

Chaînages positifs de repères affines et polygones convexes entiers

Christelle Guichard

▶ **To cite this version:**

Christelle Guichard. Chaînages positifs de repères affines et polygones convexes entiers. 2021. hal-03202418

HAL Id: hal-03202418
https://hal.science/hal-03202418

Preprint submitted on 19 Apr 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Chaînages positifs de repères affines et polygones convexes entiers

Christelle Guichard
Université de Nîmes,
Laboratoire MIPA,
Site des Carmes, Place Gabriel Péri,
30021 Nîmes, France
email: christelle.guichard@unimes.fr

Mars 2021

Abstract

Dans cette étude, on s'intéresse aux $n-$gones convexes entiers du plan, d'aire minimale $a(n)$.

On utilise des chaînages de repères positifs, des familles d'applications spéciales affines. En associant un polygone convexe entier à un chaînage positif, on code des polygones potentiellement minimaux par des mots sur l'alphabet $\Sigma = \mathbb{N}$.

En projection sur le groupe modulaire $PSL_2(\mathbb{Z})$, on met en évidence des règles de réécriture sur le monoïde libre Σ^* compatibles. Celles-ci, permettent d'une part de générer récursivement ces polygones, et d'autre part, d'extraire des propriétés de minimalité et d'aires.

On montre le résultat principal suivant dans la dernière partie :

Théorème : Soit $n \geq 7$. On a :

$$a(2n-1) \leq a(2n) - \frac{15}{2}.$$

En 1990, Simpson [S] propose une majoration avec la constante $\frac{1}{2}$. De plus, la méthode fournit des majorations de $a(2n-1)$ plus précises que celles proposées par W. Castryck [Cas] obtenues en 2012 pour $2n-1 \in \{17, 19\}$.

Keywords — polygones convexes entiers, lignes brisées, chaînages, groupe modulaire, système de réécriture, optimisation, nombres de Catalan

Contents

1 Premières Définitions **3**
- 1.1 Polygones convexes entiers et polygones minimaux . . . 3
- 1.2 Problème invariant modulo $GA(\mathbb{Z}^2)$ . . . 5
- 1.3 Lignes brisées entières localement convexes et localement minimales . . . 6
  - 1.3.1 Définitions - Lignes et Aires . . . 6
  - 1.3.2 Propriété de convexité . . . 6
  - 1.3.3 Propriétés de minimalité . . . 7
  - 1.3.4 Applications aux $n-$gones . . . 7

2 Chaînages positifs de repères affines **9**
- 2.1 Définition . . . 9
- 2.2 Décomposition d'un chaînage . . . 10
- 2.3 Structure de monoïde libre $\mathcal{C}h_+^* \simeq \Sigma_2^*$ . . . 12
- 2.4 Chaînages et lignes brisées localement convexes et 2-minimales . . . 13
- 2.5 Chaînages et polygones convexes et localement 2-minimaux . . . 14

3 La rotation - Le morphisme $\mu : \Sigma^* \longrightarrow PSL_2(\mathbb{Z})$ **17**
- 3.1 Présentation de monoïde $PSL_2(\mathbb{Z}) \simeq \langle \Sigma | H, V \rangle$. . . . 17
- 3.2 Longueur, somme et indice sur Σ^* . . . 18
- 3.3 Indice et nombre de tours . . . 19
- 3.4 Partitions de K_μ et de K_C . . . 20
  - 3.4.1 Les sous-ensembles K_μ^k, $K_\mu^{k,l}$, K_C^k et $K_C^{k,l}$ . . . 20
  - 3.4.2 Le sous-ensemble $K_\mu^{\frac{1}{2}}$ . . . 21
  - 3.4.3 Le sous-ensemble K_μ^1 . . . 22

4 Les mots de $(0\Sigma)^*$ **24**
- 4.1 L'expansion $V_2 : \Big(0a.0b \longrightarrow 0(a+1).02.0(b+1)\Big)$ . . . 24
- 4.2 Le sous-ensemble $\Omega = K_\mu^{\frac{1}{2}} \bigcap (0\Sigma)^*$ . . . 24
  - 4.2.1 Présentation de Ω . . . 25
  - 4.2.2 A permutation circulaire près . . . 26
  - 4.2.3 Les facteurs des mots de Ω . . . 27

5 Configurations locales particulières **31**
- 5.1 Règles compatibles avec $C : \Sigma_2^* \longrightarrow SA(\mathbb{Z}^2)$ . . . 31
- 5.2 Les switch . . . 31
- 5.3 Les biseautages . . . 32
- 5.4 Configurations non minimales - Polygones non minimaux . . . 33
- 5.5 Des raccourcis . . . 36

6 $2n-$gones minimaux **40**
- 6.1 $2n-$gones parallèles et chaînages carrés . . . 40
- 6.2 $2n-$gones parallèles minimaux et chaînages de $(0\Sigma)^*$ . . . 40
- 6.3 Le $2n-$gone parallèle particulier $\left[(n23^{n-2}2)^2\right]$ . . . 42
- 6.4 Les premiers chaînages carrés associés aux polygones minimaux . . . 44

7 $2n+1-$gones minimaux **45**

1 Premières Définitions

1.1 Polygones convexes entiers et polygones minimaux

Définition 1.1. *On considère* ***l'action de permutation circulaire*** *du groupe additif* $(\mathbb{Z}, +, 0)$ *sur une famille* $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ *d'un ensemble* E *par décalage circulaire à droite*

$$\begin{array}{lcl} \mathbb{Z} \times E^n & \longrightarrow & E^n \\ (1, f_1, f_2, \cdots, f_n) & \longmapsto & 1.(f_1, f_2, \cdots, f_n) = (f_n, f_1, f_2 \cdots f_{n-1}). \end{array}$$

On note $\mathbb{Z}F$ l'orbite d'une famille F pour l'action de permutation circulaire. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité, on notera simplement une orbite par l'un de ses représentants.

On note $E/\mathbb{Z}$ l'ensemble des orbites.

Définition 1.2. *Un* ***polygone (ou*** $n-$***gone) entier*** $\mathcal{P}$ *est la classe d'équivalence pour les permutations circulaires d'une suite de* n *points* $(P_j)_{0\leq j\leq n-1}$ *du réseau entier* $\mathbb{Z}^2 \simeq \mathbb{Z}[i]$ *du plan* $\mathbb{R}^2$ *tel que pour tout indice* i *modulo* n*, les déterminants* $det(P_{j+1} - P_j, P_{j-1} - P_j)$ *sont non nuls.*

Autrement dit, trois points consécutifs ne sont pas alignés.

On note simplement $\mathcal{P} = \mathbb{Z}(P_j)_{0\leq j\leq n-1} = (P_j)_{0\leq j\leq n-1}$ et on considère les indices de la famille des sommets $(P_j)_{0\leq j\leq n-1}$ d'un $n-$gone modulo n.

Définition 1.3.

