Jeux bayésiens hypergraphiques

Hélène Fargier, Paul Jourdan, Régis Sabbadin

▶ **To cite this version:**

Hélène Fargier, Paul Jourdan, Régis Sabbadin. Jeux bayésiens hypergraphiques. Rencontres des Jeunes Chercheurs en Intelligence Artificielle (RJCIA 2021) @ Plate-Forme Intelligence Artificielle (PFIA 2021), Jul 2021, Bordeaux, France. pp.38-45. hal-03298713

HAL Id: hal-03298713
https://hal.science/hal-03298713

Submitted on 23 Jul 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Jeux bayésiens hypergraphiques

H. Fargier[1], P. Jourdan[1,2], R. Sabbadin[2]

[1] IRIT, Université de Toulouse, Toulouse, France
[2] INRAE, Université de Toulouse, UR MIAT, Castanet-Tolosan, France

helene.fargier@irit.fr, {paul.jourdan, regis.sabbadin}@inrae.fr

Résumé

Cet article définit le cadre des jeux bayésiens hypergraphiques, qui permet de représenter succinctement des jeux bayésiens à interactions locales. Ce cadre généralise à la fois les jeux bayésiens sous forme normale et les jeux hypergraphiques (y compris les jeux polymatriciels). Nous montrons que les jeux bayésiens hypergraphiques (et polymatriciels) peuvent être transformés, en temps polynomial, en jeux hypergraphiques équivalents à information complète, en généralisant le théorème de Howson et Rosenthal. Cette démonstration a plusieurs conséquences. Elle permet de montrer que le problème de recherche d'un équilibre de Nash mixte dans un jeu bayésien hypergraphique ou polymatriciel est PPAD*-complet tandis que le problème de recherche de l'existence d'un équilibre de Nash pur est NP-complet. Elle montre également que le problème de recherche d'un équilibre de Nash mixte dans un jeu bayésien sous forme normale est aussi* PPAD*-complet*

Mots-clés

Théorie des jeux, jeux bayésiens, jeux hypergraphiques, décision sous incertitude

Abstract

This paper defines the framework of hypergraphical Bayesian games, which allows to concisely specify Bayesian games with local interactions. This framework generalizes both normal-form Bayesian games and hypergraphical games (including polymatrix games). Establishing a generalization of Howson and Rosenthal's Theorem, we show that hypergraphical (resp. polymatrix) Bayesian games can be transformed, in polynomial time, into equivalent complete-information hypergraphical (resp. polymatrix) games. This result has several consequences. It involves that finding a mixed Nash equilibrium in a hypergraphical or polymatrix Bayesian game is a PPAD*-complete problem while the existence of a pure Nash equilibrium defines an NP-complete problem. It also implies that computing a mixed Nash-equilibrium in a standard normal-form, Bayesian game is* PPAD*-complete.*

Keywords

Game Theory, Bayesian games, hypergraphical games, decision under uncertainty

1 Introduction

La théorie des jeux a pour but de représenter, expliquer et optimiser des situations où plusieurs agents, les joueurs, ont le choix entre plusieurs actions. L'utilité reçue par un joueur, qu'il souhaite maximiser, dépend de son action choisie ainsi que des actions choisies par les autres joueurs. Dans un jeu simultané à information complète, les joueurs ne peuvent pas coordonner leurs actions mais chacun a une connaissance totale du jeu : les joueurs, les actions possibles et les utilités.

L'hypothèse d'une information complète n'est pas toujours satisfaite : les joueurs ne connaître que partiellement le jeu. Leur connaissance des utilités des autres joueurs peut, en particulier, être incomplète. Les jeux bayésiens [17], proposés dans les années soixante, permettent de modéliser la connaissance incomplète d'un jeu et la possibilité qu'ont les joueurs de disposer d'informations supplémentaires, représentées par la notion de "type". Le "type" d'un joueur regroupe les informations sur le jeu auxquelles il a accès.

La représentation sous forme normale d'un jeu bayésien est coûteuse. Pour un jeu à n joueurs, chacun d'entre eux disposant de t types possibles et de d actions, il faut définir et stocker n tables d'utilité de taille $t^n \times d^n$. Il existe plusieurs cadres de représentation succincte de jeux à information *complète*. En particulier les *jeux graphiques* [22], *jeux polymatriciels* [29] et *jeux hypergraphiques* [25] ont été proposés pour représenter des jeux à plusieurs joueurs dont les interactions sont locales. Dans ces cadres, l'utilité (dite globale) d'un joueur est la somme d'utilités (dites locales) obtenues dans différents sous-jeux (un seul, dans le cas graphique) auxquels il participe. Chacun de ces sous-jeux n'implique qu'une partie de l'ensemble des joueurs.

Ces représentations peuvent demander un espace exponentiellement inférieur à une représentation sous forme normale. Dans un jeu polymatriciel, par exemple, les interactions des agents sont représentées par un graphe où chaque agent (noeud) participe à plusieurs sous-jeux à deux joueurs sous forme normale (arêtes). Dans un cas hypergraphique les joueurs peuvent jouer a des sous-jeux avec plus de 2 joueurs. La taille de représentation d'un jeu hypergraphique est polynomiale dans le nombre d'actions possibles pour chaque joueur et dans le nombre total de joueurs et exponentielle en le nombre maximal de joueurs d'un sous-jeu. Ces cadres succincts disposent de plusieurs méthodes de ré-

solution exacte ou approchée : LCP [18], descente de gradient [14] , propagation de message [22, 24, 8], programmation par contrainte [27, 16, 28]...
Dans cet article, nous proposons un cadre de représentation des jeux bayésiens plus concis que la forme normale habituelle : le cadre des jeux bayésiens *hypergraphiques*. La prochaine section présente les notions basiques sur lesquelles notre travail s'appuie. La section 3 définit les jeux bayésiens polymatriciels et hypergraphiques. Nous rappelons ensuite dans la section 4 que, grâce au théorème de Howson et Rosenthal [19], tout jeu bayésien polymatriciel peut être transformé en un jeu polymatriciel (à information complète) équivalent. Nous généralisons le théorème de Howson et Rosenthal et proposons une transformation en temps polynomial d'un jeu bayésien hypergraphique vers un jeu hypergraphique à information complète. On peut alors montrer que le problème de recherche d'un équilibre dans un jeu bayésien hypergraphique n'est pas plus difficile que dans un jeu hypergraphique "standard".

