+e^{\frac{2j\pi}{3}}+e^{\frac{4j\pi}{3}}=1+\frac{1}{2}\left(-1+j\sqrt{3}\right)+\frac{1}{2}\left(-1-j\sqrt{3}\right)=0$. On en déduit que $\forall t\in\mathbb{R},\ x(t)=0$.
2) En regardant les amplitudes complexes, cela revient à prouver que pour tout nombre complexe z de module $|z|\leqslant 3$, il existe trois réels $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ tels que $z=e^{j\theta_1}+e^{j\theta_2}+e^{j\theta_3}$.
   On commence par prouver cela dans le cas où z est un nombre réel dans l'intervalle $[0\,;3]$. On a alors $\frac{z-1}{2}\in[-\frac{1}{2}\,;1]$ donc $\exists\varphi\in\mathbb{R}$ tel que $\frac{z-1}{2}=\cos(\varphi)$.
   On en déduit $z=1+2\cos(\varphi)=1+e^{j\varphi}+e^{-j\varphi}$.
   Considérons maintenant un nombre complexe z de module $|z|\leqslant 3$: on a $z=r\,e^{j\theta}$ avec $r\in[0\,;3]$. On a prouvé qu'il existe $\varphi\in\mathbb{R}$ tel que $r=1+e^{j\varphi}+e^{-j\varphi}$. On en déduit que $z=r\,e^{j\theta}=\left(1+e^{j\varphi}+e^{-j\varphi}\right)e^{j\theta}=e^{j\theta}+e^{j(\theta+\varphi)}+e^{j(\theta-\varphi)}$, ce qui prouve qu'il existe trois réels $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ tels que $z=e^{j\theta_1}+e^{j\theta_2}+e^{j\theta_3}$.

E - POLYNOMES

I) Fonction polynôme

En mathématiques, les polynômes sont des objets purement algébriques. Dans le cadre de ce cours, nous les présentons comme une classe particulière de fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ pour éviter toute difficulté théorique inutile.

On appelle fonction monôme (ou plus brièvement monôme) toute fonction P définie sur $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$, ayant une expression de la forme $P(X)=aX^k$ pour un certain entier naturel k et $a\in\mathbb{C}$.

On appelle fonction polynôme (ou plus brièvement polynôme, ce qui revient au même dans le cadre de ce cours) toute fonction P qui peut s'écrire comme une somme finie de monômes, c'est à dire de la forme $P(X)=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+\dots a_1X+a_0$, avec $a_n\neq 0$. On notera de façon indifférente ce polynôme P où $P(X)$, ce qui ne créera pas d'ambiguïté ici.

Ce sont les fonctions parmi les plus naturelles qui soient, au sens où elles ne font intervenir que les opérations +, - et $\times$.

Par exemple, la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par l'expression $P:X\to(1+j)X^3+(1-j)X+2j$ est un polynôme.

Il faut remarquer que l'écriture d'un polynôme donnée dans la définition ci-dessus est unique (propriété qui est à la base du principe d'identification terme à terme des polynômes):

Propriété 1 : si $\forall X\in\mathbb{C},\ P(X)=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+\dots a_1X+a_0=b_pX^p+b_{p-1}X^{p-1}+\dots b_1X+b_0$ avec $a_n\neq 0$ et $b_p\neq 0$, alors $n=p$ et $\forall i\in\{0;\dots;n\},\ a_i=b_i$.

Preuve : Quitte à permuter les rôles des suites (a_i) et (b_i) on peut supposer que $p\leqslant n$. On a alors pour tout réel X strictement positif :

$$a_n+\frac{a_{n-1}}{X}+\dots\frac{a_1}{X^{n-1}}+\frac{a_0}{X^n}=\frac{b_p}{X^{n-p}}+\frac{b_{p-1}}{X^{n-p+1}}+\dots\frac{b_1}{X^{n-1}}+\frac{b_0}{X^n}$$

En faisant tendre X vers $+\infty$, on obtient que $n=p$ (sinon on aurait $n-p>0$ et $a_n=0$ ce qui n'est pas) et par égalité des deux limites obtenues, $a_n=b_n$.

On a alors l'égalité des polynômes :

$$a_{n-1}X^{n-1}+\dots a_1X+a_0=b_{n-1}X^{n-1}+\dots b_1X+b_0$$

et en réitérant le processus à ces deux polynômes, on obtient $a_{n-1}=b_{n-1}$, et de façon générale, $\forall i=0,\dots,n,\ a_i=b_i$.

Un polynôme s'identifie donc à une suite de nombres complexes finie.

L'entier n est appelé degré du polynôme $P(X)$, que l'on note $\deg(P)$. Par convention, le polynôme nul a pour degré $-\infty$.

Dans le cas où $a_n=1$, on dit que le polynôme P est normalisé.

Les fonctions polynômes de degré 0 sont les fonctions constantes non nulles.

Les fonctions polynômes de degré 1 sont les fonctions affines non constantes.

Si a est un nombre complexe tel que $P(a)=0,$ on dit que a est <u>racine</u> du polynôme $P(X)$.

On note $\mathbb{C}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients complexes, et $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels.
On remarquera que la somme, le produit et la composée de deux polynômes sont des polynômes, mais en général, pas le quotient de deux polynômes.

Exemple : $P(X)=X^2+1$ et $Q(X)=2X-1$. Les polynômes $P+Q, P\times Q$ et $P\circ Q$ sont respectivement :
$(P+Q)(X)=X^2+2X$, $(P\times Q)(X)=2X^3-X^2+2X-1$ et
$(P\circ Q)(X)=P(Q(X))=4X^2-4X+2.$

Propriété 2 : Pour tous polynômes $P(X)$ et $Q(X)$ non nuls, on a :

(i) Degré d'un produit : $\deg(P(X).Q(X))=\deg(P(X))+\deg(Q(X))$
(ii) Degré d'une composée : $\deg(P(Q(X)))=\deg(P(X)).\deg(Q(X))$
(iii) Degré d'une somme : $\deg(P(X)+Q(X))=\max(\deg(P(X)),\deg(Q(X)))$ si $\deg(P(X))\neq\deg(Q(X))$. Si $\deg(P(X))=\deg(Q(X))$, on peut seulement assurer que $\deg(P(X)+Q(X))\leq\max(\deg(P(X)),\deg(Q(X)))$

<u>Remarque</u> :pour tout entier naturel n et tout entier naturel p, $\max(n,p)$ désigne le plus grand des deux entiers n et p.

<u>Preuve</u> *:* considérons les polynômes
$P(X)=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+....a_1X+a_0$ et $Q(X)=b_pX^p+b_{p-1}X^{p-1}+....b_1X+b_0$ avec $a_n\neq0$ et $b_p\neq0$.
(i) Le terme non nul de plus haut degré de $P(X).Q(X)$ est obtenu après développement du produit avec l'unique monôme $a_nX^n\times b_pX^p=a_nb_pX^{n+p}$ qui est de degré $n+p$.
(ii) Le terme non nul de plus haut degré de $(P(Q(X)))$ est obtenu par le monôme $a_n(b_pX^p)^n=a_nb_p^nX^{np}$ qui est de degré np $(a_nb_p^n\neq0)$.
(iii) Si $n\neq p$, par exemple $n>p$, le terme non nul de plus haut degré de $P(X)+Q(X)$ est a_nX^n donc le degré de $P(X)+Q(X)$ est égal à celui de P, c'est à dire le polynôme de degré le plus grand. Si $n=p$, les termes de plus haut degré de $P(X)$ et de $Q(X)$ peuvent s'annuler dans le cas particulier où $a_n=-b_p$ donc la seule chose que l'on peut dire est que
$\deg(P(X)+Q(X))\leq\max(\deg(P(X)),\deg(Q(X)))$.

II) Division de polynômes

En général, un quotient de polynômes n'est pas un polynôme, tout comme le quotient de deux entiers n'est pas forcément un entier.

Définition 1 : On dit qu'un polynôme $B(X)$ (non identiquement nul) divise un polynôme $A(X)$ si il existe un polynôme $Q(X)$ tel que $A(X)=B(X).Q(X)$. Le polynôme $Q(X)$ est appelé dans ce cas <u>quotient de</u> $A(X)$ <u>par</u> $B(X)$ et il est unique (conséquence de la propriété 3 ci-dessous).

Concrètement, pour montrer qu'un polynôme divise un autre polynôme, on effectue une <u>division euclidienne.</u>

Exemple : on montre que le polynôme $X-2$ divise le polynôme X^3-3X^2+4 . L'algorithme est celui de la division euclidienne :

$$
\begin{array}{l|l}
X^3-3X^2+4 & X-2 \\
\hline
X^3-2X^2 & X^2-X-2 \\
-X^2+4 & \\
-X^2+2X & \\
-2X+4 & \\
-2X+4 & \\
\end{array}
$$
0

Le reste est nul donc le polynôme $X-2$ divise bien le polynôme X^3-3X^2+4 et le quotient obtenu est X^2-X-2

Cet algorithme revient à écrire, de façon condensée, les égalités suivantes :

$$X^3-3X^2+4=X^2(X-2)-X^2+4$$
$$-X^2+4=-X(X-2)-2X+4$$
$$-2X+4=-2(X-2)$$

ce qui donne en remontant les calculs :

$$\begin{aligned} X^3-3X^2+4 &= X^2(X-2)-X(X-2)-2(X-2) \\ &=(X^2-X-2)(X-2). \end{aligned}$$

Plus généralement, dans le cas où $B(X)$ ne divise pas le polynôme $A(X)$, on a la toujours la possibilité de faire la division euclidienne avec reste :

Propriété 3: Soit $K=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si $A(X)\in K[X]$ et $B(X)\in K[X]$ sont deux polynômes avec $B(X)$ non identiquement nul, alors on peut trouver, de façon unique, deux polynômes $Q(X)\in K[X]$ et $R(X)\in K[X]$ tels que :

(i) $A(X)=B(X).Q(X)+R(X)$
(ii) $\deg(R(X))<$ deg (B(X)) .

$Q(X)$ est appelé dans ce cas quotient de $A(X)$ par $B(X)$ par la division euclidienne de , et $R(X)$ est le reste. Évidemment, $B(X)$ divise $A(X)$ si et seulement si $R(X)=0$.

Remarque : Si $Q(X)$ n'est pas le polynôme nul, $\deg(Q(X))=\deg(A(X))-\deg(B(X))$

(*) Preuve :
Existence : considérons l'ensemble Ω des polynômes de la forme $A(X)-B(X).Q(X)$ avec $Q\in K[X]$, c'est à dire : $\Omega \overset{\text{def}}{=} \{A(X)-B(X).Q(X)\ /\ Q\in K[X]\}$. On remarquera que par exemple $A\in\Omega$. Soit d le plus petit degré des polynômes appartenant à Ω (avec possiblement $d=-\infty$ si $0\in\Omega$.)
On peut tout de suite écarter le cas où $A=0$ (auquel cas $Q=R=0$ conviennent).
Posons $B(X)=b_pX^p+b_{p-1}X^{p-1}+....b_1X+b_0$ avec $p\in\mathbb{N}$ et $b_p\neq 0$. Soit enfin $R_0\in\Omega$ tel que $\deg(R_0(X))=d$. On peut alors écrire $A(X)=B(X).Q_0(X)+R_0(X)$ pour un certain polynôme $Q_0\in K[X]$. Soit $\lambda\neq 0$ le coefficient de X^d dans l'écriture de $R_0(X)$ (c'est à dire le coefficient de son terme de plus haut degré).
Alors, nous avons nécessairement $d<p$. En effet, raisonnons par l'absurde : si l'on avait $d\geqslant p$,

considérons le polynôme $R_1(X) \stackrel{\text{def}}{=} R_0(X) - \frac{\lambda}{b_p} X^{d-p} B(X)$. On aurait alors :

(i) Le monôme de plus haut degré du polynôme $\frac{\lambda}{b_p} X^{d-p} B(X)$ est λX^d, c'est à dire le monôme de plus haut degré de $R_0(X)$, donc $\deg(R_1(X)) < d$.

(ii) On a

$$R_1(X) = R_0(X) - \frac{\lambda}{b_p} X^{d-p} B(X) = A(X) - B(X).Q_0(X) - \frac{\lambda}{b_p} X^{d-p} B(X)$$
$$= A(X) - \left(Q_0(X) + \frac{\lambda}{b_p} X^{d-p}\right) B(x)$$

ce qui montre que $R_1(X) \in \Omega$.

Les points (i) et (ii) contredisent la définition de *d*. Nous pouvons donc affirmer que $d = \deg(R_0(X)) < p = \deg(B(X))$. Les polynômes $Q_0(X)$ et $R_0(X)$ vérifient l'énoncé de la propriété3.

Unicité. Prouvons l'unicité de $Q(X)$ et $R(X)$: s'il existait deux polynômes $Q_1(X)$ et $Q_2(X)$ et $R_1(X)$ et $R_2(X)$ tels que $A(X) = B(X).Q_i(X) + R_i(X)$ et $\deg(R_i(X)) < \deg(B(X))$ pour $i = 1,2$, on aurait $A(X) - A(X) = B(X).Q_2(X) + R_2(X) - B(X).Q_1(X) - R_1(X)$ c'est à dire $B(X).(Q_2(X) - Q_1(X)) = R_1(X) - R_2(X)$.

En considérant les degrés des polynômes ci-dessus, on a :

$\deg(B) + \deg(Q_2 - Q_1) = \deg(R_1 - R_2)$ (premier point de la propriété 1), soit

$\deg(B) + \deg(Q_2 - Q_1) \leq \max(\deg(R_1), \deg(R_2))$ (dernier point de la propriété 1) , d'où

$\deg(B) + \deg(Q_2 - Q_1) < \deg(B)$ car $\deg(R_i(X)) < \deg$ (B(X)) .

On en déduit que $\deg(Q_2 - Q_1) < 0$ ce qui n'est possible que si $\deg(Q_2 - Q_1) = -\infty$ donc $Q_1 = Q_2$. On déduit donc de l'égalité $0 = B(X).(Q_2(X) - Q_1(X)) + R_2(X) - R_1(X)$ que $0 = R_2(X) - R_1(X)$ d'où $R_1 = R_2$.

Enfin, si $Q(X)$ n'est pas le polynôme nul, $\deg(BQ) = \deg(B) + \deg(Q) \geq \deg(B) > \deg(R)$.

Ainsi, d'après le dernier point de la propriété 2, $\deg(BQ + R) = \deg(BQ)$ c'est à dire que $\deg(A) = \deg(BQ) = \deg(B) + \deg(Q)$ d'où $\deg(Q) = \deg(A) - \deg(B)$

Exemple : division euclidienne de $X^3 - 3X^2 + 4$ par $X^2 + 2$.

$X^3 - 3X^2 + 4$	$X^2 + 2$
$X^3 + 2X^2$	$X - 5$
$-5X^2 + 4$	
$-5X^2 - 10$	
14	

On a $Q(X) = X - 5$ et $R(X) = 14$.

III) Cas du polynôme du second degré dans $\mathbb{R}[X]$

Soit $P(X)=aX^2+bX+c\in\mathbb{R}[X]$, avec $a\neq 0$ et $\Delta=b^2-4ac$. La quantité Δ est appelée discriminant du polynôme $P(X)$.

Propriété 4 : Si $\Delta\geq 0$, $P(X)$ se factorise dans $\mathbb{R}[X]$ de sorte que $P(X)=a(X-x_1)(X-x_2)$, où x_1 et x_2 sont les deux racines de $P(X)$.

Remarque : Si $\Delta=0$, $x_1=x_2$ donc $P(X)=a(X-x_1)^2$.

Preuve : une façon de procéder (ce n'est pas la plus élégante) est de partir des expressions :

$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\text{a}}$, $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\text{a}}$. On obtient alors :

$$a(X-x_1)(X-x_2) \;=\; a\left(X-\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\text{a}}\right)\right)\left(X-\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\text{a}}\right)\right)$$

$$a\left(X+\frac{b}{2\text{a}}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2\text{a}}\right)\left(X+\frac{b}{2\text{a}}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2\text{a}}\right)=a\left(\left(X+\frac{b}{2\text{a}}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2\text{a}}\right)^2\right)$$

$$a\left(X^2+\frac{b}{a}X+\frac{b^2}{4\text{a}^2}-\frac{\Delta}{4\text{a}^2}\right)=a\left(X^2+\frac{b}{a}X+\frac{b^2}{4\text{a}^2}-\frac{b^2-4\text{ac}}{4\text{a}^2}\right)$$

$$a\left(X^2+\frac{b}{a}X+\frac{c}{a}\right)=a\,X^2+b\,X+c=P(X).$$

Exemple : $3\text{X}^2+4\text{X}-7=3(X-1)\left(X-\dfrac{7}{3}\right)$($=(X-1)(3\text{X}-7)$ si l'on préfère).

Propriété 5 : Si $\Delta<0$, $P(X)$ ne se factorise pas dans $\mathbb{R}[X]$, mais il se factorise dans $\mathbb{C}[X]$ de sorte que $P(X)=a(X-\lambda)(X-\bar{\lambda})$, où λ et $\bar{\lambda}$ sont les deux racines complexes conjuguées (non réelles) de $P(X)$.

Preuve : on raisonne par l'absurde et on suppose que $P(X)$ se factorise dans $\mathbb{R}[X]$ en produit de deux polynômes non constants : $P(X)=A(X)B(X)$. En considérant les degrés des polynômes dans ce produit on obtient que $2=\deg(A)+\deg(B)$. Les polynômes A et B n'étant pas constants leur degré commun est un entier naturel non nuls : la seule possibilité serait $\deg(A)=\deg(B)=1$. Les polynômes A et B seraient donc des fonctions affines réelles non constantes on pourrait alors écrire $P(X)=(mX+p)(m'X+p')$ avec $m\neq 0$ et $m\neq 0$: c'est absurde car $\dfrac{-p}{m}$ serait une racine réelle de P ce qui est impossible car $\Delta<0$ (voir V)2) du chapitre sur les nombres complexes).

On rappelle aussi que $\lambda=\dfrac{-b-j\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $\bar{\lambda}=\dfrac{-b+j\sqrt{-\Delta}}{2a}$ ce qui conduit à la relation :

$$a(X-\lambda)(X-\bar{\lambda})=a\left(X-\frac{-b-j\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(X-\frac{-b+j\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)=a\left(\left(X+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{j\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2\right)$$

$$=a\left(\left(X+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)=a\left(\left(X+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)=a\left(\left(X+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)=aX^2+bX+c=P(X).$$

Exemple : $X^2+1=(X-j)(X+j)$.

La propriété suivante est utile à connaître :

Propriété 6 : La somme des racines de $P(X)$ vaut $\frac{-b}{a}$, et le produit vaut $\frac{c}{a}$.

Preuve : Si x_1 et x_2 sont les racines (réelles ou pas) de P on a d'après les propriétés 4 et 5 : $P(X)=a(X-x_1)(X-x_2)$. En développant on obtient que $aX^2+bX+c=aX^2-a(x_1+x_2)X+ax_1x_2$. Par identification entre les deux polynômes (propriété 1) on obtient $b=-a(x_1+x_2)$ et $c=ax_1x_2$ ce qui donne $(x_1+x_2)=-\frac{b}{a}$ et $x_1x_2=\frac{c}{a}$.

Exemple : résoudre « de tête » l'équation $mX^2+X-m-1=0$ avec $m\neq 0$.
On remarque que 1 est une racine évidente. Pour trouver la deuxième racine x_2 le produit des racines donne $1.x_2=\frac{c}{a}=-\frac{m+1}{m}$ donc $x_2=-\frac{m+1}{m}$. Sinon, on peut voir aussi que la somme des racines vaut $1+x_2=\frac{-b}{a}=-\frac{1}{m}$ donc $x_2=-1-\frac{1}{m}$ ce qui donne le même résultat écrit autrement.

La propriété suivante nous sera utile pour simplifier de nombreux calculs qui se présenteront par la suite :

Propriété 7 : $\forall\lambda\in\mathbb{C},\ (X-\lambda)(X-\bar{\lambda})=X^2-2\,\mathrm{Re}(\lambda)X+|\lambda|^2$

Preuve : On développe : $(X-\lambda)(X-\bar{\lambda})=X^2-(\lambda+\bar{\lambda})X+\lambda.\bar{\lambda}=X^2-2\,\mathrm{Re}(\lambda)X+|\lambda|^2$

Exemple : $(X-1-j\sqrt{5})(X-1+j\sqrt{5})=X^2-2X+6$ en ayant noté auparavant que $\mathrm{Re}(1+j\sqrt{5})=1$ et $|\lambda|^2=6.$

IV) Factorisation d'un polynôme en polynômes irréductibles

IV.1) Quelques résultats généraux

Le Théorème suivant traduit le fait que l'ensemble des nombres complexes est un corps algébriquement clos, c'est à dire que toutes les équations polynomiales de degré non nul possèdent au moins une solution.

Théorème 1 (de d'Alembert-Gauss) Soit $P\in\mathbb{C}[X]$ avec $\deg(P)\geq 1$ (c'est à dire P n'est pas un polynôme constant). Alors P admet au moins une racine complexe.

Preuve : Je n'en connais pas qui n'utilise pas de notions d'analyse largement hors programme, même si la simplicité apparente de l'énoncé pourrait laisser penser à tort que ce résultat est facile à démontrer

Remarques :
(i) on a déjà démontré ce théorème dans le chapitre 1 pour les cas particuliers suivants :
P est un polynôme du second degré
$P(X)=X^n-a$ avec $a\in\mathbb{C}$
(ii) nous verrons que le nombre de solution est fini.

Propriété 8 : Soit $P\in\mathbb{R}[X]$. Alors, si λ est une racine complexe de P, alors $\bar{\lambda}$ est aussi une racine de P.

Remarque : le fait que les coefficients soient réels est fondamental pour que cette propriété marche. Retenir l'idée de cette propriété : les racines non réelles vont toujours deux par deux.

Preuve : Posons $P(X)=a_n X^n+a_{n-1}X^{n-1}+\dots a_1 X+a_0$, avec $a_i \in \mathbb{R}$.
Alors $P(\bar{\lambda})=a_n \bar{\lambda}^n+a_{n-1}\overline{\lambda}^{n-1}+\dots a_1\bar{\lambda}+a_0$
$=\bar{a}_n\bar{\lambda}^n+\overline{a_{n-1}}\,\overline{\lambda}^{n-1}+\dots \bar{a}_1\bar{\lambda}+\bar{a}_0$ car $a_i\in\mathbb{R}\Rightarrow \bar{a}_i=a_i$
$=\overline{a_n\lambda^n}+\overline{a_{n-1}\lambda^{n-1}}+\dots\overline{a_1\lambda}+\bar{a}_0$ à cause de la formule $\bar{z}\bar{z}'=\overline{z z'}$
$=\overline{a_n\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\dots a_1\lambda+a_0}$ à cause de la formule $\bar{z}+\bar{z}'=\overline{z+z'}$
$=\overline{P(\lambda)}=\bar{0}=0.$

Exemple : dans le cas d'un polynôme du second degré à coefficients réels, on a vu au chapitre 1 que les racines étaient conjuguées dans le cas $\Delta<0$.

La propriété suivante est celle qui va nous permettre de factoriser un polynôme :

Propriété 9 : Soit $P\in\mathbb{C}[X]$ et soit a une racine de P. Alors le polynôme $X-a$ divise $P(X)$.

Preuve : On considère la division euclidienne de $\mathrm{P}(\mathrm{X})$ par $X-a$:
$P(X)=(X-a)Q(X)+R(X)$ avec $\deg(R(X))<\deg(X-a)=1$.
Cela signifie que $\deg(R(X))\in\{-\infty;0\}$ donc $R(X)$ est un polynôme constant .
Ensuite, on remplace *X* par *a* dans l'égalité $P(X)=(X-a)Q(X)+R(X)$ pour obtenir
$P(a)=R(a)$ donc $R(a)=0$ car *a* est une racine de *P*. Le polynôme $R(X)$ est donc une fonction constante qui s'annule pour $\mathrm{X}=a$ elle est donc identiquement nulle. Il vient alors que $R(X)=0$ ce qui donne $P(X)=(X-a)Q(X)$. Donc $X-a$ divise $P(X)$.

Exemple : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $X-1$ divise X^n-1.

IV.2) Factorisation d'un polynôme complexe.

Grâce aux résultats du 1), on prouve le premier résultat :

Théorème 2 (de factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ ***)*** :
Soit $P\in\mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant avec $P(X)=a_n X^n+a_{n-1}X^{n-1}+\dots a_1 X+a_0$, et $a_n\neq 0$.
Alors, le polynôme P peut se factoriser de façon unique dans $\mathbb{C}[X]$ sous la forme :
$P(X)=a_n(X-x_1)^{k_1}(X-x_2)^{k_2}\dots(X-x_p)^{k_p}$ où a_n est le coefficient du terme de plus haut degré, $x_1,x_2,\dots,x_p$ sont les différentes racines de *P*, et $k_1,k_2,\dots,k_p$ sont des entiers naturels non nuls.

Preuve : Il s'agit ici d'un raisonnement par récurrence.
Soit *n* un entier naturel non nul et considérons la propriété (P_n): tout polynôme
$P(X)=a_n X^n+a_{n-1}X^{n-1}+\dots a_1 X+a_0$,
de degré *n* se factorise sous la forme
$P(X)=a_n(X-x_1)^{k_1}(X-x_2)^{k_2}\dots(X-x_p)^{k_p}$.
La propriété (P_1) est vraie avec $x_1=-\dfrac{a_0}{a_1}$ et $k_1=1$. car $P(X)=a_1\left(X+\dfrac{a_0}{a_1}\right)$.
Soit $n\geqslant 1$ tel que (P_n) soit vraie. Considérons $P\in\mathbb{C}[X]$ de degré $n+1$.
Puisque P est un polynôme non constant , il admet au moins une racine $\alpha\in\mathbb{C}$. D'après la propriété 9, $X-\alpha$ divise P ce qui signifie que $P(X)$ peut s'écrire sous la forme $P(X)=(X-\alpha)Q(X)$ avec $\deg(Q)=\deg(P)-1=n$. L'hypothèse de récurrence appliquée à Q (qui a le même coefficient

du terme de plus haut degré que P) montre que P peut se factoriser sous la forme

$$P(X)=a_n(X-\alpha).(X-x_1)^{k_1}(X-x_2)^{k_2}.....(X-x_p)^{k_p}$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_p$ sont les différentes racines de Q. La propriété (P_{n+1}) est donc vraie.
Le principe de récurrence prouve donc la propriété (P_n) pour tout entier naturel non nul.

Il reste à voir que les nombres complexes $x_1, x_2, \ldots, x_p$ sont les racines de $P(X)$, car pour tout nombre complexe *z,* on a l'équivalence :

$$P(z)=0 \Leftrightarrow a_n(z-x_1)^{k_1}(z-x_2)^{k_2}.....(z-x_p)^{k_p}=0 \Leftrightarrow \exists i \text{ tq } z=x_i.$$

Cela prouve l'unicité des nombres x_i (à une permutation de ces nombres près).

Remarquons qu'à ce stade de la preuve, on a déjà démontré qu'un polynôme non nul admet un nombre fini de racines.

Il reste à prouver l'unicité des k_i. Supposons que l'on ait l'égalité entre polynômes :

$$(X-x_1)^{k_1}(X-x_2)^{k_2}.....(X-x_p)^{k_p}=(X-x_1)^{k'_1}(X-x_2)^{k'_2}.....(X-x_p)^{k'_p}$$

avec, par exemple, $k_1 > k'_1$.
On aurait alors :

$$\forall z \neq x_1,\ (z-x_1)^{k_1-k'_1}(z-x_2)^{k_2}.....(z-x_p)^{k_p}=(z-x_2)^{k'_2}.....(z-x_p)^{k'_p}.$$

Ainsi, le polynôme $(X-x_1)^{k_1-k'_i}(X-x_2)^{k_2}.....(X-x_p)^{k_p}-(X-x_2)^{k'_2}.....(X-x_p)^{k'_p}$ aurait une infinité de racines (tous les nombres complexes différents de x_1), donc il serait identiquement nul. En considérant alors $X=x_1$, on obtiendrait $0=(x_1-x_2)^{k'_2}.....(x_1-x_p)^{k'_p}$ ce qui n'est pas possible car $\forall i \geqslant 2,\ x_1 \neq x_i$. Cela prouve l'unicité et achève la preuve du Théorème2.

Remarque : Cela montre qu'un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul admet un nombre fini de racines distinctes et que ce nombre est inférieur ou égal au degré de P. On en déduit facilement le :

Exemple : factorisation de X^3+8.
La recherche des racines de ce polynôme revient à résoudre $z^3+8=0$, ce qui donne, avec les techniques vues au chapitre 1, trois solutions qui sont $z_1=-2,\ z_2=2e^{-j\frac{\pi}{3}}$ et $z_3=2e^{j\frac{\pi}{3}}$.
On a donc $X^3+8=(X+2)(X-2e^{-j\frac{\pi}{3}})(X-2e^{j\frac{\pi}{3}})$.

Corollaire : Si P et Q sont deux polynômes tels que l'égalité $P(z)=Q(z)$ soit vraie pour une infinité de nombres complexes *z,* alors $P=Q$.

Exemple : Si $P \in \mathbb{C}[X]$ et $Q \in \mathbb{C}[X]$ sont tels que $\forall t \in \mathbb{R},\ P(t)=Q(t)$, alors $P=Q$.

Définition 2 : Dans le théorème 2, l'entier k_i est appelé ordre de multiplicité de la racine x_i. Si $k_i=1$ on dit que x_i est racine simple de *P*, sinon, x_i sera appelée racine multiple de P.
On peut aussi dire , par unicité de la décomposition données dans le Théorème 2 que x est racine de P d'ordre k si $(X-x)^k$ divise $P(X)$ mais $(X-x)^{k+1}$ ne divise pas $P(X)$.

Exemple : $P(X)=(X+1)(X-4)^3(X^2+1)^2$, – 1 est racine simple, 4 est racine triple et $\pm j$ sont racines doubles.

Cette notion d'ordre de multiplicité est très importante car elle intervient fréquemment dans les questions de factorisation de polynôme :

Propriété 10 **:** Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ $k \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$. Il est équivalent de dire :
(i) Le nombre z est une racine d'ordre k de $P(X)$
(ii) Le polynôme $P(X)$ peut s'écrire sous la forme $P(X)=(X-z)^k Q(X)$ avec $Q(z) \neq 0$.
(iii) Le polynôme $(X-z)^k$ divise $P(X)$ mais $(X-z)^{k+1}$ ne divise pas $P(X)$

.

<u>(*) Preuve</u> : pour montrer ces équivalences, on utilise la méthode de l'implication circulaire, c'est à dire que l'on montre que $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i)$.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Si l'on considère la factorisation de $P(X)$ donnée par le Théorème 2 (en posant $x_1 = z$) :
$P(X)=a_n (X-z)^k (X-x_2)^{k_2} \ldots\ldots (X-x_p)^{k_p}$,
on a la factorisation voulue avec $Q(X)=a_n (X-x_2)^{k_2} \ldots\ldots (X-x_p)^{k_p}$ et donc
$Q(z)=a_n (z-x_2)^{k_2} \ldots\ldots (z-x_p)^{k_p} \neq 0$, les nombres x_i obtenus dans le Théorème 2 étant tous deux à deux distincts.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Puisque $P(X)=(X-z)^k Q(X)$, le polynôme $(X-z)^k$ divise $P(X)$. En effectuant une division euclidienne de $Q(X)$ par $X-z$ on obtient
$Q(X)=A(X).(X-z)+Q(z)$ pour un certain $A \in \mathbb{C}[X]$, d'où
$P(X)=(X-z)^{k+1} A(X)+Q(z).(X-z)^k$. Puisque $Q(z) \neq 0$, on a $\deg\left(Q(z).(X-z)^k\right)=k$ donc $Q(z).(X-z)^k$ est le reste de la division euclidienne de $P(X)$ par $(X-z)^{k+1}$. Ce reste étant non nul, le polynôme $(X-z)^{k+1}$ ne divise pas $P(X)$.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Si l'on considère la factorisation de $P(X)$ donnée par le Théorème 2 (en posant $x_1 = z$) :
$P(X)=a_n (X-z)^{k_1} (X-x_2)^{k_2} \ldots\ldots (X-x_p)^{k_p}$, on doit montrer que $k=k_1$.
Puisque le polynôme $(X-z)^k$ divise $P(X)$, on peut écrire $P(X)=(X-z)^k Q(X)$ pour un certain polynôme $Q(X)$. On a nécessairement $Q(z) \neq 0$, sinon $X-z$ diviserait $Q(X)$ et alors on déduirait de l' égalité $P(X)=(X-z)^k Q(X)$ que $(X-z)^{k+1}$ divise $P(X)$, ce qui n'est pas.
On a donc l'égalité polynomiale : $P(X)=a_n (X-z)^{k_1} (X-x_2)^{k_2} \ldots\ldots (X-x_p)^{k_p}=(X-z)^k Q(X)$. En considérant la décomposition en polynômes irréductibles de $Q(X)$:
$Q(X)=\alpha (X-y_1)^{l_1} \ldots\ldots (X-x_q)^{l_q}$, on peut affirmer que chaque y_i est différent de z car $Q(z) \neq 0$, et on obtient alors les deux décompositions de $P(X)$ ci-dessous :
$P(X)=a_n (X-z)^{k_1} (X-x_2)^{k_2} \ldots\ldots (X-x_p)^{k_p}=\alpha (X-z)^k (X-y_1)^{l_1} \ldots\ldots (X-x_q)^{l_q}$.
Par unicité de la décomposition donnée dans le Théorème 2, et en se souvenant que chaque y_i est différent de z, on obtient que $k=k_1$.