- *Un* $n-$*gone est* ***simple*** *si pour tous indices disctincts* $i \neq j$*, l'intersection des côtés* $[P_i, P_{i+1}]$ *et* $[P_j, P_{j+1}]$ *est soit le point* $P_{i+1} = P_j$ *si* $j = i + 1$*, soit le point* $P_{j+1} = P_i$ *si* $i = j + 1$*, soit vide.*
- *Un polygone* $(P_j)_{0\leq j\leq n-1}$ *est* ***convexe*** *s'il est simple et si, pour tout indice* i *modulo* n*, les déterminants* $det(v_k, v_{k+1})$*, avec* $v_k = P_{k+1} - P_k$ *sont de même signe.*

  Autrement dit, les angles géométriques intérieurs $P_i\widehat{P_{i+1}P_{i+2}}$ *sont strictement inférieurs à* π *radians.*

Remarque 1.1. *Notons* $v_j = P_{j+1} - P_j$ *les vecteurs côtés d'un polygone convexe* $\mathcal{P} = (P_j)_{0\leq j\leq n-1}$*.*

1. *Pour tout indice* $0 \leq j \leq n-1$ *et tout entier* $1 \leq k \leq n-3$*, les déterminants* $det(P_{j+1}-P_j, P_{j+k+1}-P_j) = det(v_j, v_j + v_{j+1} + \cdots v_{j+k})$ *et* $det(P_{j+k+1} - P_j, P_{j-1} - P_j) = det(v_j + v_{j+1} + \cdots v_{j+k}, -v_{j-1})$ *sont non nuls et de même signe.*

   La diagonale $P_{j+k+1}-P_j$ *est dans l'intérieur du polygone* $\mathcal{P}$*. Les deux polygones* $(P_j, P_{j+1}, \cdots, P_{j+k+1})$ *et* $(P_{j+k+1}, P_{j+k+2}, \cdots, P_j)$ *de part et d'autre de cette diagonale sont également convexes.*

2. *Par itération, un polygone* $\mathcal{P}$ *se découpe en* $n-1$ *triangles tels* $P_jP_{j+k}P_{j+k+1}$ *avec* $1 \leq k \leq n-1$*.*

   Les déterminants $det(P_{j+k} - P_j, P_{j+k+1} - P_j)$ *sont tous non nuls, du signe des déterminants* $det(P_{j+1} - P_j, P_{j+2} - P_j) = det(v_j, v_j + v_{j+1}) = det(v_j, v_{j+1})$*.*

   Ce découpage est représenté figure (1) pour $j = 0$*.*

Dans ce travail, on s'interresse à l'aire des polygones convexes entiers et plus particulièrement aux polygones d'aire minimale.

Définition 1.4. *On note* A *l'application qui a tout polynome convexe* $\mathcal{P} = (P_0, P_1, \cdots P_{n-1})$*, défini par ses sommets* $(P_i)_i \in \mathbb{R}^2$*, associe* ***l'aire*** $A(\mathcal{P})$ *de la région délimitée par le polygone* $\mathcal{P}$*, donnée par la formule :*

$$A(\mathcal{P}) = \frac{1}{2}\Big|\sum_{k=1}^{n-2} det(P_k - P_0, P_{k+1} - P_0)\Big|. \qquad (1.1)$$

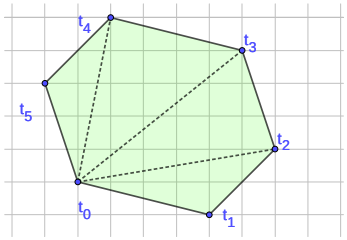


Figure 1: Découpage d'un $n-$gone convexe entier en $n-1$ triangles.

Remarque 1.2. *L'aire géométrique du polygone est la somme des aires géométriques des triangles $P_0P_kP_{k+1}$ obtenus avec les diagonales issues de P_0. Comme les déterminants sont tous de même signe, on a:*

$$\Big|\sum_{k=1}^{n-2} det(P_k - P_0, P_{k+1} - P_0)\Big| = \sum_{k=1}^{n-2} \Big|det(P_k - P_0, P_{k+1} - P_0)|\Big|.$$

Proposition 1.1. *L'aire $A(\mathcal{P})$ d'un $n-$gone convexe $\mathcal{P} = (P_i)_{0\leq i\leq n-1}$ s'exprime comme la somme des déterminants :*

$$A(\mathcal{P}) = \frac{1}{2}\Big|\sum_{k=0}^{n-1} det(P_k, P_{k+1})\Big|. \tag{1.2}$$

Démo. Quelque soit l'orientation du plan, on a :

$$\begin{aligned} A(\mathcal{P}) &= \frac{1}{2}\Big|\sum_{k=1}^{n-2} det(P_k - P_0, P_{k+1} - P_0)\Big| \\ &= \frac{1}{2}\Big|\sum_{k=1}^{n-2} det(P_k, P_{k+1}) + \sum_{k=1}^{n-2} det(P_0, P_k) - \sum_{k=1}^{n-2} det(P_0, P_{k+1})\Big| \\ &= \frac{1}{2}\Big|\sum_{k=1}^{n-2} det(P_k, P_{k+1}) + det(P_0, P_1) + det(P_{n-1}, P_0)\Big| \\ &= \frac{1}{2}\Big|\sum_{k=0}^{n-1} det(P_k, P_{k+1})\Big| \qquad \text{avec } P_n = P_0. \end{aligned}$$

□

Cette formule s'étend naturellement à l'ensemble des polygones, par nécessairement convexes.

Le théorème de Pick, permet d'exprimer l'aire d'un polygone entier en fonction du nombre de points intérieurs et du nombre de points sur le bord :

Théorème 1 (Pick - 1899)**.** L'aire d'un polygone entier $\mathcal{P}$ est donné par la formule

$$A(\mathcal{P}) = i + \frac{b}{2} - 1$$

où i est le nombre de points intérieurs du polygone $\mathcal{P}$ et b est le nombre de points sur le bords $\partial\mathcal{P}$.

En particulier, l'aire d'un polygone entier est un entier ou un demi-entier.

On considère la relation d'ordre partielle sur l'ensemble des polygones convexes entiers :

Définition 1.1. *Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux polygones convexes entiers.*

On dit que $\mathcal{P}_1$ est inclu dans $\mathcal{P}_2$, noté $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2$ (respectivement $\mathcal{P}_1 \subsetneq \mathcal{P}_2$), si l'intérieur de $\mathcal{P}_1$ est inclu (respectivement strictement inclu) dans l'intérieur de $\mathcal{P}_2$.

On dit aussi que $\mathcal{P}_2$ contient $\mathcal{P}_1$.

Lemme 1.1. *Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux polygones convexes entiers.*

Si $\mathcal{P}_1 \subsetneq \mathcal{P}_2$ alors $A(\mathcal{P}_1) < A(\mathcal{P}_2)$.

Démo. C'est clair. □

Il existe un $n-$gone convexe entier qui minimise l'aire et on définit :

Définition 1.5.

- *On note a la fonction qui à un entier n associe **la plus petite aire** possible d'un $n-$gone convexe entier.*
- *Un $n-$gone convexe entier $\mathcal{P}$ est dit **minimal** si $A(\mathcal{P}) = a(n)$.*

Remarque 1.3.

Comme tout $(n+1)-$gone contient strictement un $n-$gone, il est clair que la fonction $a : n \mapsto a(n)$ est strictement croissante et on a

$$a(n+1) \geq a(n) + \frac{1}{2}.$$

La suite des doubles de $a(n)$ est répertoriée dans l'OEIS ($nA070911$).

Entre autres, Arkinstall en 1980, Rabinowitz en 1990, Simpson en 1990, Finch en 2003, Olsezewska en 2006, et plus récemment, Henze en 2015, Pfoertner en 2018 ont contribué à déterminer les premières valeurs de $a(n)$:

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
a(n)	0,5	1	2,5	3	6,5	7	10,5	14	21,5	24	32,5	40	51,5	59

n	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	28
a(n)	59	75,5	87	106,5	121	145,5	164	193,5	210	248,5	274	345

1.2 Problème invariant modulo $GA(\mathbb{Z}^2)$

Dans le plan affine euclidien orienté, les translations de vecteurs à coefficients entiers sont des isométries. En particulier, les translations conservent les angles, les distances et les aires algébriques.

Pour résoudre le problème de minimisation d'aire, on peut réduire l'étude aux classes d'équivalence des $n-$gones modulo les translations de $\mathbb{Z}^2$. Ainsi, la classe d'un polygone $\mathcal{P}$ peut-être définie par la famille des vecteurs côtés $(V_j)_{0\leq j\leq n-1}$, avec $V_j \in (\mathbb{Z}^2)^* \simeq \mathbb{Z}[i]^*$ vérifiant $\sum_{j=0}^{n-1} V_j = 0$.

Les applications linéaires inversibles de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{Z}^2$ conservent également les aires. Donc, on peut aussi réduire l'étude modulo le groupe linéaire $Gl_2(\mathbb{Z})$.

