Du vélo de Reuleaux aux courbes algébriques de largeur constante

Yves Martinez-Maure

Du vélo de Reuleaux aux courbes algébriques de largeur constante

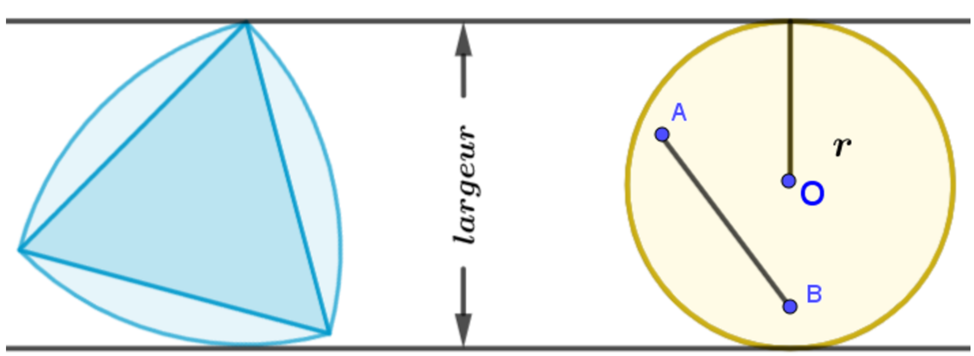
Yves Martinez-Maure, Sorbonne Université

Rouler avec des roues triangulaires, forer des trous presque carrés ou construire des plaques d'égout non circulaires qui ne tombent pas dans leur trou, tant de possibles nous sont offerts par les courbes de largeur constante qui fascinent mathématiciens et amateurs. Enfourchez votre imagination et accompagnez-nous dans cette randonnée du vélo de Reuleaux aux courbes algébriques convexes de largeur constante.

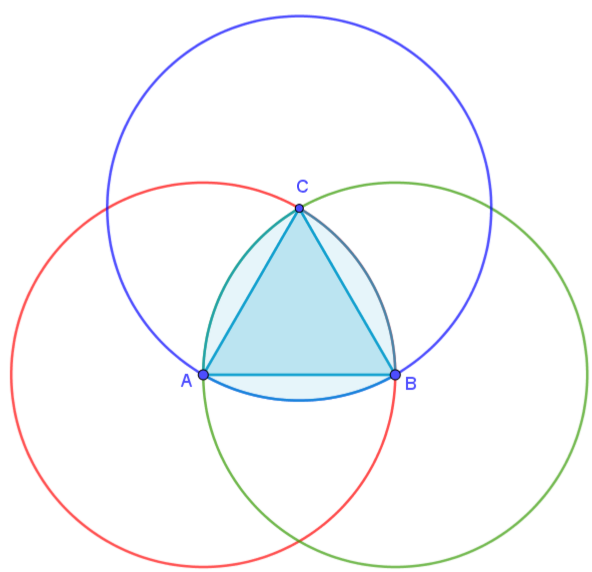
Nous avons tous appris à construire un cercle au compas à l'école primaire. Nous avons aussi appris qu'une partie du plan euclidien bordée par un cercle est appelée un disque. Les disques ont cette propriété remarquable d'être à la fois « convexes » et « de largeur constante » : dire qu'une partie du plan bordée par une courbe est « convexe » signifie que toutes les fois que l'on prend deux points A et B dans cette partie, le segment qui les joint est entièrement contenu dans la partie considérée ; et dire qu'elle est « de largeur constante » signifie alors que la distance entre deux droites d'appui parallèles ne dépend pas de la direction de ces droites. Dans le cas d'un disque, la largeur est bien sûr le diamètre.

On résume cela en disant qu'un cercle est une courbe convexe de largeur constante du plan euclidien.

Mais, me direz-vous, les cercles ne sont-ils pas les seules courbes du plan qui soient dotées de cette propriété remarquable d'être « convexe et de largeur constante » ?