IV.3) Factorisation d'un polynôme réel.

Un polynôme à coefficients réels est un polynôme à coefficients complexes particulier . Ainsi, tout ce qui a été dit dans le paragraphe précédent peut s'appliquer, mais on peut préciser certaines choses sur la factorisation de ce polynôme. En particulier, voici un raffinement de la propriété 8 :

Propriété 11 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ une racine de P d'ordre k. Alors $\bar{\lambda} \in \mathbb{C}$ est une racine de P d'ordre k.

<u>Preuve :</u> Si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\bar{\lambda}=\lambda$ donc il n'y a rien à prouver.
Sinon, λ et $\bar{\lambda}$ sont deux racines différentes qui interviennent dans la décomposition donnée par le Théorème 2, ce qui permet d'écrire que $P(X)=(X-\lambda)^{k_1} (X-\bar{\lambda})^{k_2} Q(X)$, avec :
k_1 et k_2 les ordres des racines λ et $\bar{\lambda}$ respectivement

$Q \in \mathbb{C}[X]$ qui n'admet ni λ ni $\bar{\lambda}$ comme racine.
On raisonne par l'absurde et on suppose que $k_1 \neq k_2$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $k_1 > k_2$. On a alors :
$P(X)=(X-\lambda)^{k_2}(X-\bar{\lambda})^{k_2}(X-\lambda)^{k_1-k_2}Q(X)=\left((X-\lambda)(X-\bar{\lambda})\right)^{k_2}(X-\lambda)^{k_1-k_2}Q(X)$
$P(X)=\left(X^2-2\,\mathrm{Re}(\lambda)X+|\lambda|^2\right)^{k_2}(X-\lambda)^{k_1-k_2}Q(X)$ (voir propriété 7).
Le polynôme $\left(X^2-2\,\mathrm{Re}(\lambda)X+|\lambda|^2\right)^{k_2}$ est à coefficients réels et divise $P(X)$ qui est à coefficients réels. Le quotient $(X-\lambda)^{k_1-k_2}Q(X)$ est donc aussi à coefficients réels. Or ce quotient s'annule pour $X=\lambda$ mais pas pour $X=\bar{\lambda}$ car $(\bar{\lambda}-\lambda)^{k_1-k_2}\neq 0$ et $Q(\bar{\lambda})\neq 0$ ce qui est en contradiction avec la propriété 8. Donc $k_1=k_2$.

Théorème 3 (de factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ ***)*** :
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non constant avec $P(X)=a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1}+ \dots a_1 X + a_0$, et $a_n \neq 0$.
Alors, le polynôme P peut se factoriser de façon unique dans $\mathbb{R}[X]$ sous la forme d'un produit de polynômes réels d'une des deux formes suivantes :

(i) $(X-a)^k$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$

(ii) $P(X)^k$ où $P(X)$ est un polynôme réel normalisé du second degré avec $\Delta < 0$ et $k \in \mathbb{N}$.

Preuve : On part de la décomposition dans $\mathbb{C}[X]$: $P(X)=a_n(X-x_1)^{k_1}(X-x_2)^{k_2}\dots(X-x_p)^{k_p}$.
Prenons un facteur $(X-x_i)^{k_i}$. On a deux cas :

soit $x_i \in \mathbb{R}$

soit $x_i \notin \mathbb{R}$: il existe donc $j \neq i$ tel que $x_j=\overline{x_i}$ (propriété 8) et la propriété 11 dit que $k_i=k_j$.

on regroupe alors les deux facteurs $(X-x_i)^{k_i}$ et $(X-x_j)^{k_j}$ pour obtenir $(X-x_i)^{k_i}.(X-x_j)^{k_j}=(X-x_i)^{k_i}.(X-\overline{x_i})^{k_i}=\left(X^2-2\,\mathrm{Re}(x_i)X+|x_i|^2\right)^{k_i}$ qui est bien un polynôme de la forme $Q(X)^k$ où $Q(X)$ est un polynôme réel normalisé du second degré avec $\Delta < 0$ et $k \in \mathbb{N}$.

En procédant ainsi jusqu'à épuisement des facteurs, on obtient le résultat du Théorème3.

Exemple : Si $P(X)=X^3+8$ on a vu qu'il se factorise dans $\mathbb{C}[X]$ sous la forme $X^3+8=(X+2)(X-2e^{-j\frac{\pi}{3}})(X-2e^{j\frac{\pi}{3}})$. Pour obtenir la factorisation donnée par le Théorème 3, il faut regrouper les deux facteurs complexes conjugués :
$P(X)=(X+2)(X-2e^{-j\frac{\pi}{3}})(X-2e^{j\frac{\pi}{3}})=(X+2)\left(X^2-2\,\mathrm{Re}\left(2e^{j\frac{\pi}{3}}\right)X+\left|2e^{j\frac{\pi}{3}}\right|^2\right)$
$=(X+2)(X^2-2X+4)$.

IV.4) Polynômes irréductibles.

Les factorisations données par les théorèmes 2 et 3 sont optimales, au sens où aucun des facteurs intervenant dans la décomposition ne peut être factorisé à son tour :

Définition 3 : Un polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ qui ne peut être factorisé dans $\mathbb{C}[X]$ en polynômes non constants de degré strictement inférieurs est dit irréductible dans $\mathbb{C}[X]$. Définition similaire avec $\mathbb{R}[X]$.

Les théorèmes 2 et 3 permettent donc d'obtenir la

Propriété 12: Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.
Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes du second degré avec $\Delta < 0$.

Remarque : il est assez remarquable que la caractérisation des polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et de $\mathbb{R}[X]$ soit aussi simple : en effet si l'on prend l'exemple de $\mathbb{Q}[X]$, l'ensemble des polynômes à coefficients rationnels, il existe énormément de polynômes irréductibles, et leur classification est très complexe. Il en existe ainsi de degré aussi grand que l'on veut.

V) Racines simples et racines multiples.

A partir du Théorème 2, on obtient la

Propriété 13 : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant. Alors, la somme des ordres de multiplicité des racines de P est égal à $\deg(P(X))$.

Preuve : en conservant les notations du Théorème 2, on a :

$$P(X) = a_n (X - x_1)^{k_1} (X - x_2)^{k_2} \ldots\ldots (X - x_p)^{k_p} \quad ,$$

d'où par considération des degrés :

$$\deg(P(X)) = \sum_{i=1}^{p} k_i .$$

Conséquence : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré impair . Il possède nécessairement une racine réelle. En effet s'il ne possédait que des racines non réelles, pour chaque racine λ d'ordre *k,* on aurait une autre racine $\bar{\lambda}$ d 'ordre *k,* donc la somme des ordres de multiplicité des racines de P est paire, ce qui implique que le degré de P devrait être pair.

Connaissant une racine d'un polynôme, il peut être utile de connaître son ordre de multiplicité sans avoir à effectuer explicitement la décomposition en polynômes irréductibles . C'est l'objet du Théorème 4 ci-dessous. Avant, il nous faudra introduire la notion de polynôme dérivé :

Définition 4 Considérons $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$ ayant pour expression :

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots . a_1 X + a_{0,} \quad , \quad a_n \neq 0 .$$

On définit le polynôme dérivé de *P*, que l'on note P' , le polynôme (de degré $n-1$ si $n \in \mathbb{N}^*$ et $-\infty$ si $n=0$) défini par l'expression :

$$P'(X) \stackrel{\text{def}}{=} n a_n X^{n-1} + (n-1) a_{n-1} X^{n-2} + \ldots . a_1 \quad .$$

En dérivant *i* fois le polynôme *P*, on obtient le polynôme $P^{(i)}$ qui désignera la dérivée $i-$ème de P.

Remarques :

(i) Si $i > n$ alors $P^{(i)}$ est le polynôme nul.

(ii) La notion de polynôme dérivé est cohérente avec celle de fonction dérivée, c'est à dire que si $P \in \mathbb{R}[X]$ et si *f* désigne la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par l'expression $f(t) = P(t)$ alors *f* est dérivable de dérivée $P'(t)$, où P' a été défini ci-dessus. Cela revient à dire que pour tout réel *a,* $\lim\limits_{\substack{t \to a \\ t \in \mathbb{R}}} \dfrac{f(t) - P(a)}{t-a} = P'(t)$ (voir chapitre sur la dérivation).

(iii) Remarquons néanmoins que la définition 4 donne un sens à $P'(z)$ pour tout nombre complexe *z* non réel, ce que ne fait pas la théorie de la dérivation des fonctions de la variable réelle.

Nous en venons au rôle fondamental joué par les dérivées successives pour connaître l'ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme :

Théorème 4 : Soit $P\in\mathbb{C}[X]$ et $\alpha\in\mathbb{C}$. Alors α est racine d'ordre q de P si et seulement si $0=P(\alpha)=P'(\alpha)=....=P^{(q-1)}(\alpha)$, et $0\neq P^{(q)}(\alpha)$, où $P^{(i)}$ désigne la dérivée $i-$ème de P.

Ce Théorème découle d'une formule très importante, mais à la limite du cadre de ce cours, appelée formule de Taylor pour les polynômes :

(*) *Formule de Taylor*: Étant donné un polynôme non nul $P\in\mathbb{C}[X]$ de degré $n\in\mathbb{N}$, on a

$$\forall z\in\mathbb{C},\ \forall a\in\mathbb{C},\ P(z)=\sum_{k=0}^{n}P^{(k)}(a)\frac{(z-a)^k}{k!} \quad \text{où} \quad 0!=1 \quad \text{et} \quad \forall k\geqslant 1,\ k!\overset{\text{def}}{=}1\times 2\ldots\times k.$$

Exemple : pour tout polynôme de degré 2, le formule de Taylor donne :

$$\forall z\in\mathbb{C},\ \forall a\in\mathbb{C},\ P(z)=P(a)+P'(a)(z-a)+\frac{1}{2}P''(a)(z-a)^2.$$

Vérifions la directement dans ce cas. Écrivons $P(z)=mz^2+pz+q$. On a alors :

$$\forall z\in\mathbb{C},\ \forall a\in\mathbb{C},$$

$$P(a)+P'(a)(z-a)+\frac{1}{2}P''(a)(z-a)^2=ma^2+pa+q+(2am+p)(z-a)+m(z-a)^2$$

$$=ma^2+pa+q+2amz-2a^2m+pz-ap+mz^2-2amz+ma^2$$

$$=mz^2+pz+q=P(z)\quad .$$

Pour démontrer la formule de Taylor nous allons procéder par un raisonnement par récurrence, en s'attaquant d'abord à un cas particulier : $z\in\mathbb{R},\ a\in\mathbb{R}$.

(*) <u>Preuve de la Formule de Taylor:</u>

<u>Étape1 </u>: cas où $z\in\mathbb{R},\ a\in\mathbb{R}$.

On considère pour $n\in\mathbb{N}$, la propriété (P_n) : pour tout polynôme $P\in\mathbb{C}[X]$ de degré $n\in\mathbb{N}$, on a $\forall z\in\mathbb{R},\ \forall a\in\mathbb{R},\ P(z)=\sum_{k=0}^{n}P^{(k)}(a)\frac{(z-a)^k}{k!}$. Nous allons effectuer un raisonnement par récurrence.

La propriété (P_0) correspond à ce que pour tout polynôme constant, on ait

$$\forall z\in\mathbb{C},\ \forall a\in\mathbb{C},\ P(z)=P(a)\quad ,$$

ce qui est évident.

Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que la propriété (P_n) soit vraie. Considérons $P\in\mathbb{C}[X]$ de degré $n+1$. Soit $a\in\mathbb{R}$ fixé. Considérons la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ définie par l'expression

$f(t)=P(t)-\sum_{k=0}^{n+1}P^{(k)}(a)\frac{(t-a)^k}{k!}$. Remarquons que $f(a)=0$, que *f* est dérivable et sa dérivée vaut :

$$f'(t)=P'(t)-\sum_{k=1}^{n+1}P^{(k)}(a)\frac{k(t-a)^{k-1}}{k!}=P'(t)-\sum_{k=1}^{n+1}P^{(k)}(a)\frac{(t-a)^{k-1}}{(k-1)!} \quad \text{en notant que} \quad \frac{k}{k!}=\frac{1}{(k-1)!}$$

pour $k\geqslant 1$.

On réécrit cette dernière égalité de la façon suivante :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ f'(t)=P'(t)-\sum_{k=0}^{n}P^{(k+1)}(a)\frac{(t-a)^k}{k!} \quad \text{en remplaçant } k \text{ par } k-1 \text{ dans la sommation.}$$

Or, P' est de degré *n* et on peut lui appliquer la propriété (P_n) ce qui donne $\forall t\in\mathbb{R},\ f'(t)=0$ en remarquant que $P^{(k+1)}=(P')^{(k)}$. La fonction *f* est donc constante sur $\mathbb{R}$ d'où

$\forall t\in\mathbb{R},\ f(t)=f(a)=0$. Cela prouve que $\forall t\in\mathbb{R},\ \forall a\in\mathbb{R},\ P(t)=\sum_{k=0}^{n+1} P^{(k)}(a)\frac{(t-a)^k}{k!}$ ce qui prouve que (P_{n+1}) est vraie. Le principe de récurrence prouve donc la formule de Taylor dans le cas où $z\in\mathbb{R},\ a\in\mathbb{R}$.

<u>Étape2</u> : cas où $z\in\mathbb{C},\ a\in\mathbb{C}$.
Fixons pour le moment $a\in\mathbb{R}$. Considérons $P\in\mathbb{C}[X]$ de degré $n\in\mathbb{N}$ et Q le polynôme défini par $Q(X)=P(X)-\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a)\frac{(X-a)^k}{k!}$. D'après l'étape 1, $\forall t\in\mathbb{R},\ Q(t)=0$: le corollaire du Théorème 2 implique donc que Q est le polynôme nul, c'est à dire que

$$(1)\ :\ \forall a\in\mathbb{R},\ \forall z\in\mathbb{C},\ P(z)=\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a)\frac{(z-a)^k}{k!}\ .$$

Maintenant, fixons un nombre $z\in\mathbb{C}$. L'égalité (1) montre que le polynôme

$$T(X)=\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(X)\frac{(z-X)^k}{k!}-P(z)$$

est nul sur $\mathbb{R}$ donc, toujours par le corollaire du Théorème 2, on conclut que T est le polynôme nul, c'est à dire que $\forall a\in\mathbb{C},\ \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a)\frac{(z-a)^k}{k!}=P(z)$. Cela étant vrai pour tout nombre complexe z, on en déduit la formule de Taylor.

(*) <u>Preuve du Théorème 4 :</u> Soit $P\in\mathbb{C}[X]$ et $\alpha\in\mathbb{C}$ une racine de P. On a donc $P(\alpha)=0.$
Soit $q=\mathrm{Min}\{i\in\mathbb{N}\setminus P^{(i)}(\alpha)\neq 0\}$. Puisque $P(\alpha)=0,$ on a $q\geqslant 1$. On a donc $0=P(\alpha)=P'(\alpha)=....=P^{(q-1)}(\alpha),$ et $0\neq P^{(q)}(\alpha).$ D'après la formule de Taylor, on a

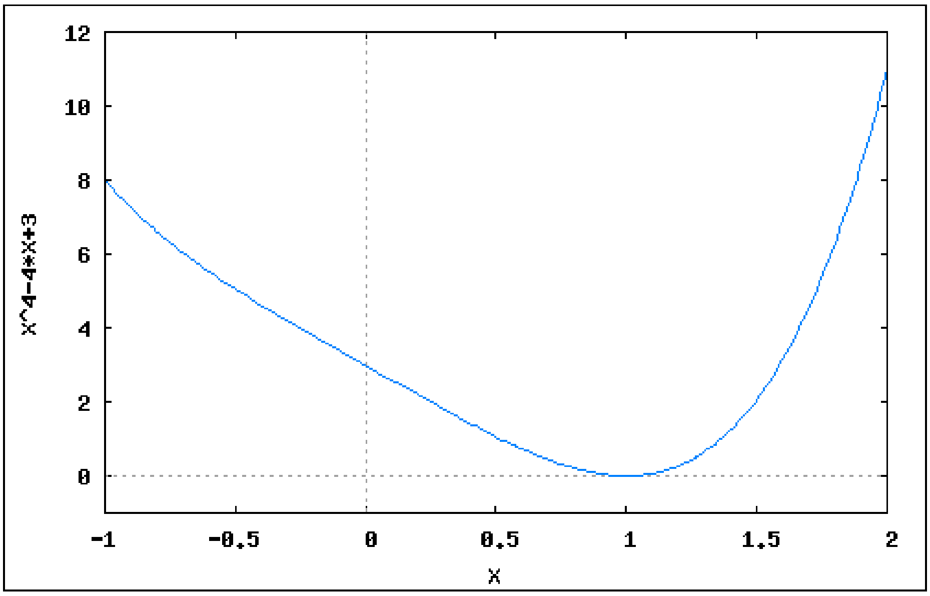
$$\forall z\in\mathbb{C},\ P(z)=\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(\alpha)\frac{(z-\alpha)^k}{k!}=\sum_{k=q}^{n} P^{(k)}(\alpha)\frac{(z-\alpha)^k}{k!}=(z-\alpha)^q.\sum_{k=q}^{n} P^{(k)}(\alpha)\frac{(z-\alpha)^{k-q}}{k!}$$

puisque $\forall k<q,\ P^{(k)}(\alpha)=0$, ce qui signifie que $P(X)=(X-\alpha)^q Q(X)$ où Q est le polynôme défini par :

$$Q(X)=\sum_{k=q}^{n} P^{(k)}(\alpha)\frac{(X-\alpha)^{k-q}}{k!}\ .$$

Remarquons que $Q(\alpha)=\frac{P^{(q)}(\alpha)}{q!}\neq 0$ par définition de q. La propriété 10 permet de dire que q est l'ordre de multiplicité de la racine α.

Exemple : $P(X)=X^4-4X+3$ On a $P'(X)=4X^3-4$ et $P''(X)=12X^2$. On a donc $P(1)=P'(1)=0$ et $P''(1)=12\neq 0.$ Cela suffit pour dire que 1 est racine double de $P(X)$, ce qui implique que $P(X)$ est divisible par $(X-1)^2$ (et pas par $(X-1)^3$!).Une division euclidienne permet d'achever la factorisation : $P(X)=X^4-4X+3=(X-1)^2(X^2+2X+3)$. On obtient la décomposition en polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ car le polynôme X^2+2X+3 à un Δ négatif.
Remarque : le fait que 1 soit racine multiple de $P(X)$ se traduit graphiquement par le fait que l'axe des abscisses est tangent à la courbe représentative de la fonction $X\rightarrow P(X)$ au point X=1 :



12
10
8
6
4
2
0
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
x
x^4-4*x+3

VI) Exercices

Exercice 1. Factoriser les polynômes suivants en polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

1) $P(X)=X^2+144$
2) $P(X)=5X^2+11X-16$
3) $P(X)=5X^4+11X^2-16$
4) $P(X)=X^4+4X^2+9$ (on écrira $P(X)=(X^2+3)^2-(....)^2$)
5) $P(X)=X^6+1$
6) $P(X)=2X^3-7X^2+2X+3$ (on remarquera que 1 est racine)
7) $(X)=X^6+19X^3-216$

Exercice 2
Effectuer les divisions euclidiennes de $P(X)$ par $Q(X)$ dans les cas suivants :

1) $P(X)=X^2+jX+2+j$, $Q(X)=X-2j$
2) $P(X)=X^5-X^4+5X^3+2X^2-4X+7$, $Q(X)=X^2+X+1$

3) Démontrer que $2016X^{2017}-2017X^{2016}+1$ est divisible par $(X-1)^2$.

Exercice 3.
Soit $P(X)=3X^5-5X^4+24X^3-40X^2+48X-80$.

1) Montrer que 2j est racine double de $P(X)$.
2) En déduire la factorisation en polynômes irréductibles de $P(X)$.

Exercice 4.
Soit $P(X)=X^3-9X^2-21X+245$. Factoriser le polynôme sachant qu'il possède une racine double.

Exercice 5.
Soit $P(X)=2X^3-13X^2+17X-10$. Le but de cet exercice est de factoriser ce polynôme sachant qu'il admet une racine complexe non réelle de module 1.

Soit $z_1=e^{j\theta}$ une racine non réelle de module 1 de $P(X)$.

1) Montrer que les autres racines de $P(X)$ sont $z_2=e^{-j\theta}$ et $z_3=t$, où t est un nombre réel.
2) En déduire la factorisation de $P(X)$ en polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ à l'aide des réels t et θ.
3) Déterminer les réels t et θ. En déduire la factorisation de $P(X)$ en polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 6.
Le but de cet exercice est de montrer par l'absurde que toutes les racines (réelles ou complexes) du polynôme $P(X)=X^4+X^2+2X-2$ sont simples.

1. Calculer l'expression de $4P(X)-XP'(X)$.
2. On suppose par l'absurde qu'il existe $z\in\mathbb{C}$ tel que z soit racine d'ordre supérieur ou égal à deux de P(X).
   a) Trouver à l'aide de la question 1. les deux valeurs possibles de z.
   b) Conclure que z n'existe pas.

Exercice 7.

Dans certaines applications, on cherche à vérifier que les racines d'un polynôme sont de module strictement inférieur à 1 (problème de stabilité de systèmes numériques, voir chapitre sur la transformation en Z), alors que l'on est souvent incapable de calculer explicitement ses racines.

Soit par exemple le polynôme $P(X)=3X^3+\frac{5}{2}X+1$. Le but de cet exercice est de prouver que les racines (réelles ou pas) sont de module strictement inférieur à 1.

1. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction *f* par l'expression $f(t)=P(t)=3t^3+\frac{5}{2}t+1$.

   a) Montrer que *f* est strictement croissante.

   b) En déduire que $P(X)$ ne possède qu'une seule racine réelle, t_0, et que $t_0\in]-1;-\frac{1}{3}[$.

   Prouver également que cette racine est simple.
2. Soit $z=re^j\theta$ une autre racine de $P(X)$, avec $\theta\in]0;2\pi[$.
   a) Exprimer toutes les racines de $P(X)$. Justifier.
   b) Exprimer la décomposition de $P(X)$ en polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ à l'aide de t_0, r et θ.

   c) En déduire la relation $t_0.r^2=\frac{-1}{3.}$

   d) A l'aide de l'encadrement trouvé à la question 1.b, en déduire que $r<1$. Conclure.

Exercice 8

Soit *n* un entier naturel non nul et *a* un paramètre réel. On pose $P(X)=X^{2n}-2aX^{2n-1}+a.$ On considère la division euclidienne de $P(X)$ par X^2-1 : $P(X)=Q(X)(X^2-1)+R(X)$.

1. Quel est le degré de $Q(X)$?
2. Montrer que $R(X)$ est de la forme $R(X)=mX+p.$
3. Sans chercher l'expression de $R(X)$, calculer $R(1)$ et $R(-1)$.
4. En déduire l'expression de $R(X)$.
5. Le nombre 1 peut-il être une racine multiple ?

Exercice 9

Soit $a=\frac{5+\sqrt{13}}{2}$.

1° Trouver l'expression d'un polynôme du second degré unitaire et <u>à coefficients entiers</u> dont *a* est racine.Soit $P(X)$ le polynôme trouvé.

2° Soit $A(X)=3X^5-2X^3+11X^2-9X-2$.

a) Effectuer la division euclidienne de $A(X)$ par $P(X)$.

b) En déduire un calcul très simple de $A\left(\frac{5+\sqrt{13}}{2}\right).$

Exercice 10

Soit *t* un paramètre réel quelconque. On définit le polynôme $P(X)$ par :

$P(X)=X^3+tX^2+(1+t)X+2$.

1) Montrer que – 1 est racine de $P(X)$.
2) Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre *t* le polynôme $P(X)$ n'admet-il que des racines réelles ?

3) Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre t le polynôme $P(X)$ admet-il une racine double? Effectuer dans ce(s) cas là sa décomposition en polynômes irréductibles.

Exercice 11
Soit $P(X)=X^4-X^3-18X^2-2X-40.$

1) Montrer que P admet deux racines imaginaires purs et les déterminer.
2) En déduire la décomposition de $P(X)$ en polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12
Soit $P(X)=aX^4+bX+1$

1) Trouver a et b pour que 1 soit une racine multiple de $P(X)$.
2) Dans ce cas, trouver la décomposition de $P(X)$ en polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13
Soit $P(X)=X^3+aX^2+aX+1$ avec a un paramètre réel.

1) Trouver une racine évidente de $P(X)$.
2) A quelle condition sur a le polynôme P admet une racine double ? Une racine triple ?

Exercice 14 Factorisez les polynômes suivants en polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

1) $P(X)=X^2-3X-10$
2) $Q(X)=X^3-1$
3) $R(X)=X^3-5X^2+19X+25$ (on remarquera que $R(-1)=0.$)

Exercice 15
Soit $P(X)=3X^4+X^3-9X^2+3X+2$.

1) Montrer que 1 est racine double de $P(X)$.
2) En déduire toutes les racines de $P(X)$.

Exercice 16
Trouver les racines de $P(X)=X^3+(\sqrt{2}-1)X^2-(\sqrt{2}+1)X-1$ sachant qu'il possède trois racines réelles dont deux qui sont opposées (donc de somme nulle).

Quelques idées en vrac :
Il y a trois racines réelles $a,-a$ et b : on n' a donc que deux inconnues ...
Travailler sur la forme factorisée de $P(X)$
Pas la peine de chercher une racine évidente, il n'y en n 'a pas....

Exercice 17
Le but de cet exercice est de factoriser en polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P(X)=X^3+7X^2-16X-112$ sachant qu'il possède trois racines réelles dont deux qui sont opposées (donc de somme nulle).
On note donc $a,-a$ et b les trois racines réelles de $P(X)$, avec – a et a les deux racines supposées opposées.

1) Ecrire à l'aide de a et de b la décomposition de $P(X)$ en polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.
2) En déduire que $P(X)=X^3-bX^2-a^2X+a^2b$.
3) En déduire les racines de $P(X)$ ainsi que sa décomposition en polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 18
Soit $P(X)=5X^3-22X^2+33X-10$.

1) Montrer que $2+j$ est une racine de P.
2) Par quel argument simple peut-on affirmer, sans aucun calcul, que $2-j$ est aussi racine de P ?
3) En déduire une factorisation de P en polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.
4) Le polynôme P admet-il une autre racine que $2+j$ et $2-j$? Si oui la trouver explicitement.

Exercice 19
Soit a un réel strictement positif. On définit le polynôme P par
$P(X)=X^3-(2-3a)X^2-(6a-1)X+3a.$

1) a) Donner l'expression de $P'(X)$ à l'aide du paramètre a.
   b) En déduire que 1 est racine double de P, quel que soit le paramètre a.
2) On suppose qu'il existe une autre racine de P différente de 1. Soit α cette autre racine.
   a) Recopier et compléter par un polynôme : $P(X)=(X-\alpha)$............ .
   b) En affectant à X la valeur 0, en déduire l'expression de α en fonction de a .

Exercice 20. Soit P un polynôme admettant comme expression $P(X)=(2X^2+1)^2-(X+16)^2$.
Décomposer P en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 21. Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ de degré supérieur ou égal à 2. On pose alors
$Q(X)=P(X)-(X-1)P'(1)-P(1)$. Montrer que $(X-1)^2$ divise $Q(X)$. En déduire l'expression du reste de la division euclidienne de $P(X)=X^{2018}$ par $(X-1)^2$.

Exercice 22.
Soit $P(X)=(X^2-2X+3)^2+(X-1)^2$.

1) Dans cette question, on veut montrer par l'absurde que P n'a pas de racines réelles.
Supposons donc que $t\in\mathbb{R}$ est tel que $P(t)=0$.
   a) Montrer alors que nécessairement $t=1$.
   b) Conclure.

2) Rappeler la formule de factorisation dans $\mathbb{C}$ de A^2+B^2. En déduire une factorisation de $P(X)$ dans $\mathbb{C}[X]$.

3) Trouver alors les racines complexes de $P(X)$.

4) Déduire de la question précédente la factorisation de $P(X)$ en polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 23
Soit a, b et c trois nombres complexes avec $a\neq 0$. . On considère l'équation d'inconnue $z\in\mathbb{C}$
(E) : $az^2+bz+c=0$. Le but de cet exercice est de savoir pour quelles valeurs de *a, b* et de *c* cette équation admet deux solutions chacune de module égale à 1.

Supposons que z_1 et z_2 soient deux solutions de module 1 de (E).

1) En travaillant sur la somme et le produit des racines de (E), montrer que $\frac{b^2}{4ac}=\frac{1}{4}\left(\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}\right)+\frac{1}{2}$
.

2) a) Montrer que $\frac{z_1}{z_2}$ et $\frac{z_2}{z_1}$ sont deux nombres complexes de module 1 et conjugués.

b) Déduire des questions précédentes que $\frac{b^2}{4ac}$ est un réel appartenant à l'intervalle $[0;1]$ et que $|c|=|a|$.

Réciproquement, on suppose que $|c|=|a|$ et que $\frac{b^2}{4ac}=t\in[0;1]$ .On va prouver que la ou les deux solutions de l'équation (E) : $az^2+bz+c=0$ sont deux nombres complexes de module 1.
Soit, dans ces conditions, *z* une solution de (E).

3) Montrer que si *t*=1, (E) possède une unique solution de module 1.

4) On suppose que $\frac{b^2}{4ac}=t\in[0;1[$.

a) Montrer que (E) possède deux solutions différentes z_1 et z_2 , non nulles.

b) Montrer que $\frac{z_1}{z_2}$ et $\frac{z_2}{z_1}$ sont racines du polynôme $X^2+(2-4t)X+1$.

c) En déduire que z_1 et z_2 sont de module 1.

Exercice 24

On considère le polynôme $P(X)=X^2-6$. Étant donné $z\in\mathbb{C}$, on dira que *z* est <u>un point fixe</u> pour $P(X)$ si $P(z)=z$.
De même, étant donnés z_1 et $z_2\in\mathbb{C}$, on dira que $\{z_1;z_2\}$ est <u>une paire fixe</u> pour $P(X)$ si $z_2=P(z_1)$ et $z_1=P(z_2)$ avec $z_1\neq z_2$.
Enfin, étant donnés z_1, z_2 et $z_3\in\mathbb{C}$, on dira que $\{z_1;z_2;z_3\}$ est <u>un triplet fixe</u> pour $P(X)$ si $z_2=P(z_1)$, $z_3=P(z_2)$ et $z_1=P(z_3)$ avec z_1, z_2 et z_3 deux à deux distincts.

1) Montrer qu'il n'existe que deux points fixes pour $P(X)$ que l'on appellera x_1 et x_2. Calculer la valeur de x_1 et x_2.

2) a) Vérifier que x_1 et x_2 sont racines de $P(P(X))-X$.
b) Soit $z\in\mathbb{C}$. Montrer que *z* appartient à une paire fixe pour $P(X)$ si et seulement si *z* est une racine de $P(P(X))-X$ différente de x_1 et x_2.
c) Calculer l'expression développée de $P(P(X))-X$ et, à l'aide de la question a), factoriser ce polynôme en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.
d) En déduire qu'il n'existe qu'une seule paire fixe pour $P(X)$ et déterminer la valeur exacte des deux éléments qui la composent.

3) Dans cette question, et dans cette question seulement, on considère le polynôme $P_1(X)=X^2+3X$.
En adaptant la démarche utilisée dans les questions précédentes à ce polynôme, démontrer qu'il n'existe pas de paire fixe pour $P_1(X)$, ni dans $\mathbb{R}$, ni dans $\mathbb{C}$.

4) a) Vérifier que $P(P(P(X)))-X$ est factorisable par $P(X)-X$. (on n'essaiera pas de calculer l'expression développée de $P(P(P(X)))-X$!)
b) Soit $z\in\mathbb{C}$. Montrer que *z* appartient à un triplet fixe pour $P(X)$ si et seulement si *z* est une racine de $P(P(P(X)))-X$ différente de x_1 et x_2.