Plus précisément, via les propriétés du déterminant, on obtient le résultat suivant :

Proposition 1.2. *Une application affine f de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{Z}^2$ conserve les aires géométriques si et seulement s'il existe une translation τ et une application linéaire L de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{Z}^2$ de déterminant $det(L) = \pm 1$ telles que pour tous points (x, y) de $\mathbb{Z}^2$, on a $f(x, y) = L(x, y) + \tau$.*

L'application affine f est dans le groupe affine $GA(\mathbb{Z}^2)$ et l'application linéaire qui lui est associée L est dans le groupe linéaire $Gl_2(\mathbb{Z})$.

Démo. Les éléments inversibles du groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}^*, \times)$ sont $+1$ et -1. Donc le groupe affine $GA(\mathbb{Z}^2)$ est l'ensemble des applications affines dont l'application linéaire associée est de déterminant ± 1.

De plus, une application affine préserve lalignement, le parallélisme, les rapports de mesures algébriques, et multiplie les aires, les volumes, les déterminants par le déterminant de lapplication linéaire associée.

D'où le résultat.

□

Une application affine inversible de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{Z}^2$ peut s'exprimer par une matrice 3×3 à coefficients entiers telle que pour tout point entier $P(x, y)$ du plan, l'image $P'(x', y')$ de P vérifie :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = f(x, y) = \begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

avec $det\Big(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\Big) = \pm 1$.

Lorsque $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = I_2$, l'application f est la translation de vecteur $\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$.

Ainsi, une application affine inversible est déterminée par la donnée d'une matrice de $Gl_2(\mathbb{Z})$ et d'une translation de $\mathbb{Z}^2$. Le groupe affine s'identifie au produit semi-direct :

$$GA(\mathbb{Z}^2) \simeq Gl_2(\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^2.$$

Définition 1.6. *Un **repère affine** de l'espace affine $\mathbb{Z}^2_{aff}$ dans le plan orienté $\mathbb{R}^2$ est la donnée d'une $\mathbb{Z}-$base (v, w) du réseau $\mathbb{Z}^2$ et d'une origine t de l'ensemble affine $\mathbb{Z}^2$.*

On note $\mathcal{R}$ l'ensemble des repères affines.

Proposition 1.3. *L'ensemble des repères affines $\mathcal{R}$ s'identifie à :*

$$\mathcal{R} \simeq \{(v, w, t) \in (\mathbb{Z}^2)^3 / det(v, w) = \pm 1\}.$$

Démo. En effet, un couple de vecteur entiers (v, w) est une base du réseau si et seulement si l'aire du parallélogramme défini par v et w est $|det(v, w)| = 1$.

□

Corollaire 1.1. *Le groupe affine est isomorphe à l'ensemble des repères affines*

$$GA(\mathbb{Z}^2) \simeq \mathcal{R}.$$

Finalement, l'aire étant invariante par le groupe affine $GA(\mathbb{Z}^2) \simeq Sl_2(\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^2$, isomorphe à l'ensemple des repères affines $\mathcal{R}$, on sera mené, pour notre problème de polygones minimaux, à considérer l'ensemble des polygones convexes entiers modulo l'ensemble des repères affines.

1.3 Lignes brisées entières localement convexes et localement minimales

Dans cette partie, on définit deux propriétés de minimalité locale nécessaire à la propriété de minimalité globale des polygones : la $1-$minimalité et la $2-$minimalité.

Ces propriétés sont définient plus généralement sur l'ensemble des lignes brisées localement convexes.

1.3.1 Définitions - Lignes et Aires

Définition 1.7.

- *Une $n-$**ligne brisée entière** (ou simplement une ligne brisée) est une suite $(t_j)_{0\leq j\leq n}$ de $n+1$ points du plan affine $\mathbb{Z}^2 \simeq \mathbb{Z}[i]$ tels que pour tout indice $1 \leq j \leq n-1$, les déterminants $det(t_j - t_{j-1}, t_{j+1} - t_j)$ sont non nuls.*

  Autrement dit, trois points consécutifs ne sont pas alignés.

- *Une $n-$ligne brisée $(t_j)_{0\leq j\leq n}$ est dite **fermée** si $t_n = t_0$.*

Remarque 1.4. *Les $n-$lignes brisées fermées sont les $n-$gones.*
On note $\Delta(l) = \Delta(t_0, t_1, \ldots, t_{n-1})$ le $n-$gone défini par la $n-$ligne brisée fermée $l = (t_0, t_1, \cdots t_{n-1}, t_0)$.

La définition de l'application d'aire A d'un polygone convexe (1.1) s'étend naturellement aux lignes brisées :

Définition 1.8. *Soit $l = (t_0, t_1, \ldots t_n)$ une $n-$ligne brisée. On note $A(l)$ **l'aire délimitée par la ligne brisée** l définie par :*

$$A(l) = \frac{1}{2}\Big|\sum_{k=1}^{n-1} det(t_k - t_0, t_{k+1} - t_0)\Big|.$$

Remarque 1.5. *Quand la ligne brisé $l = (t_0, t_1, \cdots t_{n-1})$ définit un polygone $(t_0, t_1, \cdots t_n, t_0)$ simple, l'aire $A(l)$ est aussi l'aire géométrique délimitée par l.*

1.3.2 Propriété de convexité

Définition 1.9. *Soit un entier $n \geq 2$.*
*Une $n-$ligne brisée $l = (t_0, t_1, \cdots t_n)$ est **localement convexe** si pour tout indice $1 \leq j \leq n-1$, les déterminants $det(t_j - t_{j-1}, t_{j+1} - t_j)$ sont tous de même signe.*
*On dit qu'une ligne brisée localement convexe est **orientée** par un couple (v, w) si le déterminant $det(v, w)$ est non nul, de même signe que les déterminants $det(t_j - t_{j-1}, t_{j+1} - t_j)$.*

Remarque 1.6.

- *Il est clair que toute $2-$ligne brisée est localement convexe. Elle comporte 3 sommets donc 1 seul déterminant.*

- *Identiquement à la remarque (1.1) sur la convexité d'un polygone, comme les déterminants $det(v_{i-1}, v_i)$ et $det(v_{i-1}, v_i + v_{i-1})$ sont égaux, ils sont, à fortiori, de même signe.*

  Donc, considérer l'orientation de couples de deux côtés consécutifs v_{i-1} et v_i revient à considérer l'orientation définie par un côté v_{i-1} et sa diagonale adjacente $v_{i-1} + v_i$.

  Ainsi, une ligne brisée est localement convexe si les déterminants $det(v_{i-1},\ v_{i-1} + v_i) = det(t_j - t_{j-1}, t_{j+1} - t_{j-1})$ sont tous de même signe.

- *Uune ligne brisée localement convexe est donc orientée par le couple* (v_0, w_0) *où* $v_0 = l_1 - l_0$ *et* $w_0 = l_2 - l_0$.

Il est clair qu'une ligne brisée localement convexe n'est en générale pas convexe, dès lorsqu'elle n'est pas fermée par exemple.

Même fermée, une ligne brisée n'est pas forcément convexe. Il faut vérifier l'angle au sommet où la ligne se referme.

Par définition, un polygone convexe est une ligne brisée fermée, simple et localement convexe, et ce même au sommet de fermeture. En particulier, la propriété locale de convexité est une condition nécessaire à la convexité (globale) d'un polygone.

1.3.3 Propriétés de minimalité

Définition 1.10.

- *Soit un entier* $n \geq 1$.

  Une $n-$*ligne brisée* $(t_j)_{0\leq j\leq n}$ *est* ***localement*** $1-$***minimale*** *si pour tout indice* $0 \leq j \leq n-1$, *le segment* $]t_{j+1} - t_j[$ *n'a pas de points entiers intérieur.*

  (Autrement dit, le vecteur $t_{j+1} - t_j$ *est primitif.)*

- *Soit un entier* $n \geq 2$.

  Une $n-$*ligne brisée* $l = (t_j)_{0\leq j\leq n}$ *est* ***localement*** $2-$***minimale*** *si :*

  i l *est localement* $1-$*minimale,*

  ii et pour tout indice $1 \leq j \leq n-1$, *le triangle* $\Delta(t_{j-1}, t_j, t_{j+1})$ *n'a pas de point intérieur.*

Remarque 1.7.