2 Contexte et notations

2.1 Jeux sous forme normale

Un jeu sous forme normale à information complète est défini par un triplet $G = \langle N, A, U \rangle$. $N = \{1, \ldots, n\}$ est un ensemble fini de joueurs. $A = \times_{i \in N} A_i$ est un ensemble d'actions jointes, où A_i est l'ensemble fini des actions du joueur $i \in N$. Une action jointe est un vecteur $a \in A$ spécifiant une action a_i pour chaque joueur i. $U = \{(u_i)_{i \in N}\}$ est un ensemble de fonctions d'utilité associant à toute action $a \in A$ un réel $u_i(a)$ décrivant l'utilité du joueur i lorsque $a \in A$ est jouée. Dans un jeu sous forme normale (jeu "SNF"), u_i est donnée par une table à $|A|$ entrées.
Une stratégie mixte pour un joueur i est une distribution de probabilité sur A_i. Une stratégie mixte jointe est un n-uplet $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_n)$ où σ_i est une stratégie mixte du joueur i. L'utilité d'un joueur pour une stratégie mixte est son utilité espérée :

Définition 1 (Utilité d'une stratégie mixte)**.** *Pour un jeu $G = \langle N, A, U \rangle$, σ une stratégie et i un joueur :*

$$EU_i(\sigma) = \sum_{a \in A} \left(\prod_{j=1}^{n} \sigma_j(a_j) \right) u_i(a)$$

Lorsque pour σ une seule action par joueur a une probabilité non nulle, σ est une stratégie *pure* et définit simplement une action jointe a. Dans ce cas, on a tout simplement $EU_i(\sigma) = u_i(a)$.
Dans la suite nous utilisons la notation suivante : pour tout vecteur $v = (v_1, \ldots, v_n)$ dans le domaine produit $V = \times_{i \in N} V_i$ et pour n'importe quel $e \subseteq N$, v_e est la restriction de v à e et $V_e = \times_{i \in e} V_i$. Par abus de notation, nous utilisons v_i pour $v_{\{i\}}$. Pour tout i, $-i$ désigne l'ensemble $N \backslash \{i\}$, i.e.$v_{-i} = (v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n) \in V_{-i} = \times_{j \neq i} V_j$. v_{-i} est une restriction de v à tous les joueurs sauf i. Enfin, "." désignera la concaténation : $v'_i.v_{-i} = (v_1, \ldots, v_{i-1}, v'_i, v_{i+1}, \ldots, v_n)$. En particulier, pour deux actions jointes $a, a' \in A$, $a'_i.a_{-i}$ désigne l'action jointe où a_i est remplacé par a'_i.
Un équilibre de Nash est une stratégie mixte jointe qui ne peut pas être modifiée de manière unilatérale par un joueur pour obtenir un gain d'utilité.

Définition 2 (Équilibre de Nash)**.** *Une stratégie mixte σ est un équilibre de Nash ssi $EU_i(\sigma_i.\sigma_{-i}) \geqslant EU_i(\sigma'_i.\sigma_{-i})$, $\forall i \in N, \forall \sigma'_i$. Une action jointe a est un équilibre de Nash pur ssi $U_i(a \geqslant U_i(a'_i.a_{-i})$, $\forall i \in N, \forall a'_i \in A_i$.*

Le modèle classique SNF est limité. Premièrement, l'hypothèse d'une connaissance complète n'est pas toujours satisfaite. Les joueurs peuvent ne pas être bien informés sur les propriétés du jeu : la connaissance du jeu est alors qualifiée *d'incomplète*. Les jeux bayésiens, proposés par Harsanyi [17] offrent un cadre adapté pour les jeux à information incomplète. Ils sont détaillés ci dessous. Deuxièmement, même en supposant une connaissance complète, la description d'un problème sous la forme normale est très coûteuse lorsque le nombre de joueurs augmente alors que les interactions entre les joueurs restent limitées. Le cadre des jeux hypergraphiques, qui permet un gain exponentiel en espace de cette description, est détaillé dans la sous-section 2.3.

2.2 Jeux bayésiens

Un jeu à information incomplète [17, 23] comprend un ensemble S de "mondes possibles", chaque monde correspondant à un jeu classique. L'utilité u_i d'un agent i ne dépend pas seulement des actions mais aussi du monde/jeu réel. Les joueurs ne savent pas précisément quel est le monde réel, mais ils ont une connaissance commune sur ce dernier. Juste avant de jouer, chaque joueur i reçoit une information privée $\tau_i(s)$ sur le monde réel. τ_i associe à chaque monde $s \in S$ un élément θ_i d'un ensemble Θ_i appelé l'ensemble des "types" du joueur i. Après avoir observé $\tau_i(s)$, l'agent i en sait plus sur le jeu réel, mais plusieurs jeux restent souvent possibles. L'agent conditionne ses connaissances par $\tau_i(s)$ et décide quelle action jouer. Les agents peuvent obtenir des informations différentes et par conséquent, ne partagent pas la même connaissance a posteriori sur le monde réel.
Harsanyi propose de décrire les jeux à information incomplète à partir de l'ensemble des types $\Theta = \Theta_1 \times \cdots \times \Theta_n$ (les mondes sous-jacents sont omis). L'idée de Harsanyi en définissant les types était que la notion de type encapsule toutes les informations d'un jeu auxquelles les joueurs ont accès. Elle n'inclut pas seulement le statut du monde que les joueurs peuvent observer mais aussi leur croyance sur les autres joueurs et leur état mental introspectif [1].
Les jeux bayésiens sont des jeux à information incomplète où la connaissance a priori des joueurs est commune et est capturée par une distribution de probabilité :

Définition 3 (Jeu bayésien)**.** *Un jeu bayésien (B-game) G est un n-uplet $\langle N, A, \Theta, P, U \rangle$ où :*

— *N est un ensemble fini de n joueurs $\{1, ..., n\}$;*

1. Voir [5, 2, 3, 4, 13] pour les liens entre les états de croyance et types, et pour plus de développements sur la théorie des jeux épistémiques.