Soit $Q(X)$ le quotient de $P(P(P(X)))-X$ par $P(X)-X$, de sorte que l'on écrira dans la suite de l'exercice $P(P(P(X)))-X=(P(X)-X)Q(X)$

5) a) Vérifier que la dérivée du polynôme $P(P(P(X)))$ est égale à $P'(X).P'(P(X)).P'(P(P(X)))$.
b) En déduire que x_1 et x_2 sont racines simples de $P(P(P(X)))-X$ et qu'ils ne sont pas racines de $Q(X)$.
c) En déduire l'existence (d'au moins) un triplet fixe par $P(X)$.

6) On rappelle l'inégalité dite *triangulaire :* $\forall u\in\mathbb{C}, \forall v\in\mathbb{C},\ |u+v|\le|u|+|v|$.
a) Montrer qu'on a les inégalités : $\forall z\in\mathbb{C},\ |P(z)|\ge 6-|z|^2$ et $\forall z\in\mathbb{C},\ |P(z)|\ge|z|^2-6$.
b) En déduire que pour tout nombre complexe *z* tel que $|z|\le\frac{1}{2}$ on a les inégalités :
$|P(z)|\ge\frac{23}{4}$, $|P(P(z))|\ge\frac{433}{16}$ et $|P(P(P(z)))|\ge\frac{185953}{256}$.
c) En déduire que tout élément d'un triplet fixe est de module strictement plus grand que $\frac{1}{2}$.

7) Déduire du 6) que les racines de *Q* sont simples. Combien existe-t-il de triplets fixes pour *P*?

8) a) Prouver que *Q* possède au moins une racine réelle (on pourra considérer le nombre $Q(0)$.)
b) Déduire de la question précédente que les deux triplets fixes pour *P* sont constitués de nombres réels.
9) On revient au polynôme $P_1(X)=X^2+3X$. En adaptant la démarche utilisée dans les questions précédentes à ce polynôme, démontrer qu'il existe au moins un triplet fixe pour $P_1(X)$.

Exercice 25
L'objet de cet exercice est de trouver toutes les valeurs du réel *t* pour lesquelles le polynôme $P_t(X)=X^3+tX-t$ a toutes ses racines de module strictement inférieur à 1.

1) En travaillant sur le produit des racines, vérifier que nécessairement, si toutes les racines de $P_t(X)$ sont de modules strictement inférieurs à 1, alors $t\in]-1;1[$.

2) Montrer que si $t>0$, alors $P_t(X)$ n'admet qu'une seule racine réelle, qu'elle est simple et est dans l'intervalle $]0;1[$. On notera $\theta(t)$ cette racine.

3) On suppose dans cette question que $t\in]-1;0[$.
a) En étudiant les variations de $P_t(X)$, montrer que ce polynôme admet une unique racine réelle, qu'elle est simple et est dans l'intervalle $]-\infty;-\sqrt{\frac{-t}{3}}[$. On notera $\theta(t)$ cette racine.
b) Déterminer pour quelles valeurs de *t* on a $|\theta(t)|<1$ (on pourra considérer $P_t(-1)$)

4) a) Justifier, pour $t\in]-1;1[$ avec $t\neq 0$, l'existence de deux racines complexes non réelles et conjuguées pour $P_t(X)$. On les notera $\lambda(t)$ et $\overline{\lambda(t)}$.
b) Prouver que l'on a $\forall t\in]-1;0[\cup]0;1[,\ t=|\lambda(t)|^2-\theta(t)^2=|\lambda(t)|^2\theta(t)$

5) Déduire du 4)b) que $\forall t \in]-1\,;0[,\ |\lambda(t)| \leq |\theta(t)|$. Quelles sont alors les valeurs de $t \in]-1\,;0[$ pour lesquelles toutes les racines de $P_t(X)$ sont de module strictement inférieur à 1 ?

6) On suppose dans cette question que $t \in]0\,;1[$. Soit $h > 0$.
a) Montrer que $P_t(\theta(t+h)) = h(1-\theta(t+h)) > 0$.
b) En déduire que $\theta(t) < \theta(t+h)$. Que peut on en déduire pour la fonction $t \to \theta(t)$?
c) A l'aide du 4) b), en déduire que la fonction $t \to |\lambda(t)|$ est strictement croissante sur $]0\,;1[$.
d) Dans cette question, on suppose que $t_0 \in]0\,;1[$ est tel que $|\lambda(t_0)| = 1$. A l'aide du 4)b), prouver que t_0 est la solution strictement positive de l'équation $t^2 + t = 1$ et trouver la valeur exacte de t_0 .
e) Réciproquement, prouver que si $t = t_0$, alors $|\lambda(t)| = 1$. (On pourra factoriser $P_t(X)$ par $X - t_0$.)

7) Quelles sont les valeurs du réel *t* pour lesquelles le polynôme $P_t(X)$ a toutes ses racines de modules strictement inférieurs à 1 ?

Exercice 26

Soit $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme unitaire et n'admettant aucune racine réelle. On suppose que $\deg(P(X)) \geq 1$.

1) Que peut-on dire du degré de $P(X)$? Que peut-on dire de la décomposition de $P(X)$ en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$. ?
2) Dans cette question, on suppose que $\deg(P(X)) = 2$.
a) Montrer qu'il existe deux polynômes $A(X) \in \mathbb{R}[X]$ et $B(X) \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X) = (A(X))^2 + (B(X))^2$ et $\deg(A(X)) = 1,\ \deg(B(X)) = 0$.
b) Montrer qu'il existe deux polynômes $A(X) \in \mathbb{R}[X]$ et $B(X) \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X) = (A(X))^2 + (B(X))^2$ et $\deg(A(X)) = \deg(B(X)) = 1$ (on pourra chercher $A(X)$ et $B(X)$ sous la forme $A(X) = \frac{1}{\sqrt{2}}(X-\alpha)$ et $B(X) = \frac{1}{\sqrt{2}}(X-\beta)$).
c) Donner l'expression des polynômes $A(X) \in \mathbb{R}[X]$ et $B(X) \in \mathbb{R}[X]$ trouvés dans les deux questions précédentes dans le cas où $P(X) = X^2 + 4X + 13$.
3) Soient $P_1(X) \in \mathbb{R}[X]$ et $P_2(X) \in \mathbb{R}[X]$ tels qu'il existe des polynômes $A_1(X) \in \mathbb{R}[X],\ A_2(X) \in \mathbb{R}[X],\ B_1(X) \in \mathbb{R}[X]$ et $B_2(X) \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P_1(X) = (A_1(X))^2 + (B_1(X))^2$ et $P_2(X) = (A_2(X))^2 + (B_2(X))^2$.
a) Vérifier que $P_1(X).P_2(X) = |(A_1(X) + j\,B_1(X)).(A_2(X) + j\,B_2(X))|^2$.
b) En déduire qu'il existe deux polynômes $A(X) \in \mathbb{R}[X]$ et $B(X) \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P_1(X).P_2(X) = (A(X))^2 + (B(X))^2$. Exprimer les deux polynômes $A(X)$ et $B(X)$ à l'aide de $A_1(X),\ A_2(X),\ B_1(X)$ et $B_2(X)$.
4) a) Montrer par récurrence sur le degré de $P(X)$ qu'il existe deux polynômes $A(X) \in \mathbb{R}[X]$ et $B(X) \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X) = (A(X))^2 + (B(X))^2$.
b) Démontrer que les polynômes $A(X)$ et $B(X)$ n'ont pas de racines réelles en commun.
c) Prouver que si les racines complexes de $P(X)$ sont toutes simples, alors $A(X)$ et $B(X)$ n'ont pas de racines en commun.

Exercice 27

Pour l'étude de la stabilité des systèmes que l'on rencontre en automatique, on est amené à se poser la question suivante : étant donné un polynôme $P(X)\in\mathbb{R}[X]$, unitaire et de degré supérieur ou égal à 1, montrer que toutes ses racines ont une partie réelle strictement négative (c'est à dire que ses racines sont soit des réels strictement négatifs, soit des nombres complexes de partie réelle strictement négative).

1) Dans cette question, on suppose que $\deg(P(X))=1$, c'est à dire que $P(X)=X+a$ avec $a\in\mathbb{R}$.
Trouver une condition nécessaire et suffisante sur *a* pour que toutes les racines de $P(X)$ aient une partie réelle strictement négative .

2) Dans cette question, on suppose que $\deg(P(X))=2$, c'est à dire que $P(X)=X^2+aX+b$ avec $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$.
a) Rappeler l'expression de la somme et du produit des racines de $P(X)$ en fonction de *a* et de *b.*
b) Démontrer que les racines de $P(X)$ ont une partie réelle strictement négative si, et seulement si, $a>0$ et $b>0$. (on pourra raisonner par disjonction des cas, selon que $\Delta\overset{\text{def}}{=}a^2-4b$ est négatif ou positif ou nul).

3) Montrer que dans le cas général, si un polynôme $P(X)\in\mathbb{R}[X]$, unitaire et de degré supérieur ou égal à 1, a toutes ses racines de partie réelle strictement négative, alors nécessairement, tous ses coefficients sont strictement positifs (on pourra considérer la décomposition de $P(X)$ en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$).

4) Dans cette question, on considère un polynôme de la forme $P(X)=(X^2-X+\alpha)(X+2)$ où $\alpha\in\mathbb{R}$.
a) Pour quelles valeurs de α la forme développée de $P(X)$ ne présente-t-elle que des coefficients strictement positifs ?
b) En déduire que la réciproque de la propriété établie à la question 3) est fausse.

A partir de maintenant, on suppose que $\deg(P(X))=3$ c'est à dire que $P(X)=X^3+aX^2+bX+c$ avec $a,b\in\mathbb{R}$ et $c\in\mathbb{R}$.

5) Montrer qu'il existe trois réels *r, s* et *t* tels que $P(X)=(X^2+rX+s)(X+t)$.

6) Montrer que si toutes les racines de $P(X)$ ont une partie réelle strictement négative, alors $a>0$, $b>0$, $c>0$ et $ab>c$.

7) Réciproquement, on suppose que $a>0$, $b>0$, $c>0$ et $ab>c$.
a) On se place dans le cas où $r^2\geq 4s$.

(i) Quel est le sens de variations de la fonction $t\to P(t)$ sur $[0;+\infty[$?
(ii) Montrer que toutes les racines de $P(X)$ sont réelles et strictement négatives.

b) On se place maintenant dans le cas où $r^2<4s$.

(i) Prouver que $t>0$.
(ii) Vérifier que $ab-c=r\left(\left(t+\frac{1}{2}r\right)^2-\frac{1}{4}\Delta\right)$ où l'on a posé $\Delta=r^2-4s$.
(iii) En déduire que $r>0$ puis que toutes les racines de $P(X)$ ont une partie réelle strictement négative.

8) Énoncer une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients de $P(X)=X^3+aX^2+bX+c$ pour que toutes les racines de $P(X)$ aient une partie réelle strictement négative.

9) Application : pour quelles valeurs du réel c le polynôme $P(X)=X^3+3X^2+X+c$ a toutes ses racines de partie réelle strictement négative ?

Exercice 28

Dans cet exercice, on souhaite trouver tous les couples $(n\,;p)\in\mathbb{Z}^2$ tels que :
$(E)\ :\ 2n^2+15p^2+11np-5\text{n}-13\text{p}=24$.

On fixe $p\in\mathbb{Z}$, et on considère le polynôme $Q(X)=2\text{X}^2+(11\text{p}-5)X+15p^2-13p+k$ où $k\in\mathbb{Z}$ est pour le moment quelconque.

1) Calculer Δ_Q le discriminant de $Q(X)$, en fonction des paramètres p et k . Montrer que pour une certaine valeur de k que l'on précisera, on a $\Delta_Q\geq 0$ et $\sqrt{\Delta_Q}\in\mathbb{N}$ quelle que soit la valeur de $p\in\mathbb{Z}$.

On suppose dorénavant k fixé à la valeur trouvée à la question 1).

2) Factoriser alors $Q(X)$ en produit de polynômes irréductibles montrer que l'équation (E) équivaut à une équation de la forme $(an+bp+c)(a'n+b'p+c')=26$ où a,b,c,a',b' et c' sont six entiers relatifs à déterminer.

3) Si $d_1\in\mathbb{Z}$ et $d_2\in\mathbb{Z}$, résoudre le système :
$$\begin{cases} ax+by+c=d_1 \\ a'x+b'y+c'=d_2 \end{cases}$$
en écrivant x et y à l'aide de d_1 et d_2, et vérifier que les solutions $(x\,;y)$ sont forcément des entiers relatifs.

4) En remarquant qu'on peut écrire
$$\begin{aligned}26&=(-26)\times(-1)=-(13)\times(-2)=(-2)\times 13=(-1)\times(-26)\\&=1\times 26=2\times 13=13\times 2=26\times 1\end{aligned},$$
résoudre (E) dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 29 (Principe du maximum) .

Soit $P(X)=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+...+a_0\in\mathbb{C}[X]$ avec $n\geqslant 1$ et $a_n\neq 0$. On fixe tout au long de cet exercice un réel $R>0$. Le but de cet exercice est de montrer que la valeur prise par $|P(z)|$ pour $|z|\leqslant R$ ne peut être maximale que pour $|z|=R$. Autrement dit, il n'existe pas de nombre complexe z_0 de module <u>strictement</u> inférieur à R tel que $\forall z\in\mathbb{C},\ |z|\leqslant R\Rightarrow|P(z)|\leqslant|P(z_0)|$. Autrement dit, le maximum des valeurs prises par $|P(z)|$ pour $|z|\leqslant R$ ne peut être atteint que pour $|z|=R$.
On raisonne par l'absurde et nous supposons l'existence d'un nombre complexe z_0 de module strictement inférieur à R tel que $\forall z\in\mathbb{C},\ |z|\leqslant R\Rightarrow|P(z)|\leqslant|P(z_0)|$.

1) a) Montrer que $P(z_0)\neq 0$.

b) Posons $Q(X)=\dfrac{P(X)-P(z_0)}{P(z_0)}$ Justifier l'existence d'un polynôme $A\in\mathbb{C}[X]$ de degré inférieur à n et d'un entier naturel non nul k tel que $Q(X)=(X-z_0)^kA(X)$ et $A(z_0)\neq 0$.

c) Justifier l'existence d'un réel θ tel que $e^{kj\theta} A(z_0)=|A(z_0)|$ où *k* est l'entier introduit dans la question précédente.

2) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R},\ |P(z_0+t e^{j\theta})|^2=|P(z_0)|^2 |1+t^k e^{kj\theta} A(z_0+t e^{j\theta})|^2$

3) En déduire que pour *t* positif assez petit, on a $|P(z_0+t e^{j\theta})|^2>|P(z_0)|^2$. Conclure

4) Application : Trouver la valeur maximale de $|z^2-z-2|$ pour $|z|\leqslant 1$.

Exercice 30

Soit *n* un nombre entier supérieur ou égal à 1 et soit $P(X)=X^{2n}-X+1$.

1) Trouver l'expression des racines de $P(X)$ pour $n=1$.

On suppose dorénavant que *n* est un entier supérieur ou égal à 1 quelconque.

2) a) Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $t \to P(t)$ est strictement décroissante sur $\left]-\infty , \left(\frac{1}{2n}\right)^{\frac{1}{2n-1}}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\left(\frac{1}{2n}\right)^{\frac{1}{2n-1}} ;+\infty\right]$.

   b) Vérifier que $\forall t \in \mathbb{R},\ P(t)\geqslant 1-\left(1-\frac{1}{2n}\right)\left(\frac{1}{2n}\right)^{\frac{1}{2n-1}}$.

   c) En déduire que $P(X)$ n'a pas de racines réelles.

3) Prouver que toutes les racines de $P(X)$ sont simples.

4) Dans cette question, on suppose que n est pair. Montrer que $P(X)$ possède des racines de module strictement inférieur à 1 et des racines de module strictement supérieur à 1 (considérer $P(j)$).

Exercice 31

Soit $P(X)=6X^5-X^4-X^3-X^2-X-1$.

1) a) Montrer que toutes les racines de $P(X)$ sont de module strictement inférieur à 1.

   b) Déterminer deux constantes $0<a<b<1$ telles que pour toute racine *z* de $P(X)$ on ait : $a<|z|<b$.

2) a) Donner une expression de $(X-1)P(X)$.

   b) Montrer que toutes les racines de $P(X)$ sont simples.

   c) Déterminer le nombre de racine(s) réelle(s) de $P(X)$.

(*) Exercice 32

Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ a\neq 0$. On considère un polynôme du second degré écrit sous la forme canonique $P(X)=a(X+b)^2+c$. Étant donné $z\in\mathbb{C}$, on dira que *z* est <u>un point fixe</u> pour $P(X)$ si $P(z)=z$.

De même, étant donnés z_1 et $z_2\in\mathbb{C}$, on dira que $\{z_1 ; z_2\}$ est <u>une paire fixe</u> pour $P(X)$ si $z_2=P(z_1)$ et $z_1=P(z_2)$ avec $z_1\neq z_2$.

Enfin, étant donnés z_1, z_2 et $z_3\in\mathbb{C}$, on dira que $\{z_1 ; z_2 ; z_3\}$ est <u>un triplet fixe</u> pour $P(X)$ si $z_2=P(z_1)$, $z_3=P(z_2)$ et $z_1=P(z_3)$ avec z_1, z_2 et z_3 deux à deux distincts.

Dans ce cas, pour préciser la dépendance entre les z_i, le triplet fixe sera noté $z_1\to z_2\to z_3(\to z_1)$

L'objet de ce problème est d'étudier l'existence de paire ou triplet fixe pour $P(X)$.

1) Montrer qu'il existe toujours au moins un point fixe pour $P(X)$. En préciser le nombre en fonction des coefficients de $P(X)$.

2) Montrer que $\{z_1 ; z_2\}$ est une paire fixe pour $P(X)$ si et seulement si $\{a(b+z_1) ; a(b+z_2)\}$ est une paire fixe pour le polynôme $X^2+a(c+b)$.
Montrer que $\{z_1 ; z_2 ; z_3\}$ est un triplet fixe pour $P(X)$ si et seulement si $\{a(b+z_1) ; a(b+z_2) ; a(b+z_3)\}$ est un triplet fixe pour . $X^2+a(c+b)$

On suppose à partir de maintenant que $P(X)=X^2+t$ pour un certain $t\in\mathbb{R}$.

3) Trouver les paires et triplets fixes pour $P(X)=X^2$.

4) a) Montrer que le polynôme $P(P(X))-P(X)$ est divisible par $P(X)-X$ .En déduire qu'il en est de même de $P(P(X))-X$.
b) Soit $Q(X)$ le quotient de $P(P(X))-X$ par $P(X)-X$. Trouver une expression de $Q(X)$ à l'aide de a et de t.

5) Soit $z\in\mathbb{C}$. Montrer que z appartient à une paire fixe pour $P(X)$ si et seulement si z est une racine de $P(P(X))-X$ sans en être une de $P(X)-X$. En déduire qu'il n'existe qu'au maximum une seule paire fixe.

6) a) Supposons qu 'il n'existe pas de paire fixe pour $P(X)$. Montrer alors que $Q(X)$ admet une racine double et que $t=-\dfrac{3}{4}$.
b) Réciproquement, prouver que si $t=-\dfrac{3}{4}$, alors il n'existe pas de paire fixe pour $P(X)$.
c) Formuler alors une propriété de condition nécessaire et suffisante pour qu'un polynôme de la forme $a(X+b)^2+c$ avec $(a,b,c)\in\mathbb{R}^{3,}\ a\neq 0$ admette une paire fixe.
d) Pour quelles valeurs de t cette paire fixe est-elle constituée de réels ?

7) Vérifier que $P(P(P(X)))-X$ est factorisable par $P(X)-X$ et que $P(P(P(X)))-X=(P(X)-X)R(X)$ avec $R(X)=(1+(Q(X)-1).Q(P(X)))$. Vérifier aussi que $R(X)=X^6+X^5+(3t+1)X^4+(2t+1)X^3+(3t^2+3t+1)X^2+(t+1)^2X+t(t+1)^2+1$.

8) a) Soit $z\in\mathbb{C}$. Montrer que z appartient à un triplet fixe pour $P(X)$ si et seulement si z est une racine de $R(X)$ et n'est pas une racine de $P(X)-X$.
b) Vérifier que deux triplets fixes qui ne sont pas identiques à permutation près n'ont aucun élément en commun.
c) Montrer qu'il n'existe qu'au maximum deux triplets fixes pour $P(X)$.

9) a) Vérifier que la dérivée du polynôme $P(P(P(X)))$ est égale à $P'(X).P'(P(X)).P'(P(P(X)))$.
b) En déduire que si $P(X)-X$ et $R(X)$ ont (au moins) une racine commune dans $\mathbb{C}$, alors c'est une racine double de $P(X)-X$ et t est égale à une certaine valeur t_0 que l'on déterminera.
c) Montrer que $P(X)-X$ et $R(X)$ n'ont jamais de racine commune et en déduire l'existence (d'au moins) un triplet fixe par $P(X)$.

10) On suppose dans cette question que $R(X)$ admet (au moins) une racine non réelle z_1. Soit $z_1\rightarrow z_2\rightarrow z_3$ le triplet fixe pour $P(X)$ correspondant.
a) Montrer que $z_2\notin\mathbb{R}$ et $z_3\notin\mathbb{R}$.
b) Montrer qu'il n'existe pas dans le triplet $\{z_1 ; z_2 ; z_3\}$ deux nombres complexes conjugués entre eux.
c) En déduire l'existence d'exactement deux triplets fixes par $P(X)$ et qu'ils sont constitués uniquement de nombres non réels. Que dire des racines de $R(X)$?

11) On suppose dans cette question que toutes les racines de $R(X)$ sont réelles. En appliquant le Théorème des valeurs intermédiaires, prouver que $P(X)$ admet une paire fixe réelle et un point fixe réel.Que peut-on alors dire de t ?

12) On suppose dans cette question que toutes les racines de $R(X)$ sont réelles. Supposons que l'une d'entre elle soit multiple.

a) Démontrer alors à l'aide du 5)a) qu'il existe deux autres racines de $R(X)$ qui sont aussi multiples. Prouver qu'il n'existe alors qu'un seul triplet fixe pour $P(X)$.

b) Montrer qu ' il existe un polynôme $A(X)$ de degré 3 tel que $R(X)=A^2(X)$.

c) Démontrer que $R(X)$ possède une racine multiple si et seulement si $t=\frac{-7}{4}$.

13) Déduire des questions précédentes que le polynôme $P(X)=a(X+b)^2+c$ possède deux triplets fixes différents sauf si $a(b+c)=-\frac{7}{4}$ auquel cas, il n'y a qu'un seul triplet fixe.

VII) Corrigés

Exercice 1.

1) Pas factorisable dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.
2) $P(X)=(X-1)(5\mathrm{X}+16)$.
3) On remplace X par X^2 dans le résultat précédent et on factorise pour trouver $P(X)=(X-1)(X+1)(5\mathrm{X}^2+16)$ (le discriminant de $5\mathrm{X}^2+16$ étant strictement négatif).
4) $P(X)=(X^2+3)^2-(\sqrt{2}X)^2=(X^2-\sqrt{2}X+3)(X^2+\sqrt{2}X+3)$) (les discriminants étant strictement négatif).
5) $P(X)=(X^2+1)(X^2-\sqrt{3}X+1)(X^2+\sqrt{3}X+1)$ (les discriminants étant strictement négatif).
6) $P(X)=(X-1)(X-3)(2\mathrm{X}+1)$.
7) En posant $Y=X^3$ on obtient une première factorisation $P(X)=(Y-8)(Y+27)=(X^3-8)(X^3+27)$ que l'on factorise en $P(X)=(X-2)(X+3)(X^2+2\mathrm{X}+4)(X^2-3\mathrm{X}+9)$ (les discriminants des polynômes du second degré étant strictement négatifs).

Exercice 2

1) $P(X)=(X+3\mathrm{j})Q(X)-4+j$.

2) $P(X)=(X^3-2\mathrm{X}^2+6\mathrm{X}-2)Q(X)-8\mathrm{X}+9$.

3) Posons $P(X)=2016X^{2017}-2017X^{2016}+1$. On a $P(1)=P'(1)=0$ donc 1 est racine d'ordre supérieur ou égal à 2 de P, donc $2016X^{2017}-2017X^{2016}+1$ est divisible par $(X-1)^2$.

Exercice 3.

1) On vérifie que $P(2\mathrm{j})=P'(2\mathrm{j})=0$ et que $P''(2\mathrm{j})\neq 0$.

2) On déduit du 1) que $P(X)$ se factorise par $(X-2j)^2(X+2j)^2=(X^2+4)^2$. Une division euclidienne donne $P(X)=(X^2+4)^2(3\mathrm{X}+5)$.

Exercice 4.

La racine double est aussi racine de $P'(X)$ donc vaut -1 ou 7. On vérifie que 7 est racine double car on a de plus $P(7)=0$ donc $(X-7)^2$ divise $P(X)$ et une division euclidienne donne $P(X)=(X-7)^2(X+5)$.

Exercice 5.

1) La racine $z_1=e^{j\theta}$ est non réelle et les coefficients de P sont réels, donc $z_2=e^{-j\theta}$ est une deuxième racine. Le degré de P est trois, donc il ne « reste de la place » que pour une racine réelle (sinon son conjugué serait une quatrième racine).

2) On a $P(X)=2(X^2-2\cos(\theta)X+1)(X-t)$.
3) En développant le produit $2(X^2-2\cos(\theta)X+1)(X-t)$ et en identifiant avec la forme développée de l'énoncé, on obtient 3 équations qui donnent facilement $t=5$ puis $\cos(\theta)=\frac{3}{4}$.

On a donc $P(X)=2(X^2-\frac{3}{2}X+1)(X-5)=(2\mathrm{X}^2-3X+2)(X-5)$.

Exercice 6.

1. $4P(X)-XP'(X)=2(X^2+3X-4)$.
2.
   a) Le nombre z étant racine double de P, on doit avoir $P(z)=P'(z)=0$ donc $4P(z)-zP'(z)=0$ c'est à dire $z^2+3z-4=0$. On déduit que $z=1$ ou $z=-4$.

   b) On vérifie que ni 1 ni -4 ne sont racines de P, et donc encore moins racines doubles. L'hypothèse de l'existence d'un tel nombre z est donc absurde : les racines de P sont simples.

Exercice 7.

1.
   a) Un calcul simple montre que $\forall t\in\mathbb{R},\ f'(t)>0$.

   b) On vérifie que $f(-1)<0<f\left(\frac{1}{3}\right)$. Le Théorème des valeurs intermédiaires appliqué à f continue strictement croissante, dit qu'il y a une unique racine t_0 dans l'intervalle $]-1;-\frac{1}{3}[$, donc une seule sur $\mathbb{R}$ car f est strictement croissante. Le fait que $\forall t\in\mathbb{R},\ f'(t)>0$ assure que $f'(t_0)\neq 0$ donc t_0 est une racine simple.

2.
   a) Les racines sont t_0 , $re^j\theta$, $re^{-j\theta}$ (le conjugué de la première racine car P est à coefficients réels) et c'est tout car P est de degré 3.

   b) On a $P(X)=3(X^2-2r\cos(\theta)X+r^2)(X-t_0)$.

   c) On a en posant X=0 dans la relation ci-dessus, $P(0)=-3.t_0.r^2$ donc $1=-3.t_0.r^2$ d'où $t_0.r^2=\frac{-1}{3.}$

   d) On a donc $r^2=\frac{-1}{3t_0}$. Puisque $t_0\in]-1;-\frac{1}{3}[$, alors on a $-1<\frac{1}{3t_0}<\frac{1}{3}$ d'où $\frac{1}{3}<r^2<1$: en particulier $r<1$ ce qui assure que les deux racines non réelles sont de module strictement plus petit que 1. Conclusion : toutes les racines de P sont de module strictement inférieur à 1.

Exercice 8

1. On a $\deg Q(X)=2n-2$.
2. On a $\deg R(X)<\deg(X^2-1)$ donc $\deg R(X)\leq 1$: la fonction $X\rightarrow R(X)$ est donc affine.
3. Puisque $P(X)=Q(X)(X^2-1)+R(X)$, si l'on pose X=1, on trouve $R(1)=P(1)=1-a$. Si l'on pose X= – 1 , on trouve $R(-1)=1+3a$.
4. On a , par les deux conditions trouvées ci-dessus, $R(X)=-2aX+1+a$.
5. On a $P(1)=1-a$ et $P'(1)=2n-2a(2n-1)=2(a-2an+n)$.
   Si 1 est racine multiple, on en déduit que $a=n=1$ est la seule possibilité, c'est à dire que $P(X)=(X-1)^2$.

Exercice 9

1° En remarquant que $(2a-5)^2=13$, on trouve que a est racine de $4X^2-20X+12$. On prendra donc $P(X)=X^2-5X+3$.

2°

a) On a $A(X)=(3X^3+15X^2+64X+286)P(X)+1229X-860$

b) Remarquant que $P\left(\frac{5+\sqrt{13}}{2}\right)=0$, on trouve à partir de l'identité de division euclidienne que $A(a)=1229a-860=\frac{4425+1229\sqrt{13}}{2}$.

Exercice 10

1) $P(-1)=-1+t-1-t+2=0.$
2) Par division euclidienne, il vient $P(X)=(X+1)(X^2+(t-1)X+2)$. Le polynôme $P(X)$ n'admet que des racines réelles si et seulement si c'est le cas pour $X^2+(t-1)X+2$, c'est à dire que son discriminant est positif ou nul. Cela donne la condition $t\in]-\infty, 1-2\sqrt{2}]\cup[1+2\sqrt{2};+\infty[$.
3) Il y a deux cas :
   (i) Le polynôme $X^2+(t-1)X+2$ admet aussi – 1 comme racine, donc $t=4$ et $P(X)=(X+1)^2(X+2)$: – 1 est bien d'ordre 2.
   (ii) Le polynôme $X^2+(t-1)X+2$ admet une racine double (différente de -1), donc son discriminant est nul. On a deux sous-cas :
   a) $t=1-2\sqrt{2}$: alors $P(X)=(X+1)(X^2-2\sqrt{2}X+2)=(X+1)(X-\sqrt{2})^2$.
   b) $t=1+2\sqrt{2}$: alors $P(X)=(X+1)(X^2+2\sqrt{2}X+2)=(X+1)(X+\sqrt{2})^2$.

Exercice 11

1) Soit $t\in\mathbb{R}$. On calcule $P(jt)=t^4+18t^2-40+jt(t^2-2)$. On trouve (en travaillant d'abord sur la partie imaginaire) que $(P(jt)=0)\Leftrightarrow(t=\pm\sqrt{2})$. Les deux racines imaginaires purs sont $\pm j\sqrt{2}$.
2) On déduit que $P(X)$ est divisible par X^2+2 donc on trouve
   $P(X)=(X^2+2)(X^2-X-20)=(X^2+2)(X-5)(X+4)$.

Exercice 12

1) On a 1 qui est racine multiple de $P(X)$ si et seulement si $P(1)=P'(1)=0$ c'est à dire $a+b+1=0$ et $4a+b=0$. On trouve $a=\frac{1}{3}$ et $b=\frac{-4}{3}$.
2) Le polynôme $(X-1)^2$ divise alors $P(X)$ et on a
   $P(X)=\frac{1}{3}X^4-\frac{4}{3}X+1=\frac{1}{3}.(X-1)^{2.}(X^2+2X+3)$ avec $\Delta=-8<0$.

Exercice 13

1) – 1 est racine évidente
2) $X+1$ divise $P(X)$ et on trouve par division euclidienne
   $P(X)=X^3+aX^2+aX+1=(X+1)(X^2+(a-1)X+1)$.

Pour avoir une racine double ou triple , on a deux cas :

(i) le nombre – 1 est racine de $X^2+(a-1)X+1$ donc $a=3$, et dans ce cas, il se trouve que – 1 est racine triple de $P(X)$

(ii) le polynôme $X^2+(a-1)X+1$ admet une racine double donc son discriminant vaut 0 et alors, soit *a* = 3 et on se ramène au cas (i), soit *a*= – 1, et 1 est racine double de $P(X)$.

Exercice 14

1) $P(X)=X^2-3X-10=(X-5)(X+2)$.
2) $Q(X)=X^3-1=(X-1)(X^2+X+1)$.
3) $R(X)=X^3-5X^2+19X+25=(X+1)(X^2-6X+25)$

Exercice 15

1) On vérifie que $P(1)=P'(1)=0$ et $P''(1)\neq 0$.

2) Le polynôme $(X-1)^2$ divise alors $P(X)$ et on a
$$P(X)=3X^4+X^3-9X^2+3X+2=(X-1)^2(3X^2+7X+2)=(X-1)^2(X+2)(3X+1).$$

Exercice 16

On a
$$P(X)=X^3+(\sqrt{2}-1)X^2-(\sqrt{2}+1)X-1=(X-a)(X+a)(X-b)=(X^2-a^2)(X-b)$$
$$=X^3-bX^2-a^2X+a^2b.$$
Par identification on trouve $b=1-\sqrt{2}$ et $a=\sqrt{\sqrt{2}+1}$.

Exercice 17

Même méthode que l'exercice précédent. On trouve $P(X)=(X-4)(X+4)(X+7)$.