- *Soit* n *un entier* ≥ 1.

  Étant donné une ligne brisée $l = (t_0, t_1, \cdots t_n)$ *localement convexe et localement* $1-$ *minimale, pour tout indice* $1 \leq i \leq n-1$, *le couple* $(t_j - t_{j-1}, t_{j+1} - t_j)$ *forme une base du réseau* $\mathbb{Z}^2$.

  Donc, le triplet $(t_j - t_{j-1}, t_{j+1} - t_j, t_{j-1})$ *est un repère du réseau* $\mathbb{Z}^2$.

- *D'après le théorème (1) de Pick , une ligne brisée* $l = (t_0, t_1, \ldots, t_n)$ *est* $2-$*minimale si pour tout indice* $1 \leq i \leq n-1$, *l'aire délimité par le triangle* $\Delta(t_{j-1}, t_j, t_{j+1})$ *est égale à*

$$A_j = \frac{1}{2}|det(t_j - t_{j-1}, t_{j+1} - t_j)| = \frac{1}{2}(\alpha_j - 1),$$

  où α_j *est le nombre de points entiers sur la diagonale* $[t_{j+1} - t_{j-1}]$.

Remarque 1.8. *Les* $n-$*gones héritent des caractéristiques locales des* $n-$*lignes brisées : on parle donc de* $n-$*gones localement convexes, de* $n-$*gones localement* $1-$*minimaux et de* $n-$*gones localement* $2-$*minimaux.*

1.3.4 Applications aux $n-$gones

Dans cette section, on montre que les propriétés locales de minimalités sont des conditions nécessaires pour qu'un $n-$gone entier convexe soit (globalement) minimal.

Lemme 1.2. *[Réduction de polygone]*

1. *Tout polygone convexe entier contient un polygone convexe entier* $1-$*minimal.*
2. *Tout polygone convexe entier contient un polygone convexe entier* $2-$*minimal.*

Démo. En utilisant les notations de la figure (1.3.4) :

1. Un tel polygone $1-$minimal peut être obtenu via l'algorithme : Tant qu'un côté $]P_i, P_{i+1}[$ admet un point entier A, on remplace le sommet P_{i+1} par le sommet A.

   L'algorithme est bien fini car le nombre de points entiers dans l'intérieur fermé du polygone diminue strictement.

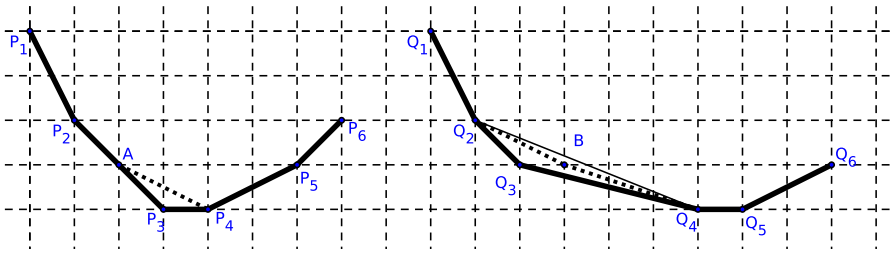


Figure 2: Réduction de $n-$gones localement non $1-$minimal et non $2-$minimal.

2. Pour obtenir un tel polygone $2-$minimal, avec l'algorithme en 2 étapes:

   Tant qu'un triangle $Q_iQ_{i+1}Q_{i+2}$ admet un point entier B dans son intérieur ouvert, on remplace le sommet Q_{i+1} par le point B.

   Puis, d'après 1)., le polygone convexe entier ainsi obtenu contient un polygone convexe entier localement $1-$minimal. Par transitivité, on obtient le résulat.

□

Proposition 1.4. *Un polygone convexe entier minimal est localement* $2-$*minimal.*

Démo. C'est clair avec les lemmes (1.1) et (1.2). □

Remarque 1.9. *Étant donné qu'un polygone minimal est localament* $1-$*minimal, les points sur le bords sont ses sommets.*

Via la formule de Pick, on déduit que : $\begin{cases} a(2\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}, \\ a(2\mathbb{N}+1) \subset \mathbb{N} + \frac{1}{2}. \end{cases}$

2 Chaînages positifs de repères affines

Dans cette partie, on donne une nouvelle définition d'une classe d'équivalence d'une $n-$ligne brisée entière localement convexe et localement $2-$minimale modulo l'ensemble des repères affines du réseau, indépendante de notions d'origine, de longueurs et d'angles ; via les chaînages positifs de repères affines.

Ce point de vue nous place dans un cadre plus restreint pour notre étude des polygones convexes entiers en ne considérant que les polygones vérifiant la propriété locale de $2-$minimalité. Toutefois, ce cadre plus restreint est adapté au problème d'optimisation d'aire du fait que d'une part, les polygones minimaux sont localement convexes et localement $2-$minimaux et d'autre part, que les objets considérés, les chaînages, définis ci-après, se détachent de la structure métrique usuelle du plan euclidien $\mathbb{Z}^2$, tout en conservant les propriétés d'alignement et d'aire qui nous intéresse.

2.1 Définition

On note $\mathcal{R} = \{(v,w,t) \in (\mathbb{Z}^2)^3 / det(v,w) = \pm 1\}$ l'ensemble des repères affines du réseau des entiers $\mathbb{Z}^2 \simeq \mathbb{Z}[i]$ dans le plan orienté.

On note $\mathcal{R}^+ = \{(v,w,t) \in (\mathbb{Z}^2)^3 / det(v,w) = 1\}$ l'ensemble des repères affines directes et $\mathcal{R}^- = \{(v,w,t) \in (\mathbb{Z}^2)^3 / det(v,w) = -1\}$ l'ensemble des repères affines indirectes, de sorte que

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}^+ \bigsqcup \mathcal{R}^-.$$

Définition 2.1. *Soient α et β deux entiers.*

Un ***chaînage élémentaire positif*** *est une application affine de l'ensemble des repères affines $\mathcal{R}$ dans lui même défini par :*

$$\begin{array}{rccc} C_{\alpha,\beta} : & \mathcal{R} & \longrightarrow & \mathcal{R} \\ & (v,w,t) & \mapsto & (v',w',t') = (v,w,t)\,[\alpha.\beta] \end{array}$$

où les vecteurs v, w et t sont considérés comme des entiers de Gauss et où $[\alpha.\beta]$ est la matrice

$$[\alpha.\beta] = \begin{pmatrix} -1 & -(\beta+1) & 1 \\ \alpha+1 & (\alpha+1)(\beta+1)-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{C}h_+$ l'ensemble des chaînages positifs élémentaires.

Remarque 2.1.

1. *Pour tous entiers α et β, le déterminant de la matrice $[\alpha.\beta]$ est égale à 1.*

   Aussi, la matrice $[\alpha.\beta]$ est inversible, d'inverse

   $$[\alpha,\beta]^{-1} = \begin{pmatrix} (\alpha+1)(\beta+1)-1 & \beta+1 & 1-(\alpha+1)(\beta+1) \\ -(\alpha+1) & -1 & \alpha+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   dont le déterminant est 1.

   Ainsi, pour $(v',w',t') = C_{\alpha,\beta}(v,w,t)$, on a : alors $det(v',w') = det(v,w)$.

