Transition secondaire-supérieur: Ce que nous apprend la recherche en didactique des mathématiques

Ghislaine Gueudet, Fabrice Vandebrouck

Transition secondaire-supérieur :
Ce que nous apprend la recherche en didactique des mathématiques

Ghislaine Gueudet & Fabrice Vandebrouck

Abstract. This article presents a synthesis of international research in mathematics education about the secondary-tertiary transition, with a specific interest in the most recent works. These studies may concern students' difficulties, and investigate different factors causing these difficulties: notions become more abstract, expected practices refer to those of mathematicians, the institutional culture changes. Some studies analyze more broadly the practices of teachers and students at the end of high school or at the beginning of post-secondary level. Research in mathematics education provides keys to understanding current practices and their consequences, whether in ordinary courses or in teaching device specially designed to improve the transition from secondary to tertiary education. In some cases, it also proposes innovative courses fostering active student involvement, and highlights the benefits of these courses. The development of initial and in-service training for university teachers could help extend such teaching beyond experimental contexts.

Keywords. Support Systems, Innovative Teaching, Teacher Practices, Student Practices, Secondary-Tertiary Transition.

Résumé. Cet article présente une synthèse de travaux de recherche internationaux en didactique des mathématiques à propos de la transition secondaire-supérieur, avec un intérêt spécifique porté aux travaux les plus récents. Ces travaux peuvent concerner les difficultés des étudiants, et en donner diverses interprétations : les notions deviennent plus abstraites, les pratiques attendues se réfèrent à celles des mathématiciens, la culture institutionnelle change. Certaines études analysent plus largement les pratiques des enseignants et des élèves en fin de lycée ou étudiants au début du supérieur. La recherche en didactique des mathématiques donne des clefs pour comprendre l'existant, qu'il s'agisse de cours ordinaires ou de dispositifs spécialement conçus pour accompagner la transition secondaire-supérieur. Elle propose aussi dans certains cas des enseignements innovants qui permettent une implication active des étudiants, et met en évidence les apports de ces dispositifs. Le développement de la formation initiale et continue des enseignants de l'université pourrait contribuer à étendre de tels enseignements au-delà de contextes expérimentaux.

Mots-clés. Dispositifs d'aide, Enseignements innovants, Pratiques des enseignants, Pratiques des étudiants, Transition secondaire-supérieur.

Table des matières

1. Introduction

La recherche en « Mathematics Education » se penche sur le thème de la transition secondaire-supérieur dans de nombreux pays. Nous présentons ici une synthèse de résultats identifiés par ces travaux internationaux qui prennent en compte le savoir en jeu (donc nous ne mentionnons pas de travaux en « pédagogie universitaire »). Les conditions d'un pays à l'autre sont très variables, dans ce texte bref nous ne pouvons pas aborder ces spécificités nationales. La référence principale reste souvent celle des conditions et des pratiques en France.

Les recherches sur la transition secondaire-supérieur existent internationalement depuis de nombreuses années. En 1998, De Guzman et al. produisent une première synthèse de travaux (présentée lors du colloque international des mathématiciens, ICM) intitulée “Difficulties in the passage from secondary to tertiary education”. Cette synthèse fait le point sur environ 10 années de recherches internationales. Cependant le nombre de travaux a augmenté de manière déterminante surtout à partir des années 2000, en lien avec la massification de l’accès à l’enseignement supérieur. Cette massification entraîne mécaniquement une augmentation des constats de difficultés. Dans le monde anglo-saxon, plusieurs rapports publiés à la fin des années 1990 ou au début des années 2000 visent à attirer l’attention sur les prérequis insuffisants des étudiants entrant à l’université (voir par exemple le rapport intitulé “Measuring the mathematics problem”, publié au Royaume-Uni en 2000 par le Engineering Council). Selon Lawson et Croft (2018) pour le même test de mathématiques élémentaires posé à l’entrée à l’université de Coventry, les résultats obtenus en 1999 par les étudiants ayant obtenu la note B en mathématiques au “A-level” (examen de niveau baccalauréat, noté sur 8 lettres dont la meilleure est A) sont sensiblement les mêmes que ceux obtenus en 1991 par les étudiants qui avaient la note F (6ème niveau, le moins bon niveau parmi ceux qui permettent tout de même de poursuivre à l’université).

L’insuffisance des prérequis n’est cependant pas l’unique raison expliquant les difficultés rencontrées par les étudiants débutants. Les recherches menées depuis 2000 l’ont largement montré : différents types de facteurs sont à l’origine de ces difficultés. La considération de l’un ou l’autre type va également amener la proposition de différents types de dispositifs pour remédier à ces difficultés (Artigue, 2004 ; Gueudet, 2008 ; Thomas et al., 2012 ; Gueudet & Thomas, 2018).

Dans cet article nous rendons compte dans une première partie de travaux qui se sont attachés à l’analyse des causes des difficultés. Cette partie est donc structurée en fonction des différents types de causes retenus. Dans une seconde partie, nous présentons différents types de dispositifs qui ont été proposés et testés dans l’objectif de remédier à ces difficultés.

Cet article est issu d’un rapport écrit pour le CNESCO (Gueudet & Vandebrouck 2018), que nous avons synthétisé et actualisé avec des travaux plus récents.

2. À propos des difficultés rencontrées par les étudiants débutants et de leurs causes.

2.A. Des notions abstraites, soulevant des difficultés de conceptualisation

Un premier type de cause identifié par de nombreux chercheurs au niveau international, pour les difficultés rencontrées par les étudiants débutant à l’université, peut se formuler de manière très simple : les étudiants ont des difficultés parce les notions enseignées à l’université sont plus difficiles que celles du secondaire. Il peut s’agir d’une part de notions qui n’ont pas été enseignées au lycée et qui sont intrinsèquement abstraites, comme l’algèbre linéaire ; ou d’autre part de notions déjà enseignées au lycée mais qui deviennent plus abstraites à l’université, comme les fonctions.

2.A.a. L'algèbre linéaire : une théorie Formalisatrice, Unificatrice et Généralisatrice

Cette structure est assez standard. En France comme dans la plupart des pays, l'algèbre linéaire n'est plus travaillée au secondaire. Les étudiants la découvrent en première année d'université, et pour nombre d'entre eux cette découverte s'accompagne de difficultés significatives. Ces difficultés peuvent être très diversement interprétées, nous nous centrons ici sur une interprétation liée au statut des notions (Robert 1998).

Un courant de recherche très actif s'est développé en France au sujet de l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre linéaire à partir de la fin des années quatre-vingts. L'essentiel des travaux correspondants est présenté dans Dorier (1997a et 2000). Dans ces travaux des analyses historiques montrent comment se sont développés les contenus qui sont enseignés actuellement, et ceci éclaire les difficultés des étudiants actuels.

Dorier (1997b) retrace un premier mouvement, qui s'étale du 18e siècle à la deuxième moitié du 19e, et qu'il identifie comme un mouvement d'unification. La résolution des équations linéaires et la manipulation de déterminants, tout d'abord réduites à des calculs techniques, évoluent vers une théorie plus générale qui met en évidence des caractéristiques du linéaire. Dans le même temps apparaît le calcul vectoriel, qui associe l'algébrique et le géométrique. L'évolution de la géométrie au cours de la première moitié du 19e siècle permet de dépasser l'obstacle constitué par la limitation à la dimension 3. La géométrie s'élargissant à la dimension n, l'aspect analytique amène un rapprochement entre le champ de la géométrie et celui des équations. Cependant on est à ce moment encore loin de l'algèbre linéaire sous sa forme moderne de théorie axiomatique. C'est un second mouvement, initié à la fin du 19e siècle, qui aboutira à cette forme moderne. Dans celui-ci, on observe d'une part des travaux dont l'objectif est de donner une forme axiomatique à la théorie, et d'autre part des recherches portant sur les problèmes linéaires en dimension infinie, problèmes d'analyse fonctionnelle en particulier. La forme axiomatique s'impose finalement lorsqu'il apparaît qu'elle permet d'unifier des méthodes, des problématiques en dimension infinie, et également de généraliser les méthodes de la dimension finie à la dimension infinie. En s'appuyant sur le travail de Dorier, Robert conclut ainsi que l'algèbre linéaire est une théorie généralisatrice, unificatrice et porteuse d'un nouveau formalisme (FUG).

Les chercheurs qui adoptent ce regard théorique (Dorier et al., 1997) en algèbre linéaire se focalisent sur des difficultés d'étudiants qui relèvent de l'obstacle du formalisme : pour ces étudiants « l'algèbre linéaire n'est qu'un catalogue de notions très abstraites qu'ils n'arrivent pas à se représenter ; de plus ils sont submergés sous une avalanche de mots nouveaux, de symboles nouveaux, de définitions nouvelles et de théorèmes nouveaux.» (p.116) Ces étudiants ne parviennent pas à donner des exemples d'espaces vectoriels ; interrogés sur ce en quoi consiste l'algèbre linéaire, ils citent des concepts mais aucune utilisation de ceux-ci. Ces difficultés sont alors interprétées comme résultant du caractère FUG de l'algèbre linéaire.

2.A.b. Augmentation du niveau d'abstraction de notions connues : l'exemple des fonctions

A côté de contenus nouveaux et abstraits par nature, les étudiants à l'université vont continuer à rencontrer des objets du secondaire. Toutefois les questions qui vont se poser à eux vont être d'une autre nature. Elles vont porter sur des ensembles d'objets, sur la structure de ces ensembles plutôt que sur les objets eux-mêmes. Cette abstraction des contenus s'illustre particulièrement bien avec le concept de fonction numérique en France. Les fonctions sont des objets complexes rencontrés dès le collège mais dont la compréhension est loin d'être achevée à la fin du secondaire. Elles se travaillent à travers divers types de représentations – algébriques et graphiques notamment – ces représentations étant plus ou moins propices à certaines activités et donnant plus ou moins à voir les propriétés intrinsèques des fonctions – propriétés de nature ponctuelle, globale ou locale en particulier. Mais les activités des élèves sur les fonctions au sortir du secondaire portent essentiellement sur des représentations algébriques (des formules) et ne valorisent essentiellement que la perspective ponctuelle (Vandebrouck, 2011).

Par exemple, au baccalauréat, les fonctions sont presque toujours données par leur expression algébrique sur un domaine de définition qui n'est pas questionné. Leurs graphiques sont donnés et ont valeur de produit fini qui ne supporte que très peu le calcul algébrique. La dialectique ponctuel-global qui existe au début du lycée semble également se perdre peu à peu et il ne reste progressivement à travers cette activité très algébrisée que l'idée de dépendance ponctuelle x donne $f(x)$, assortie d'un travail essentiellement technique : calcul de dérivées, de limites, de primitives, d'équations de tangentes, en appliquant des formules ou des règles opératoires (limite des termes de plus haut degré ; « l'exponentielle l'emporte »…) (Vandebrouck & Leidwanger, 2016).