Exercice 18

1) On remplace X par $2+j$ dans l'expression de $P(X)=5X^3-22X^2+33X-10$ pour trouver 0.
2) Les coefficients de P étant réels, puisque $2+j$ est une racine de P, il en est de même de son conjugué.
3) On en déduit que X^2-4X+5 divise $P(X)$ et l'on trouve
$$P(X)=5X^3-22X^2+33X-10=(X^2-4X+5)(5X-2)\ .$$
4) La dernière racine est $\frac{2}{5}$.

Exercice 19

1) a) On a $P'(X)=3X^2-2(2-3a)X-(6a-1)$
   b) On remarque que pour toute valeur de *a,* on a $P(1)=P'(1)=0$.

2)
   a) $P(X)=(X-\alpha)(X-1)^2$. .

   b) On a d'après la forme développée $P(0)=3a$ et d'après la forme factorisée $P(0)=-\alpha$ d'où $\alpha=-3a$.

Exercice 20. On a par une identité remarquable
$$P(X)=(2X^2+1)^2-(X+16)^2=(2X^2-X-15)(2X^2+X+17)=(2X+5)(X-3)(2X^2+X+17).$$

Exercice 21. On a $Q'(X)=P'(X)-P'(1)$ donc $Q(1)=Q'(1)=0$. On en déduit que 1 est racine multiple de Q donc $(X-1)^2$ divise $Q(X)$.

On peut donc écrire $Q(X)=(X-1)^2A(X)$ pour un certain polynôme A, d'où
$$P(X)-(X-1)P'(1)-P(1)=A(X)(X-1)^2$$
c'est à dire
$$P(X)=P(1)+(X-1)P'(1)+A(X)(X-1)^2 .$$
En appliquant cela à $P(X)=X^{2018}$, il vient
$X^{2018}=2018(X-1)+1+A(X)(X-1)^2=A(X)(X-1)^2+2018X-2017$, ce qui montre que le reste de la division euclidienne de $P(X)=X^{2018}$ par $(X-1)^2$ est $2018X-2017$.

Exercice 22.

1)

a) On a $(t^2-2t+3)^2+(t-1)^2=0$ donc $t^2-2t+3=0$ et $(t-1)^2=0$. En particulier $t=1$.

b) On doit, de plus, avoir $t^2-2t+3=0$, ce qui contredit que $t=1$.

2) On a $A^2+B^2=(A+jB)(A-jB)$. On en déduit
$P(X)=(X^2-2X+3)^2+(X-1)^2=(X^2-(2-j)X+3-j)(X^2-(2+j)X+3+j)$.

3) On résout d'abord $X^2-(2-j)X+3-j=0$. On a $\Delta=-9$ ce qui donne $\delta=3j$ et les deux solutions de cette équation : $z_1=1+j$ et $z_2=1-2j$.
On résout ensuite $X^2-(2+j)X+3+j=0$. On a $\Delta=-9$ ce qui donne $\delta=3j$ et les deux solutions de cette équation : $z_3=1+2j$ et $z_4=1-j$.
On a les 4 solutions $z_{1,}z_{2,}z_3$ et z_4.

4) Par le théorème de factorisation d'un polynôme par ses racines, on a
$P(X)=(X-z_1)(X-z_3)(X-z_2)(X-z_4)=(X-z_1)(X-\bar{z_1})(X-z_2)(X-\bar{z_2})$
$P(X)=(X^2-2X+2)(X^2-2X+5)$.

Exercice 23

1) On a $\dfrac{b^2}{4ac}=\dfrac{1}{4}\dfrac{\frac{b^2}{a^2}}{\frac{c}{a}}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{(z_1+z_2)^2}{z_1z_2}\right)=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_1}\right)+\dfrac{1}{2}$.

2) a) On a $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}=\dfrac{1}{1}=1$ et, de même $\left|\dfrac{z_2}{z_1}\right|=1$. Les deux nombres complexes $\dfrac{z_1}{z_2}$ et $\dfrac{z_2}{z_1}$ étant de module 1 et inverses l'un de l'autre, ils sont conjugués.

b) On déduit du 2)a) que $\dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_1}=2\,\mathrm{Re}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)\in[-2\,;2]$ vu que $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=1$ donc le 1) implique que $\dfrac{b^2}{4ac}$ est un réel appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$.

D'autre part, $\left|\dfrac{c}{a}\right|=|z_1z_2|=1$ donc $|c|=|a|$.

3) Si t=1, alors le discriminant du polynôme az^2+bz+c est nul : il n' y alors qu'une seule solution $z_0=-\dfrac{b}{2a}$. Notons que $z_0^2=\dfrac{b^2}{4a^2}=t\dfrac{c}{a}=\dfrac{c}{a}$ qui est de module 1 car $|c|=|a|$. On en déduit que z_0 est de module 1.

4)

a) On a $b^2\neq 4ac$, donc le discriminant du polynôme az^2+bz+c est non nul : il y alors deux solutions différentes. Elles sont non nulles car leur produit, $\dfrac{c}{a}$, est de module 1 donc non nul.

b) On a comme pour le 1), la relation :

$$t=\frac{b^2}{4ac}=\frac{1}{4}\frac{\frac{b^2}{a^2}}{\frac{c}{a}}=\frac{1}{4}\left(\frac{(z_1+z_2)^2}{z_1z_2}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}\right)+\frac{1}{2}$$

d'où l'on tire

$$\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}=4\text{t}-2$$

$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2+1=(4\text{t}-2)\frac{z_1}{z_2}$, c'est à dire que $\frac{z_1}{z_2}$ est racine du polynôme $X^2+(2-4\text{t})X+1$. Même raisonnement pour $\frac{z_2}{z_1}$.

c) Le polynôme du second degré $X^2+(2-4\text{t})X+1$ est à coefficients réels et à discriminant $\Delta=16t(t-1)<0$. Les deux racines, qui sont $\frac{z_1}{z_2}$ et $\frac{z_2}{z_1}$ sont alors conjuguées, donc de même module. On a donc $\frac{|z_1|}{|z_2|}=\frac{|z_2|}{|z_1|}$ d'où par égalité des produits en croix, $|z_1|=|z_2|$.

On a $|z_1.z_2|=\left|\frac{c}{a}\right|=1$ donc z_1 et z_2 sont de module 1.

Conclusion : l'équation du second degré $az^2+bz+c=0$ admet deux solution de module égal à 1 si et seulement si $\frac{b^2}{4\text{ac}}$ est un réel appartenant à l'intervalle $[0;1]$ et $|c|=|a|$.

Exercice 24

1) On résout l'équation $P(z)=z$. Il vient deux solutions : $x_1=-2$ et $x_2=3$.

2) a) En utilisant le fait que $P(x_1)=x_1$, on a $P(P(x_1))-x_1=P(x_1)-x_1=x_1-x_1=0$.
De même pour x_2.

b) Si z appartient à une paire fixe pour $P(X)$, cela équivaut à ce que $P(P(z))=z$, donc z est une racine de $P(P(X))-X$, et à ce que $z\neq P(z)$, donc z différent de x_1 et x_2.

c) On a $P(P(X))-X=(X^2-6)^2-6-X=X^4-12X^2-X+30$. On sait que x_1 et x_2 sont deux racines distinctes de $P(P(X))-X$ donc $P(X)-X=(X-x_1)(X-x_2)$ divise $P(P(X))-X$.
Par division euclidienne, on trouve

$X^4-12X^2-X+30=(X^2-X-6)(X^2+X-5)$ donc

$$P(P(X))-X=(X+2)(X-3)\left(X+\frac{\sqrt{21}+1}{2}\right)\left(X-\frac{\sqrt{21}-1}{2}\right) .$$

d) D'après ce qui précède, un élément d'une paire fixe est une racine de $P(P(X))-X$ différente de -2 et 3
donc est un nombre égal à $\frac{-1-\sqrt{21}}{2}$ ou à $\frac{-1+\sqrt{21}}{2}$. Mais une paire fixe étant composé de deux nombres distincts, on en déduit que les nombres $\frac{-1-\sqrt{21}}{2}$ et $\frac{-1+\sqrt{21}}{2}$ constituent une seule paire fixe (ils sont images l'un de l'autre par la fonction $X\rightarrow P(X)$).

3) On regarde d'abord l'existence de points fixes en cherchant les racines de $P_1(X)-X$, ce qui donne $X=-2$ et $X=0$. On montre alors de la même façon que pour le 2) que $P_1(X)-X$ divise $P_1(P_1(X))-X=X^4+6X^3+12X^2+8X$. On trouve $P_1(P_1(X))-X=X^4+6X^3+12X^2+8X=(X^2+2X)(X^2+4X+4)=X(X+2)^3$.
Si il existait une paire fixe pour $P_1(X)$, alors un nombre complexe *z* appartenant à une telle paire serait une racine de $P_1(P_1(X))-X$ différente de – 2 et 0, ce qui n'existe pas. Il n'y a donc pas existence d'une paire fixe pour $P_1(X)$, ni dans $\mathbb{R}$, ni dans $\mathbb{C}$.

4) a) En utilisant le fait que $P(x_1)=x_1$, on a $P(P(P(x_1)))-x_1=P(P(x_1))-x_1=P(x_1)-x_1=x_1-x_1=0$.
De même pour x_2.
Donc x_1 et x_2 sont deux racines distinctes de $P(P(P(X)))-X$ qui est donc factorisable par $P(X)-X=(X-x_1)(X-x_2)$.

b) Si *z* appartient à un triplet fixe, alors nécessairement $P(P(P(z)))=z$ donc z est une racine de $P(P(P(X)))-X$. On doit aussi avoir $z\neq P(z)$ (sinon, le triplet ne serait constitué que par un seul nombre répété trois fois) donc *z* est différent de x_1 et x_2.
Réciproquement, si *z* est une racine de $P(P(P(X)))-X$ différente de x_1 et x_2, , alors si l'on pose $z_1=z$, $z_2=P(z)$ et $z_3=P(P(z))$, $\{z_1 ; z_2 ; z_3\}$ est un triplet fixe. En effet , on a de façon évidente $z_2=P(z_1)$ et $z_3=P(z_2)$, et $P(z_3)=P(P(P(z)))=z$ car z est une racine de $P(P(P(X)))-X$. De plus, *z* étant différent de x_1 et x_2, on a $P(z)\neq z$ donc $z_1\neq z_2$, on a aussi $z_2\neq z_3$ (sinon, on aurait $P(z)=P(P(z))$, donc $P(P(z))=P(P(P(z)))=z$ d'où $P(z)=z$, ce qui est exclu) et $z_1\neq z_3$ (sinon, on aurait $z=P(P(z))$, donc $P(z)=P(P(P(z)))=z$ ce qui est exclu) .

5) a) Par le théorème de dérivation des fonctions composées on a
$$\frac{d}{dX}(P(P(P(X))))=\frac{d}{dX}(P(P(X)))P'(P(P(X)))=P'(X)P'(P(X))P'(P(P(X))).$$
b) On calcule $\frac{d}{dX}(P(P(P(X)))-X)_{X=x_1}=P'(x_1)P'(P(x_1))P'(P(P(x_1)))-1$
$=(P'(x_1))^3-1$ car $x_1=P(x_1)=P(P(x_1))$
$=(-4)^3-1\neq 0$
donc x_1 est racine simple de $P(P(P(X)))-X$.
De même, $\frac{d}{dX}(P(P(P(X)))-X)_{X=x_2}=3^3-1\neq 0$ donc x_2 est racine simple de $P(P(P(X)))-X$.
Pour $i=1{,}2$, le nombre x_i est racine simple de $P(P(P(X)))-X=(P(X)-X)Q(X)=(X-x_1)(X-x_2)Q(X)$
donc $Q(x_i)\neq 0$.

c) Le polynôme $P(P(P(X)))-X$ est de degré 8 donc $\deg(Q)=6\geq 1$: par le Théorème de de d'Alembert-Gauss, il admet au moins une racine $z\in\mathbb{C}$ qui, d'après la question précédente, n'est ni x_1 ni x_2 . On déduit de la question 4) b) que $\{z ; P(z) ; P(P(z))\}$ est un triplet fixe.

6)

a) On a $6=z^2+(-P(z))$ donc par l'inégalité triangulaire, $6\leq|P(z)|+|z^2|=|P(z)|+|z|^2$ d'où

$\forall z\in\mathbb{C},\ |P(z)|\geqslant 6-|z|^2.$

De même, on a $z^2=P(z)+6$ donc $|z|^2=|z^2|\leq|P(z)|+6$ d'où $\forall z\in\mathbb{C},\ |P(z)|\geq|z|^2-6.$

b) Puisque $\forall z\in\mathbb{C},\ |P(z)|\geq 6-|z|^2$, alors si $|z|\leq\frac{1}{2}$, on a $|P(z)|\geq 6-\frac{1}{4}=\frac{23}{4}.$

En remplaçant z par $P(z)$ dans l'inégalité $\forall z\in\mathbb{C},\ |P(z)|\geq|z|^2-6.$, si $|z|\leq\frac{1}{2}$, on a

$$|P(P(z))|\geq|P(z)|^2-6\geq\left(\frac{23}{4}\right)^2-6=\frac{433}{16}.$$

Enfin, en remplaçant z par $P(P(z))$ dans l'inégalité $\forall z\in\mathbb{C},\ |P(z)|\geq|z|^2-6.$, si $|z|\leq\frac{1}{2}$, on a

$$|P(P(P(z)))|\geq|P(P(z))|^2-6\geq\left(\frac{433}{16}\right)^2-6=\frac{185953}{256}\quad.$$

c) On raisonne par l'absurde : s'il existait un nombre complexe z tel que $|z|\leq\frac{1}{2}$ et $P(P(P(z)))=z$,

alors on aurait $\frac{1}{2}\geq|z|=|P(P(P(z)))|\geq\frac{185953}{256}$ d'où $\frac{1}{2}\geq\frac{185953}{256}$ ce qui est absurde.

Donc tout élément d'un triplet fixe est de module strictement plus grand que $\frac{1}{2}$.

7) Soit z une racine de Q. Alors, z appartient à un triplet fixe, donc, par la question précédente, $|z|>\frac{1}{2}$.

Puisque $P(z)$ et $P(P(z))$ appartiennent au même triplet fixe, on a de même $|P(z)|>\frac{1}{2}$ et

$|P(P(z))|>\frac{1}{2}$. En remarquant que $P'(X)=2\mathrm{X}$, on a par la question 5)a)

$$\frac{d}{dX}(P(P(P(X)))-X)=P'(X).P'(P(X)).P'(P(P(X)))-1=8\,X\,P(X)P(P(X))-1.$$

On en déduit que $\frac{d}{dX}(P(P(P(X)))-X)_{X=z}=8\,z\,P(z)P(P(z))-1.$

Puisque $|8\,z\,P(z)P(P(z))|=8|z|\,|P(z)|\,|P(P(z))|>8.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=1$ on en déduit que

$8\,z\,P(z)P(P(z))\neq 1$ donc $\frac{d}{dX}(P(P(P(X)))-X)_{X=z}\neq 0.$

Le nombre z est donc une racine simple de $P(P(P(X)))-X=(P(X)-X)Q(X),$ et puisque il est racine de Q, il est alors racine simple de Q.

Le polynôme Q possède donc 6 racines différentes, qui constituent des triplets fixes chacun composés de trois nombres distincts : comme aucun nombre ne peut faire partie de deux triplets fixes différents, on en déduit qu'il existe seulement deux triplets fixes.

8) a) On a $P(P(P(0)))=P(0)Q(0)$ donc $894=-6Q(0)$ d'où $Q(0)=-149<0.$

D'autre part, on a $Q(X)=\frac{P(P(P(X)))-X}{P(X)-X}\sim\frac{X^8}{X^2}=X^6$ en $+\infty$, on en déduit que

$\lim_{X\to+\infty}Q(X)=+\infty.$ Le théorème des valeurs intermédiaires prouve alors que Q possède au moins une racine réelle strictement positive.

b) Soit x une racine réelle de Q. Alors $\{x\,;P(x);P(P(x))\}$ est un triplet fixe composé de trois nombres réels (l'image par $P(X)$ d'un réel est un réel) distincts qui tous les trois sont racines de Q. Le polynôme Q est donc divisible par $(X-x)(X-P(x))(X-P(P(x)))$ et le polynôme $\frac{Q(X)}{(X-x)(X-P(x))(X-P(P(x)))}$ est un polynôme de degré 3 : les racines de Q étant simples, il possède nécessairement une racine réelle (car étant de degré impair) $x'\notin\{x;P(x);P(P(x))\}$. Ce nombre x' étant une racine de Q, on en déduit que $\{x';P(x');P(P(x'))\}$ est un autre triplet fixe pour P. Les deux triplets fixes pour P sont donc $\{x;P(x);P(P(x))\}$ et $\{x';P(x');P(P(x'))\}$, composés uniquement de nombres réels.

9) On reprend les calculs du 3) pour obtenir $P_1(P_1(X))-X=X(X+2)^3$. Cela donne

$$P_1(P_1(P_1(X)))-P_1(X)=P_1(X)(P_1(X)+2)^3$$
$$=X(X+3)(X^2+3X+2)^3=X(X+3)(X+1)^3(X+2)^3$$

On en déduit alors

$$P_1(P_1(P_1(X)))-X=P_1(P_1(P_1(X)))-P_1(X)+P_1(X)-X$$
$$=X(X+3)(X^2+3X+2)^3+X^2+2X=X(X+3)(X+1)^3(X+2)^3+X(X+2)$$
$$=X(X+2)\left((X+3)(X+2)^2(X+1)^3+1\right)$$

En reprenant le raisonnement du 4)b), il existe un triplet fixe si et seulement si le polynôme (X+3) $(X+3)(X+2)^2(X+1)^3+1$ possède des racines différentes de 0 et – 2. C'est le cas, car, d'après le Théorème de d'Alembert-Gauss, il en possède, et il est clair que ni 0 ni – 2 ne sont des racines.

Remarque : une conséquence d'un Théorème de Sarkovskii est que, pour une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, l'existence d'une triplet fixe implique celle d'une paire fixe.
Le polynôme $P_1(X)=X^2+3X$, qui définit une fonction continue de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, nous fournit un contre-exemple à ce Théorème lorsque l'on ne se place plus sur l 'ensemble des nombres réels.
Toutefois, le Théorème de Sarkovkii nous apprend ici qu'un triplet fixe pour $P_1(X)$ ne peut pas être constitué de nombres réels.

Exercice 25

1) Le nombre *t* est le produit des racines de $P_t(X)$ comptées avec leur ordre de multiplicité.En effet, en appelant z_1, z_2, z_3 ces racines, nous avons $P_t(X)=1.(X-z_1)(X-z_2)(X-z_3)$ d'où en posant $X=0$, on obtient que $t=z_1z_2z_3$. Nécessairement, si toutes les racines sont de module strictement inférieur à 1, alors leur produit *t* l'est aussi d' où $t\in]-1;1[$.
2) Si $t>0$, alors $\forall x\in\mathbb{R}^*, P'_t(x)=3x^2+t>0$ donc la fonction $x\rightarrow P_t(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On a $P_t(0)=-t<0$ et $P_t(1)=1>0$ donc par le Théorème des valeurs intermédiaires, le polynôme $P_t(X)$ possède une racine réelle dans l'intervalle $]0;1[$.

C'est la seule sur $\mathbb{R}$ car la fonction $x\rightarrow P_t(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle est simple car $\forall x\in\mathbb{R}^*, P'_t(x)\neq 0$.

3)

a) On a $\forall x\in\mathbb{R}, P'_t(x)=3x^2+t$. On déduit facilement le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{-t}{3}}$		$\sqrt{\frac{-t}{3}}$		$+\infty$
P_t	$-\infty$	$\nearrow$	$P_t\left(-\sqrt{\frac{-t}{3}}\right)$	$\searrow$	$P_t\left(\sqrt{\frac{-t}{3}}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

Posons, pour simplifier les calculs, $s=\sqrt{-t}$. On a $P_t\left(-\sqrt{\frac{-t}{3}}\right)=P_{-s^2}\left(\frac{-s}{\sqrt{3}}\right)=s^2\left(1+\frac{2s}{3\sqrt{3}}\right)>0$ et

$P_t\left(\sqrt{\frac{-t}{3}}\right)=P_{-s^2}\left(\frac{s}{\sqrt{3}}\right)=s^2\left(1-\frac{2s}{3\sqrt{3}}\right)>s^2\left(1-\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)>0$ car $s<1$.

On déduit donc du tableau de variations que $\forall x>\sqrt{\frac{-t}{3}}$, $P_t(x)>0$ et, avec le Théorème des valeurs intermédiaires, que P_t s'annule une seule fois sur l'intervalle $]-\infty;-\sqrt{\frac{-t}{3}}[$. Le fait que $\theta(t)$ soit une racine simple découle du fait que $\forall x<\sqrt{\frac{-t}{3}}$, $P'_t(x)>0$ donc $P'_t(\theta(t))\neq 0$.

b) On remarque que $\forall t\in]-1;0[$, $-1<-\sqrt{\frac{-t}{3}}$, donc les réels – 1 et $\theta(t)$ appartiennent tous les deux à l'intervalle $]-\infty;-\sqrt{\frac{-t}{3}}[$ sur lequel P_t est strictement croissante.On a donc

$(-1<\theta(t))\Leftrightarrow(P_t(-1)<P_t(\theta(t))=0)\Leftrightarrow -1-2t<0\Leftrightarrow t\in]-\frac{1}{2};0[$.

Or, pour $t\in]-1;0[$, $\theta(t)<0$ donc on a $|\theta(t)|<1\Leftrightarrow t\in]-\frac{1}{2};0[$.

4) a) On a vu dans les questions précédentes que pour $t\in]-1;1[$ avec $t\neq 0$, il n'existe qu'une seule racine réelle et simple. Puisque $\deg(P_t(X))=3$, il y a deux autres racines, qui ne peuvent être que complexes et conjuguées car $P_t(X)$ est à coefficients réels.

b) On a $P_t(X)=X^3+tX-t=(X-\theta(t))(X^2-2\,\mathrm{Re}(\lambda(t))X+|\lambda(t)|^2)$ (forme factorisée).
En développant la forme factorisée et en identifiant les coefficients constants, on a
$t=|\lambda(t)|^2\theta(t)$.

En identifiant les coefficients des termes en X et X^2, on obtient les relations :

(1) : $t=|\lambda(t)|^2+2\theta(t)\mathrm{Re}(\lambda(t))$

(2) : $0=\theta(t)+2\,\mathrm{Re}(\lambda(t))$.

De (2), on déduit $2\,\mathrm{Re}(\lambda(t))=-\theta(t)$ que l'on injecte dans (1) pour obtenir $t=|\lambda(t)|^2-\theta(t)^2$.

5) D'après le résultat du 4)b), $\forall t\in]-1;0[$, $|\lambda(t)|^2-|\theta(t)|^2=t<0$ donc $|\lambda(t)|^2<|\theta(t)|^2$ d'où $|\lambda(t)|\leq|\theta(t)|$. On peut en déduire, avec les questions précédentes, que le polynôme $P_t(X)=X^3+tX-t$ a toutes ses racines de module strictement inférieur à 1 si et seulement si $t\in]-\frac{1}{2};0[$.

6) a) On a $P_t(\theta(t+h))=\theta^3(t+h)+t\theta(t+h)-t$. Or, par définition de $\theta(t+h)$, on a $P_{t+h}(\theta(t+h))=0$ c'est à dire $\theta^3(t+h)+(t+h)\theta(t+h)-t-h$ d'où
$\theta^3(t+h)=(t+h)(1-\theta(t+h))$.

On en déduit que

$$P_t(\theta(t+h))=\theta^3(t+h)+t\theta(t+h)-t=(t+h)(1-\theta(t+h))+t\theta(t+h)-t$$
$$=h(1-\theta(t+h)).$$

On a vu au 2) que $\theta(t+h)<1$ ce qui implique que $P_t(\theta(t+h))=h(1-\theta(t+h))>0$ (on rappelle que $h>0$.) .

b) On déduit du a) que $P_t(\theta(t+h))>0=P_t(\theta(t))$. On a vu au 2) que $x\to P_t(x)$ est

strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc on déduit que $\theta(t+h)>\theta(t)$.
Cela signifie que la fonction $t\to\theta(t)$ est strictement croissante sur $]0;1[$, et donc la fonction $t\to\theta^2(t)$ aussi car . $\theta(t)\geqslant 0$.

c) D'après le 4)b), $\forall t\in]0;1[,\ |\lambda(t)|^2=t+\theta(t)^2$ donc la fonction $t\to|\lambda(t)|^2$ est strictement croissante sur $]0;1[$ comme somme de fonctions strictement croissantes. On en déduit que la fonction $t\to|\lambda(t)|$ est strictement croissante sur $]0;1[$.

d) D'après le 4)b), on a $t_0=1-\theta(t_0)^2=\theta(t_0)$. On en déduit $t_0=1-t_0^2$ c'est à dire $t_0^2+t_0=1$.
On en déduit que $t_0=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (la valeur $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ n'est pas dans $]0;1[$).

e) Posons $t_0=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Alors une division euclidienne donne
$P_{t_0}(X)=(X-t_0)(X^2+t_0X+t_0+t_0^2)+t_0(t_0^2+t_0-1)=(X-t_0)(X^2+t_0X+1)$ en utilisant la relation $t_0^2+t_0=1$.
On en déduit que $\lambda(t_0)$ est une des deux racines complexes conjuguées de X^2+t_0X+1 qui sont bien de module 1 car X^2+t_0X+1 est un polynôme du second degré à coefficients réels et à discriminant négatif, avec un coefficient constant égal à 1.

7) On a nécessairement $t\in]-1;1[$ d'après le 1).
On a trois cas :

(i) $t=0$: dans ce cas, $P_t(X)=X^3$ a 0 comme racine triple.

(ii) $t\in]-1;0[$: On a d'après le 5) la relation $\forall t\in]-1;0[,\ |\lambda(t)|\leq|\theta(t)|$ et on sait d'après le 3)b) que $|\theta(t)|<1\Leftrightarrow t\in]-\frac{1}{2};0[$. On en déduit que toutes les racines de $P_t(X)$ sont de module strictement inférieur à 1 ssi $t\in]-\frac{1}{2};0[$.

(iii) $t\in]0;1[$: d'après le 2), $\theta(t)$ est toujours de module strictement inférieur à 1. D'autre part, la fonction $t\to|\lambda(t)|$ est strictement croissante sur $]0;1[$ d'après le 6) c) et $\left|\lambda\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\right|=1$ d'après le 6)e). On en déduit que toutes les racines de $P_t(X)$ sont de module strictement inférieur à 1 ssi $t\in]0;\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}[$.

Conclusion : le polynôme $P_t(X)$ a toutes ses racines de modules strictement inférieurs à 1 si et seulement si $t\in\left]\dfrac{-1}{2};\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right[$.

Exercice 26

1) Le degré de $P(X)$ est pair (sinon il admettrait une racine réelle). La décomposition de $P(X)$ en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ ne fait intervenir que des polynômes de degré 2 avec un discriminant négatif.

2)

a) On a $P(X)=X^2+bX+c=\left(X+\dfrac{b}{2}\right)^2+\dfrac{4c-b^2}{4}$.

Puisque le discriminant de $P(X)$ est strictement négatif, on a $\frac{4c-b^2}{4}>0$ donc on peut prendre

$A(X)=X+\frac{b}{2}$ et $B(X)=\frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}$.

b) Posons $P(X)=X^2+bX+c$ avec $\frac{4c-b^2}{4}=\frac{-1}{4}\Delta>0$ et considérons deux polynômes de la forme $A(X)=\frac{1}{\sqrt{2}}(X-\alpha)$ et $B(X)=\frac{1}{\sqrt{2}}(X-\beta)$.

Alors $(A(X))^2+(B(X))^2=X^2-(\alpha+\beta)X+\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}$. On a donc $P(X)=(A(X))^2+(B(X))^2$ si et seulement si $\begin{cases}\alpha+\beta=-b & (1)\\ \alpha^2+\beta^2=2c & (2)\end{cases}$

Par (1) on a $\beta=-b-\alpha$ que l'on injecte dans (2) pour obtenir $2\alpha^2+2b\alpha+b^2-2c=0$ qui est une équation du second degré en α de discriminant $\Delta=4(4c-b^2)>0$, donc possédant des racines réelles, d'où l'existence de $\alpha\in\mathbb{R}$, puis celle de $\beta=-b-\alpha\in\mathbb{R}$.

c) On trouve en appliquant les méthodes expliquées au a) et au c) :

$P(X)=X^2+4X+13=(X+2)^2+3^2$ et $P(X)=X^2+4X+13=\left(\frac{X-1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{X+5}{\sqrt{2}}\right)^2$

3) a) On a pour toute valeur réelle de la variable X les relations $P_1(X)=|(A_1(X)+jB_1(X))|^2$ et $P_2(X)=|(A_2(X)+jB_2(X))|^2$ donc

$$P_1(X).P_2(X)=|(A_1(X)+jB_1(X))|^2.|(A_2(X)+jB_2(X))|^2$$
$$=(|(A_1(X)+jB_1(X))|.|(A_2(X)+jB_2(X))|)^2$$
$$=|(A_1(X)+jB_1(X)).(A_2(X)+jB_2(X))|^2$$ (produit du module = module du produit)

b) En développant le produit on a

$$P_1(X).P_2(X)=|(A_1(X)A_2(X)-B_1(X)B_2(X))+j(A_1(X)B_2(X)+B_1(X)A_2(X))|^2$$
$$=(A_1(X)A_2(X)-B_1(X)B_2(X))^2+(A_1(X)B_2(X)+B_1(X)A_2(X))^2$$

d'où $A(X)=A_1(X)A_2(X)-B_1(X)B_2(X)$ et $B(X)=A_1(X)B_2(X)+B_1(X)A_2(X)$.

4) a) Posons $\deg(P(X))=2n$, $n\in\mathbb{N}^*$. On procède par récurrence sur *n*.
Si *n*=1, la propriété a été prouvée à la question 2.
Supposons que *n* soit tel que tout polynôme unitaire de degré 2n et n'admettant aucune racine réelle s'écrive comme somme de deux carrés de polynômes réels.
Soit $P(X)\in\mathbb{R}[X]$ un polynôme unitaire et n'admettant aucune racine réelle de degré $2(n+1)$.
D'après le 1), sa décomposition en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ ne fait intervenir que des polynômes de degré 2 avec un discriminant négatif. On peut donc écrire $P(X)=P_1(X)P_2(X)$ où :

$P_1(X)$ est un polynôme unitaire de degré 2 avec un discriminant négatif

$P_2(X)$ est un polynôme unitaire de degré 2n .

Puisque $P_2(X)$ n'admet aucune racine réelle (sinon , $P(X)$ en admettrait au moins une) on peut appliquer l'hypothèse de récurrence pour dire qu'il s'écrit comme somme de deux carrés de polynômes réels.La question 2) montre qu'il en est de même pour $P_1(X)$. En appliquant le résultat du 3), on en déduit qu'il en est de même également pour le produit $P(X)=P_1(X)P_2(X)$ ce qui montre la propriété au rang *n*+1.

b) S'ils avaient une racine réelle commune , la relation $P(X)=(A(X))^2+(B(X))^2$ montre que ce réel serait aussi une racine de $P(X)$, ce qui est exclu par l'énoncé. Donc les polynômes $A(X)$ et $B(X)$ n'ont pas de racines réelles en commun.

c) S'ils avaient une racine $z\in\mathbb{C}$ commune , chaque polynôme $A(X)$ et $B(X)$ serait divisible dans $\mathbb{C}[X]$ par $(X-z)$, donc la relation $P(X)=(A(X))^2+(B(X))^2$ montrerait que $P(X)$ serait divisible par $(X-z)^2$, ce qui est impossible si les racines complexes de $P(X)$ sont toutes simples.

Exercice 27

1) On a $a>0$.
2)
 a) La somme des racines vaut $-a$ et le produit vaut c.
 b) Cas $\Delta\geq 0$: les deux racines (qui sont possiblement égales) sont réelles, donc égales à leur partie réelle.
 Si les deux racines sont négatives, leur somme est négative, donc $a>0$ et leur produit positif, donc $b>0$.
 Si $b>0$, le produit des racines est strictement positif, donc elles sont non nulles et de même signe, et si de plus $a>0$, alors elles sont toutes les deux négatives.

Cas $\Delta<0$: On a automatiquement $b>0$. De plus, $-\frac{a}{2}$ est la partie réelle des racines, qui est strictement négative si et seulement si $a>0$.

Dans tous les cas, on a l'équivalence demandée.

3) Considérons la décomposition de $P(X)$ en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$. Ce sont soit des polynômes de degré 1, soit de degré 2. Leurs racines sont de partie réelle strictement négatives, donc les coefficients des polynômes irréductibles intervenant dans la décomposition de $P(X)$ sont à coefficients strictement positifs d'après les questions 1) et 2). Le produits de polynômes à coefficients strictement positifs étant un polynôme à coefficients strictement positifs, on en déduit que les coefficients de $P(X)$ sont strictement positifs.