   - *$det(v',w') = det(v,w) = \pm 1$: les vecteurs v,w,v' et w' sont des vecteurs primitifs et*

     $$C_{\alpha,\beta}(\mathcal{R}) = \mathcal{R}.$$

   - *un chaînage positif élémentaire conserve l'orientation et on a :*

     $$C_{\alpha,\beta}(\mathcal{R}^+) = \mathcal{R}^+ \qquad et \qquad C_{\alpha,\beta}(\mathcal{R}^-) = \mathcal{R}^-.$$

2. *La matrice $[\alpha,\beta]$ est de la forme*

   $$\begin{pmatrix} N(\alpha,\beta) & \begin{matrix} e \\ f \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } det(N(\alpha,\beta)) = 1.$$

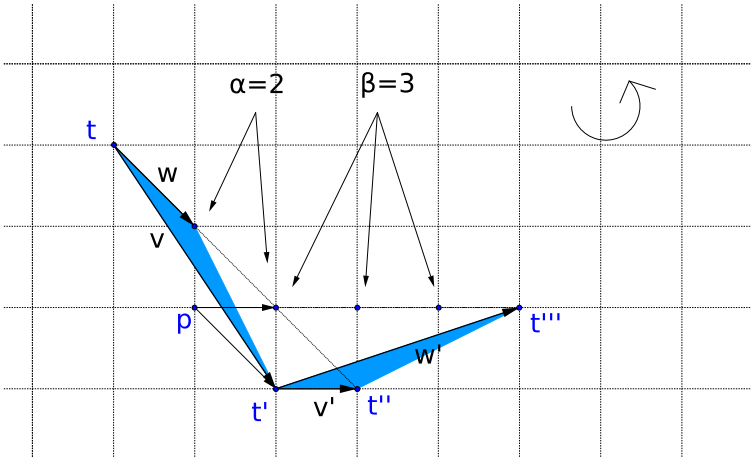


Figure 3: Le repère $R' = (v', w', t')$ est chaîné au repère $R = (v, w, t)$ par le chaînage $C_{2,3}$ et on a $v + v' = 3w$ et $w + w' = 4v'$.

Ainsi, un chaînage élémentaire est dans le groupe spécial affine $SA(\mathbb{Z}^2)$ *:*

$$C_{\alpha,\beta} \in SA(\mathbb{Z}^2) \simeq Sl_2(\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^2.$$

La partie linéaire est fonction des variables α *et* β*. La translation, elle, est indépendante de ces variables.*

3. *Interprétation géométrique (cf. figure (3))*

   Par définition du chaînage $C_{\alpha,\beta}$*, deux repères* $R = (v, w, t)$ *et* $R' = (v', w', t')$ *vérifient les équations :*

$$v' = -v + (\alpha + 1)w \tag{2.3}$$

$$w' = -(\beta + 1)v + [(\alpha + 1)(\beta + 1) - 1]\, w \tag{2.4}$$

$$t' = t + v \tag{2.5}$$

   - *En particulier, la relation (2.5) implique que les origines* t *et* t' *des reprères* R *et* R' *sont "reliés" par* v*, le premier vecteur de la base de* R*.*

     On dit que le repère R' *est chaîné au repère* R *par le chaînage* $C_{\alpha,\beta}$*.*
   - *Aussi, la relation (2.3) est équivalente à la relation* $v + v' = (\alpha + 1)w$*. Or,* w *est un vecteur primitif, donc l'entier* α *est le nombre de points entiers intérieurs au segment* $[t, t + v + v']$*.*
   - *Enfin, les relations (2.3) et (2.4) impliquent que* $w + w' = (\beta + 1)v'$*. Donc l'entier* β *est le nombre de points entiers intérieurs au segment* $[t + v - w, t + v + w']$*.*

Dans la section suivante, on met en évidence une forme factorisée d'un chaînage avec trois facteurs. Dans cette factorisation, sont isolés : la translation, le paramètre α et le paramètre β, avec des rôles "assez similaires" pour α et β .

2.2 Décomposition d'un chaînage

Pour tout entier a, on note $\tilde{\mu}(a)$ l'application linéaire du groupe spécial linéaire $Sl_2(\mathbb{Z})$ définie par :

$$\tilde{\mu}(a) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a+1 \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

On considère les applications spéciales affines $(I_2, (1, 0))$ et $(\tilde{\mu}(a), (0, 0))$ de $SA(\mathbb{Z}^2) \simeq Sl_2(\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^2$ associées aux matrices

$$T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } [a] = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & a+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lemme 2.1. *Étant donnés deux entiers α et β, la matrice $[\alpha.\beta]$ d'un chaînage $C_{\alpha,\beta}$ se factorise sous la forme :*

$$[\alpha.\beta] = T_3 \cdot [\alpha] \cdot [\beta] = \begin{pmatrix} I_2 & \begin{matrix}1\\0\end{matrix} \\ \begin{matrix}0 & 0\end{matrix} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mu}(\alpha) & \begin{matrix}0\\0\end{matrix} \\ \begin{matrix}0 & 0\end{matrix} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mu}(\beta) & \begin{matrix}0\\0\end{matrix} \\ \begin{matrix}0 & 0\end{matrix} & 1 \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

Démo. Par simple calcul matriciel. □

Remarque 2.2. *Comme $c_{\alpha,\beta} = T_3\,[\alpha]\,[\beta]$ avec $det(T_3) = det([\alpha]) = det([\beta]) = 1$, cette décomposition d'un chaînage confère deux repères intermédiaires entre un repère R et son image R' par le chaînage $C_{\alpha,\beta}$ et on a :*

$$R = (v,w,t) \underset{T_3}{\longmapsto} (v,w,t') \underset{[\alpha]}{\longmapsto} (w,v',t') \underset{[\beta]}{\longmapsto} R' = (v',w',t')$$

$$C_{\alpha,\beta}$$

avec $v' = -v + (\alpha+1)w$ et $w' = -w + (\beta+1)v'$.

Les bases (v,w), (w,v') et (v',w') des repères intermédiaires sont adjacentes et ont la même orientation :

$$det(v,w) = det(w,v') = det(v',w') = \pm 1.$$

Proposition 2.1. *Soient $R = (v,w,t)$ et $R' = (v',w',t')$ deux repères du réseau entier $\mathbb{Z}^2$. Notons $\epsilon = det(v,w) \in \{-1,+1\}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i R' *est chaîné au repère* R.

ii Il existe deux entiers naturels α et β tels que $R' = C_{\alpha,\beta}(R)$.

iii Il existe deux entiers naturels α et β tels que $\begin{cases} t' = t + v \\ v' = -v + (\alpha+1)w \\ w' = -w + (\beta+1)v' \end{cases}$.

iv $\begin{cases} t' = t + v \\ det(w,v') = det(v',w') = \epsilon \\ \epsilon \cdot det(v,v') > 0 \text{ et } \epsilon \cdot det(w,w') > 0 \end{cases}$.

Démo.

Les équivalences entre (i), (ii) et (iii) sont claires avec le le lemme (2.1) de décomposition.

$\underline{(iii) \Rightarrow (iv) :}$ Supposons (iii) vraie.
Comme $det(T_3) = det([\alpha]) = det([\beta]) = 1$, on a : $det(v,w) = det(w,v') = det(v',w') = \epsilon$.
Comme $v' = -v + (\alpha+1)w$, on a : $\epsilon \cdot det(v,v') = \epsilon(\alpha+1)det(v,w) = \alpha + 1 > 0$.
De même, comme $w' = -w + (\beta+1)w$, on a : $\epsilon \cdot det(v,v') = \beta + 1 > 0$.

$\underline{(iv) \Rightarrow (iii) :}$ Supposons (iv) vraie. On décompose v' dans la base (v,w) : notons $v' = av + bw$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$.
Ainsi, on a $\epsilon = det(w,v') = a \cdot det(w,v) = -a \cdot \epsilon$. Donc $a = -1$.
De plus, $\epsilon \cdot det(v,v') = \epsilon b \cdot det(v,w) = b \cdot \epsilon^2 > 0$. Donc $b \in \mathbb{N}^*$.
Donc v' est de la forme $v' = -v + (\alpha+1)w$, avec $\alpha \in \mathbb{N}$.

De la même façon, on montre que w' est de la forme $w' = -w + (\beta+1)v'$ avec $\beta \in \mathbb{N}$.

□

Cette décomposition d'un chaînage permet aussi d'étudier les "rotations" des bases. En particulier, les résultats sur le morphisme $\mu = \pi \circ \tilde{\mu} : \Sigma^* \longrightarrow PSl_2(\mathbb{Z})$, la projection de $\tilde{\mu}$ sur le groupe projectif spécial linéaire $PSl_2(\mathbb{Z})$ sont présentés dans la partie (3).