Au début de l'université, le niveau d'abstraction change car les fonctions sont aussi introduites de manière formelle. La familiarisation avec le formalisme au sortir du lycée - essentiellement pour nommer une fonction f - n'est pas suffisante pour étayer l'usage accru de ce formalisme à l'université. Les nouveaux exercices sont « génériques » ou portent sur des fonctions qui ne sont pas nécessairement explicitées algébriquement. Il y a également une extension à de nouvelles familles de fonctions et un langage ensembliste qui n'est pas bien préparé au lycée (pas de recherche d'ensemble de définition, d'ensemble image, de maniement de propriétés globales des intervalles autrement qu'à travers le calcul algébrique). L'incursion dans le local, entamée en classe de première avec le nombre dérivé et la tangente, puis masquée par les calculs algébrisés de limite ou de dérivées, est aussi surement trop artificielle pour soutenir le travail local qui se développe à l'université (définition formalisée de la limite, de la continuité…). L'usage accru des valeurs absolues à l'université pour les majorations locales ou globales fait apparaître un manque criant d'aptitude des élèves à les manipuler, découlant surement d'une disparition de la valeur absolue comme fonction de référence au lycée. Enfin, le rapport au graphique est différent. Alors que les élèves ne considèrent au lycée que des courbes singulières, associées à une fonction donnée par une formule, ils doivent s'habituer à l'université au travail sur des courbes génériques, représentant des classes de fonctions (des exemples génériques ou avec des paramètres), qui sont essentiellement des appuis heuristiques pour faire des preuves formelles au début de l'université : théorème des valeurs intermédiaires, de Rolle, des accroissements finis…

2.B. Des attentes se référant aux pratiques expertes des mathématiciens

La différence entre secondaire et supérieur est aussi une différence de pratiques mathématiques. Les pratiques attendues à l'université sont plus proches de celles des mathématiciens experts (Robert, 1998) avec un accent sur la résolution des problèmes, les raisonnements et l'activité de preuve, accompagnés d'un usage accru de la formalisation et de la quantification comme on l'a vu plus haut pour les fonctions et l'algèbre linéaire. C'est toutefois un horizon dans la mesure où les sujets d’examen sont souvent maintenus, pour diverses raisons qu’on ne développe pas ici, à des niveaux plus élémentaires (Gueudet & Lebaud, 2008).

2.B.a. Résolution de problèmes, raisonnement et preuve, démarche heuristique, contrôles

Les étudiants manquent d’outillage pour la résolution de problèmes, en termes de connaissances mathématiques, de démarches heuristiques, de moyens de contrôle etc. La construction d’une « expérience mathématique » semblable à celle des mathématiciens nécessite la pratique de nombreux problèmes suffisamment variés et donc un temps long d’apprentissage.

Par exemple, en arithmétique, les tâches proposées aux élèves dans le secondaire ne leur laissent que peu d’autonomie dans les choix de raisonnements. Battie (2003) introduit deux dimensions du raisonnement en arithmétique : la dimension organisatrice d’une part (raisonnement par l’absurde, récurrence etc.), et la dimension opératoire (manipulations algébriques, théorème clés etc.) d’autre part. Elle montre que pour les tâches problématiques les élèves se replient sur des traitements opératoires connus. Et comme ils ne sont pas assez solides au niveau organisateur, ils ne peuvent pas contrôler leur travail. C’est, d’après Battie, ce qui sépare les élèves des experts : l’expert peut toujours rattraper un échec à un niveau en contrôlant à un autre niveau. En comparant des sujets de baccalauréat et des sujets d’examen de L1, Battie (2009) met en évidence une rupture dans les attentes en termes de raisonnement. Dans le secondaire, l’autonomie laissée aux élèves se limite à la dimension opératoire et pour des tâches routinières. A l’université, les énoncés proposés requièrent des responsabilités dans la dimension organisatrice du raisonnement.

Lithner (2000) montre que les étudiants de première année d’université en Suède n’ont pas spontanément recours à des démarches heuristiques (faire une figure, reformuler etc.), mais surtout que leurs moyens de contrôle sont fondés sur leurs expériences passées (exercices proches qui ont déjà été rencontrés), et non sur des propriétés mathématiques. Ils essaient toujours de se ramener aux procédures qu’ils connaissent, et qui sont des procédures algorithmiques.

Les travaux concernant la preuve à la transition secondaire-supérieur, qui portent uniquement sur les étudiants de filières mathématiques, font des constats du même type (voir Selden, 2012, pour une synthèse). L’initiation à la preuve qui est faite dans le secondaire peut varier beaucoup d’un pays à l’autre. Aux Etats-Unis par exemple, les étudiants découvrent à l’université ce qu’est une preuve formelle et les exigences de la rigueur qui y sont associées. La France propose plutôt un enseignement de la démonstration dès le secondaire mais il est souvent demandé aux élèves de dire, reproduire, voire adapter des démonstrations connues plutôt que d’en élaborer eux-mêmes (Pedemonte, 2007). Plusieurs chercheurs français (par exemple Balacheff, 2010) relèvent que les exigences en termes de démonstrations formelles sont donc plus importantes à l’université. De plus, la lecture des démonstrations est faite de manière très différente par les étudiants et par les mathématiciens (Inglis & Alcock, 2012 ; Mejía-Ramos & Weber, 2014). Des chercheurs ont montré que les mathématiciens lisent les démonstrations en s’attachant d’emblée à la compréhension des principales idées, de la structure et des techniques employées (Weber, 2015). Enfin, dans leur étude (impliquant 175 étudiants et 83 enseignants) Lew et al. (2016) ont montré que du point de vue des enseignants à l’université, une preuve est un support pour apprendre une démarche qui peut être utilisée dans d’autres contextes. Pour les étudiants, la portée d’une preuve est limitée à son contenu.

L'apprentissage de la preuve pratiquée dans les enseignements universitaires nécessite la réunion de plusieurs facteurs, et en premier lieu d'être convaincu de son utilité. Ainsi il peut être important de ménager pour les étudiants l'occasion de formuler des conjectures eux-mêmes, pour mettre en évidence l'intérêt de prouver ces conjectures (Lockwood et al., 2016 ; Flores et al. 2020) ou de les invalider en utilisant des contre-exemples (Stylianides & Stylianides, 2009).

Durand-Guerrier et Arsac (2005) ont aussi travaillé sur le lien entre preuve et logique mathématique, et ils ont montré toute la complexité de ce lien dans différents domaines des mathématiques. Leurs travaux montrent que la preuve doit combiner des aspects syntaxiques et des aspects sémantiques, en particulier dans le contexte des mathématiques « avancées ». Travailler sur ces deux aspects et sur leur articulation peut être soutenu par un enseignement traitant spécifiquement des compétences de logique, et par un travail sur le langage mathématique. Nous abordons ce point ci-dessous.

2.B.b. Langage, signes et symboles mathématiques

Le langage mathématique utilisé à l'université est différent de celui pratiqué dans le secondaire. Plusieurs auteurs décrivent la transition du secondaire à l'université comme l'arrivée dans un nouveau pays : il s'agit de découvrir les coutumes de ce pays, et bien évidemment sa langue. La langue écrite peut parfois utiliser des signes inconnus de l'étranger nouvellement arrivé ! Par exemple Chellougui (2004) travaille sur les quantificateurs et les difficultés engendrées par l'usage du quantificateur existentiel lors des raisonnements dits « AE » (pour tout…il existe) Elle montre que les enseignants ne sont pas toujours attentifs à leur propre emploi des quantificateurs.

Bardini & Pierce (2018) introduisent la notion de « culture symbolique » des élèves et étudiants (symbolic literacy) : celle-ci caractérise l'aisance de ceux-ci avec les symboles mathématiques. Il s'agit d'examiner l'habilité à lire les symboles, mais aussi à les manipuler, à les associer, les transformer etc. Ces auteurs montrent que la culture symbolique attendue à l'université diffère largement de celle développée au lycée (leur étude se place en Australie, mais est probablement valable pour bien d'autres pays). Par exemple, le même symbole peut avoir de multiples sens (voir figure 1 ci-dessous).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a-b & b \end{pmatrix}$$

Figure 1 – Extrait d'un exercice élémentaire sur les matrices

Dans l'égalité de la figure 1, le symbole « – » a trois sens différents. Il désigne d'abord une opération sur les matrices. Il est aussi employé pour noter l'opposé d'un nombre, et finalement pour une soustraction entre deux réels a et b. Selon les auteurs, l'initiation à cet emploi flexible de symboles pourrait être un facteur déterminant d'amélioration de la transition secondaire-supérieur.

Dans d'autres travaux, Nardi & Iannone (2005) analysent des productions d'étudiants et montrent que ceux-ci tentent de reproduire le « genre speech » (type de discours) des mathématiques universitaires. Les étudiants s'attachent à utiliser des symboles, de type quantificateurs, et suppriment autant que possible tous les mots de la langue naturelle. Leur objectif est de produire des phrases qui « sonnent » comme des mathématiques universitaires, mêmes si celles-ci n'ont pas toujours de sens mathématique.

Cette attitude, qui semble a priori regrettable, peut aussi apparaître comme une phase nécessaire dans l'apprentissage du langage des mathématiques universitaires. Selon Berger (2004), les étudiants apprennent un nouveau signe comme on apprend un mot nouveau. L'étudiant teste l'emploi du nouveau signe, par analogie, par imitation, souvent de manière incorrecte, jusqu'à parvenir à l'usage reconnu par l'institution.

2.C. Une différence de cultures institutionnelles entre secondaire et supérieur

Ce que nous nommons « culture institutionnelle » peut être envisagé de différentes manières par la recherche, selon les cadres théoriques mobilisés. Nous donnons ci-dessous quelques exemples.

2.C.a. Un changement de contrat didactique, en particulier au niveau des tâches, des déroulements et du rôle des démonstrations

On appelle contrat didactique (Brousseau, 1998) le système d'attentes mutuelles (souvent implicites) des enseignants et des élèves/étudiants qui façonnent leurs relations. Certains travaux ont montré que ce système d'attentes évolue entre le secondaire et le supérieur (Pepin, 2014 ; Gueudet & Pepin, 2018). Les changements de contrat ont lieu à des niveaux généraux qui ne relèvent pas directement ou même indirectement de la discipline elle-même : enseignements sous forme de cours magistral en amphithéâtre, autonomie attendue pour le travail personnel, enseignants multiples pour les mathématiques, et moins accessibles qu'au lycée etc. Ces changements ne sont pas nécessairement négatifs. On pourrait par exemple s'attendre à ce que les recherches sur les cours magistraux aboutissent à des résultats très critiques du fait du peu d'activité proposé aux étudiants dans ce contexte. Ce n'est en fait pas le cas et les recherches montrent plutôt les intérêts possibles du cours magistral et le fait que les étudiants apprécient particulièrement ce format (voir par exemple Bergsten, 2011, pour le cas de la Suède).