— $A = \times_{i \in N} A_i$, *où* A_i *est l'ensemble des actions du joueur* i *;*
— $\Theta = \times_{i \in N} \Theta_i$, *où* Θ_i *est l'ensemble des types du joueur* i*, regroupe toute les configurations* $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$ *de types ;*
— $P : \Theta \to [0, 1]$ *est une distribution de probabilité jointe sur les combinaisons de types ;*
— $U = \{(u_i)_{i \in N}\}$ *où* $u_i : A \times \Theta \to \mathbb{R}$ *est la fonction d'utilité du joueur* i*.*

P capture la connaissance a priori des joueurs. Cette connaissance est commune. L'information que les joueurs ont sur le monde réel correspond à un $\theta \in \Theta$, mais n'est pas commune. i n'a pas connaissance de θ mais seulement de θ_i. $P(.|\theta_i)$ représente la connaissance a posteriori qu'a l'agent i de type θ_i à propos du jeu. D'autre part, l'utilité $u_i(a, \theta)$ est l'utilité pour i de l'action jointe a quand le monde réel est décrit par θ. Elle est reçue seulement après que tous les joueurs aient joué leurs actions et révélé leurs types : u_i dépend de θ et non pas seulement de θ_i.
Un joueur i, de type θ_i, joue une stratégie mixte $\sigma_i(.|\theta_i)$, qui est une distribution de probabilité sur A_i. Comme sous information complète, une stratégie pure est une stratégie mixte particulière.
Dans un jeu bayésien, pour toute combinaison de types $\theta \in \Theta$, la probabilité qu'une action jointe $a \in A$ soit sélectionnée est $\sigma(a|\theta) = \prod_{i \in N} \sigma_i(a_i|\theta_i)$.
L'utilité espérée d'une stratégie σ pour un joueur i de type θ_i est l'espérance de l'utilité de i selon la distribution σ, conditionnée par le type θ_i reçu par i :

Définition 4 (Utilité d'une stratégie dans jeu bayesien)**.**

$$EU_i(\sigma|\theta_i) = \sum_{\theta_{-i}} P(\theta_{-i}|\theta_i) \sum_{a \in A} \left(\prod_{j=1}^{n} \sigma_j(a_j|\theta_j) \right) u_i(a, \theta)$$

Comme dans un jeu à information complète, σ est un équilibre de Nash mixte ssi $EU_i(\sigma_i.\sigma_{-i}|\theta_i) \geqslant EU_i(a_i.\sigma_{-i}|\theta_i), \forall i \in N, \theta_i \in \Theta_i, \forall a_i \in A_i$.
Un jeu bayésien sous forme normale est décrit par une distribution de probabilité de taille t^n et par n tables d'utilité de taille $t^n.d^n$ (pour une question de simplicité, nous considérons que tous les joueurs ont t types et d actions possibles). Même en tenant compte de cette représentation en extension coûteuse, le problème de recherche d'un équilibre de Nash est difficile : pour un jeu bayésien sous forme normale, déterminer s'il existe un équilibre de Nash pur est un problème NP-complet [10] et le problème de recherche d'un équilibre mixte est PPAD-difficile même s'il n'y a que deux joueurs [9, 12].

2.3 Jeux hypergraphiques

La question de la représentation succincte des jeux est importante pour les jeux classiques non bayésiens : la représentation d'un jeu classique sous sa forme SNF est coûteuse (n tables de taille d^n) et, comme mentionné par [15] :

> "For large population of games (modeling for instance agents interactions over the Internet), the SNF is practically unfeasible, while the more succinct graphical normal form works very well, and is actually a more natural representation."

En effet, dans beaucoup de situations, l'utilité d'un joueur ne va pas dépendre des actions de tous les autres – les interactions sont souvent *locales*. Pour les jeux classiques, [29] a proposé les *jeux polymatriciels* comme moyen de représentation des jeux à plusieurs joueurs avec des interactions par paires. Ce formalisme a été généralisé dans les années 2000 pour décrire les interactions locales comprenant plus de deux joueurs [22, 25] :

Définition 5 (Jeu hypergraphique)**.** *Un* jeu hypergraphique *est un n-uplet* $G = \langle N, A, E, U \rangle$ *où :*
— $N = \{1, \ldots, n\}$ *est un ensemble fini de joueurs ;*
— $A = \times_{i \in N} A_i$*, où* A_i *est l'ensemble fini d'actions du joueur* $i \in N$ *;*
— E *est un ensemble de sous-ensembles de* N*, i.e.*$\langle N, E \rangle$ *est un hypergraphe décrivant les interactions locales ;*
— $U = \{u_i^e\}_{e \in E, i \in e}$ *est un ensemble de fonctions d'utilité locales. Chaque* u_i^e *associe à* $a_e \in A_e$ *une utilité dans* $\mathbb{R}$

Chaque hyperarête e correspond à un jeu SNF classique $G^e = \langle e, A_e, U_e \rangle$: e est l'ensemble des joueurs, $A^e = \times_{i \in e} A_i$ et $U_e = \{u_i^e, i \in e\}$. S'il n'existe aucune hyperarête contenant la paire (i, j), cela signifie que la fonction d'utilité du joueur i ne dépend pas de l'action choisie par le joueur j. Cependant, les stratégies de deux joueurs ne jouant pas ensemble peuvent tout de même être liées indirectement via les actions des autres joueurs dont ils dépendent. Dans un jeu hypergraphique, la fonction d'utilité globale d'un joueur est la somme des utilités récupérées par ce joueur dans les jeux locaux dans lesquels il est impliqué.

Définition 6 (Utilité d'une stratégie jointe pure)**.**

$$u_i(a) = \sum_{e \in E \text{ tq } i \in e} u_i^e(a_e), \forall i \in N, \forall a \in A$$

En d'autres termes, un jeu SNF équivalent à un jeu hypergraphique $G = \langle N, A, E, U \rangle$ est un jeu $\langle N, A, \{u_i, i \in N\} \rangle$, u_i étant donnée par la définition 6.
L'utilité d'une stratégie mixte σ est définie par :

Définition 7 (Utilité d'une stratégie mixte)**.**

$$EU_i(\sigma) = \sum_{a \in A} \sigma(a). \left(\sum_{e \in E, i \in e} u_i^e(a_e) \right)$$

Quand chaque jeu local est un jeu à 2 joueurs, G est un jeu *polymatriciel*. Les jeux graphiques, proposés à l'origine par [22], sont des jeux sous forme normale où la table d'utilité de chaque joueur ne dépend des actions que d'un sous-ensemble de joueurs. Ces jeux correspondent à des jeux hypergraphiques où $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$, où $i \in e_i, \forall i = 1..n$ et où $u_j^{e_i}(a_{e_i}) = 0, \forall j \neq i$. L'espace de représentation requis pour les jeux hypergraphiques, graphiques et polymatriciels peut être exponentiellement inférieur à celui demandé

pour une représentation équivalente sous forme normale [25, 28, 26]. Par exemple, un jeu polymatriciel demande de stocker $2.|E|.d^2$ nombres ($|E| < n^2$) tandis que le jeu SNF correspondant demande de stocker $n.d^n$ nombres.