4)
 a) On a $P(X)=(X^2-X+\alpha)(X+2)=X^3+X^2+(\alpha-2)X+2\alpha,$ donc la forme développée de $P(X)$ ne présente que des coefficients strictement positifs si et seulement si $\alpha>2$.

 b) En prenant $\alpha=3$ (par exemple), la question précédente montre que le polynôme $P(X)=X^3+X^2+X+6$ a tous ses coefficients strictement positifs bien qu'il admette comme racine le nombre $\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{11}}{2}$ qui a une partie réelle strictement positive.

5) Étant de degré impair, le polynôme $P(X)$ admet forcément une racine réelle. Si on appelle t l'opposé de cette racine, $P(X)$ est divisible par $X+t$ ce qui donne une factorisation de la forme $P(X)=(X^2+rX+s)(X+t)$ (le premier polynôme étant unitaire car $P(X)$ l'est).
6) Si toutes les racines de $P(X)$ ont une partie réelle strictement négative, alors les racines des polynômes X^2+rX+s et $X+t$ ont une partie réelle strictement négative, ce qui implique par le 1) et le 2) que *r, s* et *t* sont strictement positifs.

En développant la forme factorisée et en identifiant, on obtient les relations
$a=r+t$, $b=s+tr$ et $c=st$ qui montrent déjà que $a>0$, $b>0$, $c>0$. Ensuite,
$ab-c=r(s+rt+t^2)>0$ d'où $ab>c$.

7)

a)

(i) On a $\forall t>0,\ P'(t)=3t^2+2at+b>0$ donc la fonction $t\to P(t)$ est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

(ii) Les racines de $P(X)$ sont données par $-t$ et les racines de X^2+rX+s. Ce dernier polynôme a un discriminant positif car $r^2\geq 4s$, donc a ses racines toutes réelles. On en déduit que toutes les racines de $P(X)$ sont réelles.

Maintenant, $P(0)=c>0$ et la fonction $t\to P(t)$ est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, donc $\forall t\geq 0, P(t)>0$. Les racines de $P(X)$ ne peuvent être que des réels strictement négatifs.

b) (i) La condition $r^2<4s$ montre que $s>0$. Puisque $t=\dfrac{c}{s}$ et que $c>0$, on a $t>0$.

(ii) On a $r\left(\left(t+\dfrac{1}{2}r\right)^2-\dfrac{1}{4}\Delta\right)=r\left(t^2+rt+s\right)=ab-c$ par le calcul fait à la question 6.

(iii) Puisque $\Delta=r^2-4s<0$ on a $\left(t+\dfrac{1}{2}r\right)^2-\dfrac{1}{4}\Delta\geqslant\dfrac{-1}{4}\Delta>0$. Puisque on a supposé $ab-c>0$, alors, on a par le (ii) $r=\dfrac{ab-c}{\left(t+\dfrac{1}{2}r\right)^2-\dfrac{1}{4}\Delta}>0$.

On a donc $r>0$ et $s>0$ donc les racines de X^2+rX+s ont une partie réelle strictement négatives. Si l'on rajoute la racine $-t<0$ (prouvé au (i)) on obtient que toutes les racines de $P(X)$ ont une partie réelle strictement négative.

8) Toutes les racines de $P(X)$ aient une partie réelle strictement négative si, et seulement si on a $a>0,\ b>0,\ c>0$ et $ab>c$.

9) On a les conditions $c>0$ et $3\times 1>c$. On en déduit que le polynôme $P(X)=X^3+3X^2+X+c$ a toutes ses racines de partie réelle strictement négative si et seulement si $c\in]0\,;3[$.

Exercice 28

1) On a $\Delta_Q=p^2-6p+25-8k$.

En passant à la forme canonique, cela donne $\Delta_Q=(p-3)^2+16-8k$, donc, si $k=2$, on a $\Delta_Q=(p-3)^2\geq 0$ et $\sqrt{\Delta_Q}=|p-3|\in\mathbb{N}$ quelle que soit la valeur de $p\in\mathbb{Z}$.

2) On a $Q(X)=2X^2+(11p-5)X+15p^2-13p+2$ Ses racines valent $\dfrac{1}{4}(5-11p\pm(p-3))$ c'est à dire $\dfrac{-5}{2}p+\dfrac{1}{2}$ et $-3p+2$. On a donc la factorisation

$$Q(X)=2\left(X+\frac{5}{2}p-\frac{1}{2}\right)(X+3p-2)=(2X+5p-1)(X+3p-2)\ .$$

L'équation se ramène à $Q(n)-2=24$ c'est à dire $Q(n)=26$. En utilisant la factorisation ci-dessus, on obtient $(2n+5p-1)(n+3p-2)=26$. On a donc $a=2, b=5, c-1, a'=1, b'=3$ et $c'=-2$.

3) On trouve $x=3d_1-5d_2-7$ et $y=-d_1+2d_2+3$. Ce sont bien des entiers relatifs.

4) On utilise le résultat du 3) pour
$(d_1;d_2)=(-26;-1),\ (-13;-2);\ (-2;-13);\ (-1;-26);\ (1;26);\ (2;13);\ (13;2);(26;1)$
.

On trouve les 8 possibilités suivantes pour le couple $(n\,;p)$:
$(-80;27);(-36;12);(52;-21);(120;-48);(-134;54);(-66;27);(22;-6);(66;-21)$.

Remarque : ces solutions peuvent être trouvées de façon algorithmique à l'aide d'un logiciel, mais le travail mathématique que nous avons fait sur l'équation (E) permet d'affirmer que ce sont les seules.

Exercice 29 (Principe du maximum) .

1) a) Si l'on avait $P(z_0)=0$, alors l'inégalité $\forall z\in\mathbb{C},\ |z|\leqslant R \Rightarrow |P(z)|\leqslant|P(z_0)|$ impliquerait que le polynôme $P(X)$ admet une infinité de racines (tout le disque de centre O et de rayon R). Le polynôme $P(X)$ serait identiquement nul, ce qui contredit l'énoncé.
   b) Le nombre z_0 est racine de $Q(X)$ qui est donc factorisable par $(X-z_0)^k$ où *k* est l'ordre de la racine z_0 pour $Q(X)$ **.**
   c) Puisque $A(z_0)\neq 0$, on peut considérer le nombre $a=\dfrac{|A(z_0)|}{A(z_0)}\neq 0$. .L'équation $z^k=a$ admet *k* solutions, toutes de module 1 car $|a|=1$. Si l'on pose alors $z=e^{j\theta}$ l'une de ces solutions, on a $e^{kj\theta}A(z_0)=z^k A(z_0)=a\,A(z_0)=|A(z_0)|$.

2) On a $Q(X)=\dfrac{P(X)-P(z_0)}{P(z_0)}=(X-z_0)^k A(X)$ donc
   $$P(X)=P(z_0)\left(1+(X-z_0)^k A(X)\right)$$
   d'où, en prenant $X=z_0+t\,e^{j\theta}$, on a la relation
   $$\forall t\in\mathbb{R},\ P(z_0+t\,e^{j\theta})=P(z_0)\left(1+t^k e^{kj\theta}A\left(z_0+t\,e^{j\theta}\right)\right)$$
   En prenant le carré du module des deux membres, il vient :
   $$\forall t\in\mathbb{R},\ \left|P(z_0+t\,e^{j\theta})\right|^2=|P(z_0)|^2\left|1+t^k e^{kj\theta}A\left(z_0+t\,e^{j\theta}\right)\right|^2$$
3) On a
   $$\forall t\in\mathbb{R},\ \frac{\left|P(z_0+t\,e^{j\theta})\right|^2}{|P(z_0)|^2}=\left|1+t^k e^{kj\theta}A\left(z_0+t\,e^{j\theta}\right)\right|^2$$
   $$=\left(1+t^k e^{kj\theta}A\left(z_0+t\,e^{j\theta}\right)\right)\overline{\left(1+t^k e^{kj\theta}A\left(z_0+t\,e^{j\theta}\right)\right)}$$
   $$=\left(1+t^k e^{kj\theta}A\left(z_0+t\,e^{j\theta}\right)\right).\left(1+t^k e^{-kj\theta}\overline{A\left(z_0+t\,e^{j\theta}\right)}\right)$$
   $$=1+2t^k\,\mathrm{Re}\left(e^{kj\theta}A\left(z_0+t\,e^{j\theta}\right)\right)+t^{2k}\left|A\left(z_0+t\,e^{j\theta}\right)\right|^2$$

Donc, pour tout réel *t* strictement positif
$$\frac{\left|P(z_0+t\,e^{j\theta})\right|^2-|P(z_0)|^2}{t^k|P(z_0)|^2}=2\,\mathrm{Re}\left(e^{kj\theta}A\left(z_0+t\,e^{j\theta}\right)\right)+t^k\left|A\left(z_0+t\,e^{j\theta}\right)\right|^2$$
donc
$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\left|P(z_0+t\,e^{j\theta})\right|^2-|P(z_0)|^2}{t^k|P(z_0)|^2}=2|A(z_0)|>0$$
ce qui signifie que pour *t* positif et assez petit, $\left|z_0+t\,e^{j\theta}\right|<R$ (car $|z_0|<R$) et
$\dfrac{\left|P(z_0+t\,e^{j\theta})\right|^2-|P(z_0)|^2}{t^k|P(z_0)|^2}>0$ c'est à dire $\left|P(z_0+t\,e^{j\theta})\right|^2>|P(z_0)|^2$ donc
$\left|P(z_0+t\,e^{j\theta})\right|>|P(z_0)|$ ce qui contredit le fait que $\forall z\in\mathbb{C},\ |z|\leqslant R\Rightarrow|P(z)|\leqslant|P(z_0)|$. On en déduit que le maximum des valeurs prises par $|P(z)|$ pour $|z|\leqslant R$ ne peut être atteint que pour $|z|=R$.

NB : on a implicitement utilisé la continuité de l' application $t\to A\left(z_0+t\,e^{j\theta}\right)$. La fonction A étant polynomiale, elle est combinaison linéaire d'applications de la forme $t\to\left(z_0+t\,e^{j\theta}\right)^i$ qui sont elles mêmes produit (car puissance) d'applications affines, donc continues.

4) Par les questions précédentes, il suffit de chercher la valeur maximale de $\left|z^2-z-2\right|$ pour $|z|=1$.

On pose donc $z=e^{j\theta}$ pour $\theta\in]-\pi;\pi]$ et $f(\theta)=|z^2-z-2|^2=\left(e^{2j\theta}-e^{j\theta}-2\right)\left(e^{-2j\theta}-e^{-j\theta}-2\right)$

On obtient après calculs (développer et utiliser les formules d'Euler) :

$f(\theta)=6+2\cos(\theta)-4\cos(2\theta)=-8\cos^2(\theta)+2\cos(\theta)+10.$

Posant $t=\cos(\theta)$, lorsque $\theta\in]-\pi;\pi]$, on a $t\in[-1;1]$, donc on cherche le maximum de $g(t)=-8t^2+2t+10$ sur $[-1;1]$. Or,

$$g(t)=-8t^2+2t+10=-8\left(t^2-\frac{1}{4}t-\frac{5}{4}\right)=-8\left(\left(t-\frac{1}{8}\right)^2-\frac{81}{64}\right)=\frac{81}{8}-8\left(t-\frac{1}{8}\right)^2 ,$$

ce qui prouve le maximum de g sur $[-1;1]$ est atteint pour $t=\frac{1}{8}$ et vaut $\frac{81}{8}$ donc le maximum de f vaut $\frac{81}{8}$ et est atteint pour les deux valeurs de $\theta\in]-\pi;\pi]$ pour lesquelles $\cos(\theta)=\frac{1}{8}$.

Conclusion : $\mathrm{Max}_{|z|\leqslant 1}|z^2-z-2|=\frac{9\sqrt{2}}{4}$ et est atteint pour $z=\frac{1}{8}\left(1\pm j\sqrt{63}\right)$.

Exercice 30

1) On trouve $e^{j\frac{\pi}{3}}$ et $e^{-j\frac{\pi}{3}}$.
2) a) On a $P'(t)=2n\,t^{2n-1}-1$ qui est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule en $t=\left(\frac{1}{2n}\right)^{\frac{1}{2n-1}}$, donc P' est strictement négative sur $\left]-\infty,\left(\frac{1}{2n}\right)^{\frac{1}{2n-1}}\right]$ et strictement positive sur $\left[\left(\frac{1}{2n}\right)^{\frac{1}{2n-1}};+\infty\right]$, d'où le résultat.

   b) On déduit de la question précédente que le minimum de P vaut

$$P\left(\left(\frac{1}{2n}\right)^{\frac{1}{2n-1}}\right)=\left(\frac{1}{2n}\right)^{\frac{2n}{2n-1}}-\left(\frac{1}{2n}\right)^{\frac{1}{2n-1}}+1=\left(\frac{1}{2n}\right)^{1+\frac{1}{2n-1}}-\left(\frac{1}{2n}\right)^{\frac{1}{2n-1}}+1=1-\left(1-\frac{1}{2n}\right)\left(\frac{1}{2n}\right)^{\frac{1}{2n-1}}.$$

   c) On a $0<\frac{1}{2n}<1$ d'où $0<\left(\frac{1}{2n}\right)^{\frac{1}{2n-1}}<1$ donc $1-\left(1-\frac{1}{2n}\right)\left(\frac{1}{2n}\right)^{\frac{1}{2n-1}}>\frac{1}{2n}>0$. On déduit du b) que $\forall t\in\mathbb{R},\ P(t)>0$. Le polynôme $P(X)$ n'a donc pas de racine réelle.
3) Soit $z\in\mathbb{C}$ une racine de $P(X)$. D'après la question précédente, $z\notin\mathbb{R}$. On a $z^{2n}=z-1$ donc $2n\,z^{2n-1}=2n-\frac{2n}{z}$ ($z\neq0$), d'où $P'(z)=2n-1-\frac{2n}{z}\neq0$ car $z\notin\mathbb{R}$. On en déduit que toutes les racines de P sont simples.

4) Soient $\lambda_1,\overline{\lambda_1},\lambda_2,\overline{\lambda_2},\ldots,\lambda_n,\overline{\lambda_n}$ les 2n racines complexes et simples de $P(X)$. Le Théorème de factorisation donne

$$P(X)=(X^2-2\,\mathrm{Re}(\lambda_1)X+|\lambda_1|^2)(X^2-2\,\mathrm{Re}(\lambda_2)X+|\lambda_2|^2)\ldots(X^2-2\,\mathrm{Re}(\lambda_n)X+|\lambda_n|^2) .$$

En posant $X=0$ on obtient : $1=P(0)=|\lambda_1|^2|\lambda_2|^2\ldots|\lambda_n|^2$ donc :

soit $P(X)$ possède des racines de module strictement inférieur à 1 et des racines de module strictement supérieur à 1

soit tous les λ_i sont de module égal à 1.

Montrons que ce dernier cas est impossible. En effet, sinon, on aurait

$$P(X)=(X^2-2\,\mathrm{Re}(\lambda_1)X+1)(X^2-2\,\mathrm{Re}(\lambda_2)X+1)\dots(X^2-2\,\mathrm{Re}(\lambda_n)X+1)$$

donc

$$P(j)=(-2\,\mathrm{Re}(\lambda_1)j)(-2\,\mathrm{Re}(\lambda_2)j)\dots(-2\,\mathrm{Re}(\lambda_n)j)=\pm 2^n\,\mathrm{Re}(\lambda_1).\mathrm{Re}(\lambda_2)\dots\mathrm{Re}(\lambda_n)\in\mathbb{R}$$

car n est pair et $j^n\in\mathbb{R}$.

Or $P(j)=(-1)^n-j+1\notin\mathbb{R}$ ce qui contredit le fait que $P(j)\in\mathbb{R}$. On en déduit que $P(X)$ possède des racines de module strictement inférieur à 1 et des racines de module strictement supérieur à 1.

Exercice 31

1) a) Soit $z\in\mathbb{C}$ une racine de $P(X)$. Alors par inégalité triangulaire :

$$|z|^5\leqslant\frac{1}{6}\left(1+|z|+|z|^2+|z|^3+|z|^4\right).$$

On raisonne par l'absurde et on suppose que $|z|\geqslant 1$. Alors $|z|^k\leqslant|z|^5$ pour $k=0,1,2,3,4$ et l'on obtiendrait $|z|^5\leqslant\frac{1}{6}\left(1+|z|+|z|^2+|z|^3+|z|^4\right)\leqslant\frac{5}{6}|z|^5$. Puisque $P(0)=-1\neq 0$ on a $|z|\neq 0$ d'où l'on déduirait $1\leqslant\frac{5}{6}$ ce qui est absurde.

On en déduit que toutes les racines de $P(X)$ sont de module strictement inférieur à 1.

b) On reprend le raisonnement fait dans la question précédente : si $z\in\mathbb{C}$ est une racine de $P(X)$, alors

$|z|^5\leqslant\frac{1}{6}\left(1+|z|+|z|^2+|z|^3+|z|^4\right)\leqslant\frac{5}{6}$ car $|z|\leqslant 1$. On en déduit que $|z|\leqslant\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{1}{5}}$.

D'autre part, si $z\in\mathbb{C}$ est une racine de $P(X)$, on tire de l'égalité $1=6z^5-z^4-z^3-z^2-z$ la relation (inégalité triangulaire) $1\leqslant 6|z|^5+|z|^4+|z|^3+|z|^2+|z|\leqslant 10|z|$ car $|z|^k\leqslant|z|$ pour $k=1,2,3,4,5$. On en déduit que $|z|\geqslant\frac{1}{10}$.

Conclusion : pour toute racine z de $P(X)$ on a $\frac{1}{10}<|z|<\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{1}{5}}$.

Remarque : les constantes ci-dessus ne sont pas optimales : on peut en trouver d'autres par différentes méthodes. Plus précisément, un logiciel montre que l'on a numériquement $0{,}626<|z|<0{,}943$.

Si le majorant $\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{1}{5}}\sim 0{,}964$ que nous avions trouvé est proche de la borne optimale, il n'en n'est pas de même du minorant $\frac{1}{10}$, loin de la borne inférieure 0,626.

2) a) On a $(X-1)P(X)=(X-1)(6X^5-X^4-X^3-X^2-X-1)=6X^6-7X^5+1$.

b) On raisonne par l'absurde et l'on suppose qu'il existe une racine multiple $z_0\in\mathbb{C}$ pour $P(X)$.

En posant $A(X)\overset{\text{def}}{=}(X-1)P(X)$ on a alors :

$A(z_0)=0$

$A'(X)=P(X)+(X-1)P'(X)$ donc $A'(z_0)=0$.

Cette dernière relation donne $0=36z_0^5-35z_0^4=z_0^4(36z_0-35)$ donc $z_0=0$ ou $z_0=\frac{35}{36}$

La contradiction provient du fait que $A(0)=1$ et $A\left(\frac{35}{36}\right)=-\frac{4856069}{6^{11}}$ d'où $A(z_0)\neq 0$.

c) Avec les notations précédentes, les racines de $A(X)$ sont les racines de $P(X)$ auxquelles on a rajouté le nombre 1. Cherchons donc les racines réelles de $A(X)$. On définit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $f(t)=6t^6-7t^5+1$.

On a $f'(t)=t^4(36t-35)$ donc f décroît strictement sur $\left]-\infty;\frac{35}{36}\right[$ et croît strictement sur $\left]\frac{35}{36};+\infty\right[$ L'équation $f(t)=0$ a au maximum deux solutions : la racine évidente 1 plus une autre.

Le polynôme $P(X)$ a donc au maximum une racine réelle, donc exactement une seule car le degré de $P(X)$ est impair.

Pour résumer : $P(X)$ possède une racine réelle simple t et 4 racines complexes simples $\lambda,\bar{\lambda},\mu,\bar{\mu}$ avec $\lambda\neq\mu$ et $|t|,|\lambda|,|\mu|\in\left]\frac{1}{10},\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{1}{5}}\right[$.

Exercice 32

1) Un point fixe est une racine du polynôme $P(X)-X$ qui est de degré 2. Il y a donc en général deux points fixes, sauf si le discriminant de $P(X)-X$ est nul, c'est à dire que $a(b+c)=\frac{1}{4}$.

2) L'ensemble $\{z_1;z_2\}$ est une paire fixe pour $P(X)$ ssi
$z_2=a(z_1+b)^2+c$ et $z_1=a(z_2+b)^2+c$ avec $z_1\neq z_2$.
On a d'une part $z_1\neq z_2\Leftrightarrow a(b+z_1)\neq a(b+z_2)$ car $a\neq 0$, et d'autre part
$(z_2=a(z_1+b)^2+c$ et $z_1=a(z_2+b)^2+c)\Leftrightarrow(b+z_2=a(z_1+b)^2+b+c$ et $b+z_1=a(z_2+b)^2+b+c)$
$\Leftrightarrow(a(b+z_2)=(a(z_1+b))^2+a(b+c)$ et $a(b+z_1)=(a(z_2+b))^2+ba(b+c))$
c'est à dire que les nombres $a(b+z_1)$ et $a(b+z_2)$ sont images l'un de l'autre par le polynôme $X^2+a(c+b)$.
Démonstration similaire pour les triplets fixes.

3) Si l' ensemble $\{z_1;z_2\}$ est une paire fixe pour $P(X)$ alors $z_2^2=z_1$ et $z_2=z_1^2$ donc $z_1=z_1^4$ c'est à dire $z_1\in\{0;1;e^{-2j\frac{\pi}{3}};e^{2j\frac{\pi}{3}}\}$ La condition $z_1\neq z_2$ signifie que $z_1\neq z_1^2$ ce qui élimine 0 et 1.
Réciproquement, on vérifie directement que $\{e^{2j\frac{\pi}{3}};e^{-2j\frac{\pi}{3}}\}$ est une paire fixe pour $P(X)$ et c'est donc la seule.
Si l'ensemble $\{z_1;z_2;z_3\}$ est un triplet fixe pour $P(X)$, alors quitte à réordonner les z_i on a $z_2=z_1^2,$ $z_3=z_2^2=z_1^4$ et $z_1=z_3^2=z_1^8$. En échangeant les rôles des z_i on prouve aussi que z_2 et z_3 sont solutions de l'équation $X^8=X$. Puisque $z_1\neq z_2,$ $z_2\neq z_3$ et $z_3\neq z_1$ les z_i ne sont pas racines de $X^2=X$. En explicitant les racines de ces polynômes, on trouve que
$z_i\in\{e^{2j\frac{\pi}{7}};e^{4j\frac{\pi}{7}};e^{6j\frac{\pi}{7}};e^{-2j\frac{\pi}{7}};e^{-4j\frac{\pi}{7}};e^{-6j\frac{\pi}{7}}\}$
Réciproquement, le nombre $e^{2j\frac{\pi}{7}}$ appartient au triplet fixe $e^{2j\frac{\pi}{7}}\rightarrow e^{4j\frac{\pi}{7}}\rightarrow e^{-6j\frac{\pi}{7}}(\rightarrow e^{2j\frac{\pi}{7}})$ et on voit aussi qu'il y a le triplet fixe « conjugué » : $e^{-2j\frac{\pi}{7}}\rightarrow e^{-4j\frac{\pi}{7}}\rightarrow e^{6j\frac{\pi}{7}}(\rightarrow e^{-2j\frac{\pi}{7}})$. Il n'y en n'a pas d'autre car les éléments d'un triplet fixe doivent appartenir à l'ensemble $\{e^{2j\frac{\pi}{7}};e^{4j\frac{\pi}{7}};e^{6j\frac{\pi}{7}};e^{-2j\frac{\pi}{7}};e^{-4j\frac{\pi}{7}};e^{-6j\frac{\pi}{7}}\}$.

4) a) On a $P(P(X))-P(X)=P(X)^2+t-X^2-t=(P(X)-X)(P(X)+X)$ qui est factorisable par $P(X)-X$. Il suffit alors de remarquer que
$P(P(X))-X=P(P(X))-P(X)+P(X)-X=(P(X)-X)(P(X)+X)+(P(X)-X)$
d'où
$P(P(X))-X=(P(X)-X)(P(X)+X+1)$

b) On déduit du a) que $Q(X)=P(X)+X+1=X^2+X+t+1$.

5) Soit $\{z\,;z'\}$ une paire fixe. Alors la condition $z'\neq z$ signifie que $z\neq P(z)$ donc z n'est pas racine de $P(X)-X$. La condition $z=P(z')=P(P(z))$ montre que z est une racine de $P(P(X))-X$.

Réciproquement, si z est une racine de $P(P(X))-X$ sans en être une de $P(X)-X$, il est clair que $\{z\,;P(z)\}$ est une paire fixe : $z\neq P(z)$ et $P(P(z))=z$.

6) a) Cela signifie que les racines de $Q(X)$ sont des racines de $P(X)-X$, autrement dit les racines de $X^2+X+t+1$ sont des racines de X^2-X+t.

Si le polynôme $X^2+X+t+1$ admet deux racines distinctes dans $\mathbb{C}$, il en est alors de même de X^2-X+t, les deux polynômes étant de même degré. Ils auraient alors les mêmes racines, racines dont la somme devrait être alors à la fois égale à 1 et -1 ce qui est absurde (On utilise le fait que la somme des racines de aX^2+bX+c vaut $-\frac{b}{a}$.).

Le polynôme $X^2+X+t+1$ a donc un discriminant nul, c'est à dire $1-4(t+1)=0$ d'où $t=-\frac{3}{4}$.

b) On a alors $Q(X)=X^2+X+\frac{1}{4}$ et la racine double de $Q(X)$ vaut $\frac{-1}{2}$: il se trouve qu'elle est aussi racine de $P(X)-X=X^2-X-\frac{3}{4}$ donc par le 5), il n'y a pas de paire fixe pour $P(X)=X^2-\frac{3}{4}$.

c) D'après le 2), le polynôme $a(X+b)^2+c$ admet une paire fixe si et seulement si il en est de même pour $X^2+a(b+c)$ c'est à dire, par les questions précédentes, si et seulement si $a(b+c)\neq-\frac{3}{4}$.

d) Elle est constituée de réels si et seulement si le discriminant de $Q(X)$ est strictement positif, donc $1-4(t+1)>0$ ce qui équivaut à $t<-\frac{3}{4}$, le cas $t=-\frac{3}{4}$ étant le cas « limite » sans paire fixe.

7) On part de la relation $P(P(X))-X=(P(X)-X)Q(X)$ pour en déduire en substituant X par $P(X)$:

$$P(P(P(X)))-P(X)=(P(P(X))-P(X))Q(P(X))=((P(P(X))-X)-(P(X)-X))Q(P(X))$$
$$=((P(X)-X)Q(X)-(P(X)-X))Q(P(X)) \quad \text{(car } P(P(X))-X=(P(X)-X)Q(X) \text{)}$$
$$=(P(X)-X)(Q(X)-1)Q(P(X)).$$

On a alors

$$P(P(P(X)))-X=P(P(P(X)))-P(X)+P(X)-X$$
$$=(P(X)-X)(Q(X)-1)Q(P(X))+(P(X)-X)$$
$$=(P(X)-X).(1+(Q(X)-1).Q(P(X))).$$

Un calcul explicite montre que

$$R(X)=1+(Q(X)-1).Q(P(X))=1+(X^2+X+t).(P^2(X)+P(X)+t+1)$$
$$=1+(X^2+X+t).((X^2+t)^2+X^2+2t+1)$$
$$=1+(X^2+X+t).((X^2+t)^2+X^2+2t+1)$$
$$=1+(X^2+X+t).(X^4+(2t+1)X^2+t^2+2t+1)$$
$$=X^6+X^5+(3t+1)X^4+(2t+1)X^3+(3t^2+3t+1)X^2+(t+1)^2X+t(t+1)^2+1.$$

8) a) Supposons que $z\rightarrow z'\rightarrow z''$ est un triplet fixe. Alors $z=P(z)=P(P(z'))=P(P(P(z)))$ donc z est une racine de $P(P(P(X)))-X$.

Puisque $z'\neq z$, on a $P(z)-z\neq 0$.

Ainsi, $0=P(P(P(z)))-z=(P(z)-z)R(z)$ donc $R(z)\neq 0$.
Réciproquement, soit z tel que z soit une racine de $R(X)$ et ne soit pas une racine de $P(X)-X$. Alors z est une racine de $P(P(P(X)))-X$. Posons $z'=P(z)$ et $z''=P(z')=P(P(z))$.
On a $z\neq z'$ car z n'est pas une racine de $P(X)-X$. On a aussi $z\neq z''$: sinon, on aurait encore $P(z)=P(z'')=z$. On a enfin $z'\neq z''$: sinon, on aurait $P(z')=P(z'')$ c'est à dire $z''=z$ et on a vu que ce n'est pas possible. Il vient alors que $z\rightarrow z'\rightarrow z''$ est un triplet fixe.

b) Soient $z_1\rightarrow z_1'\rightarrow z_1''$ et $z_2\rightarrow z_2'\rightarrow z_2''$ deux triplets fixes avec avec $z_1=z_2$. On aurait alors $z'_1=P(z_1)=P(z_2)=z'_2$ et donc aussi $z''_1=P(z'_1)=P(z'_2)=z''_2$: les deux triplets seraient exactement les mêmes.

c) Supposons qu'il y ait trois triplets fixes différents. Par la question précédente, ils n'auraient aucun élément en commun, donc la réunion de ces trois triplets formerait 9 nombres différents qui seraient tous racines de $R(X)$, ce qui est impossible car ce polynôme n'est que de degré 6.

9) a) Par le théorème de dérivation des fonctions composées on a

$$\frac{d}{dX}(P(P(P(X))))=\frac{d}{dX}(P(P(X)))P'(P(P(X)))=P'(X)P'(P(X))P'(P(P(X))).$$

b) Soit z racine de $P(X)-X$ et $R(X)$. Alors z serait racine multiple de leur produit, c'est à dire de $P(P(P(X)))-X$.
On aurait alors $P(z)=z$ et $P'(z).P'(P(z)).P'(P(P(z)))-1=0$ d'où $(P'(z))^3=1$ c'est à dire $8z^3=1$ donc $z^3=\frac{1}{8}$. On a alors $z\in\{\frac{1}{2};\frac{1}{2}e^{2j\frac{\pi}{3}};\frac{1}{2}e^{-2j\frac{\pi}{3}}\}$.
Il n'est pas possible que $z=\frac{1}{2}e^{2j\frac{\pi}{3}}$. En effet, puisque c'est une racine de $P(X)-X$, on aurait $t=z-z^2=\frac{-1}{8}+j3\frac{\sqrt{3}}{8}\notin\mathbb{R}$. De même, la valeur $z=\frac{1}{2}e^{-2j\frac{\pi}{3}}$ est impossible (on aurait $t=\frac{-1}{8}-j3\frac{\sqrt{3}}{8}\notin\mathbb{R}$. Il reste la possibilité $z=\frac{1}{2}$ qui donnerait $t=z-z^2=\frac{1}{4}$. Dans ce cas, $P(X)-X=X^2-X+\frac{1}{4}$ qui a $z=\frac{1}{2}$ comme racine double, et $t_0=\frac{1}{4}$.

c) Le seul cas où $P(X)-X$ et $R(X)$ ont une racine en commun z impliquerait que $t_0=\frac{1}{4}$ et que cette racine est $z=\frac{1}{2}$. On a alors par le 7) $R(X)=X^6+X^5+\frac{7}{4}X^4+\frac{3}{2}X^3+\frac{31}{16}X^2+\frac{25}{16}X+\frac{89}{64}$ et on voit que $R\left(\frac{1}{2}\right)\neq 0$. Ce cas est donc impossible et $P(X)-X$ et $R(X)$ n'ont jamais de racine commune . Puisque le polynôme $R(X)$, de degré 6, possède au moins une racine complexe, et que cette dernière n'est pas un point fixe de $P(X)$ elle engendre un triplet fixe.
10) a) Si l'on avait $z_3\in\mathbb{R}$, alors P étant à coefficients réels, on aurait $z_1=P(z_3)\in\mathbb{R}$, ce qui n'est pas. Et si l'on avait aussi $z_2\in\mathbb{R}$, alors P étant à coefficients réels, on aurait $z_3=P(z_2)\in\mathbb{R}$, ce qui n'est pas vrai non plus..

b) Si $z_1=\bar{z}_2$, alors P étant à coefficients réels, on aurait $z_2=P(z_1)=P(\bar{z}_2)=\overline{P(z_2)}=\bar{z}_3$ donc $z_3=\bar{z}_2=z_1$ ce qui est impossible par définition d'un triplet fixe.
Même raisonnement pour montrer que $z_2\neq\bar{z}_3$ et $z_1=\bar{z}_3$.

c) Puisque $R(X)$ a ses coefficients réels, les nombres $\bar{z}_i$ sont aussi racines de $R(X)$: ils forment alors un deuxième triplet fixe, puisque aucun d'entre eux n'est dans $z_1\rightarrow z_2\rightarrow z_3$. Puisque les nombres $\{z_1 ; z_2 ; z_3\}$ ne sont par réels, leurs conjugués non plus, et aucun triplet fixe ne contient de réel. Cela implique aussi que les racines de $R(X)$ sont toutes des racines simples.