Les changements de contrat ont également lieu à des niveaux en lien avec les mathématiques ou certains contenus mathématiques. On note par exemple pour un même contenu une distribution différente, entre lycée et université, au niveau des types d'exercices proposés aux étudiants : au lycée, les exercices mettent souvent en jeu des connaissances qui sont explicitées et qui doivent être appliquées de façon relativement immédiate. À l'université, les connaissances doivent être plus disponibles et être mises en fonctionnement de façon plus complexe (Robert, 1998). On note aussi une différence au niveau des déroulements des cours et des séances d'exercices (Grenier-Boley, 2009). Par exemple il y a une accélération du temps didactique[1], avec un renouvellement fréquent des objets enseignés, qui oblige à des assimilations plus rapides de la part des étudiants. Il y a également un nouvel équilibre entre exercices à portée générale et exercices plus particuliers, un éventail des types d'exercices plus large qui rend la routinisation beaucoup plus difficile qu'au

[1] Le temps didactique est défini en différents termes dans le champ de la didactique mais correspond essentiellement au temps d'enseignement d'un savoir donné. Son organisation dépend donc largement de la manière d'enseigner ce savoir ainsi que du curriculum. Faire avancer le temps didactique revient à faire progresser la classe dans le texte de ce savoir.

lycée, cette dernière étant déléguée de façon assez implicite aux étudiants en travail personnel, qui se doivent de ce fait d'être plus autonomes face à leurs apprentissages[2].

L'activité de démonstration dont nous avons déjà parlé (avec un minimum de formalisation notamment) tend à se développer alors qu'elle n'est pas au cœur de l'activité au secondaire. L'existence et/ou l'unicité d'objets travaillés se pose explicitement à l'université alors que, sauf dans des cas bien précis (typiquement en France le théorème des valeurs intermédiaires), ces questions ne sont pas investiguées. Au secondaire, les élèves ont encore parfois le droit de « convaincre ». Ils peuvent avoir l'impression qu'on ne joue pas au même jeu entre les mathématiques du lycée et celles de l'université. Nous allons préciser ci-dessous les changements de contrat didactique en utilisant deux autres points de vue complémentaires.

2.C.b. L'approche anthropologique de la transition, le cas des variables aléatoires discrètes

Des travaux sur la transition secondaire-supérieur ont également exploité l'approche anthropologique du didactique (Bosch et al., 2004 ; Winsløw, 2008). Selon cette approche, les institutions façonnent les savoirs sous forme de praxéologies mathématiques qui se développent à chacun de ces niveaux (Gueudet et al., 2017). Une praxéologie est formée de quatre éléments : un type de tâches, une technique pour accomplir ce type de tâches, une technologie qui est un discours expliquant et justifiant la technique, et finalement une théorie. L'étude de la transition amène alors à comparer les praxéologies au secondaire et au supérieur et à relever des points communs et des différences. On note souvent, par exemple, que le bloc technologico-théorique des praxéologies est plus développé à l'université, alors que le secondaire se centre sur les aspects techniques.

Par exemple, les probabilités sont enseignées en France au lycée et dans de nombreuses filières de l'enseignement supérieur. Nous nous centrons sur la notion de variable aléatoire (v.a.) discrète, en comparant un manuel de lycée et un polycopié de première année d'université.

Le manuel (Sésamath 1ère Spécialité maths 2019) donne la définition suivante (figure 2) :

On considère une expérience aléatoire dont l'univers $\Omega = \{e_1\ ;\ e_2\ ;\ e_3\ ;\ \dots\ ;\ e_r\}$ est fini et une loi de probabilité p sur Ω.

Définition **Variable aléatoire réelle (discrète)**

Une variable aléatoire réelle X sur Ω est une fonction qui à chaque issue de Ω associe un nombre réel.

Figure 2 – Définition de variable aléatoire discrète, manuel Sésamath 2019.

Le polycopié de L1 donne la définition générale de v.a., puis celle de v.a. discrète :

« Considérons un ensemble Ω muni d'une probabilité P. Une variable aléatoire sur Ω est une fonction X : $\Omega \to R$. [..] Une variable aléatoire X est dite discrète si son image $X(\Omega)=\{X(\omega), \omega \in \Omega\}$ est dénombrable. »

[2] La situation est différente en classe préparatoire, où une quantité importante de travail personnel est explicitement assignée aux étudiants en dehors des cours (Farah 2015) ; l'apprentissage régulier du cours y est explicitement attendu et fait l'objet d'un suivi notamment par le biais d'interrogations orales régulières (Lalaude-Labayle 2016).

On note ici un important écart du point de vue du niveau théorique : dans le manuel de lycée, la v.a. est bien qualifiée de « discrète », mais ce qualificatif entre parenthèses n'est expliqué à aucun moment. La v.a. est liée à une expérience aléatoire, avec un nombre fini d'issues. En L1 on ne parle plus d'expérience aléatoire, mais d'un ensemble muni d'une probabilité. Et on convoque des concepts comme l'image d'une application, ou la dénombrabilité.

En ce qui concerne les types de tâches associés aux v.a. discrètes, dans les deux cas, ceux qui apparaissent le plus fréquemment dans les exercices sont : « Déterminer la loi d'une v.a. ». Cependant les praxéologies associées à ces types de tâches sont bien différentes (Doukhan & Gueudet, 2019). En effet au lycée les v.a. qui apparaissent dans les exercices prennent un nombre fini de valeurs (rarement plus de 6 valeurs), comme dans l'exemple ci-dessous (figure 3) :

25 On lance deux dés équilibrés à 4 faces numérotées de 1 à 4. On note X la variable aléatoire qui à chaque lancer associe la valeur du plus grand numéro obtenu sur les deux dés. Déterminer la loi de probabilité de X.	La technique consiste à faire la liste des valeurs possibles, à déterminer la probabilité de chacune, et à présenter les résultats dans un tableau.

Figure 3 – Déterminer la loi d'une v.a. au lycée, exemple d'exercice, manuel Sésamath 2019.

Au niveau du L1 on va trouver pour ce même type de tâches un énoncé du genre :

« Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire k boules au hasard ; X est le plus petit numéro obtenu. Déterminer la loi de la v.a.r. X. » (extrait d'une feuille de TD L1)

Ici il s'agit de trouver une formule générale exprimant $P(X= r)$ en fonction des paramètres n et k. La technique apprise au lycée ne fonctionne plus ! Les différences de techniques pour un même type de tâches apparaissent clairement dans cet exemple. Il ne s'agit pas pour autant en L1 de considérer que les étudiants n'ont rien appris au lycée – on peut d'ailleurs s'appuyer sur le cas $n=4$ et $k=2$ pour que les étudiants se forgent une première représentation de l'exercice de L1 à propos de l'urne, et on se rapproche alors de l'exercice de lycée.

2.C.c. Des programmes pilotés par des exigences institutionnelles différentes

En France les programmes de mathématiques du secondaire sont définis nationalement et en général, les enseignants du secondaire ne participent pas à leur écriture. Malgré les textes et les ressources d'accompagnement, ces enseignants peuvent n'avoir qu'une vision obscure des choix opérés – réintroduction de la logique dans les programmes de lycée en France par exemple, enjeu de tels ou tels aspects dont l'interprétation conditionne peut-être la préparation à l'enseignement supérieur… En outre les pratiques semblent plus ou moins pilotées par la préparation du baccalauréat. Les enjeux pour cet examen sanctionnant la fin des études secondaires ne sont pas toujours corrélés aux attendus à l'entrée à l'université, avec des contenus peu repris à l'université (les statistiques par exemple sont présentes dans de nombreuses filières au lycée, mais peu dans les filières scientifiques à l'université, du moins en première année).

Au niveau du supérieur, les contenus d'enseignement sont préparés en interne par les équipes enseignantes et sont spécifiques de chacune des universités, dépendant des forces en présence, des équipes de recherche, avec des disparités. On peut alors penser que les enseignants adhèrent mieux au projet global. Cependant cette préparation peut se faire sans grande continuité avec les contenus du lycée, ce qui peut engendrer des malentendus à la fois pour les étudiants et pour les enseignants.

Les enseignants du secondaire et les enseignants du supérieur ont en principe une même formation mathématique, effectuée dans le cadre de l'université, même si ce peut être à partir de la L3 pour certains et dans le cadre d'un cursus de grande école fortement associé à l'université (ENS notamment) pour d'autres. Cette remarque devrait tendre à rapprocher les pratiques au lycée et à l'université du point de vue institutionnel. Il semble toutefois qu'elle soit trop minimaliste et qu'elle ne fournisse pas une condition suffisante de connaissance mutuelle des pratiques et de la réalité du terrain de la part des deux catégories d'enseignants (Vandebrouck et al., 2016). Nous revenons sur cet aspect dans la partie 3.

2.D. Les enseignants de l'université, attentes et pratiques

Les travaux concernant les enseignants de l'université ne sont pas tous centrés sur des questions de transition. Nous retenons ici des aspects qui nous semblent importants pour éclairer cette transition : les a priori des enseignants sur ce que les étudiants savent (ou ne savent pas) en arrivant à l'université, certains aspects des pratiques d'enseignement comme la double casquette enseignant et chercheur, enfin les usages des ressources par les enseignants du supérieur.

2.D.a. Surestimation des connaissances antérieures des étudiants : l'exemple des nombres

Il est important de pouvoir s'appuyer à l'université sur des contenus enseignés, et appris par les élèves au niveau du lycée. Les mathématiciens ont parfois tendance à dire que l'enseignement des mathématiques commence réellement à l'université et qu'il y a lieu de tout reconstruire « correctement ». Mais une telle reconstruction n'est possible que parce qu'elle se fait en « proximité » avec des contenus déjà enseignés et déjà fréquentés par les élèves au lycée. Par exemple Bergé (2016) montre qu'il a une dialectique entre la compréhension de la notion nouvelle de borne supérieure à l'université et la fréquentation du système des nombres réels au secondaire, en particulier une sensibilisation déjà présente des étudiants à la complétude de ℝ. Cela reste une notion très difficile car elle embarque également des connaissances nécessaires sur la logique et la quantification. Il ne s'agit pas non plus de surestimer les connaissances des étudiants arrivant à l'université. Par exemple, Vivier et Durand-Guerrier (2016) proposent à des étudiants de première année un test portant sur l'utilisation du TVI dans un contexte où une représentation graphique de fonction continue est proposée (figure 4).

Q5 – On donne ci-contre la représentation graphique d'une fonction f définie et continue sur [-6 ; 6].