2.3 Structure de monoïde libre $\mathcal{C}h_+^* \simeq \Sigma_2^*$

Définition 2.2. *Soit $n \in \mathbb{N}$.*

*Étant données deux familles d'entiers $(\alpha_i)_{1\leq j\leq n}$ et $(\beta_i)_{1\leq j\leq n}$, on appelle un $n-$**chaînage positif** (ou chaînage positif), une suite de n chaînages positifs élémentaires $(C_{\alpha_1,\beta_1}, C_{\alpha_2,\beta_2}, \ldots, C_{\alpha_n,\beta_n})$.*

On note $\mathcal{C}h_+^*$ l'ensemble des chaînages positifs.

On note $\Sigma = \mathbb{N}$ l'alphabet des entiers et on considère Σ^* le monoïde libre muni de la loi de concaténation et de élément neutre $\emptyset$.

On considère le sous-monoïde libre Σ_2^* de Σ composé des mots de longueur paire. On note ι l'injection canonique $\Sigma_2^* \overset{\iota}{\hookrightarrow} \Sigma^*$.

L'ensemble des chaînages positifs muni de la loi de composition et de l'élément neutre I_3 forme un monoïde libre isomorphe au monoïde libre $\Sigma_2^* \simeq (\mathbb{N}^2)^*$.

Il est naturel de noter un chaînage par un mot de l'alphabet de $\Sigma = \mathbb{N}$ de longueur paire sous la forme $(C_{\alpha_1,\beta_1}, \ldots, C_{\alpha_n,\beta_n}) = \alpha_1, \beta_1.\alpha_2, \beta_2 \ldots \alpha_n, \beta_n$.

Pour simplifier l'écriture, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité possible, nous noterons un mot de longueur paire sans les virgules :

$$\alpha_1\beta_1.\alpha_2\beta_2 \ldots \alpha_n\beta_n.$$

Par exemple, avec l'écriture 13.20 il faut bien lire $C_{1,3}C_{2,0} = 1, 3.2, 0$.

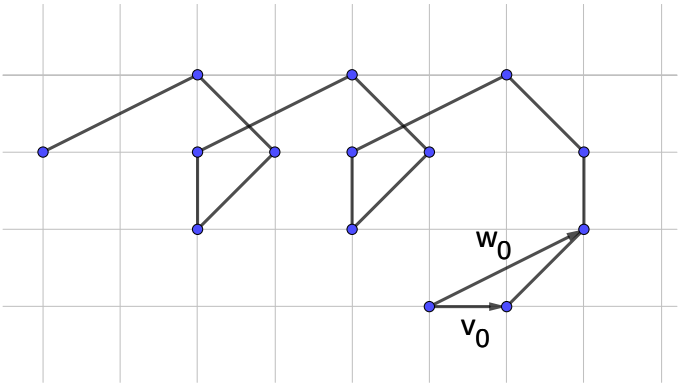


Figure 4: Exemple d'un chaînage comportant des boucles. Ici, le représentant de la classe des lignes brisées définie par le chaînage $\{02.03.01.20.10.00.10.20.10.00.10.20.2\beta\}$ avec $v_0 = (1, 0)$ et $w_0 = (2, 1)$.

Remarque 2.3. *Étant donné un repère R_0, un chaînage du monoïde libre $\mathcal{C}h_+^*$ peut être représenté par une ligne brisée, comme dans l'exemple de la figure (4), définie par les origines des images successives des repères R_i par les chaînages élémentaires C_{α_i,β_i} :*

$$R_{i+1} = C_{\alpha_{i+1},\beta_{i+1}}(R_i).$$

On dit que les repères $R_0, R_1, \ldots, R_n$ forment une chaîne positive de repères et qu'ils sont chaînés par le chaînage positif $(\alpha_1\beta_1.\alpha_2\beta_2 \cdots \alpha_n\beta_n)$.

On note C le morphisme de monoïde défini par :

$$\begin{array}{rccl} C: & \mathcal{C}h_+^* \simeq \Sigma_2^* & \longrightarrow & SA(\mathbb{Z}^2) \simeq Sl_2(\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^2 \\ & \emptyset & \longmapsto & I_3 \\ & (\alpha, \beta) & \longmapsto & C(\alpha, \beta) = [\alpha, \beta] = \begin{pmatrix} -1 & -(\beta+1) & 1 \\ \alpha+1 & (\alpha+1)(\beta+1)-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Proposition 2.2. *Le morphisme $C : \Sigma_2^* \simeq \mathcal{C}h_+^* \longrightarrow SA(\mathbb{Z}^2)$ est surjectif.*

Démo.

D'une part, les générateurs $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $Sl_2(\mathbb{Z})$ et la matrice $U = ST = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sont dans l'image de C. Par exemple, on a :

- $C(00.10.00.00) = (S, (0, 0))$.
- $C(00.00.01) = (T, (0, 0))$.

- $C(00.10.00.01) = (U, (0, 0))$.

D'autre part, les pures translations dans chacune des directions canoniques sont dans l'image de C. Par exemple, on a :

- $C(10.00.02.01) = (I, (1, 0))$
- $C(10.10.01.01) = (I, (0, 1))$
- $C(01.02.01.00) = (I, (-1, 0))$
- $C(01.01.10.10) = (I, (0, -1))$

Donc, $C(\mathcal{C}h_+^*) = SA(\mathbb{Z}^2) \simeq Sl_2(\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^2$.

□

Remarque 2.4. *Comme le morphisme $C : \Sigma_2^* \longrightarrow SA(\mathbb{Z}^2)$ est surjectif, pour tout couple de repères R et R' du réseau des entiers $\mathbb{Z}^2$, si R et R' ont la même orientation, il existe un chaînage $(C_{\alpha_i,\beta_i})_{1\leq i\leq n}$ qui relie le repère R au repère R'.*

2.4 Chaînages et lignes brisées localement convexes et 2-minimales

Les chaînages élémentaires d'un $n-$chaînage transforment successivement un repère affine en un repère affine qui lui est chaîné de sorte que l'on obtient une $n-$ligne brisée.

Ainsi, étant donné un repère initial R_0, un chaînage $\alpha_1\beta_1.\alpha_2\beta_2\cdots\alpha_n\beta_n$ peut être représenté par une ligne brisée.

Dans cette partie, on montre qu'une ligne brisée associée à un chaînage est localement convexe et localement $2-$minimale et réciproquement, une ligne brisée localement convexe et localement $2-$minimale caractérise un $n-$chaînage, à un chaînage élémentaire près et un entier près.

Proposition 2.3.

i Soit $R_0 = (v_0, w_0, t_0)$ un repère du réseau $\mathbb{Z}^2$. Soient $(\alpha_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(\beta_i)_{1\leq i\leq n}$ des entiers naturels. On note $(R_i)_{0\leq i\leq n} = (v_i, w_i, t_i)_{0\leq i\leq n}$ la chaîne de repères positifs chaînés par le chaînage $\alpha_1\beta_1 \cdot \alpha_2\beta_2\cdots\alpha_n\beta_n$.

La $(n+1)-$ligne brisée entière $(t_0, t_1, \cdots t_n)$, formée par les origines des repères chaînés $(R_i)_{0\leq i\leq n}$ est localement convexe et localement $2-$minimale.

ii Étant donnée une $(n+1)-$ligne brisée entière $l = (t_0, t_1, \cdots, t_n)$ localement convexe et localement $2-$minimale, il existe une unique famille d'entiers naturels $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_{n-1}, \beta_1, \beta_2 \cdots \beta_{n-2})$ telle que pour tous entiers $\alpha_n, \beta_{n-1}, \beta_n \in \mathbb{N}$, il existe une chaîne de repères $(R_i)_{0\leq i\leq n}$ d'origines $(t_i)_{0\leq i\leq n}$ telle que

$$R_i = C_{\alpha_i,\beta_i}(R_{i-1}), \qquad \textit{pour tout } 1 \leq i \leq n.$$

Démo.

i On note $\epsilon = det(v_0, w_0) \in \{-1; +1\}$ et pour tout indice $1 \leq i \leq n$, on note $R_i = (v_i, w_i, t_i) = C_{\alpha_i,\beta_i}(R_{i-1})$.