3 Jeux bayésiens hypergraphiques

3.1 Définitions et propriétés

Les jeux hypergraphiques permettent une représentation succincte des jeux à informations complète. Nous allons les étendre au cas bayésien :

Définition 8 (Jeu bayésien hypergraphique)**.** *Un* jeu bayésien hypergraphique *(raccourci en (H, B)-game), $G = \langle N, A, \Theta, E, P, U\rangle$, est défini par :*

- *$N = \{1, \ldots, n\}$ est un ensemble fini de joueurs ;*
- *$A = \times_{i\in N} A_i$, où A_i est l'ensemble fini des actions de i ;*
- *$\Theta = \times_{i\in N}\Theta_i$, où Θ_i est l'ensemble fini des types de i ;*
- *E est un ensemble de sous-ensembles de N, i.e. $\langle N, E\rangle$ est un hypergraphe ;*
- *$\{P_e, e \in E\}$ est un ensemble de distributions de probabilité locales $P_e : \Theta_e \mapsto [0, 1]$ où Θ_e est le type joint local dans e ;*
- *$U = \{u_i^e\}_{e\in E, i\in e}$ est l'ensemble des fonctions d'utilité locales : chaque u_i^e est une fonction de $A_e \times \Theta_e$ vers $\mathbb{R}$.*

Lorsque $|e| \leqslant 2, \forall e \in E$, G est un jeu bayésien polymatriciel.

On notera $G^e = \langle e, A_e, \Theta_e, P_e, \{u_i^e, i \in e\}\rangle$ le jeu local correspondant à $e \in E$ dans le (H, B) game.

Définition 9 (Utilité globale dans un (H, B)-game)**.**

$$u_i(a, \theta) = \sum_{e\in E \text{ tq } i\in e} u_i^e(a_e, \theta_e), \forall a \in A, \theta \in \Theta$$

Les définitions 8 et 9 capturent, en tant que cas dégénérés, les jeux hypergraphiques et polymatriciels (sans incertitude : $|\Theta| = 1$) d'un côté et de l'autre les jeux bayésiens (une seule hyperarête $e = N$). Mais à la différence des jeux bayésiens, $u_i(a, \theta)$ ne dépend pas forcement des types et des actions de tous les joueurs.

La condition de "connaissance commune" est moins naturelle dans le cas d'une série de jeux bayésiens locaux que dans un jeu bayésien SNF. En effet, il n'y a pas de raison pour que le type d'un joueur l'informe des types des joueurs avec lesquels il n'est pas lié par un jeu local. Ainsi, nous réduisons la condition de "connaissance commune" dans les (H, B)-game à une simple condition de cohérence des distributions de probabilité locales. En d'autres mots, nous supposons que les croyances des joueurs sont cohérentes avec une probabilité a priori jointe (inconnue) sur les types :

Hypothèse 1 (Cohérence des distributions de probabilités locales)**.** *Il existe une distribution de probabilité jointe P sur Θ telle que :*

$$P_e(\theta_e) = \sum_{\theta_{-e}} P(\theta_e.\theta_{-e}), \forall e \in E, \theta_e \in \Theta_e.$$

Dans un (H, B)-game la connaissance a priori sur un groupe de joueurs $v \subseteq N$ est cohérente d'un jeu local à l'autre : $\forall v \subseteq N, \forall e, e'$ tels que $v \subseteq e \cap e'$,

$$\sum_{\theta_{e\setminus v}} P_e(\theta_v.\theta_{e\setminus v}) = \sum_{\theta_{e'\setminus v}} P_{e'}(\theta_v.\theta_{e'\setminus v}) = P_v(\theta_v).$$

Le (H, B)-game est donc équivalent au jeu bayesien $\langle N, A, \Theta, P, \{u_i, i \in N\}\rangle$ où u_i est donnée par la définition 9. Notons que dans la définition 4, EU_i dépend de P, qui porte sur les types de tous les joueurs et n'est pas totalement connue par le joueur i. Seule sa marginalisation aux jeux locaux auxquels i participe est connue. On peut montrer que :

Théorème 1 (Décomposition de l'utilité espérée)**.** *Soit σ une stratégie mixte pour un (H, B)-game G :*

$$EU_i(\sigma|\theta_i) = \sum_{e\in E \text{ tq } i\in e} EU_i^e(\sigma_e|\theta_i), \forall i \in N, \theta_i \in \Theta_i,$$

où $EU_i^e(\sigma_e|\theta_i)$ est l'utilité espérée de σ_e dans le jeu bayésien local $G^e = \langle E, A_e, \Theta_e, P_e, \{u_i^e, i \in e\}\rangle$.

Donc, sous l'hypothèse 1, la connaissance des distributions locales sur les types est suffisante pour calculer l'utilité d'une stratégie mixte. Le cadre est donc bien fondé et opérationnel.

3.2 Exemple

Prenons un exemple inspiré de [26], qui est un jeu de coordination entre des joueurs choisissant un fournisseur Internet. Dans ce problème, la satisfaction d'un joueur dépend des choix de ses voisins proches, voisinage qui est représenté par un graphe $\langle N, E\rangle$. Plus le nombre de voisins d'un joueur utilisant le même fournisseur est élevé, plus la satisfaction de ce joueur sera élevée. L'incertitude du problème vient des possibilités d'offres que les joueurs peuvent recevoir des fournisseurs. Recevoir une offre peut augmenter la préférence pour ce fournisseur et donner une information sur les autres agents : *si je reçois une offre, mes voisins probablement aussi*.

Les jeux bayésiens polymatriciels fournissent une représentation appropriée à ce type de problème. Considérons un jeu bayésien polymatriciel à 4 joueurs dont la figure 1 représente le graphe.

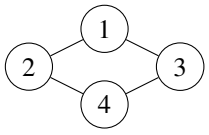

FIGURE 1 – Graphe d'un jeu bayésien polymatriciel à 4 joueur.

Chaque joueur i a deux actions, $A_i = \{b, c\}$, correspondant aux choix des fournisseurs, respectivement *Berizon* ou *C-Mobile*. Berizon a envoyé des offres à certains joueurs mais les joueurs n'ont pas une connaissance complète de qui a reçu ces offres. $\Theta_i = \{R, \bar{R}\}$, R et $\bar{R}$ correspondant

respectivement à "a reçu" et "n'a pas reçu" une offre de Berizon. Pour chaque paire de joueurs possible (chaque arête) une fonction d'utilité est associée à cette paire et dépend des 4 combinaisons de paires de types possibles. Un joueur qui n'a pas reçu d'offre (joueur de type $\bar{R}$) préfère choisir c plutôt que b. Un joueur qui a reçu une offre (joueur de type R) préfère b plutôt que c (les offres fonctionnent !). Qu'ils aient reçu une offre ou non, les joueurs qui ne se coordonnent pas dans un jeu local avec leur voisin ne sont pas satisfaits. La figure 2 formalise un tel jeu bayésien SNF local à 2 joueurs. Tous les jeux bayésiens locaux sont supposés identiques.