L'équation $f(x)$=2 admet une solution :

a. dans **N** *b.* dans **D**

c. dans **Q** *d.* dans **R**

Pour chacune des questions il fallait répondre en cochant une case :

☐ Vrai ☐ Faux ☐ On Ne Peut Pas Savoir

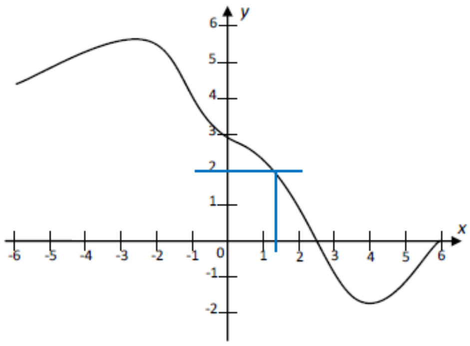

Figure 4 – Extrait d'un test auprès d'étudiants de première année (Vivier et Durand-Guerrier 2016, p.146)

Un tiers d'entre eux répondent que la solution à l'équation proposée *f(x)=2* est dans $\mathbb{D}$, l'ensemble des nombres décimaux, ce qui n'a aucune raison d'être vrai, le graphique représentant une fonction tout à fait générique sur $\mathbb{R}$. Ce genre de réponse est sans doute renforcé par la pratique habituelle au lycée de ne mettre en fonctionnement au mieux que des nombres décimaux. Vivier et Durand-Guerrier montrent plus précisément que des étudiants à l'université n'identifient pas les propriétés de $\mathbb{D}$, soit qu'ils amalgament $\mathbb{D}$ à l'un de ses sous-ensembles $\mathbb{D}_n$ (nombres décimaux avec n chiffres après la virgule), soit qu'ils ne considèrent pas de propriétés intermédiaires entre le discret et le continu.

Les difficultés des étudiants concernant les nombres réels sont sans doute renforcées par un usage fréquent de la calculatrice dans les exercices mettant en jeu des fonctions, la calculatrice ne donnant à voir que des nombres décimaux et masquant peut-être encore plus que dans l'environnement papier crayon ce qui est en jeu. Il s'agit d'une question de recherche qui reste encore largement ouverte.

2.D.b. Surestimation des usages des définitions des objets mathématiques

Un autre aspect sur lequel les enseignants du supérieur surestiment les connaissances des étudiants est plus transversal et porte sur les usages d'objets génériques, et particulièrement les définitions d'objets et concepts génériques. On le voit dans les manuels scolaires, où les définitions sont parfois plus des étiquetages que de réelles définitions. On trouve des définitions qui sont redondantes, parfois plusieurs définitions des mêmes objets ou des propriétés dont l'équivalence avec la définition initiale n'est ni montrée, ni même explicitée.

En outre, les élèves du lycée n'ont que rarement la charge d'assimiler des définitions, qui sont introduites, illustrées et souvent assimilées au cours d'activités et d'exercices. Elles ne sont pas au cœur de leur activité mathématique. Les élèves ne sont pas confrontés en première instance à des définitions[3]. Ouvrier-Buffet (2015) montre par exemple – dans le cas des mathématiques discrètes – que les élèves et les étudiants ont des difficultés dans les activités de constructions de définitions mais elle stipule également qu'ils ont des difficultés dans leurs usages des définitions dans leur activité mathématique propre.

Au niveau international Tall et Vinner (1981) ont introduit la distinction toujours d'actualité entre « concept image » et « concept définition », pour signifier la dualité récurrente de compréhension des concepts mathématiques par les étudiants. Le concept image est la totalité fonctionnelle associée au concept, incluant les images mentales, les propriétés retenues comme pertinentes etc. Le concept définition est l'analogue intériorisé de la définition mathématique du concept. Les auteurs mettent en évidence que les deux conceptions peuvent coexister longtemps chez les étudiants, ceux-ci faisant appel tantôt à l'une tantôt à l'autre selon l'exercice auquel ils sont confrontés et ce bien que les deux conceptions puissent être en relative opposition.

[3] Présentation de Gwenola Madec à la journée IHP du 21 mars 2018 : http://www.cfem.asso.fr/actualites/MADECJournee_TransitionCFEM_mars18.pdf.

2.D.c. Articulation enseignement-recherche : impact sur les pratiques

Au niveau international, les recherches stricto sensu sur les pratiques d'enseignement dans le supérieur se sont surtout développées après les années 2000, sans doute en lien avec l'introduction dans certains pays de formations pour les enseignants du supérieur.

Une particularité importante de l'université est que les enseignants pour la plupart sont aussi par ailleurs des chercheurs. Les premiers travaux étudiant cette spécificité vont plutôt dans le sens de conséquences négatives. Burton (1999, 2004) a interviewé environ 70 mathématiciens au Royaume-Uni à propos de leurs perspectives sur l'enseignement. Ces mathématiciens reconnaissent qu'il peut exister plusieurs styles de pensée en mathématiques. Ils admettent aussi avoir eux-mêmes un style dominant, mais ils ne considèrent pas que ce style influence leur enseignement, ni qu'il convient d'être attentif aux différents styles possibles des étudiants. A l'opposé de ces constats négatifs, Nardi et al. (2005) montrent que les mathématiciens sont très soucieux de la qualité de leur enseignement, et réfléchissent volontiers aux pratiques mathématiques de leurs étudiants. Mesa et Cawley (2015) ont travaillé avec des enseignants de l'université engagés dans un vaste projet d'enseignement suivant des « démarches d'investigation ». Elles montrent que les enseignants sont très impliqués dans ce projet, qui permet de rapprocher les pratiques d'enseignement et les pratiques de recherche, et que leurs pratiques d'enseignement des participants ont évolué.

Un groupe constitué de chercheurs de France et de Belgique a initié des travaux sur les pratiques des enseignants chercheurs dans les universités en sciences et en mathématiques en particulier. L'objet « pratiques des enseignants-chercheurs » étant exploré au prisme de plusieurs disciplines, cela permet de dégager des spécificités d'enseignement directement liées aux disciplines de recherche et également quelques invariants (Cologne & de Hosson, 2016 ; de Hosson et al., 2015 ; Bridoux et al., 2016 ; Leininger-Frézal, 2016).

2.D.d. Les usages de ressources par les enseignants du supérieur

Du côté des usages de ressources pour concevoir leur enseignement, on peut penser a priori que les enseignants du supérieur sont très libres. En effet ils élaborent eux-mêmes les textes de contrôles et d'examens : ils ne sont pas soumis à des attentes externes comme les enseignants du secondaire. Or les résultats de recherches ne montrent pas une grande variété des ressources employées.

Dans les pays où il existe un manuel de référence à l'université, comme aux États-Unis ou au Canada, les recherches montrent que ce manuel constitue une ressource centrale pour les enseignants. González-Martín (2015) observe que les cours (ici dans le cas des séries entières, au Canada) suivent de très près le manuel. Mesa et Griffiths (2012) constatent également que le manuel est très utilisé par les enseignants pour concevoir leur cours ; de plus elles montrent que ces enseignants incitent les étudiants débutants (ici pour un cours d'analyse en première année, aux États-Unis) à utiliser le manuel pour travailler plutôt sur les exercices, afin d'apprendre des techniques. Les enseignants considèrent que ces étudiants ne sont pas encore prêts à lire des textes mathématiques et qu'il ne s'agit pas d'un objectif d'enseignement.

En France, l'absence de manuel crée une situation très différente. Gueudet (2017) a étudié le cas de six enseignants de mathématiques à l'université, avec des profils très différents. Deux doctorants ont uniquement l'expérience de travaux dirigés (TD). Pour eux, les ressources centrales sont les feuilles de travaux dirigés. Leur responsabilité est limitée ; en effet, le responsable du cours magistral leur indique ce qu'il a fait en cours, mais également les exercices qui doivent être traités dans les TD. Il leur reste donc à prendre connaissance de ces exercices, et à gérer la séance de TD. Leur plus grande responsabilité en termes de conception de support a été limitée jusque-là à la participation à l'élaboration d'un sujet de contrôle continu (en appui sur les sujets donnés les années précédentes). Cependant pour les enseignants plus expérimentés qui ont en charge un cours – surtout dans le cas d'un nouveau cours – le travail personnel de conception est beaucoup plus important et de multiples ressources peuvent être mobilisées.

On pourrait aussi penser que dans le supérieur, l'usage de logiciels mathématiques est largement développé. Cependant, en dehors là encore d'enseignements spécifiques (comme un module consacré au calcul formel), Gueudet (2017) observe que les technologies sont très peu présentes dans les ressources utilisées par les enseignants ou proposées aux étudiants. Mieux, la calculatrice, qui a été largement utilisée au secondaire, est souvent interdite à l'université. Cette situation ne semble pas spécifique du cas de la France. Dans une étude menée au Canada, Broley et al. (2018) mettent en évidence l'écart très important entre le recours par des mathématiciens à la programmation dans leur recherche et dans leur enseignement. Ils identifient plusieurs facteurs expliquant cet écart : un environnement institutionnel peu favorable, mais aussi leurs propres doutes sur les apports du numérique, lorsqu'il s'agit d'enseignement des mathématiques.

2.E. Les étudiants : ressources et pratiques

Quelles ressources sont utilisées par les étudiants au début de l'université pour leur apprentissage des mathématiques ? Dans tous les pays, les notes prises par les étudiants à partir du cours du professeur constituent une ressource essentielle pour leur travail, mais est-ce que le contenu de ces notes peut efficacement soutenir les apprentissages ?

Lew et al. (2016) ont travaillé sur ce que les étudiants notent et retiennent d'un cours magistral, et l'ont comparé aux intentions du professeur donnant ce cours. Ils ont mis en évidence un écart problématique entre les deux. Le professeur parle généralement trop vite pour que les étudiants puissent tout noter. Une partie seulement du discours du professeur est écrit au tableau. Mais certaines choses importantes restent à l'oral, comme les idées phares ou directrices. Très peu d'étudiants sont alors en capacité de les noter ou même de les restituer. Ils ont également observé que s'il y avait un élément manquant dans les notes prises par les étudiants, ceux-ci n'étaient généralement pas capables de reconstituer cet élément. Farah (2015) a obtenu des résultats semblables en France, dans le contexte des classes préparatoires économiques et commerciales.

L'institution met à disposition des étudiants d'autres ressources : manuel dans certains pays, polycopiés, et maintenant plates-formes distantes proposant différents types de ressources. L'utilisation faite par les étudiants de ces ressources ne correspond pas non plus toujours avec ce que les enseignants en attendraient. Dans une enquête menée auprès d'étudiants de première année ayant suivi un module d'arithmétique, Gueudet et Lebaud (2014) ont observé que la première ressource citée comme utile par les étudiants est la liste d'exercices (96 % l'utilisent beaucoup), tandis que seulement 52 % des étudiants déclarent utiliser le polycopié « moyennement » ou « beaucoup ». Les étudiants trouvent en fait que leurs notes de cours sont suffisantes. Dans le même temps, des étudiants rencontrés en entretien ont déclaré que pour les cours où il n'y avait pas de polycopié, celui-ci leur manquait. L'utilisation principale du polycopié semble être pour les révisions avant les examens ou contrôles continus. De plus, une recherche portant sur les ressources utilisées par les étudiants et sur l'usage qui en est fait (Gueudet & Pepin, 2018) a permis d'observer que dans les polycopiés, les étudiants se concentrent sur les exercices résolus, et s'attachent à repérer des méthodes qu'ils pourront reproduire. Ceci rejoint des observations faites notamment par Castela (2004) ou Lithner (2003) en Suède. Les étudiants de classe préparatoire en revanche travaillent de manière à pouvoir aborder des problèmes nouveaux, en analysant des méthodes de résolution afin de pouvoir les transférer. Castela attribue ces différences notamment aux modes d'évaluation en vigueur dans les deux institutions (voir sur ce point le travail sur les évaluations à l'université évoqué aussi plus haut Gueudet & Lebaud, 2008).