Par itération de la proposition (2.1) :

- Pour tout indice $1 \leq i \leq n-1$, on a : $det(v_i, w_i) = det(v_{i-1}, w_{i-1}) = \epsilon$. Donc les vecteurs côtés $(v_i)_{0\leq i\leq n-1}$ de la ligne brisée sont primitifs et la ligne brisée est $1-$minimale.
- Pour tout indice $1 \leq i \leq n-1$, on a : $det(v_{i-1}, v_i)$ est du signe de ϵ. Donc la ligne brisée est localement convexe.
- Pour tout indice $1 \leq i \leq n-1$, notons A_i l'aire du triangle $\Delta_i = \Delta(v_{i-1}, v_i) = \Delta(t_{i-1}, t_i, t_{i+1})$. Comme $v_i = -v_{i-1} + (\alpha_i + 1)w_{i-1}$ et $det(v_{i-1}, w_{i-1}) = \epsilon$, l'aire A_i est $A_i = \frac{1}{2}|det(v_{i-1}, v_i)| = \frac{1}{2}(\alpha_i + 1)$ et le côté $[t_{i-1}, t_{i+1}]$ a exactement $\alpha_i + 2$ points entiers. Comme les deux autres côtés du triangle Δ_i sont primitifs, le nombre de points entiers sur le bords de Δ_i est $\alpha_i + 3$.

  D'après le théorème de Pick, le triangle Δ_i n'a pas de point entier intérieur.

  Donc la ligne brisée est localement $2-$minimale.

ii Étant donné une ligne brisée $l = (t_0, t_1, \cdots, t_n)$ localement convexe et localement $2-$minimale, on a :

- Pour tout indice $0 \leq i \leq n-1$, on note $v_i = t_{i+1} - t_i$.
- Pour tout indice $1 \leq i \leq n-1$, on note α_i est le nombre de points entiers intérieurs au segment $[t_{i-1}, t_{i+1}]$.

- Pour tout indice $0 \leq i \leq n-2$, on note w_i est le vecteur directeur primitif de la demi-droite $[t_i, t_{i+2})$.
- Pour tout indice $1 \leq i \leq n-2$, on note β_i est le nombre de points entiers intérieurs au segment $[t_i - w_{i-1}, t_i + w_i]$

Ainsi, pour tous entiers naturels $\alpha_n, \beta_{n-1}, \beta_n$, et pour tout indice $1 \leq i \leq n$, le point t_i est l'origine du repère $R_i = (v_i, w_i, t_i)$, chaîné au repère $R_{i-1} = (v_{i-1}, w_{i-1}, t_{i-1})$ par le chaînage C_{α_i,β_i}.

□

Définition 2.3. *Soit $\alpha_1\beta_1.\cdots\alpha_n\beta_n$ un $n-$chaînage de $\mathcal{C}h_+^*$.*
Soit $R_0 = (v_0, w_0, t_0)$ un repère affine.
***La ligne brisée associée à** $\alpha_1\beta_1.\cdots\alpha_n\beta_n$ **issue de** R_0 est la $(n+1)-$ligne brisée localement convexe et localement $2-$minimale formée des origines $(t_i)_{0\leq i\leq n}$ des $n+1$ repères $(R_i)_i$ chaînés par le chaînage $\alpha_1\beta_1.\cdots\alpha_n\beta_n$.*

Remarque 2.5.

- *La ligne brisée associée au chaînage $\emptyset$ issue d'un repère $R_0 = (v_0, w_0, t_0)$ est (t_0).*
- *Soient $p, s \neq \emptyset \in \mathcal{C}h_+^*$, $k = \lambda(p)$ et $n = \lambda(ps)$ et $R_0 \in \mathcal{R}$. Soit $l = (t_0, t_1, \ldots, t_n)$ la ligne brisée associée au chaînage ps issue de R_0.*

  Par définition, la ligne brisée $(t_0, t_1, \ldots, t_k)$ est la ligne brisée asociée au chaînage p issue de R_0 et la ligne brisée $(t_k, t_{k+1}, \ldots, t_n)$ est la ligne brisée associée au chaînage s issue de $R_k = C_p(R_0)$.

Remarque 2.6. *Soit $\alpha_1\beta_1.\cdots\alpha_n\beta_n$ un chaînage de $\mathcal{C}h_+^*$.*
Soient $R_0 = (v_0, w_0, t_0)$ et $R_0' = (v_0', w_0', t_0')$ deux repères affines.
On note l et l' les lignes brisées associées au chaînage $\alpha_1\beta_1.\cdots\alpha_n\beta_n$ issues des repères R_0 et de R_0'.
La ligne brisée l' est l'image de la ligne brisée l par l'application affine $f = (L, \tau)$ de $GA(\mathbb{Z}^2)$ déterminée par $L(v_0) = v_0'$, $L(w_0) = w_0'$ et $\tau = t_0' - t_0$. Les aires sont inchangées :

$$A(l) = A(l').$$

Définition 2.4. ***L'aire d'un chaînage** $\alpha_1\beta_1\cdots\alpha_n\beta_n$ de $\mathcal{C}h_+^*$, est l'aire d'une ligne brisée associée au chaînage $\alpha_1\beta_1\cdots\alpha_n\beta_n$ issue d'un repère affine R_0.*
On notera simplement $A(\alpha_1\beta_1\cdots\alpha_n\beta_n)$.

Remarque 2.7. *Soient $n \geq 2$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ et $\beta_1, \ldots, \beta_n$ des entiers naturels.*
Soit $\mathcal{R}_0$ un repère.
D'après la proposition (2.3), pour tous entiers naturels β_{n-1}', α_n' et β_n', les lignes brisées associées respectivement au chaînage $\alpha_1\beta_1\cdots\alpha_{n-1}\beta_{n-1}.\alpha_n\beta_n$ et au chaînage $\alpha_1\beta_1\cdots\alpha_{n-1}\beta_{n-1}'.\alpha_n'\beta_n'$ issues de $\mathcal{R}_0$ sont identiques. Ainsi :

$$A(\alpha_1\beta_1\cdots\alpha_{n-1}\beta_{n-1}.\alpha_n\beta_n) = A(\alpha_1\beta_1\cdots\alpha_{n-1}\beta_{n-1}'.\alpha_n'\beta_n').$$

2.5 Chaînages et polygones convexes et localement 2-minimaux

Dans la partie précédente, on a montré qu'une ligne brisée caractérise un chaînage à un entier près. On peut choisir le dernier coefficient β_n d'un chaînage de façon canonique afin d'associer un unique chaînage à une ligne brisée. Le choix le plus simple serait de choisir $\beta_n = 0$.