		R		$\bar{R}$	
		b	c	b	c
R	b	$3,3$	$0,0$	$3,1$	$0,0$
	c	$0,0$	$2,2$	$0,0$	$2,2$

		b	c	b	c
$\bar{R}$	b	$1,3$	$0,0$	$1,1$	$0,0$
	c	$0,0$	$2,2$	$0,0$	$2,2$

FIGURE 2 – Tables d'utilité pour une paire de joueurs (i, j) du jeu bayésien polymatriciel.

Les distributions de probabilité locales sont supposées identiques :
$P(\theta_i = R, \theta_j = R) = 0.4$, $P(\theta_i = R, \theta_j = \bar{R}) = 0.1$, $P(\theta_i = \bar{R}, \theta_j = R) = 0.1$ et $P(\theta_i = \bar{R}, \theta_j = \bar{R}) = 0.4$.

Nous pouvons calculer les probabilités conditionnelles et marginales des types des jeux bimatriciels locaux :

- $P(\theta_j = R) = 0.5$ et $P(\theta_j = \bar{R}) = 0.5, \forall j \in N$,
- $P(\theta_j = R|\theta_i = R) = 0.8$, $P(\theta_j = \bar{R}|\theta_i = R) = 0.2$,
  $P(\theta_j = R|\theta_i = \bar{R}) = 0.2$, $P(\theta_j = \bar{R}|\theta_i = \bar{R}) = 0.8, \forall (i, j) \in E$

Avec cette distribution, il est plus probable que le voisin d'un joueur reçoive une offre si ce joueur en a reçu une ou que le voisin ne reçoive pas d'offre si le joueur n'en a pas reçu.

Dans un jeu bayesien polymatriciel, pour tout joueur $i \in N$,

$$\begin{aligned} EU_i(\sigma|\theta_i) &= \sum_{e \text{ tq } i \in e} EU_i^e(\sigma_e|\theta_i), \text{ où} \\ EU_i^e(\sigma_e|\theta_i) &= EU_i^{(i,j)}(\sigma_i.\sigma_j|\theta_i) \\ &= \sum_{\theta_j} P(\theta_j|\theta_i) \times \\ &\quad \sum_{a_i, a_j} \sigma(a_i.a_j|\theta_i.\theta_j) u_i(a_i.a_j, \theta_i.\theta_j) \end{aligned}$$

Soit une stratégie σ^* consistant en quatre stratégies pures identiques σ_i^*, tel que $\sigma_i^*(\theta_i = R) = b$ et $\sigma_i^*(\theta_i = \bar{R}) = c$. Cela signifie que les joueurs suivent sans réfléchir l'offre quand ils en reçoivent une et préfèrent le fournisseur c lorsqu'ils n'en reçoivent pas. On peut calculer l'utilité espérée de cette stratégie pour un joueur i :

$$\begin{aligned} EU_i^j(\sigma^*|\theta_i = R) &= P(\theta_j = R|\theta_i = R) u_i^j(b, b, R, R) \\ &+ P(\theta_j = \bar{R}|\theta_i = R) u_i^j(b, c, R, \bar{R}) \\ &= 0.8 \times 3 + 0.2 \times 0 = 2.4 \text{ et} \\ EU_i(\sigma^*|\theta_i = R) &= 2.4 + 2.4 = 4.8 \end{aligned}$$

De la même manière, nous obtenons

$$\begin{aligned} EU_i^j(\sigma^*|\theta_i = \bar{R}) &= 0.2 u_i^j(c, b, \bar{R}, R) + 0.8 u_i^j(c, c, \bar{R}, \bar{R}) \\ &= 1.6 \\ EU_i(\sigma^*|\theta_i = \bar{R}) &= 3.2 \end{aligned}$$

On peut vérifier facilement que σ^* est bien un équilibre de Nash, puisque modifier unilatéralement l'action choisie par un joueur n'augmentera pas son utilité locale. Les stratégies inconditionnelles où chaque joueur choisit c ou choisit b sont aussi des équilibres de Nash purs.

3.3 Complexité spatiale

Bien sur, tous les jeux bayésiens n'impliquent pas exclusivement des interactions locales. Mais c'est le cas pour certains et une représentation polymatricielle du jeu, quand elle est possible, est moins coûteuse que sa représentation SNF. Ceci est connu [25] pour les jeux à information complète et c'est aussi vrai pour les (H, B)-games.
En considérant le cas d'interactions par paires : un jeu bayésien polymatriciel contient $|E| = O\left(n^2\right)$ distributions de probabilité de taille $O\left(t^2\right)$, et $2 \cdot |E|$ fonctions d'utilités de taille $O\left(t^2.d^2\right)$ où t est le nombre maximum de types pour tout joueur et d est le nombre maximum d'actions. Plus généralement, notant ρ l'arité maximale de n'importe quelle hyperarête, nous avons :

Proposition 1 (Taille de représentation)**.** *La complexité en espace de la représentation d'un (H, B)-game est $O\left(|E|.\rho.t^\rho.d^\rho\right)$. Pour le cas particulier des jeux bayésiens polymatriciels, c'est $O\left(|E|.t^2.d^2\right)$.*

Cette complexité en espace doit être comparée à la taille du jeu bayésien SNF équivalent à ce (H, B)-game. La forme normale comprend une distribution de probabilité de taille $O\left(t^n\right)$ et n fonctions d'utilité de taille $O\left(d^n \cdot t^n\right)$. Alors, quand ρ est borné par une constante (e.g. pour le cas polymatriciel, $\rho = 2$) la représentation graphique est exponentiellement moins coûteuse que la représentation SNF.

4 Des *(H,B)*-games aux jeux hypergraphiques à information complète

Au-delà de la proposition d'un nouveau cadre succinct, nous montrons que le gain de concision est obtenu sans augmentation de la complexité théorique du calcul d'un équilibre de Nash. Le principal résultat de cet article est de montrer que tout (H, B)-game peut être transformé en un jeu hypergraphique à information complète équivalent, en utilisant une transformation en *temps polynomial*. Donc, la complexité du calcul d'un équilibre de Nash dans ce cadre

n'est pas plus élevée que dans le cadre des jeux hypergraphiques à information complète. Notre travail s'inspire du résultat établi par Howson et Rosenthal [19], qui fait référence à une transformation originalement proposée par Selten [17] [2] pour les jeux bayésiens à 2 joueurs. Les auteurs proposent une transformation d'un jeu bayésien à 2 joueurs en un équivalent polymatriciel. Ce résultat fondamental est présenté de manière informelle par les auteurs. Nous le présenterons plus formellement ici.