Un autre phénomène d'évolution enfin, que les étudiants soulignent comme important par rapport à leurs habitudes du secondaire, est le développement du travail collectif. Ce développement d'un travail collectif et son appréciation très positive par les étudiants sont également constatés dans le contexte des classes préparatoires par Farah (2015).

3. Des dispositifs pour soutenir la transition secondaire-supérieur

Il existe en France des dispositifs destinés à faire découvrir l'université aux lycéens. On peut citer ainsi les stages Hippocampe (Arnoux & Vaux, 2012) ou MathC2+. Des mathématiciens vont travailler avec des lycéens, dans leur lycée ou à l'université ; ils/elles proposent un travail sur un thème scientifique qui va donner lieu à des recherches et se clore par des présentations des élèves. D'autres dispositifs sont spécialement adressés aux filles, pour lutter contre les stéréotypes de genre qui peuvent les détourner de l'étude des mathématiques (par exemple « Filles et maths, une équation lumineuse »).

Cependant ces dispositifs n'ont pas encore à notre connaissance fait l'objet de recherches en didactique. Les recherches en didactique proposant ou évaluant des dispositifs visant à surmonter les difficultés de la transition secondaire-supérieur concernent essentiellement des expériences menées dans l'enseignement supérieur. Ceci correspond probablement au fait qu'il est peut-être plus simple de mettre en place des dispositifs expérimentaux dans le cadre de l'université que dans celui du lycée, notamment en France : la proximité du baccalauréat engendre des contraintes qui font obstacle aux enseignements expérimentaux à ce niveau.

3.A. Dispositifs d'aide aux étudiants

Les dispositifs que nous évoquons dans cette partie sont de type « soutien » aux étudiants. De nombreuses modalités sont envisageables : diagnostic de difficultés organisé ou non par l'institution ; horaire consacré au soutien ; coordination ou non avec les autres enseignements ; évaluation notée ou non etc. Nous donnons ci-dessous quelques exemples correspondant à des dispositifs qui ont été implémentés à une échelle large.

3.A.a. Exemple des support centers au Royaume-Uni

Au Royaume-Uni, suite au constat fait à la fin des années 1990 des difficultés croissantes des étudiants (Engineering Council, 2000), certaines universités ont commencé à ouvrir des lieux destinés à soutenir les étudiants en mathématiques. Ces lieux, nommés « mathematics support centers » (Croft et al., 2016) étaient d'abord destinés aux étudiants non spécialistes, mais rapidement la nécessité est apparue de les ouvrir également aux étudiants de mathématiques (actuellement 25 % des étudiants fréquentant les support centers sont des étudiants de mathématiques). Mis en place dans de très nombreuses universités et fédérés dans le réseau Sigma[4] les supports centers qui étaient plutôt décriés lors de leur ouverture sont désormais une institution reconnue (qui court cependant un risque permanent de manque de financement).

Les étudiants les fréquentent à leur choix, sur la base du volontariat et non par obligation ou demande des professeurs. La fréquentation des support centers ne se traduit pas par une note ou une quelconque évaluation. Le support center se veut un endroit agréable, dont l'aménagement est pensé pour que les étudiants s'y sentent bienvenus. Il offre des ressources : livres, exercices interactifs. Les étudiants peuvent aussi durant certaines sessions (nommées « Drop-in sessions ») bénéficier de la présence de tuteurs, qui peuvent être des doctorants mais aussi des enseignants expérimentés de l'université. Le travail d'enseignant dans ces support centers demande certaines compétences particulières : en effet il faut résister aux étudiants qui cherchent simplement quelqu'un pour faire les exercices à leur place, et leur apprendre à chercher par eux-mêmes. Le support center peut aussi être un lieu où les étudiants apprennent à travailler ensemble.

L'évaluation de ces dispositifs est plutôt positive, en termes de réussite des étudiants qui les ont fréquentés, et aussi comme formation des étudiants à un travail plus collectif. Cependant les études montrent aussi que les étudiants les plus en difficulté ne viennent pas dans un support center : c'est la limite de tout dispositif adoptant un principe de volontariat.

3.A.b. Opération Tremplin à Namur

À l'Université de Namur en Belgique, l' « Opération Tremplin » (de Vleeschouwer, 2008) propose des séances de remédiation sur des matières scientifiques dont le contenu est élaboré en fonction des demandes des étudiants. Ce contenu est discuté lors de réunions hebdomadaires réunissant des professeurs et des délégués d'étudiants élus par leurs pairs. Le rôle des délégués est de collecter chaque semaine les questions, de les trier et les réorganiser pour les présenter aux professeurs. Les réunions entre les professeurs et les délégués sont l'occasion d'aider ces derniers à préciser les questions formulées par les étudiants, et d'établir le programme de la séance de remédiation hebdomadaire. Au-delà du contenu particulier étudié, ces séances de remédiation permettent d'amener progressivement les étudiants à trouver leurs propres méthodes pour travailler leur cours. Les enquêtes et recherches réalisées sur cette opération en font un bilan positif. Les étudiants sont très majoritairement satisfaits, certains déclarent même qu'ils n'auraient pas pu réussir sans l'opération tremplin, et qu'ils n'auraient pas osé poser des questions en dehors de ce dispositif. Selon eux, plusieurs facteurs influencent le bon déroulement de cette opération, avec, entre autres : la représentativité des délégués étudiants, les discussions aux réunions hebdomadaires, la compétence du remédiateur. Les analyses menées du point de vue de la recherche (de Vleeschouwer, 2008) ont montré que les questions posées par les étudiants se précisaient au fil de l'année : en caricaturant, on pourrait dire qu'en début d'année, les étudiants déclarent qu'ils n'ont rien compris au cours de la semaine ; ensuite ils deviennent progressivement capables de préciser

[4] http://www.sigma-network.ac.uk/about/mathematics-and-statistics-support-centres/

leurs besoins. L'opération tremplin permet d'accompagner l'entrée dans le nouveau contrat didactique. En effet, lors des échanges les enseignants sont amenés à présenter clairement ce qu'ils attendent, en termes de rédaction de textes mathématiques par exemple, mais aussi de travail personnel. Ainsi certaines attentes habituellement implicites sont explicitées aux étudiants.

3.A.c. Accompagnement des primo-entrants en France

En France, certaines universités ont aussi mis en place des filières d'accompagnement des étudiants primo-entrants destinées aux étudiants en difficulté. Il s'agit rarement de démarches isolées des mathématiciens mais plutôt de filières construites dans des partenariats entre les disciplines. Ces dispositifs peuvent prendre la forme d'une année « L0 ». Dans les universités qui les ont mis en œuvre depuis plusieurs années (à Limoges ou à Rouen par exemple), les impacts ont été visibles sur les résultats en L1, à la fois parce que les étudiants les plus faibles se retrouvaient naturellement dans ces dispositifs de remise à niveau, ce qui allégeait la L1 traditionnelle, mais aussi parce que les étudiants ayant suivi le dispositif de remise à niveau étaient plus performants dès qu'ils retournaient dans la L1. Cependant leur apport restait limité pour les étudiants qui n'étaient pas issus de la filière S. Suite à la réforme du lycée implémentée en France à partir de 2019, on peut faire l'hypothèse qu'il en sera malheureusement de même pour les étudiants n'ayant pas choisi la spécialité de mathématiques en Terminale[5] (arrivant dans le supérieur à partir de la rentrée 2021). Les expériences montrent aussi que ces dispositifs nécessitent un fort investissement des acteurs et des universités ; ainsi, il n'est pas évident d'évaluer leur rentabilité à court terme (Arnoux et al. 2008).

3.B. Enseignements s'éloignant des pratiques habituelles

3.B.a. Ingénieries dédiées à des contenus ciblés

Dans ce texte nous nommons « ingénierie didactique » (Artigue, 2002) un enseignement construit en appui sur les résultats de la recherche et ciblant un contenu mathématique circonscrit.

De nombreux travaux ont proposé de telles ingénieries. Certaines ingénieries anciennes ont été reprises et développées récemment pour cibler l'entrée dans le formalisme. Il s'agit notamment d'ingénieries visant à la compréhension par les étudiants, comme outil et comme objet, de la définition formalisée de limite ou de celle de continuité en un point (Sghaier & Vandebrouck, 2018).

D'autres travaux ciblent la compréhension de la structure des nombres réels avec les notions de complétude et de densité, et la dialectique du discret et du continu. Au moment de la transition lycée - post bac, on passe d'un travail de type algébrique en analyse, reposant sur une approche intuitive du continu (les nombres réels sont tous les nombres qu'on connaît) à un point de vue plus

---

[5] La réforme (appliquée en classe de Première à partir de septembre 2019, puis en Terminale à partir de septembre 2020) a conduit à la suppression des filières au lycée général. Les élèves choisissent trois spécialités en Première et deux spécialités en Terminale. Ils peuvent aussi choisir en Terminale un enseignement optionnel. L'enseignement de spécialité de mathématiques est de 6h hebdomadaires (choisi en 2020 par 41,2% des élèves) ; il peut être complété par un enseignement optionnel de « mathématiques expertes » de 3h. Les élèves n'ayant pas choisi la spécialité mathématiques peuvent suivre un enseignement optionnel intitulé « mathématiques complémentaires » de 3h (choisi par 17,5% des élèves en 2020). Pour des statistiques sur les choix de spécialités et d'enseignements optionnels, voir la note d'information de la DEPP : https://www.education.gouv.fr/media/89327/download

théorique (axiomatique) sans prise en compte explicite des changements conceptuels que cela représente (Bloch & Ghedamsi, 2005). Durand-Guerrier et Vergnac (2011) proposent par exemple à partir de ce constat des pistes d'activités sur les écritures des nombres qui peuvent aider les élèves ou les étudiants à dissocier la nature des nombres de leurs écritures. Rogalski (2016) développe aussi l'idée que la compréhension des nombres réels et du début de l'analyse à l'université passe par la dévolution[6] aux étudiants de problèmes d'approximation de nombre réels, qui pour lui est une « raison d'être » de la notion de limite. Il propose une suite de situations articulant trois dimensions et permettant d'aller progressivement jusqu'à la notion de limite : l'approximation d'un nombre, la formalisation, et des aspects « méta » du début de l'analyse.

3.B.b. Impliquer activement les étudiants et donner du sens aux mathématiques

De nombreux travaux ont montré que l'implication active des étudiants était favorable aux apprentissages. Au-delà de cette implication, il s'agit de donner du sens aux mathématiques enseignées en s'appuyant par exemple sur la résolution de problèmes.