11) Soit $\{z_1 ; z_2 ; z_3\}$ un triplet fixe avec $z_1 < z_2 < z_3$. On a alors les deux relations de dépendance possibles : $z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow z_3$ ou $z_1 \rightarrow z_3 \rightarrow z_2$.

Si l'on a $z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow z_3$, alors $P(z_2)-z_2 = z_3 - z_2 > 0$, $P(z_3)-z_3 = z_1 - z_3 < 0$ et $\lim_{X \to +\infty} P(X)-X = +\infty$ donc le TVI appliqué à la fonction polynôme $P(X)-X$ assure l'existence de deux points fixes réels : un dans $]z_2 ; z_3[$ et l'autre dans $]z_3 ; +\infty[$. Puisque $P(P(z_1))-z_1 = z_3 - z_1 > 0$ et $P(P(z_2))-z_2 = z_1 - z_2 < 0$, le TVI appliqué à la fonction polynôme $P(P(X))-X$ assure l'existence d'une racine de ce dernier dans $]z_1 ; z_2[$. Cette dernière racine n'est pas une des deux racines de $P(X)-X$ (ces dernière étant situées dans $]z_2 ; +\infty[$ par ce qui précède) donc fait partie d'une paire fixe.

Si l'on a $z_1 \rightarrow z_3 \rightarrow z_2$, le même raisonnement assure l'existence de deux points fixes réels : un dans $]z_3 ; z_2[$ et l'autre dans $]z_2 ; +\infty[$. De même le TVI appliqué à la fonction polynôme $P(P(X))-X$ assure l'existence d'une racine de ce dernier dans $]z_1 ; z_3[$. Cette dernière racine n'est pas une des deux racines de $P(X)-X$ (ces dernière étant situées dans $]z_3 ; +\infty[$ par ce qui précède) donc fait partie d'une paire fixe.

Dans les deux cas, on a existence d'une paire fixe réelle, donc le discriminant de $Q(X)$ est strictement positif, donc $1-4(t+1) > 0$ ce qui implique que $t < -\frac{3}{4}$.

Cela signifie que si $t \geqslant -\frac{3}{4}$ aucun triplet fixe n'est réel. Si $t < -\frac{3}{4}$, on ne peut pour le moment rien dire à ce sujet mais nous apporterons une réponse ultérieurement.

12) a) Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine multiple de $R(X)$. Alors, en particulier, *z* est une racine multiple de $P(P(P(X)))-X$, donc par le 5)a), $P'(z).P'(P(z)).P'(P(P(z))) = 1$.
Soit $z \rightarrow z' \rightarrow z''$ le triplet fixe auquel appartient *z*. On a alors $P'(z).P'(z').P'(z'') = 1$ donc
$P'(z').P'(P(z')).P'(P(P(z'))) = P'(z').P'(z'').P'(z) = 1$ et
$P'(z'').P'(P(z'')).P'(P(P(z''))) = P'(z'').P'(z).P'(z') = 1$
donc z, z' et z'' sont aussi des racines multiples de $P(P(P(X)))-X$.
Puisque les nombres z, z' et z'' ne sont pas racines de $P(X)-X$ (cf 8)a)), alors ce sont des racines multiples de $R(X)$. Étant deux à deux distincts, et $R(X)$ étant de degré 6, la seule possibilité est que z, z' et z'' sont des racines doubles de $R(X)$ et en constituent l'ensemble de toutes les racines. Ainsi, $z \rightarrow z' \rightarrow z''$ est le seul triplet fixe pour $P(X)$.

b) Les polynômes $P(X)-X$ et $P(P(P(X)))-X$ étant unitaires, il en est de même de $R(X)$. On a donc par la question précédente : $R(X) = ((X-z)(X-z')(X-z''))^2$.

c) S'il existe pour une certaine valeur de *t* une racine multiple de $R(X)$, on a par la question précédente un polynôme $A(X)$ de degré 3 tel que $R(X) = A^2(X)$. Posons :
$(X-z)(X-z')(X-z'') = A(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$. Un calcul un peu laborieux montre qu'alors
$R(X) = A^2(X) = X^6 + 2\mathrm{a}X^5 + a^2X^4 + 2(ab+c)X^3 + (2\mathrm{ac}+b^2)X^2 + 2\mathrm{bc}X + c^{2.}$.
Par comparaison avec l'expression obtenue au 7) :
$R(X) = X^6 + X^5 + (3\mathrm{t}+1)X^4 + (2\mathrm{t}+1)X^3 + (3\mathrm{t}^2 + 3\mathrm{t}+1)X^2 + (t+1)^2X + t(t+1)^2 + 1$, on en déduit par identification

$$\begin{cases} 2a=1 \\ 2b+a^2=3t+1 \\ 2(ab+c)=2t+1 \\ 2ac+b^2=3t^2+3t+1 \\ 2bc=(t+1)^2 \\ c^2=t(t+1)^2+1 \end{cases}.$$

La première équation donne $a=\frac{1}{2}$ et la seconde $b=\frac{3}{2}t+\frac{3}{8}$. On substitue dans la troisième ce qui donne $c=\frac{1}{4}t+\frac{5}{16}$.

La quatrième équation mène à l'équation en t $\frac{3}{4}t^2+\frac{13}{8}t+\frac{35}{64}=0$ qui donne $t=-\frac{7}{4}$ ou $t=-\frac{5}{12}$ et la cinquième qui mène à l'équation $\frac{1}{4}t^2+\frac{7}{8}t+\frac{49}{64}=0$ dont l'unique solution est $\frac{-7}{4}$.

A ce stade, on a alors nécessairement $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{9}{4}$, $c=-\frac{1}{8}$ et $t=-\frac{7}{4}$.

On vérifie alors que les deux dernières équations sont encore vraies avec ces valeurs.

Réciproquement, si $t=-\frac{7}{4}$, alors les calculs ci-dessus montrent que

$$R(X)=\left(X^3+\frac{1}{2}X^2-\frac{9}{4}X-\frac{1}{8}\right)^2$$

avec l'expression obtenue au 7) : $R(X)=X^6+X^5-\frac{17}{4}X^4-\frac{5}{2}X^3+\frac{89}{16}X^2+\frac{9}{16}X+\frac{1}{64}$.

Ainsi, on est alors dans le cas où $R(X)$ possède des racines multiples : toutes celles de

$X^3+\frac{1}{2}X^2-\frac{9}{4}X-\frac{1}{8}$.

13) On travaille d'abord avec le polynôme X^2+t. Par le 10), si un triplet fixe contient un nombre non réel, alors il y a deux triplets fixes différents.

On déduit alors du 12) qu'il n'existe qu'un seul triplet fixe que dans le cas où $t=-\frac{7}{4}$.

En reprenant les calculs du 2), le polynôme $P(X)=a(X+b)^2+c$ admet un unique triplet fixe si et seulement si il en est de même pour $X^2+a(b+c)$ c'est à dire si et seulement si $a(b+c)\neq-\frac{7}{4}$.

Remarque : il est aussi possible de prouver que si $t>-\frac{7}{4}$, alors les deux triplets fixes sont constitués de nombres non réels, et si $t<-\frac{7}{4}$ les deux triplets fixes sont constitués de nombres réels.

Pour résumer :

$t < -\frac{7}{4}$	Deux triplets fixes réels Une paire fixe réelle Deux points fixes réels
$t = -\frac{7}{4}$	Un seul triplet fixe réel Une paire fixe réelle Deux points fixes réels
$-\frac{7}{4} < t < -\frac{3}{4}$	Deux triplets fixes non réels Une paire fixe réelle Deux points fixes réels
$t = -\frac{3}{4}$	Deux triplets fixes non réels Pas de paire fixe Deux points fixes réels
$-\frac{3}{4} < t < +\frac{1}{4}$	Deux triplets fixes non réels Une paire fixe non réelle Deux points fixes réels
$t = \frac{1}{4}$	Deux triplets fixes non réels Une paire fixe non réelle Un seul point fixe réel
$t > \frac{1}{4}$	Deux triplets fixes non réels Une paire fixe non réelle Deux points fixes non réels

F - FRACTIONS RATIONNELLES

I) Fonction rationnelle

Le quotient de deux polynômes n'est en général pas un polynôme, de la même façon que le quotient de deux entiers naturels n'est en général pas un entier naturel. C'est la raison pour laquelle on est amené à étudier des « fractions de polynômes », que l'on appellera fractions rationnelles.

Tous les polynômes seront considérés à coefficients réels (sauf mention explicite du contraire)

I.1) Définition

On appelle fraction rationnelle toute application $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ qui peut s' écrire sous la forme $F(X)=\dfrac{P(X)}{Q(X)}$ où $P(X), Q(X) \in \mathbb{R}[X]$. On note $\mathbb{R}(X)$ l'ensemble des fractions rationnelles à coefficients réels

Exemple : $F(X)=\dfrac{2X}{X^2-X+5}$, $G(X)=\dfrac{1}{X^5+X}$ sont des fractions rationnelles.

Remarques:

(i) en prenant $Q(X)=1$, on voit que les polynômes sont des fractions rationnelles particulières, c'est à dire que $\mathbb{R}[X] \subset \mathbb{R}(X)$.

(ii) Puisque un polynôme ne possède qu'un nombre fini de racines, une fraction rationnelle n'admet qu'un nombre fini de valeurs interdites, c'est à dire qu'une fraction rationnelle s'identifie à une fonction dont le domaine de définition est $\mathbb{C}$ privé d'un nombre fini de points.

(iii) On dira que deux fractions rationnelles $\dfrac{P_1(X)}{Q_1(X)}$ et $\dfrac{P_2(X)}{Q_2(X)}$ sont égales si et seulement si les polynômes $P_1(X)Q_2(X)$ et $P_2(X)Q_1(X)$ sont égaux. Cela signifie que les fonctions $X \to \dfrac{P_1(X)}{Q_1(X)}$ et $X \to \dfrac{P_2(X)}{Q_2(X)}$ sont égales sur la réunion de leurs domaines de définition.

Exemple : les fractions rationnelles $F_1(X)=\dfrac{X}{X+1}$ et $F_2(X)=\dfrac{X^2}{X^2+X}$ sont égales car $\forall z \notin \{-1;0\}$, $F_1(z)=F_2(z)$ bien que les domaines de définition de F_1 et F_2 soient différents, égaux respectivement à $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ et $\mathbb{C} \setminus \{-1;0\}$.

I.2) Fraction irréductible

Définition 1 : Soit $F \in \mathbb{R}(X)$, avec $F(X)=\frac{P(X)}{Q(X)}$. On dit que l'écriture $\frac{P(X)}{Q(X)}$ est <u>irréductible</u> si l'on ne peut trouver aucun polynôme non constant qui divise à la fois $P(X)$ et $Q(X)$. Ainsi, la fraction $\frac{P(X)}{Q(X)}$ ne peut pas être simplifiée par un polynôme non constant.

Exemple : $F(X)=\frac{X^3+X}{X^2-3X}$ n'est pas une fraction irréductible car X divise à la fois le numérateur et le dénominateur. Toutefois, si l'on simplifie la fraction par X, on obtient l'écriture $F(X)=\frac{X^2+1}{X-3}$ qui est bien une écriture irréductible.

Remarque : rigoureusement parlant, il faut parler d'écriture irréductible d'une fraction rationnelle, et non pas de fraction rationnelle irréductible. L'exemple ci-dessus nous montre bien qu'une même fraction rationnelle peut avoir plusieurs écritures.

Voici un critère permettant de savoir si une fraction rationnelle est écrite sous forme irréductible :

Propriété 1: L' écriture $\frac{P(X)}{Q(X)}$ est irréductible si et seulement si les polynômes $P(X)$ et $Q(X)$ n'admettent aucune racine complexe commune.

<u>Preuve :</u> Soit une fraction rationnelle $F(X)$ dont une écriture est $F(X)=\frac{P(X)}{Q(X)}$.

Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $P(a)=Q(a)=0$. On distingue deux cas :

- (i) Soit $a \in \mathbb{R}$: dans ce cas $X-a$ divise à la fois $P(X)$ et $Q(X)$ et la fraction n'est pas irréductible
- (ii) Soit $a \notin \mathbb{R}$: dans ce cas le polynôme $(X-a)(X-\bar{a})=X^2-2\operatorname{Re}(a)X+|a|^2$ divise à la fois $P(X)$ et $Q(X)$ et la fraction n'est pas irréductible.

Réciproquement, si l'écriture $F(X)=\frac{P(X)}{Q(X)}$ n'est pas irréductible, c'est qu'il existe un polynôme non constant $D(X)$ qui divise à la fois $P(X)$ et $Q(X)$. Ce polynôme $D(X)$ possède au moins une racine complexe a (Théorème de d'Alembert Gauss) et donc $P(a)=Q(a)=0$.

Exemple : $F(X)=\frac{X^2-1}{X^3+3X^2-5X+7}$ est irréductible.
En effet, les racines du numérateur sont 1 et –1 . On vérifie que ni 1 ni –1 ne sont racine du dénominateur, donc il n'y a pas de racine commune entre eux deux.

Propriété 2 : Toute fraction rationnelle non nulle peut être écrite de façon unique sous forme d'une fraction irréductible avec un dénominateur normalisé.

(*) Preuve : Soit une fraction rationnelle $F(X)$ dont une écriture est $F(X)=\frac{P(X)}{Q(X)}$. On peut choisir $Q(X)$ normalisé quitte à multiplier $P(X)$ et $Q(X)$ par une constante ad hoc. Si $a\in\mathbb{C}$ est tel que $P(a)=Q(a)=0,$ on simplifie la fraction par $X-a$ ou $(X-a)(X-\overline{a})=X^2-2\operatorname{Re}(a)X+|a|^2$ selon que *a* soit réel ou pas, comme dans la preuve de la propriété 1. On réitère éventuellement le procédé jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de racine commune au numérateur et au dénominateur (ce qui se fait en un nombre fini d'étapes car un polynôme non nul n'a qu'un nombre fini de racine) : on obtient alors une écriture irréductible de $F(X)$ avec un dénominateur normalisé. Prouvons l'unicité. Pour cela, nous avons besoin du :

***Lemme** : supposons que $A(X)$, $B(X)$ et $C(X)$ soient trois polynômes à coefficients réels, non nuls, et tels que :*

(i) $A(X)$ divise $B(X).C(X)$

(ii) Les polynômes $A(X)$ et $B(X)$ n'ont pas de racine commune.

Alors, $A(X)$ divise $C(X)$.

Preuve du lemme :

Soit $a\in\mathbb{C}$ une racine de $A(X)$ et soit $P_a(X)^k$ le facteur irréductible associé à la racine *a* dans la décomposition de $A(X)$ en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$, avec $k\in\mathbb{N}^*$, et $P_a(X)=X-a$ si $a\in\mathbb{R}$ et $P_a(X)=X^2-2\operatorname{Re}(a)X+|a|^2$ si $a\notin\mathbb{R}$.

Par le (i), $P_a(X)^k$ divise la polynôme $B(X).C(X)$, ce qui implique que sa décomposition en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ contient un facteur de la forme $P_a(X)^l$ avec $l\geqslant k$.

Ce dernier facteur ne peut être qu'un facteur de la décomposition de $C(X)$ en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$, car par le (ii) $B(a)\neq 0$. On en déduit que $P_a(X)^k$ divise $C(X)$.

Cela étant vrai pour toute racine *a* de $A(X)$, on en déduit, en considérant la décomposition de ce dernier polynôme en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$, que $A(X)$ divise $C(X)$.

Fin de la preuve de la propriété 2 (unicité).

Supposons que $F(X)=\frac{P_1(X)}{Q_1(X)}=\frac{P_2(X)}{Q_2(X)}$, avec ces deux écritures irréductibles et les polynômes $Q_1(X)$ et $Q_2(X)$ normalisés.

On a alors $P_1(X)Q_2(X)=P_2(X)Q_1(X)$.

On applique alors le lemme avec $A(X)=Q_2(X)$, $B(X)=P_2(X)$ et $C(X)=Q_1(X)$.

Puisque l'écriture $\frac{P_2(X)}{Q_2(X)}$ est irréductible, les polynômes $A(X)$ et $B(X)$ n'ont pas de racine commune (propriété 1), donc $Q_2(X)$ divise $Q_1(X)$.

Le même raisonnement montre aussi que $Q_1(X)$ divise $Q_2(X)$.

Cela prouve que $Q_1(X)=Q_2(X)$. En effet :

* $Q_1(X)$ divise $Q_2(X)$ signifie qu'il existe un polynôme $D(X)$ tel que $Q_2(X)=D(X)Q_1(X)$ d'où $\deg(Q_1(X))=\deg(Q_2(X))-\deg(D(X))\leqslant\deg(Q_2(X))$.

* $Q_2(X)$ divise $Q_1(X)$ implique de la même façon que $\deg(Q_2(X))\leqslant\deg(Q_1(X))$.

On a au final $\deg(Q_2(X))=\deg(Q_1(X))$ d'où $\deg(A(X))=0$, c'est à dire que les polynômes $Q_1(X)$ et $Q_2(X)$ sont proportionnels, et donc égaux car ils sont normalisés.

Puisque $\frac{P_1(X)}{P_2(X)}=\frac{Q_1(X)}{Q_2(X)}$, les polynômes $P_1(X)$ et $P_2(X)$ sont aussi égaux.

Exemple : si $F(X)=\dfrac{2X^2-X-1}{X^3-1}$ son unique écriture irréductible (avec dénominateur normalisé) est $F(X)=\dfrac{2X+1}{X^2+X+1}$.

I.3) Degré

Soit $F\in\mathbb{R}(X)$, avec $F(X)=\dfrac{P(X)}{Q(X)}$. Alors, le <u>degré</u> de $F(X)$ est défini par $\deg(F(X))=\deg(P(X))-\deg(Q(X))$, le résultat étant indépendant de l'écriture sous forme de fraction (irréductible ou pas) de $F(X)$ .En effet, si $F(X)=\dfrac{P_1(X)}{Q_1(X)}=\dfrac{P_2(X)}{Q_2(X)}$, on a $P_1(X)Q_2(X)=P_2(X)Q_1(X)$ d'où $\deg(P_1(X))+\deg(Q_2(X))=\deg(P_2(X))+\deg(Q_1(X))$, ce qui entraîne $\deg(P_1(X))-\deg(Q_1(X))=\deg(P_2(X))-\deg(Q_2(X))$.

De plus, cette définition du degré est cohérente avec celle des polynômes : si $F(X)=\dfrac{P(X)}{1}$ alors $\deg(F(X))=\deg(P(X))-\deg(1)=\deg(P(X))-0=\deg(P(X))$.

Remarque : le degré d'une fraction rationnelle peut être égal à n'importe quel entier relatif.

Exemple : $F(X)=\dfrac{X^2-1}{X^3+3X^2-5X+7}$ est de degré -1.

I.4) Pôles

Définition 2 : Soit $F\in\mathbb{R}(X)$, avec $F(X)=\dfrac{P(X)}{Q(X)}$ **écrite sous forme irréductible.** Alors, on appelle <u>pôle</u> de $F(X)$ toute racine complexe du dénominateur.
Soit $a\in\mathbb{C}$ un pôle de $F(X)$. On dit que a est <u>un pôle simple</u> si a est racine simple de $Q(X)$.
Plus généralement, on dira que a est <u>pôle d'ordre k</u> (entier strictement positif) si a est racine de multiplicité k de $Q(X)$.

Exemple 1 : $F(X)=\dfrac{1}{(X^2+1)^2(X-1)^2(X+1)}$: j, $-j$ et 1 sont des pôles doubles. -1 est un pôle simple.

Exemple 2 : $F(X)=\dfrac{X^3+X}{X^2-3X}$: bien que 0 annule le dénominateur, ce n'est pas un pôle car cette écriture n'est pas irréductible. En prenant l'écriture irréductible $F(X)=\dfrac{X^2+1}{X-3}$, on voit que le seul pôle est 3 et qu'il est simple.

II) Notion de décomposition en éléments simples

II.1) Partie entière, partie polaire.

Partons d'un exemple concernant cette fois les fractions de nombres entiers (c'est à dire les nombres rationnels).

Si l'on considère la fraction $\frac{10}{3}$, il peut être commode de la décomposer sous la forme $\frac{10}{3}=3+\frac{1}{3}$, c'est à dire l'écrire sous la forme de la somme d'un nombre entier et d'une fraction comprise entre 0 et 1. Cela est d'ailleurs vrai pour tout nombre rationnel.

La propriété suivante est l'analogue pour les fractions rationnelles :

Propriété 3: Toute fraction rationnelle $F(X)$ de degré positif ou nul peut être décomposée de façon unique sous la forme :

$F(X)=E(X)+F_0(X),$ où :

- $E(X)$ est un polynôme (appelé partie entière) de même degré que F
- $F_0(X)$ est une fraction rationnelle de degré strictement négatif (appelée partie polaire).

Preuve : Soit une fraction rationnelle $F(X)$ dont une écriture est $F(X)=\frac{P(X)}{Q(X)}$. Par division euclidienne de $P(X)$ par $Q(X)$, on peut écrire $P(X)=E(X)Q(X)+R(X)$ où E et R sont deux polynômes tels que :

$\deg(E)=\deg(P)-\deg(Q)=\deg(F)$

$\deg(R)<\deg(Q)$.

En divisant par Q on obtient : $F(X)=E(X)+\frac{R(X)}{Q(X)}$ et $F_0(X)=\frac{R(X)}{Q(X)}$ est bien de degré strictement négatif.

On prouve maintenant l'unicité d'une telle décomposition :

si $F(X)=E_1(X)+\frac{R_1(X)}{Q_1(X)}=E_2(X)+\frac{R_2(X)}{Q_2(X)}$ où $E_1(X)$ et $E_2(X)$ sont des polynômes, et $\deg\left(\frac{R_i(X)}{Q_i(X)}\right)<0$ pour $i=1,2$ on déduit que

$$E_1(X)-E_2(X)=\frac{R_2(X)}{Q_2(X)}-\frac{R_1(X)}{Q_1(X)}=\frac{R_2(X)Q_1(X)-R_1(X)Q_2(X)}{Q_1(X)Q_2(X)} .$$

Puisque $\deg(R_1)<\deg(Q_1)$ et $\deg(R_2)<\deg(Q_2)$, on a on

$\deg(R_2Q_1)<\deg(Q_1)+\deg(Q_2)$ et $\deg(R_1Q_2)<\deg(Q_1)+\deg(Q_2)$ d'où l'on déduit que

$\deg\left(\frac{R_2Q_1-R_1Q_2}{Q_1Q_2}\right)<0$ donc que $\deg(E_1(X)-E_2(X))<0.$

E_1 et E_2 étant des polynômes, cela implique que E_1-E_2 est nul donc $E_1=E_2$ et $\frac{R_2}{Q_2}=\frac{R_1}{Q_1}$.

Exemple : Si $F(X)=\dfrac{X^3+1}{X^2+1}$, alors par division euclidienne on obtient :

$X^3+1=(X^2+1)X-X+1$. Il vient que la partie entière de F est X et que la partie polaire vaut $\dfrac{-X+1}{X^2+1}$. Remarquer que $\deg(X)=\deg(F)=1$.

La propriété précédente permet de se ramener systématiquement à des fractions rationnelles de degré strictement négatif. On va maintenant se concentrer sur ce dernier type de fraction que l'on va apprendre à décomposer en somme de fractions rationnelles ayant une expression simple : les « éléments simples ».

Remarque : bien entendu, si $F(X)$ est de degré négatif, la propriété 3 reste vraie avec $E(X)=0$.

II.2) Élément simple de première espèce.

Il s'agit d'une fraction rationnelle qui possède un unique pôle réel (possiblement multiple) . De plus le numérateur est une constante.
De façon plus précise :

Définition 3: On appelle élément simple de première espèce d'ordre k associé au nombre $a\in\mathbb{C}$ toute fraction rationnelle de la forme $F(X)=\dfrac{A}{(X-a)^k}$ où $A\in\mathbb{C}$ et $k\in\mathbb{N}^*$

Exemple :
$F(X)=\dfrac{5}{(X+4)^3}$ est un élément simple de première espèce, d'ordre 3 et associé au nombre - 4.

II.3) Élément simple de seconde espèce.

Il s'agit une fraction rationnelle qui possède comme uniques pôles (possiblement multiples) un couple de nombres complexes non réels conjugués. De plus le numérateur est de degré inférieur ou égal à 1.

Définition 4: On appelle élément simple de seconde espèce d'ordre k associé aux nombres complexes non réel λ et $\bar{\lambda}$ toute fraction rationnelle de la forme $F(X)=\dfrac{AX+B}{P(X)^k}$ où $A, B\in\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{N}^*$, et $P(X)=(X-\lambda)(X-\bar{\lambda})$ est le polynôme normalisé du second degré à coefficients réels, avec $\Delta<0$, et de racines λ et $\bar{\lambda}$.

Exemples : $F(X)=\dfrac{2X+1}{X^2+4X+5}$ est un élément simple de seconde espèce, d'ordre 1 et associé aux nombres $-2+j$ et $-2-j$.

$G(X)=\dfrac{2}{(X^2+4)^2}$ est un élément simple de seconde espèce, d'ordre 2 et associé aux nombres $2j$ et $-2j$.

$H(X)=\dfrac{X+1}{X^2+4X+1}$ n'est pas un élément simple de seconde espèce car le polynôme X^2+4X+1 n'est pas irréductible : son Δ vaut 12 et est donc positif.

II.4) Théorème de décomposition en éléments simples (DEES)

Ce théorème est absolument fondamental car ses applications en mathématiques du signal sont très nombreuses : calcul de primitives, transformation de Laplace, transformée en Z entre autres.
L'idée contenu dans ce théorème est que toute fraction de degré strictement négatif peut s'écrire comme une somme d'éléments simples. On a deux versions selon que l'on se place dans $\mathbb{C}(X)$ ou dans $\mathbb{R}(X)$ (ce dernier cas étant de loin le plus fréquent). Plus précisément :

II.4.a) Énoncé

Théorème 1 :
1) Toute fraction rationnelle $F(X)$ peut s'écrire dans $\mathbb{C}(X)$ comme somme de sa partie entière et d'éléments simples de première espèce associés à ses pôles. Autrement dit, sa partie polaire peut s'écrire dans $\mathbb{C}(X)$ comme somme de sa partie entière et d'éléments simples de première espèce associés à ses pôles.
2) Toute fraction rationnelle $F(X)$ peut s'écrire dans $\mathbb{R}(X)$ comme somme de sa partie entière et d'éléments simples associés à ses pôles (de première espèce pour les pôles réels et de seconde espèce pour les pôles complexes).

De plus dans chacune des deux situations ci-dessus :
a) L'ordre de chaque élément simple est inférieur ou égal à l'ordre du pôle correspondant dans la fraction rationnelle
b) Cette décomposition est unique .

Prenons un exemple : $F(X)=\dfrac{X^2}{(X-2)(X-3)^2(X^2+1)}$. Cette fraction rationnelle, irréductible, est de degré –3 donc elle a un degré négatif : sa partie entière est nulle. Ses pôles sont les nombres 2 (simple), 3 (double) et j et $-j$ qui sont simples.
On va donc avoir des éléments simples de première espèce associés à 2 et 3, et un ou des élément(s) simple(s) de seconde espèce associé(s) à j et $-j$. Plus précisément, 2 étant un pôle simple , l'ordre du ou des éléments simples associés à 2 est inférieur ou égal à 1 : il n'y a donc qu'un seul élément simple associé à 2 qui est d 'ordre 1 , donc de la forme $\dfrac{A}{X-2}$. De même, 3 étant un pôle double , l'ordre du ou des éléments simples associés à 3 est inférieur ou égal à 2: il n'y a donc qu'au plus deux éléments simples associés à 3 qui sont d'ordre 1 ou 2 , donc de la forme $\dfrac{B}{X-3}$ et $\dfrac{C}{(X-3)^2}$. .Enfin, j et $-j$ étant un couple de pôles complexes conjugués simples, il ne va y avoir qu'un seul élément simple associé à j et $-j$ qui est donc d'ordre 1, donc de la forme $\dfrac{DX+E}{X^2+1}$.
Le théorème 1 dit alors que $F(X)$ peut s'écrire sous la forme :
$$F(X)=\frac{A}{X-2}+\frac{B}{X-3}+\frac{C}{(X-3)^2}+\frac{DX+E}{X^2+1}.$$
On obtient ainsi une <u>décomposition formelle</u> (quand les coefficients des numérateurs ne sont pas explicités). On notera que le nombre de constantes à trouver est égal au degré du dénominateur si $F(X)$ est écrite sous forme irréductible).

Remarque : Un élément simple d'ordre maximal associé à un pôle ne peut pas être nul. Dans l'exemple ci-dessus, cela signifie que les coefficients A et C sont nécessairement non nuls, et le couple $(D;E)$ est différent de $(0;0)$ (c'est à dire que D et E ne sont pas simultanément nuls).
Montrons le pour C par exemple. Si l'on avait $C=0$, on aurait $F(X)=\dfrac{A}{X-2}+\dfrac{B}{X-3}+\dfrac{DX+E}{X^2+1}$.
qui, après une mise au même dénominateur, pourrait s'écrire sous la forme

$$F(X)=\frac{P(X)}{(X-2)(X-3)(X^2+1)}$$ ce qui impliquerait que

$$X^2(X-2)(X-3)(X^2+1)=P(X).(X-2)(X-3)^2(X^2+1)$$

c'est à dire que $X^2=P(X).(X-3)$ c'est à dire que $X-3$ divise X^2 ce qui est absurde.

II.4.b) (*)Preuve du Théorème.

La preuve de ce théorème est longue et un peu compliquée! Toutefois, vu son importance, il nous paraît important d'en donner une démonstration.
Il s'agit d'un raisonnement par récurrence pour lequel l'hérédité est assurée par les deux lemmes ci-dessous :

Lemme 1 Soit $a\in\mathbb{R}$ et $k\in\mathbb{N}^*$. On considère une fraction rationnelle $F(X)\in\mathbb{R}(X)$ telle que *a* en soit un pôle d'ordre *k*. Alors il existe une constante $C\in\mathbb{R}$ telle que

$F(X)=\frac{C}{(X-a)^k}+F_1(X)$ où $F_1(X)$ est une fraction rationnelle dont *a* est un pôle d'ordre inférieur ou égal à $k-1$ (avec la convention qu'un pôle d'ordre 0 n'est pas un pôle) et dont les autres pôles éventuels sont ceux de $F(X)$, avec des ordres inférieurs ou égaux.

<u>Preuve du Lemme 1</u> : Écrivons $F(X)$ sous forme irréductible avec $F(X)=\frac{P(X)}{(X-a)^k Q(X)}$ et $P,Q\in\mathbb{R}[X]$. On a $Q(a)\neq 0$ car *a* est un pôle d'ordre *k* de $F(X)$.
Considérons $A\in\mathbb{R}[X]$ avec $A(X)\overset{\text{def}}{=}Q(a)P(X)-P(a)Q(X)$. Alors $A(a)=0$ donc $X-a$ divise $A(X)$, c'est à dire qu'il existe un polynôme $B\in\mathbb{R}[X]$ tel que $Q(a)P(X)-Q(X)P(a)=(X-a).B(X)$ d'où l'on déduit :

$$F(X)=\frac{P(X)}{(X-a)^k Q(X)}=\frac{\frac{P(a)}{Q(a)}}{(X-a)^k}+\frac{B(X)}{(X-a)^{k-1}Q(a).Q(X)} \quad ,$$

ce qui prouve le lemme 1 avec $C=\frac{P(a)}{Q(a)}$ et $F_1(X)=\frac{B(X)}{(X-a)^{k-1}Q(a).Q(X)}$ qui vérifie bien les conditions demandés car les pôles de $F_1(X)$ font partie des racines de $(X-a)^{k-1}.Q(X)$ comptées avec leur ordre de multiplicité.

Lemme 2 Soit $a\in\mathbb{C}$, $a\notin\mathbb{R}$ et $k\in\mathbb{N}^*$. On considère une fraction rationnelle $F(X)\in\mathbb{R}(X)$ telle que *a* en soit un pôle d'ordre *k*. Alors il existe une unique couple $(C,D)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ tel que

$F(X)=\frac{CX+D}{(X^2-2\operatorname{Re}(a)X+|a|^2)^k}+F_1(X)$ où $F_1(X)$ est une fraction rationnelle dont *a* et $\bar{a}$ sont des pôles d'ordre inférieurs ou égaux à $k-1$ (avec la convention qu'un pôle d'ordre 0 n'est pas un pôle) et dont les autres pôles éventuels sont ceux de $F(X)$, avec des ordres inférieurs ou égaux.