Définition 10 (Transformation en jeu polymatriciel)**.** *Soit $G = \langle N, A, \Theta, P, U\rangle$ un jeu bayésien à 2 joueurs. Nous définissons le jeu polymatriciel $\tilde{G}$ comme :*

- $\tilde{N} = \{(i, \theta_i), i \in N = \{1, 2\}, \theta_i \in \Theta_i\}$;
- $\tilde{A} = \times_{(i,\theta_i)} \tilde{A}_{i,\theta_i}$ *où* $\tilde{A}_{(i,\theta_i)} = A_i, \forall i \in N, \theta_i \in \Theta_i$;
- $\tilde{E} = \{((i, \theta_i), (j, \theta_j)), i \neq j, \theta_i \in \Theta_i, \theta_j \in \Theta_j\}$;
- $\tilde{U} = \left\{u^{(j,\theta_j)}_{(i,\theta_i)}, \big((i, \theta_i), (j, \theta_j)\big) \in \tilde{E}\right\}$, *où* $u^{(j,\theta_j)}_{(i,\theta_i)}(\tilde{a}_{(i,\theta_i)}, \tilde{a}_{(j,\theta_j)}) = P(\theta_j|\theta_i).u^j_i(\tilde{a}_{(i,\theta_i)}.\tilde{a}_{(j,\theta_j)}, \theta)$

On considère la bijection suivante entre les stratégies mixtes de G et celles de $\tilde{G}$:

Définition 11 (Transformation de stratégie)**.** *Pour une stratégie mixte σ de G, $\tilde{\sigma}$ est la stratégie de $\tilde{G}$ définie par $\tilde{\sigma}_{(i,\theta_i)}(a_i) = \sigma_i(a_i|\theta_i) \forall a_i \in A_i$.*

[19] montrent alors que :

Théorème 2 (Théorème de Howson et Rosenthal)**.** *Si G est un jeu bayésien à 2 joueurs, alors le jeu polymatriciel $\tilde{G}$ est tel que $EU_i(\sigma|\theta_i) = EU_{(i,\theta_i)}(\tilde{\sigma}), \forall i \in N, \theta_i \in \Theta_i, \forall \sigma$.*

En d'autres mots, tout jeu bayésien à 2 joueurs peut être transformé en un jeu polymatriciel équivalent (sans incertitude) et les équilibres de Nash de ces deux jeux sont en bijection. Notez aussi que, puisque N contient seulement deux joueurs, le graphe résultant $(\tilde{N}, \tilde{E})$ est biparti.

4.1 Extension du théorème de Howson et Rosenthal aux jeux bayésiens polymatriciels

Le théorème 2 concerne les jeux bayésiens à 2 joueurs sous forme normale. Nous pouvons l'étendre aux jeux bayésiens polymatriciels :

Théorème 3 (Transformation d'un jeu bayésien polymatriciel)**.** *Pour tout jeu bayésien polymatriciel G, il existe un jeu polymatriciel $\tilde{G}$ tel que :*
$EU_i(\sigma|\theta_i) = EU_{(i,\theta_i)}(\tilde{\sigma}), \forall i \in N, \forall \theta_i \in \Theta_i, \forall \sigma$

Ici, $\tilde{G}$ est obtenu à partir des jeux polymatriciels locaux $\tilde{G}^e$ construits à partir des jeux bimatriciels locaux G^e, comme dans la définition 10. En effet, nous construisons $\tilde{N} = \cup_{e\in E}\tilde{N}^e$ et $\tilde{E} = \cup_{e\in E}\tilde{E}^e$ ($\tilde{A}$ et $\tilde{U}$ sont ensuite définis naturellement). $\tilde{\sigma}$ est défini selon la définition 11. Pour tous les jeux locaux de G, nous utilisons cette transformation pour les transformer en jeux locaux de $\tilde{G}$. Donc, lorsque $n > 2$ le graphe du jeu obtenu n'est pas biparti.
En reprenant l'exemple de la section 3.2, le jeu bayésien polymatriciel à 4 joueurs devient un jeu polymatriciel à information complète à 8 joueurs. Le graphe de ce jeu est représenté dans la figure 3. Chaque arête $\big((i, \theta_i), (j, \theta_j)\big)$ correspond à un jeu bimatriciel, dont la table d'utilité sera différente en fonction de la paire (θ_i, θ_j) des joueurs. Ces tables sont représentées dans la figure 4.

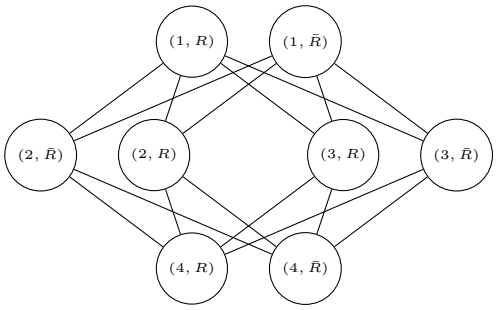

FIGURE 3 – Graphe du jeu polymatriciel à 8 joueurs correspondant au jeu bayésien polymatriciel à 4 joueurs de la figure 1.

(j, R)

(i, R)	b	c
b	$2.4, 2.4$	$0, 0$
c	$0, 0$	$1.6, 1.6$

$(j, \bar{R})$

(i, R)	b	c
b	$0.6, 0.2$	$0, 0$
c	$0, 0$	$0.4, 0.4$

$(i, \bar{R})$	b	c
b	$0.2, 0.6$	$0, 0$
c	$0, 0$	$0.4, 0.4$

$(i, \bar{R})$	b	c
b	$0.8, 0.8$	$0, 0$
c	$0, 0$	$1.6, 1.6$

FIGURE 4 – Tables d'utilité du jeu polymatriciel à 8 joueurs.