En Espagne et en Amérique du Sud plusieurs enseignements pour des non-spécialistes ont été donnés selon le principe des « Parcours d'Étude et de Recherche » (PER). Une question initiale est posée et son étude est confiée aux étudiants, qui vont formuler des sous-questions, mener une enquête, et finalement utiliser les mathématiques pour construire leurs réponses. La question initiale correspond à une situation réelle. Par exemple à l'Université Autonome de Barcelone (Barquero, 2018), a été mis en place un PER qui débutait par la question « Comment améliorer la répartition des vélos, dans le système Bicing à Barcelone ? ». Bicing est un système de location de bicyclettes dans l'espace urbain. Des données réelles sont mises à disposition des étudiants, concernant la répartition des vélos dans les différentes stations de la ville chaque jour à différents horaires, et le système choisi par la compagnie gestionnaire pour le redéploiement des vélos. À Barcelone, ce PER a été mis en place dans un enseignement dédié à des projets mathématiques. Les étudiants travaillaient par équipes de 4 ou 5, sur une durée de 5 semaines avec chaque semaine deux séances de deux heures. Durant ces séances, ils effectuaient leurs recherches, en proposant des sous-questions à partir de la question initiale, en formulant et en étudiant des hypothèses relatives à ces sous-questions. L'enseignant les accompagnait dans la formulation des sous-questions et des hypothèses, et par des apports mathématiques. Les données initiales étant très nombreuses et complexes, l'enseignant avait ainsi suggéré dès la première séance de séparer la ville en 6 zones. Ce mouvement de simplification des données réelles est important dans le processus de modélisation. Après l'effort initial de réduction de la complexité, les étudiants raffinent leurs modèles, en prenant en compte le temps moyen d'utilisation d'un vélo (30 minutes), la demande par zone géographique en fonction de l'heure de la journée etc. Cet enseignement a amené un travail sur des notions mathématiques complexes, mais qui sont toujours apparues comme nécessaires car utilisées pour travailler sur la question étudiée.

En Finlande à l'Université de Helsinki, depuis plusieurs années est mené un enseignement suivant le principe nommé « extreme apprenticeship » (Rämö et al., 2016). Il s'agit là encore de

[6] La dévolution est un processus didactique par lequel le professeur parvient à faire en sorte que l'élève se sente responsable de l'obtention du résultat dans un problème.

baser l'apprentissage sur la mobilisation des mathématiques pour la résolution de problèmes, balayant un large spectre en termes de difficulté. Les étudiants reçoivent en premier lieu des problèmes à résoudre (entre 15 et 20 problèmes par semaine), avec des apports mathématiques sous forme de documents écrits. Chaque semaine, il n'y a que 2 à 3 heures de cours magistral, mais 20 h de « drop-in sessions », c'est-à-dire que les enseignants assurent une permanence de tutorat dans une salle. Le travail écrit des étudiants est relevé et corrigé chaque semaine pour un ou deux des problèmes. Les étudiants sont libres de venir ou non consulter le professeur présent dans la salle pour recevoir de l'aide dans la résolution des problèmes qu'ils doivent traiter. Les chercheurs ont montré que la méthode « extreme apprenticeship » permettait que les étudiants soient attentifs aux concepts et à leur sens, plutôt qu'aux techniques.

De nombreux travaux interrogeant les formes d'enseignement qui soutiennent l'investissement actif des étudiants et leurs conséquences sont en cours. Les recherches montrent que la mise en œuvre de tels enseignements nécessite un investissement collectif, associant mathématiciens et didacticiens, et soutenu par l'institution (Smith et al., 2021).

3.C. Apports possibles du numérique

La plupart des enseignements visant l'implication active des étudiants font appel au numérique. Il s'agit d'une part d'utiliser des logiciels spécifiques (calcul formel, statistiques etc.). D'autre part, pour la mise à disposition de ressources et le travail collectif les enseignants et les étudiants utilisent des espaces de partage de type Moodle. Certaines recherches en didactique des mathématiques se centrent sur les apports (ou inconvénients !) du numérique. Il existe de nombreuses modalités d'usage du numérique pour soutenir la transition secondaire-supérieur. Les MOOC, ou les classes inversées ont été particulièrement médiatisés. En France, à l'initiative de la CFEM (Commission Française sur l'Enseignement des Mathématiques[7]), un MOOC a été ouvert en août 2017 sur la plateforme France Université Numérique (FUN), porté par l'Université Paris Saclay, pour lutter contre l'échec des étudiants arrivant à l'université en sciences. Cependant ce MOOC et son impact n'ont pas encore été étudiés par la recherche. D'autres recherches ont concerné les classes inversées (Fredriksen et al., 2017) ; celles-ci ont montré que ce dispositif n'apportait pas d'améliorations de la réussite des étudiants. Il est en effet difficile pour les étudiants de s'approprier seuls le contenu d'une capsule vidéo ; de plus certaines capsules existantes offrent un contenu de faible qualité, tout en donnant aux étudiants l'illusion d'avoir atteint les objectifs mathématiques fixés (Bridoux, 2018). Nous considérons ici des modalités dont certains intérêts ont été mis en évidence par la recherche : les bases d'exercices en ligne et les « cours de transition ».

3.C.a. Exercices interactifs, le cas de WIMS[8]

WIMS (WWW Interactive Multipurpose Server) est une base d'exercices interactifs, qui était initialement dédiée aux mathématiques à l'université, même si elle est désormais largement utilisée

[7] La CFEM fédère l'ensemble des associations professionnelles et de recherche et des sociétés savantes nationales touchant aux mathématiques et à leur enseignement. Elle entretient également des liens forts avec l'inspection générale de mathématiques. Voir http://www.cfem.asso.fr/

[8] https://wims.math.cnrs.fr/wims/

dans le secondaire et pour d'autres disciplines. WIMS permet aux étudiants de s'entrainer plusieurs fois sur un même exercice interactif, qui varie légèrement à chaque itération, permettant à l'étudiant d'atteindre un niveau d'expertise sur un point particulier. A l'université Rennes 1, l'outil WIMS a été utilisé au moment du plan « Réussir en Licence » (Lebaud, 2010). Actuellement, WIMS est encore utilisé pour des objectifs similaires, par exemple dans les universités de Marne-la-Vallée ou de Paris. A la journée IHP du 21 mars 2018, Doyen[9] montre bien qu'un tel dispositif n'a pas vocation à traiter tous les problèmes didactiques rencontrés et ne permet pas non plus d'atteindre tous les objectifs en termes d'apprentissage que l'on se fixe en licence pour les étudiants. Toutefois, avec un cadrage bien étudié (ici deux types de feuilles d'exercices par semaine d'enseignement, l'une de base, l'autre avancée, un suivi sérieux par l'équipe enseignante, une prise en compte du travail dans l'évaluation des étudiants, un tutorat…) rencontre une bonne adhésion des étudiants et a des effets positifs mesurables sur leurs compétences, par exemple en calcul ou sur des tâches routinières et techniques.

3.C.b. Online Bridging Courses

Les « bridging courses » (enseignements de transition, originellement développés aux États-Unis) sont spécifiquement dédiés à la prise en charge des difficultés de la transition secondaire-supérieur. Selon les institutions, ils peuvent être offerts pendant l'été précédant l'entrée à l'université, ou au début des études universitaires. Ils peuvent également être proposés de manière obligatoire à certains étudiants repérés comme étant en difficulté, ou être présentés comme un soutien que l'étudiant est libre d'utiliser ou non. Ces bridging courses reprennent des contenus rencontrés au secondaire, mais en demandant aux étudiants plus de prise d'initiative dans leur activité mathématique. Certains de ces cours utilisent des ressources en ligne, avec différentes formules allant de l'apprentissage à distance à des enseignements dont une part importante est en présence. Biehler et al. (2011) présentent un tel cours en ligne, utilisé de différentes manières en début de première année en Allemagne. Concernant le contenu, il s'agit d'un cours relativement classique de type « remise à niveau ». Le recours aux outils numériques permet de débuter chaque chapitre par un diagnostic initial : l'étudiant effectue un positionnement, sous forme d'une liste d'exercices interactifs, il reçoit une note. Dans les parties de cours et d'exercices, des outils de visualisation dynamique sont proposés, ainsi que des exercices interactifs. Le chapitre se termine par un diagnostic final, comportant une liste d'exercices du même type que ceux qui étaient proposés dans le diagnostic initial. Les chercheurs n'ont pas observé de différence entre la modalité distante et la modalité hybride, en termes de réussite des étudiants.

3.D. Formation des enseignants du supérieur

Actuellement, la formation initiale des enseignants du supérieur n'est pas généralisée internationalement ; cependant dans certains pays comme l'Angleterre ou le Danemark des universités l'exigent de leurs enseignants débutants (Biehler et al. 2018). En revanche, certaines universités prennent des initiatives d'offre de formation. Cette offre est le plus souvent transversale : elle ne concerne pas une discipline particulière, mais la motivation des étudiants,

[9] http://www.cfem.asso.fr/actualites/Wims_Journee_transition.pdf

l'évaluation etc. Dans quelques rares endroits, la formation est spécifique pour les enseignants de mathématiques. C'est le cas notamment des formations offertes par le Centre MatRIC[10] en Norvège. Ce centre invite régulièrement des chercheurs en didactique, venant de différents pays, pour proposer aux enseignants de mathématiques de l'université un travail sur des thèmes spécifiques de leur enseignement en appui sur les résultats de la recherche. Dans d'autres universités, la formation est organisée sous forme d'ateliers qui permettent aux enseignants (débutants ou non) d'étudier des questions professionnelles qu'ils se posent. Ces questions donnent lieu à des expériences d'enseignement, puis à des analyses de pratiques, et peuvent déboucher sur des modifications de pratiques (Biehler et al. 2018).

Aux États-Unis, le projet Next[11] organisé au niveau fédéral par la Mathematical Association of America (MAA) vise la formation des jeunes enseignants (Next signifie New Experiences in Teaching). Il existe depuis 1994 et a contribué à la formation d'environ 1 700 enseignants. Le programme Next propose aux enseignants inscrits une formation étalée sur une année, débutant par trois jours d'ateliers spécifiques, avant la conférence annuelle de la MAA en août (nommée Mathfest). Ensuite chaque enseignant inscrit a un tuteur avec lequel il peut échanger. En janvier, de nouveaux ateliers sont proposés, sur des thèmes comme des approches innovantes pour l'enseignement de certains contenus mathématiques spécifiques et les stratégies pour motiver les étudiants pour l'apprentissage de ces contenus. Finalement en août, un nouveau rassemblement a lieu au Mathfest. L'organisation au niveau fédéral permet de rassembler suffisamment d'enseignants-chercheurs pour faire une formation spécialement dédiée aux mathématiques.