<u>Preuve du Lemme 2</u> : Écrivons $F(X)$ sous forme irréductible avec

$F(X)=\frac{P(X)}{(X^2-2\operatorname{Re}(a)X+|a|^2)^k Q(X)}$ et $P,Q\in\mathbb{R}[X]$. On a $Q(a)\neq 0$ car *a* est un pôle d'ordre *k* de $F(X)$.

Considérons l'unique couple <u>de réels</u> $(C;D)$ tels que $aC+D=\frac{P(a)}{Q(a)}$. Ce couple existe bien de façon unique car, par considération des parties réelles et imaginaires, la relation

$aC+D=\dfrac{P(a)}{Q(a)},\quad C\,,D\in\mathbb{R}$ équivaut au système $\begin{cases}\operatorname{Re}(a).C+D=\operatorname{Re}\left(\dfrac{P(a)}{Q(a)}\right)\\ \operatorname{Im}(a).C=\operatorname{Im}\left(\dfrac{P(a)}{Q(a)}\right)\end{cases}$, qui admet comme unique solution le couple $(C\,;D)$ avec $C=\dfrac{\operatorname{Im}\left(\dfrac{P(a)}{Q(a)}\right)}{\operatorname{Im}(a)}$ et

$D=\dfrac{\operatorname{Im}(a).\operatorname{Re}\left(\dfrac{P(a)}{Q(a)}\right)-\operatorname{Re}(a).\operatorname{Im}\left(\dfrac{P(a)}{Q(a)}\right)}{\operatorname{Im}(a)}$ (remarquons que *a* est non réel donc $\operatorname{Im}(a)\neq 0.$)

Définissons alors $A\in\mathbb{R}[X]$ avec $A(X)\overset{\text{def}}{=}P(X)-(CX+D)Q(X).$ Alors $A(a)=P(a)-(aC+D)Q(a)=0$. Puisque le polynôme *A* est à coefficients réels et que $a\notin\mathbb{R}$, on en déduit que $X^2-2\operatorname{Re}(a)X+|a|^2$ divise $A(X)$ c'est à dire qu'il existe un polynôme $B\in\mathbb{R}[X]$ tel que $P(X)-(CX+D)Q(X)=\left(X^2-2\operatorname{Re}(a)X+|a|^2\right).B(X)$ d'où l'on déduit :

$$\begin{aligned}F(X)&=\frac{P(X)}{(X^2-2\operatorname{Re}(a)X+|a|^2)^k Q(X)}\\&=\frac{CX+D}{(X^2-2\operatorname{Re}(a)X+|a|^2)^k}+\frac{B(X)}{(X^2-2\operatorname{Re}(a)X+|a|^2)^{k-1}.Q(X)}\end{aligned},$$

ce qui prouve le lemme 2 avec $F_1(X)=\dfrac{B(X)}{(X^2-2\operatorname{Re}(a)X+|a|^2)^{k-1}.Q(X)}$ qui vérifie bien les conditions demandés car ses pôles font partie des racines de $(X^2-2\operatorname{Re}(a)X+|a|^2)^{k-1}.Q(X)$ comptées avec leur ordre de multiplicité.

<u>Preuve du Théorème 1 :</u>
Nous allons d'abord prouver le point 2), le point 1) se démontrant de façon très similaire au 1), mais de façon beaucoup moins technique. Nous admettrons l'unicité.

<u>Existence de la décomposition</u>. Soit $F(X)=\dfrac{P(X)}{Q(X)}$ écrite <u>sous forme irréductible</u> avec $P(X),\,Q(X)\in\mathbb{R}[X].$ Nous allons raisonner par récurrence sur $n=\deg(Q)$ (c'est à dire sur le nombre de pôles comptés avec leur ordre de multiplicité) et ainsi démontrer la propriété (P_n): toute fraction rationnelle ayant au plus *n* pôles peut s'écrire dans $\mathbb{R}(X)$ comme somme de sa partie entière et d'éléments simples associés à ses pôles (de premières espèce pour les pôles réels et de seconde espèce pour les pôles complexes). L'ordre de chaque élément simple est inférieur ou égal à l'ordre du pôle correspondant dans la fraction rationnelle.

Si $n=0$: alors $F(X)$ est un polynôme, donc est égal à sa partie entière et sa partie polaire est nulle.

Supposons que $n\in\mathbb{N}$ soit tel que (P_k) soit vraie pour tout entier naturel inférieur ou égal à *n.*
Soit $F(X)=\dfrac{P(X)}{Q(X)}$ écrite sous forme irréductible avec $\deg(Q(X))=n+1.$
On a $\deg(Q(X))\geqslant 1$ dont $F(X)$ possède au moins un pôle *a*. Soit $k\geqslant 1$ l'ordre de ce pôle.
Alors,

(i) soit $a\in\mathbb{R}$, et le lemme 1 montre que $F(X)=\dfrac{C}{(X-a)^k}+F_1(X)$ où $C\in\mathbb{R}$ et

$F_1(X)$ est une fraction rationnelle qui a un nombre de pôles strictement inférieur à celui de $F(X)$: l'hypothèse de récurrence permet d'affirmer que $F_1(X)$ peut s'écrire dans $\mathbb{R}(X)$ comme somme de sa partie entière et d'éléments simples associés à ses pôles. Comme les pôles de $F_1(X)$ font partie de ceux de $F(X)$ avec un ordre inférieur ou égal, la relation $F(X)=\frac{C}{(X-a)^k}+F_1(X)$ fournit une décomposition en éléments simples pour $F(X)$ avec les propriétés voulues.

(ii) soit $a\notin\mathbb{R}$, et le lemme 2 montre que $F(X)=\frac{CX+D}{(X^2-2\operatorname{Re}(a)X+|a|^2)^k}+F_1(X)$ où $C, D\in\mathbb{R}$ et $F_1(X)$ est une fraction rationnelle qui a un nombre de pôles strictement inférieur à celui de $F(X)$: l'hypothèse de récurrence permet d'affirmer que $F_1(X)$ peut s'écrire dans $\mathbb{R}(X)$ comme somme de sa partie entière et d'éléments simples associés à ses pôles. Comme les pôles de $F_1(X)$ font partie de ceux de $F(X)$ avec un ordre inférieur ou égal, la relation $F(X)=\frac{CX+D}{(X^2-2\operatorname{Re}(a)X+|a|^2)^k}+F_1(X)$ fournit une décomposition en éléments simples pour $F(X)$ avec les propriétés voulues.

On a ainsi démontré que (P_{n+1}) est vraie, ce qui achève le raisonnement par récurrence.

Remarques :
(i) Nous admettrons l'unicité donnée par ce Théorème, qui n'est pas plus difficile à montrer que l'existence, mais nécessite des calculs avec des notations très lourdes.

(ii) La preuve du point 1) est très similaire, mais plus courte. Nous laissons la preuve en exercice aux lecteurs courageux, en leur indiquant seulement que pour assurer l'hérédité de la propriété (P_n), nous n'avons besoin que d'utiliser une version légèrement modifiée du Lemme 1 , dont la démonstration est exactement la même :

Lemme 1' : Soit $a\in\mathbb{C}$ et $k\in\mathbb{N}^*$. On considère une fraction rationnelle $F(X)\in\mathbb{C}(X)$ telle que *a* en soit un pôle d'ordre *k*. Alors il existe une unique constante $C\in\mathbb{C}$ telle que $F(X)=\frac{C}{(X-a)^k}+F_1(X)$ où $F_1(X)$ est une fraction rationnelle dont *a* est un pôle d'ordre inférieur ou égal à $k-1$ (avec la convention qu'un pôle d'ordre 0 n'est pas un pôle) et dont les autres pôles éventuels sont ceux de $F(X)$, avec des ordres inférieurs ou égaux.

III) *Méthodes de calcul des coefficients dans une décomposition en éléments simples formelle.*

Nous développons ici quelques méthodes permettant de calculer les valeurs numériques qui interviennent dans les décompositions en éléments simples.

III.1) Cas d'un élément simple de première espèce associé à un pôle réel simple

On commence par le cas le plus simple (et heureusement le plus fréquent) : tous les pôles sont réels et simples.

Propriété 4 : Soit $F \in \mathbb{R}(X)$, avec $F(X)=\dfrac{P(X)}{Q(X)}$ écrite sous forme irréductible, et soit $a \in \mathbb{R}$ un pôle réel simple de $F(X)$. On considère $\dfrac{A}{X-a}$, le seul élément simple associé à a dans la décomposition en éléments simples de $F(X)$.
Alors, $A=[(X-a)F(X)]_{X=a}$, c'est à dire la valeur de l'expression $(X-a)F(X)$ en $X=a$ après qu'elle ait été simplifiée par $(X-a)$ en fraction irréductible.

Exemple : $F(X)=\dfrac{3X}{(X+1)(X-2)}$. Cette écriture est irréductible, de degré -1<0 : la partie entière est nulle. On a deux pôles simples réels qui sont -1 et 2. La décomposition formelle est de la forme

$F(X)=\dfrac{A}{X+1}+\dfrac{B}{X-2}$. La propriété 4 permet de calculer directement A et B

$$A=[(X+1)F(X)]_{X=-1}=\left[(X+1)\frac{3X}{(X+1)(X-2)}\right]_{X=-1}=\left[\frac{3X}{X-2}\right]_{X=-1}=1.$$

$$B=[(X-2)F(X)]_{X=2}=\left[(X-2)\frac{3X}{(X+1)(X-2)}\right]_{X=2}=\left[\frac{3X}{X+1}\right]_{X=2}=2.$$

On obtient $F(X)=\dfrac{1}{X+1}+\dfrac{2}{X-2}$.

<u>Preuve de la propriété 4 :</u> en écrivant la DEES formelle de $F(X)$ et en utilisant le fait que le pôle a est simple, on obtient que $F(X)=\dfrac{A}{X-a}+F_1(X)$ où $F_1(X)$ est la somme de la partie entière et des éléments simples associés aux autres pôles.On obtient alors que :
$(X-a)F(X)=A+(X-a)F_1(X)$. On peut remplacer X par a dans $F_1(X)$ car le réel a n'est pas un pôle de $F_1(X)$. Cela donne : $[(X-a)F(X)]_{X=a}=A+0.F_1(a)=A$.

III.2) Cas d'un élément simple de première espèce d'ordre maximal associé à un pôle réel multiple.

On traite maintenant le cas des pôles réels multiples : la propriété suivante permet de déterminer l'élément simple d'ordre maximal.

Propriété 5: Soit $F \in \mathbb{R}(X)$, avec $F(X)=\dfrac{P(X)}{Q(X)}$ écrite sous forme irréductible, et soit $a \in \mathbb{R}$ un pôle réel d'ordre $p>0$ de $F(X)$. On considère $\dfrac{A}{(X-a)^p}$, l'élément simple <u>d'ordre maximal</u> p associé à a dans la décomposition en éléments simples de $F(X)$.
Alors, $A=[(X-a)^p F(X)]_{X=a}$, c'est à dire la valeur de l'expression $(X-a)^p F(X)$ en $X=a$ après qu'elle ait été simplifiée par $(X-a)^p$ en fraction irréductible.

Remarque : à ne pas appliquer pour les éléments simples qui ne sont pas d'ordre maximal ! Et noter qu'ainsi, cette méthode ne peut s'appliquer qu'une seule fois par pôle réel.

Exemple : $F(X)=\dfrac{3X}{(X+1)(X-2)^2}$. Cette écriture est irréductible, de degré -2<0. On a deux pôles simples qui sont -1 (simple) et 2 (double). La décomposition formelle est de la forme

$F(X)=\dfrac{A}{X+1}+\dfrac{B}{X-2}+\dfrac{C}{(X-2)^2}$. La propriété 4 permet de calculer seulement A :

$A=[(X+1)F(X)]_{X=-1}=\left[\dfrac{3X}{(X-2)^2}\right]_{X=-1}=-\dfrac{1}{3}$. La propriété 5 permet de calculer seulement C

$C=[(X-2)^2F(X)]_{X=2}=\left[\dfrac{3X}{X+1}\right]_{X=2}=2$. Les méthodes données au paragraphe suivant permettront de trouver la constante manquante B.

<u>Preuve :</u> en écrivant la DEES formelle de F et en utilisant le fait que le pôle a est d'ordre p, on obtient que $F(X)=\dfrac{A_1}{X-a}+\dfrac{A_2}{(X-a)^2}+...+\dfrac{A_p}{(X-a)^p}+F_1(X)$ où $F_1(X)$ est la somme de la partie entière et des éléments simples associés aux autres pôles.On obtient alors que :

$(X-a)^pF(X)=A_1(X-a)^{p-1}+A_2(X-a)^{p-2}+...+A_p+(X-a)^pF_1(X)$. On peut remplacer X par a dans $F_1(X)$ car le réel a n'est pas un pôle de $F_1(X)$. Cela donne :

$[(X-a)^pF(X)]_{X=a}=0+A_p+0.F_1(a)=A_p.$

III.3) Autres méthodes.

A utiliser après avoir appliqué les propriétés 4 et 5.

III.3.a) Utilisation de la limite pour $X\to+\infty$

Idée générale : on multiplie l'égalité de la décomposition formelle de $F(X)$ par X, puis on fait tendre X vers $+\infty$: on obtient une équation sur les coefficients de la décomposition formelle de $F(X)$.

Exemple : on reprend le dernier exemple vu ci-dessus: $F(X)=\dfrac{3X}{(X+1)(X-2)^2}$. On a

$F(X)=\dfrac{A}{X+1}+\dfrac{B}{X-2}+\dfrac{C}{(X-2)^2}$ avec les deux constantes déjà trouvées $A=-\dfrac{1}{3}$ et $C=2$. On a

donc $F(X)=\dfrac{-\frac{1}{3}}{X+1}+\dfrac{B}{X-2}+\dfrac{2}{(X-2)^2}$. En employant la méthode décrite, il vient :

$XF(X)=\dfrac{-\frac{1}{3}X}{X+1}+\dfrac{BX}{X-2}+\dfrac{2X}{(X-2)^2}$. En considérant $X\in\mathbb{R}$, $X\to+\infty$, et en utilisant le fait que la limite d'une fraction rationnelle en $\pm\infty$ est égale à celle du quotient des termes de plus haut degré, il en résulte que :

$0=-\dfrac{1}{3}+B+0$ donc $B=\dfrac{1}{3}$.

Remarque : attention, cela ne marche que pour les fractions de degré strictement négatif pour lesquelles la partie entière est nulle. De plus, cette méthode ne donne qu'une seule équation.

III.3.b) Valeur particulière de X

Idée générale : on considère l'égalité de la décomposition formelle de $F(X)$ pour une valeur particulière simple de X qui ne soit pas un pôle : on obtient une équation sur les coefficients de la décomposition formelle de $F(X)$.

Exemple : on reprend le dernier exemple vu ci-dessus que l'on va finir par une autre méthode. Soit $F(X)=\dfrac{3X}{(X+1)(X-2)^2}$. On a $F(X)=\dfrac{-\frac{1}{3}}{X+1}+\dfrac{B}{X-2}+\dfrac{2}{(X-2)^2}$: on va retrouver le fait que $B=\dfrac{1}{3}$ par une autre méthode .

Si on pose X=3 (par exemple) la dernière égalité donne : $F(3)=\dfrac{-\frac{1}{3}}{3+1}+\dfrac{B}{3-2}+\dfrac{2}{(3-2)^2}$ ce qui donne $\dfrac{9}{4}=-\dfrac{1}{12}+B+2$ d'où $B=\dfrac{9}{4}+\dfrac{1}{12}-2=\dfrac{1}{3}$.

III.3.c) Méthode par identification

Idée générale : on réduit au même dénominateur la DEES formelle (avec éventuellement les valeurs numériques déjà trouvées) et on identifie avec l'expression de $F(X)$.
Cette méthode « bulldozer » marche à tous les coups, mais attention à ne pas se retrouver dans des calculs inextricables !

Exemple : $F(X)=\dfrac{3}{(X-1)^2(X^2+X+1)}$. On vérifie que le degré de la fraction est négatif, et que la fraction est bien irréductible. Le polynôme X^2+X+1 est irréductible ($\Delta<0$).
La DEES formelle donne : $F(X)=\dfrac{A}{X-1}+\dfrac{B}{(X-1)^2}+\dfrac{CX+D}{X^2+X+1}$. Avant de se lancer dans des calculs compliqués, remarquons que la propriété 5 donne $B=[\dfrac{3}{(X^2+X+1)}]_{X=1}=1$. En mettant au même dénominateur dans la DEES formelle de F(X) on obtient courageusement :

$$F(X)=\frac{(A+C)X^3+(D-2C+1)X^2+(C-2D+1)X-A+D+1}{(X-1)^2(X^2+X+1)}$$

Par identification avec l'expression de $F(X)$ on obtient que

$$\forall X\in\mathbb{C},\quad (A+C)X^3+(D-2C+1)X^2+(C-2D+1)X-A+D+1=3$$

d'où le système : $\begin{cases} A+C=0 \\ -2C+D=-1 \\ C-2D=-1 \\ -A+D=2 \end{cases}$

Les équations 1 et 4 donnent : $C=-A$ et $D=2+A$. En substituant dans la deuxième, cela donne $3A+2=-1$ d'où $A=-1$. On a donc $C=1$ et $D=1$. On vérifie que la troisième équation est aussi bien vérifiée.
On obtient donc : $F(X)=\dfrac{-1}{X-1}+\dfrac{1}{(X-1)^2}+\dfrac{X+1}{X^2+X+1}$.

Remarque : le système de 4 équations obtenu ci-dessus ne comporte que 3 inconnues et non 4 comme on aurait pu s'y attendre. Cela est dû au fait qu'une inconnue (B) a déjà été trouvée auparavant par une autre méthode (la propriété 5).

III.3.d) (*) Méthode par les pôles complexes

C'est la même chose que pour la propriété 4, mais pour un pôle non réel.
A n'utiliser que si les pôles ne sont pas trop compliqués.

Exemple : reprenons l'exemple ci-dessus :
$F(X)=\frac{3}{(X-1)^2(X^2+X+1)}=\frac{A}{X-1}+\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{CX+D}{X^2+X+1}$ (le nombre B a été trouvé par la propriété 5).
On cherche la valeur des deux pôles complexes conjugués en résolvant l'équation $X^2+X+1=0$ ce qui donne $X=\frac{-1}{2}\pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$. En multipliant $\mathrm{F(X)}$ par X^2+X+1 on obtient :
$F(X)=\frac{3}{(X-1)^2}=\left(\frac{A}{X-1}+\frac{1}{(X-1)^2}\right)(X^2+X+1)+CX+D$. Il suffit alors de remplacer X par $\frac{-1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}$ pour obtenir $\frac{3}{(\frac{-1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}-1)^2}=(\qquad)\times 0+C\left(\frac{-1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+D$

$\Leftrightarrow\frac{3}{\frac{3}{2}(1-\sqrt{3}j)}=\frac{-C}{2}+D+jC\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow\frac{1+\sqrt{3}j}{2}=\frac{-C}{2}+D+jC\frac{\sqrt{3}}{2}$. En identifiant les partie réelles et imaginaires il vient que :

$\begin{cases}\frac{-C}{2}+D=\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}=C\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ d'où l'on trouve $C=D=1$.

Enfin, pour trouver A, on peut utiliser la technique des limites du paragraphe a) qui donne l'équation $0=A+C$ d'où $A=-C=-1$.

IV) *Exercices*

Exercice 1

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}$ les fractions rationnelles suivantes

$F_1(X)=\dfrac{4X+22}{(X+3)(X-2)(X+4)}$ (*) $F_2(X)=\dfrac{X^3-X^2+5X-5}{X^3-5X^2+7X-3}$

$F_3(X)=\dfrac{-18X+10}{(X+3)(X-1)^3}$ $F_4(X)=\dfrac{5X+3}{(X^2-1)^2}$

$F_5(X)=\dfrac{36X-4}{(X^2+4)(X^2+16)}$ (*) $F_6(X)=\dfrac{3X-9}{(X^2+1)(X-3)^3}$

$F_7(X)=\dfrac{-8X+19}{(X^2-X-2)(X-2)}$ $F_8(X)=\dfrac{3X^3}{X^2-2X-8}$

$F_9(X)=\dfrac{34X^2+17X-15}{(X^2+11X+24)(X-1)^2}$ $F_{10}(X)=\dfrac{2X^3+X^2-3X-1}{X^5+X^3}$

Exercice 2

Décomposer formellement la fraction suivante dans $\mathbb{R}[X]$ en discutant suivant les valeurs du paramètre a réel :

$$F(X)=\frac{X^2+4X-5}{(X^2-a^2)(X+3)}$$

(*)Exercice 3

Soit $P(X)=(X-1)^p(X-2)^q$ où p et q sont des entiers strictement positifs.

1) Calculer $P'(X)$ et factoriser le résultat obtenu.
2) On considère la fraction rationnelle $F(X)=\dfrac{P'(X)}{P(X)}$. Simplifier la fraction et trouver sa décomposition en éléments simples. Que remarque-t-on ?

Exercice 4

1) Vérifier que $X^4+1=(X^2+1)^2-2X^2$
2) En déduire une factorisation de X^4+1 en produits de polynômes irréductibles.

3) On considère la fraction rationnelle $F(X)=\frac{X^3}{X^4+1}$

a) Ecrire la décomposition formelle de $F(X)$.

b) A l'aide par exemple de la méthode des coefficients indéterminés, calculer les coefficients de la décomposition en éléments simples de $F(X)$.

Exercice 5

On considère la fraction rationnelle $F(X)=\frac{12(X^2+4X+1)}{(X^4+X^2+1)(X-1)^3(X+1)}$. Sa décomposition en éléments simples est donnée par

$$F(X)\frac{2X+a}{X^2+X+1}+\frac{bX+20}{X^2-X+1}+\frac{c}{X+1}+\frac{7}{X-1}-\frac{18}{(X-1)^2}+\frac{d}{(X-1)^3}.$$

Trouver les 4 réels *a,b,c* et *d* .

Exercice 6

Soit $P(X)$ un polynôme à coefficients réels de degré 6. On pose $F(X)=\frac{P(X)}{X^5+3X^4+2X^3-2X^2-3X-1}$. On suppose la fraction $F(X)$ irréductible.

On cherche la décomposition de $F(X)$ en éléments simples.

Donner trois raisons différentes permettant d'affirmer que la réponse donnée ci-dessous est fausse :

$$F(X)=1+\frac{3}{X^2-1}+\frac{X}{(X+1)^3}-\frac{2}{(X+1)^2}.$$

Exercice 7

Le but de cet exercice est de trouver la décomposition en éléments simples de la fraction $F(X)=\frac{X^5+X^2}{(X^2+1)^3}$.

1) Que vaut la partie entière ?
2) Prouver que $F(X)$ est écrite sous forme irréductible.
3) Donner la décomposition en éléments simples formelle de $F(X)$.
4) a) Faire la division euclidienne de X^5+X^2 par X^2+1 .

   b) En déduire une écriture de $F(X)$ sous la forme $F(X)=\frac{A(X)}{(X^2+1)^2}+\frac{B(X)}{(X^2+1)^3}$, avec $\deg(B(X))\leq 1$.

   c) Procéder à la division euclidienne du polynôme $A(X)$ trouvé ci-dessus par X^2+1 .

   d) En déduire la décomposition en éléments simples de $F(X)$.

Exercice 8

Soit $P\in\mathbb{R}[X]$. On définit la fraction rationnelle $F(X)=\frac{P(X)}{(X-1)^2}$.

1) A quelle condition sur le polynôme P peut-on affirmer que la fraction F est écrite sous forme

irréductible ?

2) Soit la décomposition en éléments simples formelle : $F(X)=E(X)+\frac{A}{X-1}+\frac{B}{(X-1)^2}$.

a) Démontrer que $B=P(1)$.

(*)b) En déduire que $A=P'(1)$.

Exercice 9 Établir la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle suivante (on la supposera irréductible) : $F(X)=\frac{2X^2-8X-21}{(X-1)(X+2)^2}$

Exercice 10

On considère la fraction rationnelle $F(X)=\frac{X^2-4}{(X+a)^2(X^2+1)}$ où $a>0$. .

1) Pour quelles valeurs de $a>0$ l'expression donnée ci-dessus est-elle une écriture irréductible de $F(X)$?

Dans ce cas, donner la décomposition en éléments simples **formelle** de $F(X)$ (c'est à dire sans calculer les coefficients).

2) Dans le cas où F n'est pas irréductible, simplifier la fraction et faire sa décomposition en éléments simples complète (en calculant donc la valeur des coefficients).

(*)Exercice 11

Soient deux réels $0\leq a\leq b$. Procéder à la décomposition en éléments simples de $F(X)=\frac{X+1}{(X^2+a^2)(X^2+b^2)}$ (attention à bien traiter tous les cas particuliers).

Exercice 12. Établir la décomposition en éléments simples des fractions rationnelles suivantes :

1) $F(X)=\frac{X-7}{(X-1)(X-4)}$

2) $F(X)=\frac{X}{(X^2-4X+5)(X-2)^2}$.

Exercice 13

Soit une fraction rationnelle ayant pour écriture irréductible : $F(X)=\frac{P(X)}{(X+3)^8(X+1)}$, avec $P(X)\in\mathbb{R}[X]$. .On donne sa décomposition en éléments simples :

$$F(X)=1+\frac{2}{(X+3)^7}+\frac{5}{(X+3)^8}-\frac{10}{X+1} .$$

1° Quel est le degré de $P(X)$? Justifier.

2° Calculer la valeur numérique de $P(-1)$. On notera que pour cette question, il n'est pas nécessaire (et fortement déconseillé) de chercher l'expression de $P(X)$ . . .

(*) Exercice 14
Soit $P(X)\in\mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré supérieur où égal à 2 et n'admettant que des racines simples.
Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ses racines.

1) Montrer que $\lim\limits_{t\to\lambda_k} \dfrac{t-\lambda_k}{P(t)}=\dfrac{1}{P'(\lambda_k)}$.
2) En déduire la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{P(X)}$ en fonction de λ_k et $P'(\lambda_k)$.
3) Prouver que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{P'(\lambda_k)}=0.$
4) En adaptant le raisonnement utilisé dans les questions précédentes, prouver que $\forall p\in\{1;2;\ldots n-2\}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k^p}{P'(\lambda_k)}=0$ et que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k^{n-1}}{P'(\lambda_k)}=\frac{1}{a_n}$ où a_n est le coefficient du terme de plus haut degré de $P(X)$.
5) Déduire de la question 2 la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ de $F(X)=\dfrac{1}{X^{2n}-1}$ où $n\in\mathbb{N}^*$.
6) Application du 3) :
Soit $P(X)\in\mathbb{C}[X]$ avec $\deg(P(X))\geqslant 2$. On suppose que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, les racines de $P(X)-X$, sont toutes simples. Montrer qu'il existe i_0 tel que $|P'(\lambda_{i_0})|> 1$: on dira que λ_{i_0} est un point fixe répulsif de $P(X)$ (c'est à dire qu'une suite de nombres complexes (z_n) satisfaisant à la relation de récurrence $z_{n+1}=P(z_n)$ ne peut pas converger vers λ_{i_0} sans être stationnaire).

(*)Exercice 15

Dans cet exercice, on dira qu'une fraction rationnelle $G(X)\in\mathbb{C}(X)$ est une dérivée rationnelle s'il existe $F(X)\in\mathbb{C}(X)$ tel que, pour tout réel *t* qui ne soit pas un pôle de F et de G, on ait $G(t)=F'(t)$.
On dira que $G(X)$ est la dérivée rationnelle de la fraction $F(X)$ ce que l'on notera $G(X)=F'(X)$.

1) a) Montrer que tout polynôme est une dérivée rationnelle.
b) Montrer qu'une fraction rationnelle $G(X)\in\mathbb{C}(X)$ est une dérivée rationnelle si et seulement si il existe deux polynômes $P(X)\in\mathbb{C}[X]$ et $Q(X)\in\mathbb{C}[X]$ tels que $G(X)=\dfrac{P'(X)Q(X)-Q'(X)P(X)}{Q^2(X)}$.
2) a) Montrer que si $F\neq 0$ et $\deg(F(X))\neq 0$, alors $\deg(F'(X))=\deg(F(X))-1$.
b) Montrer que si $\deg(F(X))=0$, alors $\deg(F'(X))$ peut, selon les cas, être égal à n'importe quel entier strictement inférieur à – 1.
c) En déduire que si $G(X)\in\mathbb{R}(X)$ est une dérivée rationnelle, alors nécessairement $\deg(G(X))\neq -1$.
3) Soient deux polynômes $P(X)\in\mathbb{R}[X]$ et $Q(X)\in\mathbb{R}[X]$ tels que l'écriture $\dfrac{P(X)}{Q(X)}$ soit irréductible et tels que $Q(X)$ n'ait que des racines simples. Montrer que l'écriture $\dfrac{P'(X)Q(X)-Q'(X)P(X)}{Q^2(X)}$ est irréductible.
4) Soient deux polynômes $P(X)\in\mathbb{C}[X]$ et $Q(X)\in\mathbb{C}[X]$ tels que l'écriture

$F(X)=\dfrac{P(X)}{Q(X)}$ soit irréductible. Soit $Q(X)=a(X-z_1)^{n_1}.(X-z_2)^{n_2}...(X-z_p)^{n_p}$ la décomposition de $Q(X)$ en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$.
Soit $i\in\{1,...,p\}$.
a) Montrer que si $n_i=1$, le nombre z_i n'est pas racine de $P'(X)Q(X)-Q'(X)P(X)$, et si $n_i\geqslant 2$, le nombre z_i est racine d'ordre n_i-1 de $P'(X)Q(X)-Q'(X)P(X)$.
b) Soit $F'(X)=\dfrac{A(X)}{B(X)}$ une écriture irréductible de $F'(X)$. Déterminer (à une constante multiplicative près) une expression factorisée de $B(X)$ en fonction des z_i et n_i.

5) Déduire des questions précédentes qu'une dérivée rationnelle est nécessairement de degré différent de – 1 et que ses pôles éventuels sont d'ordre supérieurs ou égal à 2.
6) Soit $F(X)\in\mathbb{C}(X)$ avec $F(X)=\dfrac{P(X)}{Q(X)}$ son écriture irréductible. Soit $Q(X)=(X-z_1)^{n_1}.(X-z_2)^{n_2}...(X-z_p)^{n_p}$ la décomposition de $Q(X)$ en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$. On considère la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}[X]$ de *F(X) :* $F(X)=E(X)+\sum_{i,j}\dfrac{A_{i,j}}{(X-z_i)^j}$ $E(X)$ étant la partie entière.
Montrer que $F(X)$ est une dérivée rationnelle si, et seulement si, $\forall i,\ A_{i,1}=0$ c'est à dire que la décomposition de $F(X)$ en éléments simples dans $\mathbb{C}[X]$ ne comporte aucun élément simple d'ordre 1.
7) Soit $A(X)\in\mathbb{C}[X]$ avec $\deg A(X)\geqslant 1$. On suppose que $\dfrac{1}{A(X)}$ est une dérivée rationnelle. Soit $F(X)=\dfrac{P(X)}{Q(X)}\in\mathbb{C}(X)$ telle que $F'(X)=\dfrac{1}{A(X)}$ et telle que l'écriture $\dfrac{P(X)}{Q(X)}$ soit irréductible.
a) Montrer que $\deg(Q(X))\geqslant 1$ et que l'on peut supposer que $Q(X)$ est normalisé et que $\deg(F(X))\leqslant -1$.

On veut montrer par l'absurde que $P(X)$ est un polynôme constant. Supposons donc $\deg(P(X))\geqslant 1$.
Considérons la factorisation $Q(X)=\Pi_{i=1}^{\alpha}(X-\lambda_i)^{n_i}$ avec $n_i\geqslant 1$ et $\lambda_i\neq\lambda_j$ pour $i\neq j$.

b) Exprimer $A(X)$ en fonction de α, des n_i et des λ_i. En déduire que $P'(X)Q(X)-P(X)Q'(X)=M.\Pi_{i=1}^{\alpha}(X-\lambda_i)^{n_i-1}$ pour une certaine constante non nulle M.
c) En déduire une contradiction en raisonnant sur les degrés
. d) Montrer que $Q(X)$ est de la forme $(X-a)^k,\ k\geqslant 1$. En déduire les polynômes $A(X)\in\mathbb{C}[X]$ tels que $\dfrac{1}{A(X)}$ soit une dérivée rationnelle.
e) Montrer le corollaire suivant.
Soit $A(X)\in\mathbb{C}[X]$ avec $\deg A(X)\geqslant 1$. Alors la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ de $\dfrac{1}{A(X)}$ admet forcément au moins un élément simple d'ordre 1 non nul, à moins que que $\dfrac{1}{A(X)}$ ne soit lui même un élément simple d'ordre supérieur ou égal à 2.