4.2 Extension du théorème de Howson et Rosenthal au jeux bayésiens hypergraphiques

Nous allons suivre, pour les (H, B)-games, la même approche que pour les jeux bayésiens polymatriciels. Nous allons d'abord définir la transformation :

Définition 12 (Transformation d'un (H, B)-game)**.** *Soit $G = \langle N, A, \Theta, E, P, U\rangle$ un (H, B)-game. $\tilde{G}$ est le jeu hypergraphique défini par :*

- $\tilde{N} = \{(i, \theta_i), i \in N, \theta_i \in \Theta_i\}$
- $\tilde{A} = \times_{(i,\theta_i)} \tilde{A}_{i,\theta_i}$ *où* $A_{(i,\theta_i)} = A_i$
- $\tilde{E} = \{\tilde{\theta}_e, e \in E, \theta_e \in \Theta_e\}$ *où* $\tilde{\theta}_e = \{(i, \theta_i), i \in e, \theta_i \in \theta_e\}$
- $\tilde{U} = \{u^{\tilde{\theta}_e}_{(i,\theta_i)}, \tilde{\theta}_e \in \tilde{E}, (i, \theta_i) \in \tilde{\theta}_e\}$
  où $u^{\tilde{\theta}_e}_{(i,\theta_i)}(a_e) = p(\theta_{e-\{i\}}|\theta_i).u^e_i(a_e, \theta_e)$

Cette définition généralise la définition 10. Considérons $\tilde{\sigma}$ la stratégie de $\tilde{G}$ correspondant à σ (voir la définition 11). Nous pouvons montrer que :

2. Il est intéressant de mentionner que Selten et Harsanyi sont co-détenteurs, avec Nash, du prix Nobel en science économique, pour leur "analyse innovante de l'équilibre en théorie des jeux compétitifs".

Théorème 4 (Transformation d'un jeu bayésien sous forme normale)**.** *Pour tout jeu bayésien G, il existe un jeu hypergraphique $\tilde{G}$ tel que $EU_i(\sigma|\theta_i) = EU_{(i,\theta_i)}(\tilde{\sigma}), \forall i \in N, \theta_i \in \Theta_i, \forall \sigma$.*

Ce théorème généralise le théorème de Howson et Rosenthal aux jeux bayésiens à n joueurs. Bien sur, σ est un équilibre de Nash de G si et seulement si $\tilde{\sigma}$ est un équilibre de $\tilde{G}$. Notez que $\tilde{G}$ dans le théorème 4 est obtenu à partir de la définition 12, en considérant une seule hyperarête e de taille n. Ainsi, le jeu hypergraphique obtenu a $\sum_{i \in N} |\Theta_i|$ noeuds et $|\Theta|$ hyperarêtes de taille n. Cette transformation n'est donc pas forcément très utile pour les jeux bayésiens sous forme normale. Cependant, grâce au théorème 4, nous obtenons :

Théorème 5 (Transformation d'un (H, B)-game)**.** *Si G est un (H, B)-game et $\tilde{G}$ un jeu équivalent comme défini dans la définition 12, alors $EU_i(\sigma|\theta_i) = EU_{(i,\theta_i)}(\tilde{\sigma}), \forall i \in N, \theta_i \in \Theta_i, \forall \sigma$.*

Il est donc possible de transformer n'importe quel (H, B)-game en un jeu hypergraphique à information complète. Dans la suite, nous montrons que la transformation en jeu hypergraphique à information complète est un résultat important, puisque qu'elle peut être effectuée en temps polynomial.

4.3 "The games world is (still) flat"

Puisque le problème de recherche d'un équilibre de Nash mixte dans les jeux polymatriciels ou hypergraphiques à information complète est PPAD-complet [11], la recherche d'un équilibre de Nash mixte dans un jeu bayésien polymatriciel/hypergraphique n'est pas plus facile (l'existence d'un équilibre est garantie, car tout (H, B)-game G est équivalent à un jeu bayésien sous forme normale $\langle N, A, \Theta, P, \{u_i\}\rangle$ où u_i est donné par la définition 9).
Néanmoins, nous montrons que ce problème n'est en réalité pas plus dur. En effet, on peut montrer que :

Lemme 1 (Transformation en temps polynomial)**.** *Pour tout (H, B)-game G, $\tilde{G}$ peut être calculé en temps polynomial.*

La taille de $\tilde{G}$ est comparable à celle de G. En notant t le nombre maximum de types, d le nombre maximum d'actions et ρ l'arité maximale des hyperarêtes, on constate que représenter G demande de stocker $|E|.t^{\rho}.(\rho.d^{\rho} + 1)$ nombres. D'un autre coté, $\tilde{G}$ contient $|E|.t^{\rho}$ jeux SNF avec $\rho.t$ tables de d^{ρ} nombres, i.e. $|E|.t^{\rho+1}.\rho.d^{\rho}$ nombres.
Nous dérivons du lemme 1 que :

Proposition 2 (Complexité)**.** *Le problème de recherche d'un équilibre de Nash mixte dans un (H, B)-game est* PPAD*-complet. La* PPAD*-complétude est également vérifiée pour les jeux bayésiens polymatriciels.*

Cela signifie que résoudre un (H, B)-game n'est pas plus difficile que résoudre un jeu hypergraphique à information complète de taille similaire. En d'autres mots, dans les jeux bayésiens comme dans les jeux classiques "the game world is flat", comme écrit par [11].
Maintenant, remarquons que les jeux bayésiens sous forme normale sont des (H, B)-games (dégénérés), avec une seule hyperarête. Donc la transformation en temps polynomial s'applique aussi à eux. Nous en déduisons :

Proposition 3 (Complexité des jeux bayésiens)**.** *Calculer un équilibre de Nash mixte dans un jeu bayésien sous forme normale est un problème* PPAD*-complet.*

A notre connaissance ce résultat n'a pas encore été montré. Seule la NP-complétude du problème d'existence d'un EN *pur* dans un jeu bayésien a été montrée [10].
En ce qui concerne les équilibres de Nash purs dans les (H, B)-games, nous déduisons du théorème 5 :

Proposition 4 (Équivalence de l'équilibre Nash pur)**.** *σ est un équilibre de Nash pur du (H, B)-game G ssi $\tilde{\sigma}$ est un équilibre de Nash pur de $\tilde{G}$.*

Ceci implique que décider si un (H, B)-game a un EN pur ou non appartient à NP. La NP-complétude du problème est déduite du résultat connu, que décider si un jeu bayésien à 2 joueurs admet un EN pur est NP-complet [10] :

Proposition 5 (Complexité d'un équilibre de Nash pur)**.** *Déterminer s'il existe un équilibre de Nash pur dans un (H, B)-game est un problème NP-complet.*

Pour résumer, le gain en espace, potentiellement exponentiel, offert par les (H, B)-games par rapport aux jeux bayesiens sous forme normale n'augmente pas la complexité théorique de la résolution.