Certaines recherches (par exemple Jaworski & Matthews, 2011) montrent l'intérêt d'un séminaire rassemblant des mathématiciens et des didacticiens des mathématiques autour de questions d'enseignement. A l'université les échanges sur les pratiques d'enseignement sont rares, et ce type de séminaire permet de rompre l'isolement.

En Nouvelle-Zélande et au Canada (Barton et al., 2010 ; Corriveau, 2015), des groupes de ce type ont été organisés, avec la particularité de rassembler des enseignants de l'université et des enseignants de lycée. Ils ont permis pour les participants de progresser vers une perspective commune sur l'enseignement des mathématiques, et donc vers un rapprochement des cultures institutionnelles. En France, les IREM[12], au sein desquels peuvent collaborer des enseignants universitaires et des enseignants du secondaire permettent de tels échanges depuis de nombreuses années ; cette expérience pourrait être étendue.

4. Perspectives des recherches en cours

Les recherches en didactique des mathématiques concernant la transition secondaire-supérieur se poursuivent. Un intérêt se développe notamment pour les non-spécialistes : étudiants de biologie ou d'économie notamment. Pour ces publics la réforme du lycée en France modifie fortement les conditions institutionnelles, certains lycéens n'ayant pas suivi la « Spécialité mathématiques » en

[10] https://www.uia.no/en/centres-and-networks/matric/what-is-matric
[11] https://www.maa.org/programs-and-communities/professional-development/project-next
[12] Instituts De Recherche sur l'Enseignement de Mathématiques

Terminale. Comment vivront-ils la transition, comment est-il possible de les accompagner ? D'autres changements sont à prévoir, à l'issue de la crise sanitaire de la COVID-19, puisque certaines universités semblent vouloir maintenir une large part d'enseignement distant. Est-il possible pour les étudiants de découvrir simultanément l'université et les cours hybrides ? Les études en cours sur les conséquences de la crise sanitaire amèneront un éclairage sur ce point ; espérons que les politiques universitaires concernant l'enseignement distant en tiennent compte.

Références

Arnoux, P., De Vleeschouwer, M., Sénéchaud, P., Frétigné, P., Gasparini, J., & Boyer, J-Y. (2008). Conférence 3 : Des dispositifs pour mieux accueillir les étudiants à l'université, *Actes du colloque inter IREM "La réforme des programmes du lycée, et alors ?"* (pp. 48-67). Irem de Paris. http://www.univ-irem.fr/IMG/pdf/ips13003pdf-e8e1.pdf

Arnoux, P., & Vaux, L. (2012). Recherches en mathématiques pour les élèves du secondaire : l'exemple des stages Hippocampe. In J.-L. Dorier & S. Coutat, *Enseignement des Mathématiques de Contrat social. Enjeux et défis pour le 21e siècle. Actes du colloque EMF2012* (pp. 1282-1294). http://emf.unige.ch/files/3714/1018/0853/Actes-EMF2012-Ensemble_Textes.pdf

Artigue, M. (2002). Ingénierie didactique : quel rôle dans la recherche didactique aujourd'hui ? *Les Dossiers des Sciences de l'Éducation*, *8*, 59-72.

Artigue, M. (2004). *Le défi de la transition secondaire-supérieur. Que peuvent nous apporter les recherches en didactique des mathématiques* [communication orale]. Premier congrès franco-canadien de sciences mathématiques, Toulouse.

Balacheff, N. (2010). Bridging knowing and proving in mathematics An essay from a didactical perspective. In Hanna G., Jahnke H. N., & Pulte H. (Eds.), *Explanation and proof in mathematics* (pp. 115-135). Heidelberg: Springer.

Bardini, C., & Pierce, R. (2018). Symbols: pillars of the secondary-university bridge? In V. Durand-Guerrier, R. Hochmut, S. Goodchild, & N.-M. Hogstad (Eds.), *Proceedings of INDRUM 2018* (pp. 478-486). Kristiansand : Norway.

Barquero, B. (2018). The ecological relativity of modelling practices: adaptations of an study and research path to different university settings. In V. Durand-Guerrier, R. Hochmut, S. Goodchild, & N.-M. Hogstad (Eds.), *Proceedings of INDRUM 2018*. (pp. 85-94). Kristiansand : Norway.

Barton, B., Clark, M., & Sherin, L. (2010). Collective dreaming: a school-university interface. *New Zealand Journal of Mathematics*, *40*, 15-31.

Battie, V. (2003). *Spécificités et potentialités de l'arithmétique élémentaire pour l'apprentissage du raisonnement mathématique*, Thèse de doctorat de l'Université Paris VII.

Battie, V. (2009). Proving in number theory at the transition from the secondary level to the tertiary level: between organizing and operative dimensions. In F. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, & M. De Villiers (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education* (pp. 71-76). The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University Taipei, Taiwan. http://140.122.140.1/~icmi19/files/Volume_1.pdf

Bergé, A. (2016). Le rôle de la borne supérieure (ou supremum) dans l'apprentissage du système des nombres réels. In E. Nardi, C. Winsløw, & T. Hausberger (Eds.), *Proceedings of INDRUM 2016* (pp. 33-42). University of Montpellier and INDRUM.

Berger, M. (2004) The Functional Use of a Mathematical Sign. *Educational Studies in Mathematics, 55*, 81-102. https://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000017672.49486.f2

Bergsten, C. (2011). Why do students go to lectures? In M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.*), Proceedings of the Seventh Congress of the European Mathematical Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1960-1970). University of Rzeszów and ERME.

Biehler, R., Fischer, P.R, Hochmuth, R., & Wassong, T. (2011). Designing and evaluating blended learning bridging courses in mathematics. online blended courses. In M. Pytlak, T. Rowland & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the 7th Conference of European Researchers in Mathematics Education* (pp. 1971-1981). University of Rzeszów and ERME.

Biehler, R., Jaworski, B., Rønning, F., Wawro, M., & Winsløw, C. (2018). Education and professional development of University Mathematics Teachers. In V. Durand-Guerrier, R. Hochmut, S. Goodchild, & N.-M. Hogstad (Eds.), *Proceedings of INDRUM 2018*. (pp. 145-154). Kristiansand, Norway.

Bloch, I., & Ghedamsi, I. (2005). Comment le cursus secondaire prépare-t-il les élèves aux études universitaires ? Le cas de l'enseignement de l'analyse en Tunisie, *Petit x, 69*, 7-30.

Bosch, M., Fonseca, C., & Gascón, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 24*(2.3), 205-250.

Bridoux, S., Hache, C., Grenier-Boley, N., & Robert, A. (2016). Les moments d'exposition des connaissances en mathématiques, analyses et exemples. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *21*, 187–233.

Bridoux, S. (2018). Classe inversée : une expérience en première année universitaire. Quelle réorganisation des apprentissages ? *Petit x, 106*, 41-64.

Broley, L., Caron, F., & Saint-Aubin, Y. (2018). Levels of Programming in Mathematical Research and University Mathematics Education. *International Journal for Research in University Mathematics Education, 4*(1), 38-55. https://doi.org/10.1007/s40753-017-0066-1

Brousseau, G. (1998). *Théorie des Situations Didactiques.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Burton, L. (1999). Mathematics and their epistemologies – and the learning of mathematics. In I. Schwank (Ed.), *European Research in Mathematics Education I: Proceedings of the First Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 87-012) Osnabrück, Germany: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik and ERME.

Burton, L. (2004). *Mathematicians as Enquirers: Learning about Learning Mathematics.* Netherlands: Springer.

Castela, C. (2004). Institutions influencing mathematics students'private work: a factor of academic achievement. *Educational Studies in Mathematics, 57*, 33-63. https://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000047050.70008.59

Chellougui, F. (2004). *L'utilisation des quantificateurs universel et existentiel en première année universitaire entre l'explicite et l'implicite.* Thèse de doctorat, Université Claude Bernard Lyon 1 et Université de Tunis.

Cologne, C., & de Hosson, C. (2016). *Apport d'un dispositif d'analyse de pratiques enseignantes instrumentées sur le développement professionnel des enseignants du supérieur*[communication orale]. Actualité de la Recherche en Éducation et en Formation - AREF, 4-7 juillet 2016, Belgique : Mons.

Corriveau, C. (2015). Aborder les questions de transitions dans une perspective d'harmonisation. In L. Theis (dir.) *Actes du colloque EMF 2015* (pp. 982-993). Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene, Société Mathématique d'Algérie Alger, 2015, Algérie.

Croft, T., Grove, M., & Lawson, D. (2016). The oversight of mathematics, statistics and numeracy support provision at university level. https://www.sigma-network.ac.uk/resources/evaluation/

de Guzman, M., Hodgson, B.R., Robert, A., & Villani, V. (1998). Difficulties in the passage from secondary to tertiary education, *Documenta mathematica, extra volume ICM 1998*.

de Vleeschouwer, M. (2008). Aider les étudiants à entrer dans un nouveau contrat didactique institutionnel en mathématiques ? L'exemple de l'opération Tremplin à l'Université de Namur. In A. Thépaut & D. Lemaître (dir.), *Actes du colloque Questions de Pédagogies dans l'Enseignement Supérieur*, (pp. 289-299). Brest : Telecom Brest.

Dorier, J.-L (dir.) (1997a). *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*. La Pensée Sauvage.

Dorier, J.-L. (1997b). Une lecture épistémologique de la genèse de la théorie des espaces vectoriels. In J.-L. Dorier (dir.), *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question* (pp. 21-102). La Pensée Sauvage.

Dorier, J.-L. (ed.) (2000). *On the Teaching of Linear Algebra,* Kluwer Academic Publishers.

Dorier, J.-L., Robert, A., Robinet, J., Rogalski, M. (1997). L'algèbre linéaire : l'obstacle du formalisme à travers diverses recherches de 1987 à 1995. In Dorier, J.-L (dir.). *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question,* (pp.105-147). La Pensée Sauvage.

Doukhan, C., & Gueudet, G. (2019). Students' difficulties at the secondary-tertiary transition: the case of random variables. In U. Jankvist & M. van den Heuvel Panhuizen (Eds.), *Proceedings of the eleventh Conference for European Research in Mathematics Education* (pp.2464-2471).Utrecht, the Netherlands.

Durand-Guerrier, V., & Arsac, G. (2005). An epistemological and didactic study of a specific calculus reasoning rule. *Educational Studies in Mathematics, 60*(2), 149-172. https://doi.org/10.1007/s10649-005-5614-y

Durand-Guerrier, V., & Vergnac, M. (2011). Les réels à la transition secondaire-supérieur. Du discret au continu – Quelle élaboration ? *Actes du colloque inter IREM "La réforme des* *programmes du lycée, et alors ?" Irem de Paris* http://www.univ-irem.fr/IMG/pdf/ips13003pdf-e8e1.pdf

Engineering Council (2000). Measuring the mathematics problem. London. https://www.engc.org.uk/EngCDocuments/Internet/Website/Measuring%20the%20Mathematic%20Problems.pdf

Farah, L. (2015). *Étude et mise à l'étude des mathématiques en classes préparatoires économiques et commerciales : point de vue des étudiants, point de vue des professeurs*. Thèse de doctorat Université Paris Diderot. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01195875

Flores-González, M., Vandebrouck, F., & Vivier, L. (2020). Suites définies par récurrence dans la transition lycée-université : activité et travail mathématique. In T. Hausberger, M. Bosch, & F. Chelloughi (Eds.), *Proceedings of the Third Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics* (INDRUM 2020, Bizerte, Tunisia, 12-19 September 2020) (pp. 83–92). University of Carthage and INDRUM, 2020.