Eh bien, non ! Il en existe beaucoup d'autres. On peut même en construire beaucoup au compas ! L'exemple le plus simple se construit comme ceci : prenez deux points distincts du plan, disons A et B ; construisez le cercle de centre A et de rayon AB, puis le cercle de centre B et de rayon AB ; ces deux cercles se coupent l'un l'autre en deux points ; prenez l'un de ces deux points, nommez-le C et construisez le cercle de centre C et de rayon AB. Les points appartenant aux trois disques bordés par les cercles que vous venez de construire forment une partie convexe et de largeur constante du plan. La courbe qui la borde, formée de trois arcs de cercles de même rayon, est appelée un triangle de Reuleaux, du nom de l'ingénieur mécanicien allemand Franz Reuleaux qui a découvert au XIXème siècle que cette courbe est bien dotée de cette fameuse propriété d'être « convexe de largeur constante ». Cette propriété donne aux cercles et aux triangles de Reuleaux la possibilité de rouler indéfiniment entre deux droites parallèles avec lesquelles ils restent constamment en contact.

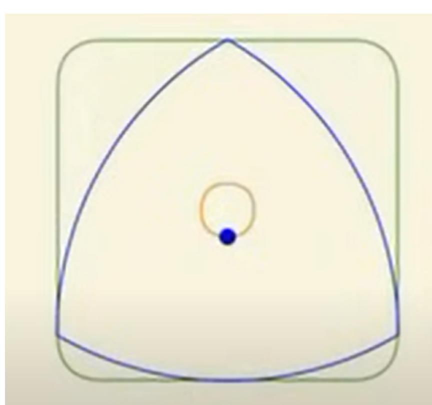


Mais alors, peut-on faire du vélo avec des roues en forme de courbes convexes de largeur constante non circulaires ? Par exemple, avec des roues en forme de triangle de Reuleaux ?

Eh bien, oui ! Certains s'y sont d'ailleurs essayés avec succès comme cet ingénieux chinois Guan Baihua. Notez que sa roue avant n'est pas un triangle de Reuleaux mais un pentagone de Reuleaux, lui aussi de largeur constante. Pour voir rouler le triangle de Reuleaux, on pourra consulter :
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/22/Rotation_of_Reuleaux_triangle.gif

Guan Baihua sur son vélo d'exception

Naturellement, il s'agit là d'une application purement récréative du triangle de Reuleaux. Il en existe bien d'autres et des plus sérieuses. Le triangle de Reuleaux permet par exemple d'effectuer des forages de trous presque carrés. Notez que lors d'un tel forage, le centre de la tête du forêt en forme de triangle de Reuleaux (c'est-à-dire le centre de son cercle circonscrit), représenté par un point bleu sur la figure ci-dessous, ne reste pas statique : il se meut alors sur une courbe fermée bien choisie. Pour mieux le comprendre, consulter l'animation suivante :
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/8a/Reuleaux_triangle_roll.gif



Forage de trous presque carrés

Léonhard Euler semble avoir été le premier mathématicien à étudier les corps convexes de largeur constante. Il leur donna le nom d'orbiformes parfois encore utilisé. Depuis leur étude par Euler, ces objets ont suscité un fort engouement qui ne s'est jamais démenti. Ils sont aujourd'hui encore l'objet de questions ouvertes et d'une vaste littérature [3]. Parmi les grands problèmes qui ont été résolus dans le plan, nous pouvons noter cette question qui nous fait apparaître le cercle et le triangle de Reuleaux comme deux extrêmes de la classe des courbes convexes de largeur constante :

Parmi toutes les courbes convexes de largeur constante donnée L, quelles sont celles qui bordent la surface de plus grande aire ? Et, celles qui bordent la surface de plus petite aire ?

Les cercles de rayon $L/2$ sont les courbes convexes de largeur constante L bordant la surface de plus grande aire : cela résulte du théorème isopérimétrique et d'un théorème de Barbier. Les triangles de Reuleaux de largeur constante L sont quant à eux les courbes convexes de largeur constante L bordant la surface de plus petite aire. C'est le théorème dit de Blaschke-Lebesgue. Le lecteur intéressé pourra consulter les pages wikipédia consacrées à ces théorèmes.