5 Conclusion

Dans cet article, nous proposons un nouveau cadre, les *jeux bayésiens hypergraphiques*, permettant de représenter des jeux à information incomplète de manière succincte. Notre principal résultat est de généraliser le théorème de Howson et Rosenthal et de montrer que n'importe quel (H, B)-game peut être transformé, en temps polynomial, en un jeu hypergraphique équivalent. De plus, la taille de description du jeu hypergraphique résultant est comparable à celle du (H, B)-game d'origine. Ceci est aussi vrai pour les jeux polymatriciels. Ce résultat a d'importantes conséquences, d'un point de vue algorithmique et de complexité théorique. Premièrement, nous avons prouvé que le calcul d'un équilibre de Nash mixte dans un (H, B)-game est PPAD-complet. Ceci fournit également la preuve que la recherche d'un EN dans un jeu bayésien sous forme normale est PPAD-complet.
Les *Bayesian Action-Graph Games (BAGG)* [20] sont une autre représentation succincte des jeux bayésiens, représentant leur fonction d'utilité comme dans le cadre des *Action-Graph Games (AGG)* [21]. Bien qu'elle puisse être exponentiellement plus compacte, la représentation de la distribution de probabilité sous forme d'un réseau bayésien peut être beaucoup plus coûteuse qu'un produit de distributions marginales. Le calcul d'utilité peut prendre un temps exponentiel(à cause de l'inférence). Le calcul d'un équilibre

de Nash mixte dans un BAGG est probablement plus complexe que pour les (H, B)-games pour différents types de distributions de probabilité possibles. Cependant il existe vraisemblablement des types de distributions de probabilité pour lesquels la transformation d'un BAGG en AGG peut être fait en temps polynomial. La comparaison des propriétés des cadres BAGG et (H, B)-games semble une perspective intéressante.

D'un point de vue algorithmique, puisque les (H, B)-games peuvent être transformés en temps polynomial en jeux hypergraphique, nous pouvons adapter aux (H, B)-games les algorithmes de résolution, exacte ou approchée, existant pour les jeux hypergraphiques, polymatriciels et graphiques [18, 24, 27, 28, 8]. Ceci est aussi intéressant pour les jeux Bayésiens classiques, même si leur transformation en jeu hypergraphique est en général coûteuse. En effet, la littérature sur l'algorithmique du calcul d'équilibres dans les jeux bayésiens est peu abondante [1, 7, 6].

Références

[1] O. Armantier, J.P. Florens, and J.F. Richard. Approximation of bayesian nash equilibrium. *Journal of Applied Econometrics*, 23(7) :965–981, 2008.

[2] R. Aumann and A. Brandenburger. Epistemic conditions for nash equilibrium. *Econometrica : Journal of the Econometric Society*, pages 1161–1180, 1995.

[3] P. Battigalli and G. Bonanno. Recent results on belief, knowledge and the epistemic foundations of game theory. *Research in Economics*, 53(2) :149–225, 1999.

[4] A. Brandenburger. Epistemic game theory : an overview. *The New Palgrave Dictionary of Economics, 2nd edition*, 2008.

[5] A. Brandenburger and E. Dekel. Hierarchies of beliefs and common knowledge. *Journal of Economic Theory*, 59(1) :189–198, 1993.

[6] G. Cai and P.R. Wurman. Monte carlo approximation in incomplete information sequential auction games. *Decision Support Systems*, 39(2) :153–168, 2005.

[7] S. Ceppi, N. Gatti, and N. Basilico. Computing bayes-nash equilibria through support enumeration methods in bayesian two-player strategic-form games. In *IAT*, pages 541–548, 2009.

[8] A.C. Chapman, A. Farinelli, E.M. de Cote, A. Rogers, and N.R. Jennings. A distributed algorithm for optimising over pure strategy nash equilibria. In *AAAI*, pages 749—755, 2010.

[9] X. Chen and X. Deng. Settling the complexity of two-player nash-equilibrium. In *FOCS*, pages 261–272, 2006.

[10] V. Conitzer and T. Sandholm. New complexity results about nash equilibria. *Games and Economic Behavior*, 63(2) :621–641, 2008.

[11] C. Daskalakis, A. Fabrikant, and C.H. Papadimitriou. The game world is flat : The complexity of nash equilibria in succinct games. In *ICALP*, pages 513–524. Springer, 2006.

[12] C. Daskalakis, P.W. Goldberg, and C.H. Papadimitriou. The complexity of computing a nash equilibrium. *SIAM Journal on Computing*, 39(1) :195–259, 2009.

[13] E. Dekel and M. Siniscalchi. Epistemic game theory. In *Handbook of Game Theory with Economic Applications*, volume 4, pages 619–702. Elsevier, 2015.

[14] A. Deligkas, J. Fearnley, R. Savani, and P. Spirakis. Computing approximate nash equilibria in polymatrix games. In *WINE*, pages 58–71. Springer, 2014.

[15] G. Gottlob, G. Greco, and F. Scarcello. Pure nash equilibria : Hard and easy games. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 24 :357–406, 2005.

[16] A. Grubshtein and A. Meisels. Finding a nash equilibrium by asynchronous backtracking. In *CP*, pages 925–940. Springer, 2012.

[17] J.C. Harsanyi. Games with incomplete information played by "bayesian" players, i–iii part i. the basic model. *Management science*, 14(3) :159–182, 1967.

[18] J.T. Howson. Equilibria of polymatrix games. *Management Science*, 18(5-part-1) :312–318, 1972.

[19] J.T. Howson and R.W. Rosenthal. Bayesian equilibria of finite two-person games with incomplete information. *Management Science*, 21(3) :313–315, 1974.

[20] A.X. Jiang and K. Leyton-Brown. Bayesian action-graph games. In *NIPS*, volume 23, pages 991–999, 2010.

[21] A.X. Jiang, K. Leyton-Brown, and N.A.R. Bhat. Action-graph games. *Games and Economic Behavior*, 71(1) :141–173, 2011.

[22] M. Kearns, M.L. Littman, and S. Singh. Graphical models for game theory. *UAI*, pages 253–260, 2001.

[23] R.B. Myerson. Comments on "games with incomplete information played by 'bayesian'players, i–iii harsanyi's games with incomplete information". *Management Science*, 50(12_supplement) :1818–1824, 2004.

[24] L.E. Ortiz and M. Kearns. Nash propagation for loopy graphical games. In *NIPS*, volume 15, pages 817–824, 2003.

[25] C.H. Papadimitriou and T. Roughgarden. Computing correlated equilibria in multi-player games. *Journal of the ACM (JACM)*, 55(3) :1–29, 2008.

[26] S. Simon and D. Wojtczak. Constrained pure nash equilibria in polymatrix games. In *AAAI*, pages 691–697, 2017.

[27] D. Vickrey and D. Koller. Multi-agent algorithms for solving graphical games. In *AAAI*, pages 345–351, 2002.

[28] M. Wahbi and K.N. Brown. A distributed asynchronous solver for nash equilibria in hypergraphical games. In *ECAI*, pages 1291–1299. IOS Press, 2016.

[29] E.B. Yanovskaya. Equilibrium points in polymatrix games. *Litovskii Matematicheskii Sbornik*, 8 :381–384, 1968.