Fredriksen, H., Hadjerrouit, S., Monaghan, J., & Rensaa, R. (2017). Exploring Tensions in a Mathematical Course for Engineers utilizing a Flipped Classroom Approach. In T. Dooley & G. Gueudet (Eds), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Mathematical Society for Research in Mathematics Education*. (CERME 10, February 1 – 5, 2017). (pp. 2057-2064). Dublin, Ireland: DCU Institute of Education and ERME.

González-Martín, A. (2015). The use of textbooks by pre-university teachers. An example with infinite series of real numbers. In K. Krainer & N. Vondrova (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Mathematical Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2124–2130). Prague, Czech Republic, Charles University and ERME.

Grenier-Boley, N. (2009). Un exemple d'étude de gestion des déroulements en travaux dirigés de Mathématiques à l'Université. *Cahier de Didirem, Numéro 59*, Publication de IREM de Paris 7. http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/up/publications/IPS09001.pdf

Gueudet, G. (2008). Investigating the secondary-tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics, 67*(3), 237-254. https://doi.org/10.1007/s10649-007-9100-6

Gueudet, G. (2017). University Teachers' Resources Systems and Documents. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education 3*(1), 198-224. https://doi.org/10.1007/s40753-016-0034-1

Gueudet, G., Bosch, M., diSessa, A., Kwon, O.-N., Verschaffel (2016). *Transitions in mathematics education.* ICME13 Topical survey series. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-31622-2

Gueudet, G. & Lebaud, M.-P. (2008). Quelle évaluation dans le supérieur en mathématiques ? In A. Thépaut & D. Lemaître, *Actes du colloque Questions de Pédagogies dans l'Enseignement Supérieur,* (pp. 289-299). Brest : Telecom Brest.

Gueudet, G., & Lebaud, M.-P. (2014). *Utilisation de ressources par les étudiants de première année pour les enseignements de mathématiques : une étude exploratoire, sur le module AR1.* Rapport IREM de Rennes.

Gueudet, G., & Pepin, B. (2018). Didactic contract at university: a focus on resources and their use. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education 4*(1), 56-73. https://doi.org/10.1007/s40753-018-0069-6

Gueudet G., & Thomas M.O.J. (2020) Secondary-Tertiary Transition in Mathematics Education. In Lerman S. (Ed.) *Encyclopedia of Mathematics Education.* Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_100026

Gueudet, G. & Vandebrouck, F. (2019). *Entrée dans l'enseignement supérieur : éclairages en didactique des mathématiques* http://www.cnesco.fr/fr/education-a-lorientation/post-baccalaureat/. Rapport pour le Conseil National d'Evaluation du Système Scolaire.

Inglis, M. & Alcock, L. (2012). Expert and novice approaches to reading mathematical proofs. *Journal for Research in Mathematics Education, 43,* 358–390.

Jaworski, B. & Matthews, J. (2011). How we teach mathematics: discourses on/in university teaching. In M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Mathematical Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2022-2032). Rzeszów, Poland: University of Rzeszów and ERME.

Lalaude-Labayle, M. (2016). *L'enseignement de l'algèbre linéaire au niveau universitaire - Analyse didactique et épistémologique*. Thèse de l'Université de Pau et des Pays de l'Adour. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01419021

Lawson, D. & Croft, T. (2018, April). *Lessons for mathematics higher education from 25 years of mathematics support*. Presentation at the INDRUM 2018 conference, Kristiansand, Norway.

Lebaud, M-P. (2010). L'outil WIMS dans le plan « Réussir en licence », 3e colloque international WIMS, Bordeaux, du 28 au 30 mai (http://www.math.u-bordeaux1.fr/WIMS_2010/presentation/Lebaud_Bordeaux_2010.pdf)

Leininger-Frézal, C. (Guest Ed.) (2016). L'usage du cas et de l'exemple dans l'enseignement supérieur pratiques, apprentissages et rapport aux savoirs. *Recherches en Education 27*. https://doi.org/10.4000/ree.5774

Lew, K., Fukawa-Connelly, T., Mejia-Ramos, J.P., & Weber, K. (2016). Lectures in advanced mathematics: Why students might not understand what the mathematics professor is trying to convey. *Journal for Research in Mathematics Education, 47*(2) 162-198.

Lithner, J. (2000). Mathematical reasoning in task solving, *Educational studies in mathematics, 41*, 165-190. https://doi.org/10.1023/A:1003956417456

Lithner, J. (2003). Student's mathematical reasoning in university textbook exercises. *Educational studies in mathematics, 52,* 29-55. https://doi.org/10.1023/A:1023683716659

Lockwood, E., Ellis, A. B., & Lynch, A. G. (2016). Mathematicians' example-related activity when exploring and proving conjectures. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *2(*2), 165-196. https://doi.org/10.1007/s40753-016-0025-2

Mejía-Ramos, J. P. & Weber, K. (2014). Why and how mathematicians read proofs: Further evidence from a survey study. *Educational Studies in Mathematics, 85*, 161-173. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9514-2

Mesa, V., & Cawley, A. (2015). Faculty knowledge of teaching in inquiry-based learning mathematics. In K. Krainer, N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp.2194-2200). Prague, Czech Republic, Charles University and ERME.

Mesa, V., & Griffiths, B. (2012). Textbook mediation of teaching: an example from tertiary mathematics instructors. *Educational Studies in Mathematics, 79*, 85–107. https://doi.org/10.1007/s10649-011-9339-9

Nardi, E., & Iannone, P., (2005). To appear and to be: acquiring the « genre speech » of university mathematics. In M. Bosch (Ed.) *European Research in Mathematics Education IV: Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.* (pp. 1800-1810) Sant Feliu de Guíxols, Spain: FUNDEMI IQS – Universitat Ramon Llull and ERME.

Nardi, E., Jaworski, B., & Hegedus, S. (2005). A spectrum of pedagogical awareness for undergraduate mathematics: From 'tricks' to 'techniques'. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(4), 284-316.

Ouvrier-Buffet, C. (2015). Quelles sont les conceptions d'élèves, d'enseignants, de mathématiciens contemporains sur la définition ? Qu'en est-il de l'activité de définition ? Vers un modèle de l'activité de définition en mathématiques. *Repères IREM, 100*, 5-24.

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics, 66*, 23–41. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9057-x

Pepin, B. (2014). Using the construct of the didactic contract to understand students' transition into university mathematics education. *Policy Futures in Education 12*(5), 646-657. https://doi.org/10.2304/pfie.2014.12.5.646

Rämö, J., Oinonen, L., & Vikberg, T. (2016). Extreme Apprenticeship – Emphasising conceptualunderstanding in undergraduate mathematics. In K. Krainer & N. Vondrova (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Mathematical Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2242-2248). Prague, Czech Republic: Charles University in Prague and ERME.

Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université, *Recherches en didactique des mathématiques, 18*(2), 139-190.

Rogalski, M. (2016). Revenir à la notion de limite par certaines de ses raisons d'être : un chantier pour le début de l'analyse à l'université. In E. Nardi, C. Winsløw, & T. Hausberger (Eds.), *Proceedings of the First Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics* (pp. 133-142). Montpellier, France: University of Montpellier and INDRUM. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01337945

Sghaier, B., & Vandebrouck, F. (2018). Teaching and learning continuity with technologies. In V. Durand-Guerrier, R. Hochmut, S. Goodchild, & N.-M. Hogstad (Eds.), *Proceedings of INDRUM 2018* (pp. 84-93). Kristiansand, Norway.

Selden, A. (2012). Transitions and proof and proving at tertiary level. In G, Hanna, & M. de Villiers (Eds), *Proof and proving in mathematics education: the 19th ICMI Study* (pp. 391-420), Springer.

Smith, W. M. (Ed.). (2021). *Transformational change efforts: Student engagement in mathematics through an institutional network for active learning*. American Mathematical Society.

Stylianides, G.J., & Stylianides, A.J. (2009). Facilitating the transition from empirical arguments to proofs. *Journal for Research in Mathematics Education, 40*, 314-352.

Tall D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics 12*, 151-169. https://doi.org/10.1007/BF00305619

Thomas, M.O.J., de Freitas Druck, I., Huillet, D., Ju, M.-K., Nardi, E., Rasmussen, C. & Xie, J. (2012). Key Mathematical Concepts in the Transition from Secondary School to University. In Cho S. (Ed.) *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp.265-284). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3

Vandebrouck F. (2011). Points de vue et domaines de travail pour l'étude des fonctions, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives de Strasbourg, 16*, 149-185.

Vandebrouck, F., Corriveau, C., & Cherikh, O. (2016). Transitions dans l'enseignement des mathématiques, compte rendu du projet spécial n°3. In L. Theis (dir.) *Actes du colloque EMF2015*, (pp 963-969). Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene, Société Mathématique d'Algérie Alger, 2015, Algérie.

Vandebrouck F., & Leidwanger S. (2016). Students' vizualisation of functions from secondary to tertiary level. In E. Nardi, C. Winsløw, & T. Hausberger (Eds.), *Proceedings of the First Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics* (pp. 153-162). Montpellier, France: University of Montpellier and INDRUM. https://hal.archives-ouvertes.fr/INDRUM2016/

Vivier, L., & Durand-Guerrier, V. (2016). Densité de $\mathbb{D}$, complétude de $\mathbb{R}$ et analyse réelle. Première approche. In E. Nardi, C. Winsløw, & T. Hausberger (Eds.), *Proceedings of the First Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics* (pp. 143-152). Montpellier, France: University of Montpellier and INDRUM.

Weber, K. (2015). Effective proof reading strategies for comprehending mathematical proofs. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 1*(3), 289-314. https://doi.org/10.1007/s40753-015-0011-0

Winsløw, C. (2008). Transformer la théorie en tâches : la transition du concret à l'abstrait en analyse réelle. In A. Rouchier, & I. Bloch (Eds.), *Actes de la XIIIème école d'été en didactique des mathématiques (cd-rom).* La Pensée Sauvage.

Ghislaine Gueudet
Université Paris-Saclay
Bât 407, rue du Doyen Georges Poitou
91400 Orsay
*e-mail:*ghislaine.gueudet@universite-paris-saclay.fr

Fabrice Vandebrouck
Université Paris Cité, UFR de mathématiques, LDAR
85 Boulevard Saint-Germain
75006 PARIS – France
e-mail: fabrice.vandebrouck@u-paris.fr