L'analogue de cette question en dimension supérieure demeure à ce jour un problème ouvert pour ce qui est de la partie minimisation : *nous ignorons en effet à ce jour quels sont, dans l'espace à trois dimensions, les corps convexes de largeur constante donnée et de volume minimal* [3].

Revenons un instant à nos simples cercles du plan euclidien et dotons notre plan d'un repère orthonormé $(O; I, J)$. Le cercle de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon r admet une équation cartésienne que l'on peut écrire sous la forme $P(x, y) = 0$, où $P(x, y) = (x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2$. En d'autres termes, ce cercle est une courbe algébrique réelle, c'est-à-dire une courbe dont l'équation cartésienne peut être mise sous la forme $Q(x, y) = 0$, où Q est une fonction polynomiale. Rappelons ici qu'une fonction $Q(x, y)$ est dite polynomiale si elle peut être formée à partir de x, de y et de constantes par un nombre fini d'additions et de multiplications.

Un cercle est donc une courbe algébrique convexe de largeur constante. Existe-t-il des courbes algébriques convexes de largeur constante qui ne soient pas circulaires ?

Eh bien, oui ! En 1997, l'américain Stanley Raboniwitz [5] a démontré qu'il existe une courbe convexe non circulaire de largeur constante formée de points dont les coordonnées satisfont tous l'équation $P(x,y)=0$,

$$\begin{aligned}P(x,y) := {} & (x^2+y^2)^4 - 45(x^2+y^2)^3 - 41283(x^2+y^2)^2 \\ & +7950960(x^2+y^2) + 16(x^2-3y^2)^3 + 48(x^2+y^2)(x^2-3y^2)^2 \\ & +x(x^2-3y^2)\Big(16(x^2+y^2)^2 - 5544(x^2+y^2) + 266382\Big) - 720^3.\end{aligned}$$

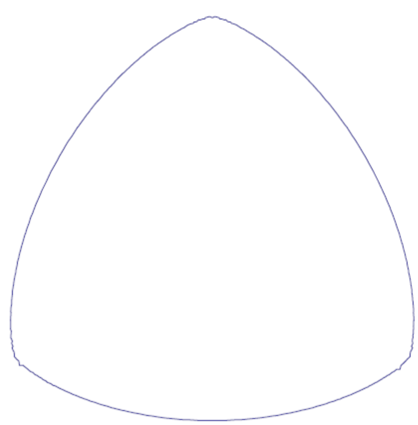
Un peu compliqué me direz-vous ? Nous avons depuis réussi à faire un peu mieux. Nous avons en effet démontré que l'ensemble des points du plan euclidien dont les coordonnées (x,y) vérifient

$$\begin{aligned}&\Big((x^2+y^2)^2 + 8y(y^2-3x^2)\Big)^2 + 432y(y^2-3x^2)(351-10(x^2+y^2)) \\ &= 567^3 + 28(x^2+y^2)^3 + 486(x^2+y^2)(67(x^2+y^2) - 567\times 18)\end{aligned}$$

forme une courbe convexe non circulaire de largeur constante [2].

Nous ne pourrons certainement pas obtenir un meilleur résultat car il a été démontré que si une courbe algébrique convexe de largeur constante est non circulaire, alors elle est au minimum de degré 8 [1].

Cet exemple présente un petit avantage supplémentaire par rapport à celui de Stanley Rabinowitz. Tous les points de la courbe de Rabinowitz vérifient bien l'équation $P(x,y)=0$. Mais ce ne sont pas les seuls : l'ensemble des points du plan dont les coordonnées vérifient $P(x,y)=0$ contient aussi des points isolés qui ne sont pas sur la courbe [4]. Par chance, dans le cas de notre équation, tous les points satisfaisant l'équation sont sur la courbe (ibidem).