V) Corrigés

Exercice 1

$$F_1(X)=\frac{1}{X+4}-\frac{2}{X+3}+\frac{1}{X-2} \qquad F_2(X)=1-\frac{3}{X-1}+\frac{7}{X-3}$$

$$F_3(X)=\frac{1}{X-1}-\frac{4}{(X-1)^2}-\frac{2}{(X-1)^3}-\frac{1}{X+3} \qquad F_4(X)=\frac{\frac{3}{4}}{X+1}-\frac{\frac{1}{2}}{(X+1)^2}-\frac{\frac{3}{4}}{X-1}+\frac{2}{(X-1)^2}$$

$$F_5(X)=\frac{9X-1}{3(X^2+4)}-\frac{9X-1}{3(X^2+16)} \qquad F_6(X)=\frac{9X+12}{50(X^2+1)}-\frac{9}{50(X-3)}+\frac{3}{10(X-3)^2}$$

$$F_7(X)=\frac{3}{X+1}-\frac{3}{X-2}+\frac{1}{(X-2)^2} \qquad F_8(X)=3X+6+\frac{32}{X-4}+\frac{4}{X+2}$$

$$F_9(X)=\frac{2}{X-1}+\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{3}{X+3}-\frac{5}{X+8} \qquad F_{10}(X)=\frac{-2X+5}{X^2+1}+\frac{2}{X}-\frac{3}{X^2}-\frac{1}{X^3}$$

Exercice 2

On peut supposer que $a\geq 0$ car il n'y a que son carré qui intervient.
On cherche les valeurs de *a* qui donnent :
soit une écriture qui n'est pas irréductible
soit un pôle multiple
On obtient les cas suivants

(i) Si a= 0 : $F(X)=\frac{A}{X}+\frac{B}{X^2}+\frac{C}{X+3}$

(ii) Si a = 1 : $F(X)=\frac{X^2+4X-5}{(X^2-1^2)(X+3)}=\frac{X+5}{(X+1)(X+3)}=\frac{A}{X-1}+\frac{B}{X+3}$

(iii) Si a= 3 : $F(X)=\frac{X^2+4X-5}{(X^2-9)(X+3)}=\frac{X^2+4X+5}{(X-3)(X+3)^2}=\frac{A}{X-3}+\frac{B}{X+3}+\frac{C}{(X+3)^2}$

(iv) Si a = 5 : $F(X)=\frac{X^2+4X-5}{(X^2-25)(X+3)}=\frac{X-1}{(X-5)(X+3)}=\frac{A}{X-5}+\frac{B}{X+3}$

(v) Si $a\notin\{0;1;3;5\}$ $F(X)=\frac{A}{X-a}+\frac{B}{X+a}+\frac{C}{X+3}$

Exercice 3

1) $P'(X)=(X-1)^{p-1}(X-2)^{q-1}((p+q)X-q-2p)$

2) On a $F(X)=\frac{P'(X)}{P(X)}=\frac{(X-1)^{p-1}(X-2)^{q-1}((p+q)X-q-2p)}{(X-1)^p(X-2)^q}$

$$=\frac{(p+q)X-q-2p}{(X-1)(X-2)}=\frac{p}{X-1}+\frac{q}{X-2}$$

On pourrait prouver que cette formule se généralise au cas où $P(X)=\prod_{k=1}^{p}(X-a_k)^{n_k}$:dans ce cas, on a la décomposition en éléments simples : $\frac{P'(X)}{P(X)}=\sum_{k=1}^{p}\frac{n_k}{X-a_k}$. On remarque que cette fraction rationnelle n'admet que des pôles simples , qui sont les racines de $P(X)$, et que les coefficients des éléments simples associés correspondent à leur ordre de multiplicité en tant que racine de $P(X)$.

Exercice 4

1) Il suffit de développer et de réduire le membre de droite.

2) Par une identité remarquable, $X^4+1=(X^2+1)^2-2X^2=(X^2-\sqrt{2}X+1)(X^2+\sqrt{2}X+1)$

3)

a) On a

$$F(X)=\frac{X^3}{X^4+1}=\frac{X^3}{(X^2-\sqrt{2}X+1)(X^2+\sqrt{2}X+1)}=\frac{AX+B}{X^2-\sqrt{2}X+1}+\frac{CX+D}{X^2+\sqrt{2}X+1}\ .$$

b) On tombe sur le système $\begin{cases} A+C=1 \\ \sqrt{2}A+B-\sqrt{2}C+D=0 \\ A+\sqrt{2}B+C-\sqrt{2}D=0 \\ B+D=0 \end{cases}$ qui donne

$$F(X)=\frac{X^3}{X^4+1}=\frac{\frac{1}{2}X-\frac{\sqrt{2}}{4}}{X^2-\sqrt{2}X+1}+\frac{\frac{1}{2}X+\frac{\sqrt{2}}{4}}{X^2+\sqrt{2}X+1}\ .$$

Exercice 5

On a $c=\left[\frac{12(X^2+4X+1)}{(X^4+X^2+1)(X-1)^3}\right]_{X=-1}=1$, $d=\left[\frac{12(X^2+4X+1)}{(X^4+X^2+1)(X+1)}\right]_{X=1}=12$.

La technique du III)3)a donne $2+b+c+7=0$ d'où $b=-10$.

La technique du III)3) b donne, avec la valeur X=0 : $a+20+c-7-18-d=-12$ d'où $a=4$.

Exercice 6

La fraction $\frac{X}{(X+1)^3}$ n'est pas un élément simple car le numérateur devrait être une constante.

La fraction $\frac{3}{X^2-1}$ n'est pas un élément simple car le dénominateur n'est pas irréductible.

La partie entière devrait être de degré 6-5 = 1 , or celle qui est donnée est de degré nul.

Exercice 7

1) 0 car le degré de la fraction est strictement négatif.
2) Les racines du numérateurs sont j et $-j$, et elles ne sont pas racines du numérateur car $j^5+j^2=-1+j\neq 0$ et $(-j)^5+(-j)^2=-1-j\neq 0$.
3) $F(X)=\dfrac{X^5+X^2}{(X^2+1)^3}=\dfrac{AX+B}{X^2+1}+\dfrac{CX+D}{(X^2+1)^2}+\dfrac{EX+F}{(X^2+1)^3}$.
4) a) On a $X^5+X^2=(X^3-X+1)(X^2+1)+(X-1)$.

   b) On déduit que $\dfrac{X^5+X^2}{(X^2+1)^3}=\dfrac{X^3-X+1}{(X^2+1)^2}+\dfrac{X-1}{(X^2+1)^3}$.

   c) On a $X^3-X+1=X(X^2+1)-2X+1$.

   d) On a donc d'après les deux questions précédentes,
   $F(X)=\dfrac{X(X^2+1)-2X+1}{(X^2+1)^2}+\dfrac{X-1}{(X^2+1)^3}=\dfrac{X}{X^2+1}+\dfrac{-2X+1}{(X^2+1)^2}+\dfrac{X-1}{(X^2+1)^3}$ ce qui donne la décomposition en éléments simples voulue.

Exercice 8

1) La fraction F est irréductible si et seulement si $P(1)\neq 0$.
2) a) On a $P(X)=E(X)(X-1)^2+A(X-1)+B$ donc en faisant tendre X vers 1, on obtient $B=P(1)$.

   b) On déduit $A=\dfrac{P(X)-P(1)}{X-1}-(X-1)E(X)$ donc en faisant tendre X vers 1, on a $A=P'(1)$.

Exercice 9

$F(X)=\dfrac{5}{X+2}-\dfrac{1}{(X+2)^2}-\dfrac{3}{X-1}$.

Exercice 10

1) Pour $a\neq 2$, l'expression $F(X)=\dfrac{X^2-4}{(X+a)^2(X^2+1)}$ est une écriture irréductible de $F(X)$ .Dans ce cas, $F(X)=\dfrac{X^2-4}{(X+a)^2(X^2+1)}=\dfrac{A}{X+a}+\dfrac{B}{(X+a)^2}+\dfrac{CX+D}{X^2+1}$ avec $B\neq 0$ car l'écriture de cette fraction est irréductible.

2) On a alors $F(X)=\dfrac{X^2-4}{(X+2)^2(X^2+1)}=\dfrac{X-2}{(X+2)(X^2+1)}=\dfrac{1}{5}\left(-\dfrac{4}{X+2}+\dfrac{4X-3}{X^2+1}\right)$.

Exercice 11

(i) Cas $a=0$.

(ia) Si $b=0$, $F(X)=\dfrac{X+1}{X^4}=\dfrac{1}{X^3}+\dfrac{1}{X^4}$.

(ib) Si $b>0$: $F(X)=\dfrac{X+1}{X^2(X^2+b^2)}=\dfrac{A}{X}+\dfrac{B}{X^2}+\dfrac{CX+D}{X^2+b^2}$.

Par la propriété 5 , on a $B=\frac{1}{b^2}$. La technique du III)3)d donne $bj\,C+D=\frac{1+bj}{-b^2}$ d'où $C=D=-\frac{1}{b^2}$ Par la technique de la limite (III)3)a) , on obtient ensuite les relations $A+C=0$ donc $A=-C=\frac{1}{b^2}$ .On a alors $F(X)=\frac{1}{b^2}\left(\frac{1}{X}+\frac{1}{X^2}-\frac{X+1}{X^2+b}\right)$.

(ii) Cas $a>0$.

(iia) Cas $a=b$: $F(X)=\frac{X+1}{(X^2+a^2)^2}$: c'est déjà un élément simple.

(iib) Cas $a<b$: $F(X)=\frac{X+1}{(X^2+a^2)(X^2+b^2)}=\frac{AX+B}{X^2+a^2}+\frac{CX+D}{X^2+b^2}$.

On utilise la technique du III)3)d : $aj\,A+B=\frac{aj+1}{b^2-a^2}$ d'où $A=\frac{1}{b^2-a^2}$ et $B=\frac{1}{b^2-a^2}$.

Par la même technique, $bj\,C+D=\frac{bj+1}{a^2-b^2}$ d'où $C=\frac{1}{a^2-b^2}$ et $D=\frac{1}{a^2-b^2}$.

On a donc $F(X)=\frac{1}{b^2-a^2}\left(\frac{X+1}{X^2+a^2}-\frac{X+1}{X^2+b^2}\right)$.

Exercice 12.

1) $F(X)=\frac{2}{X-1}-\frac{1}{X-4}$

2) $F(X)=\frac{1}{X-2}+\frac{2}{(X-2)^2}-\frac{X}{X^2-4X+5}$

Exercice 13

1° Le degré de la partie entière $E(X)=1$ vaut 0 donc le degré de $P(X)$ est celui du dénominateur de la fraction, celle-ci étant irréductible, c'est à dire que $\deg(P(X))=9$.

2° Le coefficient de $\frac{1}{X+1}$ vaut , par la propriété 5 , $\left[\frac{P(X)}{(X+3)^8}\right]_{X=-1}=\frac{P(-1)}{256}$ donc $P(-1)=-2560$.

Exercice 14

1) Par définition de la dérivée, on a $\lim_{t\to\lambda_k}\frac{P(t)-P(\lambda_k)}{t-\lambda_k}=\lim_{t\to\lambda_k}\frac{P(t)}{t-\lambda_k}=P'(\lambda_k)$. Les racines de P étant simples on a $P'(\lambda_k)\neq 0$ donc par quotient de limites $\lim_{t\to\lambda_k}\frac{t-\lambda_k}{P(t)}=\frac{1}{P'(\lambda_k)}$.

2) On a la décomposition en éléments simples formelle de la forme $\frac{1}{P(X)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{X-\lambda_i}$. Si $k\in\{1\,;2\,;\dots;n\}$, on a alors $\frac{X-\lambda_k}{P(X)}=A_k+(X-\lambda_k)\sum_{i\neq k}\frac{A_i}{X-\lambda_i}$. Puisque pour $i\neq k$, on a $\lambda_i\neq\lambda_k$, en faisant tendre X vers λ_k dans l'égalité ci-dessus, il vient , grâce au résultat du 1) :

$A_k=\dfrac{1}{P'(\lambda_k)}$. On en déduit la décomposition en éléments simples suivante :

$$\frac{1}{P(X)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\dfrac{1}{P'(\lambda_i)}}{X-\lambda_i}\ .$$

3) On déduit du 2) que $\dfrac{X}{P(X)}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\dfrac{X}{P'(\lambda_k)}}{X-\lambda_k}$. En faisant $X\to+\infty$, on a $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}\frac{X}{P(X)}=0$ car $\deg(P(X))\geqslant 2$, d'où l'on obtient par passage à la limite $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{P'(\lambda_k)}=0$.

4) Soit $p\in\{1;2;\ ...\ ;n-2\}$. On considère la fraction rationnelle $\dfrac{X^p}{P(X)}$. Elle est de degré strictement négatif, donc il n'y a pas de partie entière.Sa décomposition en éléments simples est de la forme $\dfrac{X^p}{P(X)}=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{X-\lambda_i}$ (elle peut ne pas être irréductible si un réel λ_k est nul, mais dans ce cas on aura simplement $A_k=0$ ce qui, dans ce cas, ne nous empêche pas de travailler sur cette décomposition en éléments simple formelle).
On a tout comme pour le 2) , pour $k\in\{1;2;....;n\}$, la relation $\dfrac{X^p(X-\lambda_k)}{P(X)}=A_k+(X-\lambda_k)\displaystyle\sum_{i\neq k}\frac{A_i}{X-\lambda_i}$ et en faisant tendre X vers λ_k dans l'égalité ci-dessus, il vient , grâce au résultat du 1) : $A_k=\dfrac{\lambda_k^p}{P'(\lambda_k)}$ .On en déduit que

$$\frac{X^{p+1}}{P(X)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\dfrac{\lambda_i^p}{P'(\lambda_i)}.X}{X-\lambda_i}$$

. En faisant $X\to+\infty$, on a $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}\frac{X^{p+1}}{P(X)}=0$ car $\deg(P(X))>p+1$, d'où l'on obtient par passage à la limite $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k^p}{P'(\lambda_k)}=0$.
Si l'on reprend tout avec $p=n-1$ (vérifier qu'il n'y a toujours pas de partie entière dans ce cas là), on va avoir $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}\frac{X^{p+1}}{P(X)}=\lim_{X\to+\infty}\frac{X^n}{P(X)}=\frac{1}{a_n}$ (quotient des termes de plus haut degré : remarquer que les polynômes X^n et $P(X)$ ont le même degré), d'où $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k^{n-1}}{P'(\lambda_k)}=\frac{1}{a_n}$.

5) Les racines de $P(X)=X^{2n}-1$ sont – 1 , +1 (les seules racines réelles) et les paires de nombres complexes conjugués $\lambda_k=e^{\frac{k\pi}{n}j}$ et $\overline{\lambda_k}=e^{\frac{-k\pi}{n}j}$ pour $1\leqslant k\leqslant n-1$. . On a donc d'après le 2) :

$$\frac{1}{P(X)}=\frac{\dfrac{1}{P'(1)}}{X-1}+\frac{\dfrac{1}{P'(-1)}}{X+1}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\dfrac{1}{P'(\lambda_k)}}{X-\lambda_k}+\frac{\dfrac{1}{P'(\overline{\lambda_k})}}{X-\overline{\lambda_k}}$$ avec $P(X)=X^{2n}-1$,

$P'(X)=2n\,X^{2n-1}$, et $\lambda_k=e^{\frac{k\pi}{n}j}$. On calcule :

$P'(\lambda_k)=2n\,e^{\frac{k(2n-1)\pi}{n}j}=2n\,e^{2k\pi j}e^{\frac{-k\pi}{n}j}=2n\,e^{\frac{-k\pi}{n}j}$, $P'(\overline{\lambda_k})=\overline{P'(\lambda_k)}=2n\,e^{\frac{k\pi}{n}j}$, et
$P'(1)=2n$, $P'(-1)=-2n$ d'où pour $n\geqslant 2$:

$$F(X)=\frac{1}{2n}\left(\frac{1}{X-1}-\frac{1}{X+1}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{e^{\frac{k\pi}{n}j}}{X-e^{\frac{k\pi}{n}j}}+\frac{e^{\frac{-k\pi}{n}j}}{X-e^{\frac{-k\pi}{n}j}}\right)$$

$$=\frac{1}{2n}\left(\frac{1}{X-1}-\frac{1}{X+1}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\left(e^{\frac{k\pi}{n}j}+e^{\frac{-k\pi}{n}j}\right)X-2}{\left(X-e^{\frac{k\pi}{n}j}\right)\left(X-e^{\frac{-k\pi}{n}j}\right)}\right)$$

$$=\frac{1}{2n}\left(\frac{1}{X-1}-\frac{1}{X+1}+2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)X-1}{X^2-2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)X+1}\right) .$$

6) On raisonne par l'absurde et on suppose que $\forall i,\ |P'(\lambda_i)|\leqslant 1$. Pour i fixé, on a alors $\mathrm{Re}(P'(\lambda_i)-1)=\mathrm{Re}(P'(\lambda_i))-1\leqslant|P'(\lambda_i)|-1\leqslant 0$ par les relations $\forall z\in\mathbb{C},\ \mathrm{Re}(z)\leqslant|z|$ et $\forall i,\ |P'(\lambda_i)|\leqslant 1$, d'où : $\mathrm{Re}(P'(\lambda_i)-1)\leqslant 0$.

On a en fait $\mathrm{Re}(P'(\lambda_i)-1)<0$, sinon on aurait par ce qui précède :

$\mathrm{Re}(P'(\lambda_i))=|P'(\lambda_i)|$ et $|P'(\lambda_i)|=1$

ce qui ne peut arriver que si $P'(\lambda_i)=1$: cela est exclu car λ_i est une racine simple de $P(X)-X$.

On a donc $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{P'(\lambda_i)-1}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{\overline{P'(\lambda_i)}-1}{|P'(\lambda_i)-1|^2}\right)=\frac{\mathrm{Re}(P'(\lambda_i)-1)}{|P'(\lambda_i)-1|^2}<0$

donc

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{P'(\lambda_k)-1}\right)=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{P'(\lambda_k)-1}\right)<0$$

ce qui contredit $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{P'(\lambda_k)-1}=0$.

On en déduit l'existence d'un point fixe complexe répulsif pour $P(X)$.

Exercice 15

1) a) Si $T(X)=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$, $T(X)$ est la dérivée rationnelle de $F(X)=P(X)$ avec $P(X)=\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k+1}X^{k+1}\in\mathbb{C}[X]\subset\mathbb{C}(X)$.

b) Supposons que $G(X)\in\mathbb{C}(X)$ soit une dérivée rationnelle. Alors, il existe $F(X)=\frac{P(X)}{Q(X)}$ (écriture que l'on supposera irréductible mais ce n'est pas indispensable) telle que pour tout réel t qui ne soit pas un pôle de F et de G, on ait $G(t)=F'(t)$. D'après les formules de dérivation, on a pour de tels réels t : $G(t)=\frac{P'(t)Q(t)-Q'(t)P(t)}{Q^2(t)}$. En considérant $G(X)=\frac{A(X)}{B(X)}$, on en déduit que les polynômes $B(X)(P'(X)Q(X)-Q'(X)P(X))$ et $A(X)Q^2(X)$ sont égaux pour une infinités de valeurs (toute valeur de t qui ne soit pas un pôle de F et de G) donc sont égaux (voir corollaire du Théorème 2 du chapitre des polynômes). On en déduit l'égalité entre fractions rationnelles

$$G(X)=\frac{P'(X)Q(X)-Q'(X)P(X)}{Q^2(X)}.$$

Réciproquement, si l'on a l'égalité entre fractions rationnelles :

$$G(X)=\frac{P'(X)Q(X)-Q'(X)P(X)}{Q^2(X)} \quad ,$$

alors, en considérant $F(X)=\frac{P(X)}{Q(X)}$, on a bien l'égalité $G(t)=F'(t)$ pour tout réel t qui ne soit pas un pôle de F et de G.

2) a) On considère l'écriture irréductible $F(X)=\frac{P(X)}{Q(X)}$ avec $P(X)=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et

$Q(X)=\sum_{k=0}^{m} b_k X^k$, $a_n\neq 0,\ b_m\neq 0.$

Si $\deg(Q)=0$, $F(X)$ est une fonction polynomiale non constante donc $\deg(F'(X))=\deg(F(X))-1.$

Si $\deg(P)=0$, alors $\deg(Q)\neq 0$ et on a $F'(X)=\frac{-Q'(X)P(X)}{Q^2(X)}$ donc $\deg(F'(X))=(m-1)-2\mathrm{m}=-m-1=\deg(F(X))-1.$

Dans les autres cas, le terme de plus haut degré de $P'(X)Q(X)-Q'(X)P(X)$ est $(n-m)a_n b_m X^{n+m-1}\neq 0$ (remarquer que $n\neq m$ puisque $\deg(F(X))\neq 0,$) donc $\deg(F(X))=n-m$

et

$$\deg(F'(X))=\deg\left(\frac{P'(X)Q(X)-Q'(X)P(X)}{Q^2(X)}\right)=n+m-1-2\mathrm{m}=(n-m)-1=\deg(F(X))-1.$$

b) En faisant intervenir la partie entière de $F(X)$, qui est de même degré que $F(X)$ donc constante, on a $F(X)=k+F_0(X)$ avec $k\in\mathbb{R}$ et $\deg(F_0(X))<0$. On en déduit que si $F_0(X)\neq 0$, alors $F'(X)=F'_0(X)$ donc $\deg(F'(X))=\deg(F'_0(X))=\deg(F_0(X))-1<-1.$

Si $F_0(X)=0$, $\deg(F'(X))=\deg(0)=-\infty<-1.$

En prenant $F(X)=1+\frac{1}{X^n}$ pour n'importe quel entier naturel non nul, on voit que $\deg(F'(X))=-n-1$, qui peut être égal à n'importe quel entier strictement inférieur à – 1.

c) Si $G(X)=F'(X)$, alors :

soit $F(X)=0$, donc $G(X)=0$ et $\deg(G(X))\neq -1.$

soit $\deg(F(X))=0$ donc par le 2)b), $\deg(G(X))\neq -1.$

soit $F\neq 0$ et $\deg(F(X))\neq 0,$ alors $\deg(F'(X))=\deg(F(X))-1\neq -1.$

3) Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $a\in\mathbb{C}$ tel que $Q(a)=0$ et $P'(a)Q(a)-Q'(a)P(a)=0$. Alors $Q'(a)P(a)=0$, et , puisque l'écriture $\frac{P(X)}{Q(X)}$ est irréductible on a $P(a)\neq 0$ donc on obtient $Q'(a)=0$ donc a est une racine multiple de $Q(X)$, ce qui est impossible.

4)

a) Si $n_i=1$, alors $P'(z_i)Q(z_i)-Q'(z_i)P(z_i)=-Q'(z_i)P(z_i)\neq 0$ car $P(z_i)\neq 0$ puisque l'écriture $\frac{P(X)}{Q(X)}$ est irréductible, et $Q'(z_i)\neq 0$ car z_i est une racine simple de

z_i .

Si $n_i \geqslant 2$, alors $Q(X)=(X-z_i)^{n_i} Q_1(X)$ avec $Q_1(X) \in \mathbb{C}[X]$ et $Q_1(z_i) \neq 0$ et $Q'(X)=(X-z_i)^{n_i-1} Q_2(X)$ avec $Q_2(X) \in \mathbb{C}[X]$ et $Q_2(z_i) \neq 0$. On a alors

$$P'(X)Q(X)-Q'(X)P(X)=P'(X)(X-z_i)^{n_i}Q_1(X)-P(X)(X-z_i)^{n_i-1}Q_2(X)$$
$$=(X-z_i)^{n_i-1}\big(P'(X)(X-z_i)Q_1(X)-P(X)Q_2(X)\big)=(X-z_i)^{n_i-1}Q_3(X),$$

où l'on a posé $Q_3(X)=P'(X)(X-z_i)Q_1(X)-P(X)Q_2(X)$.

On a $Q_3(z_i)=-P(z_i)Q_2(z_i) \neq 0$ car $P(z_i) \neq 0$ puisque l'écriture $\dfrac{P(X)}{Q(X)}$ est irréductible.

On en déduit que le nombre z_i est racine d'ordre n_i-1 de $P'(X)Q(X)-Q'(X)P(X)$.

b) On a $F'(X)=\dfrac{P'(X)Q(X)-Q'(X)P(X)}{Q^2(X)}=\dfrac{A(X)}{B(X)}$.

On a vu dans la question précédente que l'écriture $\dfrac{P'(X)Q(X)-Q'(X)P(X)}{Q^2(X)}$ pouvait se simplifier pour tout *i* par $(X-z_i)^{n_i-1}$ (en notant que si $n_i=1$, $(X-z_i)^{n_i-1}=1$). On peut donc simplifier la fraction rationnelle $\dfrac{P'(X)Q(X)-Q'(X)P(X)}{Q^2(X)}$ par $(X-z_1)^{n_1-1}.(X-z_2)^{n_2-1}...(X-z_p)^{n_p-1}$.

Puisque chaque z_i est racine d'ordre n_i-1 de $P'(X)Q(X)-Q'(X)P(X)$ (pour $n_i \geqslant 2$,), on ne peut pas simplifier plus, donc l'écriture de la fraction devient irréductible.

On en déduit que

$$B(X)=C.\frac{Q^2(X)}{(X-z_1)^{n_1-1}.(X-z_2)^{n_2-1}...(X-z_p)^{n_p-1}}=C(X-z_1)^{n_1+1}.(X-z_2)^{n_2+1}...(X-z_p)^{n_p+1}$$

à une constante multiplicative *C* près. On remarque alors que les racines de $B(X)$ sont toutes d'ordre de multiplicité au moins égale à deux.

5) Le fait qu'une dérivée rationnelle soit nécessairement de degré différent de – 1 est le résultat du 2)c). Le fait que ses pôles éventuels soient d'ordre supérieurs ou égal à 2 provient du fait que, dans la question précédente, les racines éventuelles de $B(X)$ sont toutes d'ordre de multiplicité au moins égale à deux.

6) Supposons que $\forall i,\ A_{i,1}=0$. Alors la décomposition en éléments simple de $F(X)$ montre que ce dernier est somme d'un polynôme $E(X)$, qui est une dérivée rationnelle, et de termes de la forme $\dfrac{A_{i,j}}{(X-z_i)^j}$ avec $j \geqslant 2$, qui sont les dérivées de $\dfrac{-1}{j-1}.\dfrac{A_{i,j}}{(X-z_i)^{j-1}} \in \mathbb{C}(X)$. On en déduit que $F(X)$ est une dérivée rationnelle comme somme de dérivées rationnelles.

Réciproquement, si $F(X)$ est une dérivée rationnelle, puisque $E(X)$ et les éventuels termes de la forme $\dfrac{A_{i,j}}{(X-z_i)^j}$ avec $j \geqslant 2$ le sont aussi, on en déduit en faisant la différence que $\displaystyle\sum_i \frac{A_{i,1}}{X-z_i}$ est une dérivée rationnelle. Or, chaque z_i est pôle simple de la fraction rationnelle $\displaystyle\sum_i \frac{A_{i,1}}{X-z_i}$, ce qui est impossible par le 5), à moins que chaque constante $A_{i,1}$ ne soit nulle.

7)

a) Si l'on avait $\deg(Q(X)) \leqslant 1$, la fraction rationnelle $F(X)$ serait un polynôme, donc $\dfrac{1}{A(X)}$ aussi ce qui n'est pas car $\deg A(X) \geqslant 1$.

Si a est le coefficient du terme de plus haut degré de $Q(X)$, alors $\dfrac{1}{A(X)}=F'(X)=\dfrac{\frac{1}{a}P(X)}{\frac{1}{a}Q(X)}$.

Ainsi, en considérant $\frac{1}{a}P(X)$ et $\frac{1}{a}Q(X)$ à la place de $P(X)$ et $Q(X)$, on peut supposer que $Q(X)$ est normalisé.

Par les résultats du 2), on a forcément $\deg(F(X))\leqslant 0$, sinon on aurait $\deg\left(\dfrac{1}{A(X)}\right)=\deg(F'(X))=\deg(F(X))-1\geqslant 0$ ce qui est impossible car $\deg A(X)\geqslant 1$.

Supposons que $\deg(F(X))=0$. En appelant a le coefficient du terme de plus haut degré de $P(X)$, on a :

$$\left(\frac{P(X)-aQ(X)}{Q(X)}\right)'=\left(\frac{P(X)}{Q(X)}\right)'=\frac{1}{A(X)}$$

$\deg(P(X)-aQ(X))<\deg(P(X))=\deg(Q(X))$ car le terme de plus haut degré de $P(X)$ ce simplifie avec celui de $aQ(X)$ donc $\deg\left(\dfrac{P(X)-aQ(X)}{Q(X)}\right)<0$.

Ainsi, en considérant éventuellement $P(X)-aQ(X)$ à la place de $P(X)$ on peut supposer que $\deg(F(X))\leqslant -1$.

b) L'écriture $\dfrac{1}{A(X)}$ est clairement irréductible, on déduit de la question 4)b) que $A(X)=C.\Pi_{i=1}^{\alpha}(X-\lambda_i)^{1+n_i}$ pour une certaine constante C qui correspond au coefficient du terme de plus haut degré de $A(X)$.

On a alors $\dfrac{P'(X)Q(X)-P(X)Q'(X)}{Q^2(X)}=\dfrac{1}{C\,\Pi_{i=1}^{\alpha}(X-\lambda_i)^{n_i+1}}$

donc

$$P'(X)Q(X)-P(X)Q'(X)=\frac{Q^2(X)}{C\,\Pi_{i=1}^{\alpha}(X-\lambda_i)^{n_i+1}}=\frac{\Pi_{i=1}^{\alpha}(X-\lambda_i)^{2n_i}}{C\,\Pi_{i=1}^{\alpha}(X-\lambda_i)^{n_i+1}}=\frac{1}{C}.\Pi_{i=1}^{\alpha}(X-\lambda_i)^{n_i-1}.$$

c) Puisque $\deg(P(X))\geqslant 1$ et $\deg(Q(X))\geqslant 1$, on a $\deg(P'(X)Q(X))=\deg(P(X)Q'(X))=\deg(P(X))+\deg(Q(X))-1$.

En appelant a le coefficient du terme de plus haut degré de $P(X)$, le terme de plus haut degré de $P'(X)Q(X)$ vaut $a.\deg(P(X))$ tandis que celui de $P(X)Q'(X)$ vaut $a.\deg(Q(X))$.

Puisque $\deg(P(X))<\deg(Q(X))$, les termes de plus haut degré de $P'(X)Q(X)$ et de $P(X)Q'(X)$ ne se simplifient pas et $\deg(P'(X)Q(X)-P(X)Q'(X))=\deg(P(X))+\deg(Q(X))-1$.

On déduit de la question précédente que $\deg(P(X))+\deg(Q(X))-1=\deg\left(\Pi_{i=1}^{\alpha}(X-\lambda_i)^{n_i-1}\right)$ donc $\deg(P(X))+\deg(Q(X))-1=\sum_{i=1}^{\alpha}(n_i-1)=\sum_{i=1}^{\alpha}(n_i)-\alpha=\deg(Q(X))-\alpha$ car $Q(X)=\Pi_{i=1}^{\alpha}(X-\lambda_i)^{n_i}$.

On en déduit la relation $\deg(P(X))-1=-\alpha$ qui est impossible car $\alpha\geqslant 1$ et $\deg(P(X))-1\geqslant 0$.

On en déduit que $P(X)$ est une constante. Cette constante est nécessairement non nulle car

$F'(X)=\dfrac{1}{A(X)}\neq 0$.

. d) Posons alors $P(X)=a$. En reprenant les calculs menés à la question précédente, on arrive à $-aQ'(X)=\dfrac{1}{C}.\Pi_{i=1}^{\alpha}(X-\lambda_i)^{n_i+1}$.

En raisonnant à nouveau sur les degrés, on a $\deg(Q(X))-1=\sum_{i=1}^{\alpha}(n_i-1)=\deg(Q(X))-\alpha$ donc $\alpha=1$: $Q(X)$ ne possède qu'une seule (d'ordre quelconque) donc , étant un polynôme unitaire, on a $Q(X)=(X-\lambda)^k,\ k\geqslant 1,\ \lambda\in\mathbb{C}$.

On a alors $A(X)$ de la forme $A(X)=C.(X-\lambda)^{1+k}$, et réciproquement, si

$A(X)=C.(X-\lambda)^{1+k}$, alors $\dfrac{1}{A(X)}=\left(\dfrac{-\dfrac{1}{kC}}{(X-\lambda)^k}\right)'$ est bien une dérivée rationnelle.

On en déduit que les polynômes $A(X)\in\mathbb{C}[X]$ tels que $\dfrac{1}{A(X)}$ soit une dérivée rationnelle sont les polynômes constants et de la forme $A(X)=C.(X-\lambda)^{1+k}$ pour $C\neq 0,\ k\in\mathbb{N}^*$ et $\lambda\in\mathbb{C}$.

e) Par le 6), $\dfrac{1}{A(X)}$ admet au moins un élément simple d'ordre 1 non nul si et seulement si ce n'est pas une dérivée rationnelle, c'est à dire par le d), si et seulement si $\dfrac{1}{A(X)}$ n'est pas lui-même un élément simple d'ordre supérieur ou égal à 2.