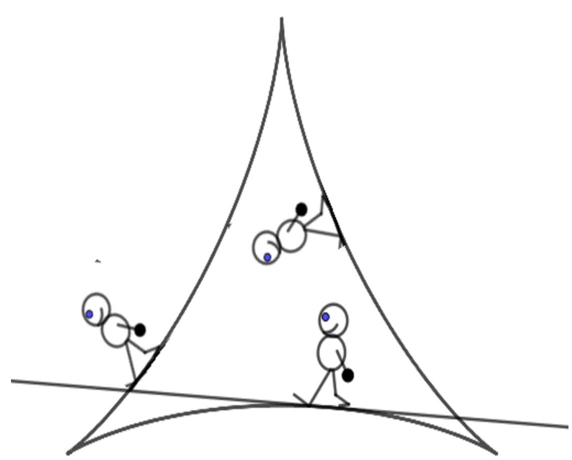


Courbe convexe algébrique de largeur constante

Comment diable en sommes-nous venus à considérer cette courbe ? Nous avions remarqué que la deltoïde représentée ci-dessous est une courbe algébrique de degré 4 dont une équation cartésienne est

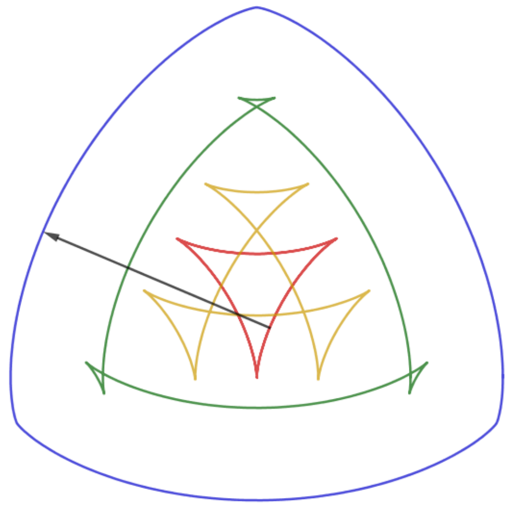
$$\left(x^2+y^2\right)^2+18\left(x^2+y^2\right)-8y\left(y^2-3x^2\right)=27.$$

et qu'elle est (non convexe) de largeur constante 0. Comment une largeur constante de zéro est-elle possible ? Observez ce petit bonhomme qui se tient debout sur une tangente à la deltoïde et imaginez le point de tangence se déplaçant sur la deltoïde dans le sens des aiguilles d'une montre. Quand il parvient à la pointe en bas à gauche, il rebrousse chemin à reculons et se trouve à l'extérieur de la deltoïde (on dit que l'extrémité de la pointe est un point de rebroussement). Après un tour, le petit bonhomme aura la tête en bas. Il sera alors sur une tangente parallèle à la première qui se confond avec elle, si bien que la distance entre ces tangentes sera nulle. Pour que le petit bonhomme revienne à sa position initiale, il faudra que le point de tangence effectue un second tour.



Surfons sur la deltoïde

La deltoïde est donc parcourue deux fois. Déplaçons chaque point de la deltoïde d'une distance constante sur la perpendiculaire orientée à la deltoïde en ce point (orientée dans la direction de la tête de notre petit bonhomme). Nous obtenons ainsi des courbes dites parallèles à la deltoïde. La première d'entre elles qui est convexe est notre courbe.



Courbes colorées “parallèles” à la deltoïde

References

[1] `M. Bardet, T. Bayen`, On the degree of the polynomial defining a planar algebraic curves of constant width. arXiv2013: https://arxiv.org/abs/1312.4358

[2] `Y. Martinez-Maure`, *Noncircular algebraic curves of constant width: an answer to Rabinowitz*, à paraître dans le bulletin canadien de mathématiques.

[3] `H. Martini, L. Montejano, D. Oliveros`, *Bodies of constant width. An introduction to convex geometry with applications*. Cham: Birkhäuser (2019).

[4] `C. Panraksa, L.C. Washington`, Real algebraic curves of constant width, Period. Math. Hung. 74 (2017), 235-244.

[5] `S. Rabinowitz`, *A polynomial curve of constant width.* Missouri J. Math. Sci 9 (1997), 23-27.