Dans le cas d'un polygone convexe, le choix du premier sommet est arbitraire. Considérant les sommets à permutation circulaire près, on détermine canoniquement le dernier coefficient β_n :

Proposition 2.4. *Soit $\mathcal{P} = (t_0, t_1, \cdots, t_{n-1})$ un $n-$gone convexe localement $2-$minimal.*
Il existe un unique chaînage $\alpha_1\beta_1.\alpha_2\beta_2\cdots\alpha_n\beta_n$ et une chaîne de repères $(R_i)_{0\leq i\leq n-1}$ d'origines $(t_i)_{0\leq i\leq n-1}$ tels que

$$R_i = C_{\alpha_i,\beta_i}(R_{i-1})$$

et

$$R_0 = C_{\alpha_n,\beta_n}(R_{n-1}).$$

Démo. C'est clair avec le second point de la proposition (2.3) appliquée à la ligne brisée localement convexe et localement $2-$minimale $(t_0, t_1, \cdots, t_{n-1}, t_0, t_1)$. □

Remarque 2.8.

a) *À un polygone convexe entier, on associe canoniquement un chaînage de sorte que l'image d'un repère affine R_0 par ce chaînage est le repère R_0 lui même : non seulement les origines sont identiques et la ligne brisée est fermée ; mais aussi, les bases sont identiques. On dit que la ligne brisée se referme bien.*

Un tel chaînage est dans le noyau K_C du morphisme

$$C : \Sigma_2^* \simeq \mathcal{C}h_+^* \longrightarrow SA(\mathbb{Z}^2).$$

Dans la suite, pour la recherche de polygone convexe entier, on s'interressera donc naturellement au noyau K_C de C, correspondant aux lignes brisées localement convexes et localement $2-$minimales qui se referment bien.

b) *Réciproquement, étant donné un chaînage $(\alpha_1\beta_1\cdots\alpha_n\beta_n)$ du noyau K_C, la ligne brisée fermée définie par les origines $(t_0, t_1, \ldots, t_n)$ des repères chaînés est un polygone fermé, localement convexe et localement $2-$minimal, même au point de fermeture :*

- *les déterminants $det(v_{n-1}, v_0)$ et $det(v_n, v_1)$ sont de même signe que tous les autres déterminants $det(v_i, v_{i+1})$,*
- *et le triangle $\Delta(t_{n-1}, t_n, t_1)$ n'a pas de point intérieur.*

c) *Étant donné un mot dans le noyau K_C du morphisme C et un repère R_0, la ligne brisée associée se referme bien. C'est un polygone localement convexe.*

Mais, le polygone n'est pas nécessairement convexe. Il faut en plus s'assurer que la ligne brisée ne fait pas de boucle. Autrement dit, il faut vérifier que la suite des bases, qui "tourne", ne fait qu'un seul tour.

Ainsi, l'ensemble des polygones convexes est, modulo le groupe affine $GA(\mathbb{Z}^2)$, l'ensemble des mots non vides du noyau K_C dont les lignes brisées associées ne font pas de boucles.

Dans la partie suivante (3) est définie l'indice d'un mot de longueur paire permettant de déterminer le nombre de tours (au demi-tour près) des lignes brisées fermés associées et permet de caractériser le sous-ensemble de K_C correspondant à l'ensemble des polygones convexes entiers.

Pour étudier la rotation, on étudie la projection canonique de $SA(\mathbb{Z}^2)$ dans $Sl_2(\mathbb{Z})$:

$$\begin{array}{rccc} \pi \circ C : & \mathcal{C}h_+^* \simeq \Sigma_2^* & \longrightarrow & Sl_2(\mathbb{Z}) \\ & \alpha.\beta & \longmapsto & \tilde{\mu}(\alpha)\tilde{\mu}(\beta). \end{array}$$

Ainsi, un polygone entier convexe est associé à un mot du le noyau de $\pi \circ C$.

d) *Plus précisément, on étudie la rotation des vecteurs de bases dans un cadre plus général avec le morphisme μ défini sur le monoïde libre Σ^*, comportant aussi des mots de longueurs impairs, par :*

$$\begin{array}{rccc} \mu : & \Sigma^* & \longrightarrow & PSl_2(\mathbb{Z}) \\ & a & \longmapsto & \mu(a) = \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a+1 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Ainsi, tout comme pour le morphisme $\tilde{\mu}$, les polygones convexes $2-$minimaux sont définis par des mots du noyau de μ, de longueur paire, qui font exactement 1 tour.

Remarque 2.9.

- *L'aire d'un chaînage associé à un polygone convexe coïncide avec l'aire géométrique du polygone.*
- *Soit $k \in \mathbb{Z}$. Soit $\alpha_1\beta_1.\cdots\alpha_n\beta_n$ le chaînage postif associé à un polygone convexe $\mathcal{P} = (t_0, t_1, \cdots, t_{n-1})$.*

  Le chaînage positif associé au polygone $\mathcal{P}' = k.(t_0, t_1, \cdots, t_{n-1})$ obtenu par permutation circulaire sur la famille des sommets est :

$$k.(\alpha_1\beta_1\cdots\alpha_n\beta_n) = \alpha_{n-k+1}\beta_{n-k+1}\cdots\alpha_n\beta_n\alpha_1\beta_1\cdots\alpha_{n-k}\beta_{n-k}.$$

  Considérant que $\mathcal{P}$ est une orbite pour l'action de permutation circulaire, le chaînage d'un polygone peut-être considéré à permutation circulaire près. Il est clair que les aires des chaînages sont égales sur les orbites :

$$A(\alpha_1\beta_1\cdots\alpha_n\beta_n) = A(k.(\alpha_1\beta_1\cdots\alpha_n\beta_n)).$$

Proposition 2.5. *Soit w un chaînage positif associé à un polygone convexe entier 2-minimal.*
Soient p, s deux chaînages de $\mathcal{C}h_+^*$ tels que $w = ps$. Alors :

$$A(w) = A(p) + A(s).$$

Démo. Soient $n = \lambda(w)$ et $k = \lambda(p)$. Ainsi, $\lambda(s) = n - k$.

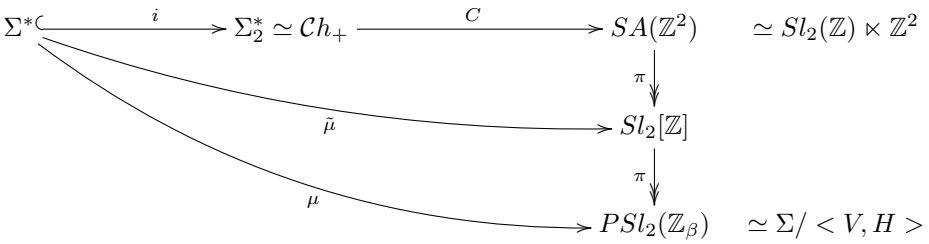
On note $\mathcal{P} = (t_0, t_1, \cdots t_k, \cdots t_{n-1})$ le polygone associé au chaînage $w = ps$.

La ligne brisée localement convexe et localement $2-$miminale $l_1 = (t_0, t_1, \cdots t_k)$ est associée au chaînage p et la ligne brisée localement convexe et localement $2-$miminale $l_2 = (t_k, t_{k+1}, \cdots t_{n-1}, t_0)$ est associée au chaînage s.

Comme $[t_0, t_k]$ est une diagonale de $\mathcal{P}$, on a $A(\mathcal{P}) = A(l_1) + A(l_2)$. □

3 La rotation - Le morphisme $\mu : \Sigma^* \longrightarrow PSL_2(\mathbb{Z})$

Le diagramme suivant résume les morphismes de monoïde définis sur les monoïdes libres Σ^* et Σ_2^* à valeur le groupe spécial affine $SA(\mathbb{Z}^2)$, le groupe spécial linéaire $Sl_2(\mathbb{Z})$ et le groupe spécial linéaire projectif $PSl_2(\mathbb{Z})$:



Dans cette partie, on s'interresse au morphisme

$$\begin{array}{rccc} \mu : & \Sigma^* & \longrightarrow & PSl_2(\mathbb{Z}) \\ & a & \longmapsto & \mu(a) = \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & (a+1) \end{pmatrix} \end{array} .$$

En projetant sur le groupe modulaire, on fait abstraction des translations dans les chaînages. Cela permet d'étudier la rotation des bases d'une famille de repères chaînés.

3.1 Présentation de monoïde $PSL_2(\mathbb{Z}) \simeq \langle \Sigma | H, V \rangle$.

Définition 3.1. *On considère les règles de réécriture H et V définies sur le monoïde libre Σ^* par*

$$\begin{cases} H : (\emptyset \to 000) & \textit{Half-turn} \\ V : (ab \to (a+1)0(b+1)) & \textit{Vallee} \end{cases} .$$

On note $\sim_\Sigma$ la relation d'équivalence engendrée par H et V.

On note $w \longrightarrow_V w'$ (resp. $w \longrightarrow_H w'$) si le mot w' est une réécriture du mot w via la règle de réécriture V (resp. H).

On note $w \twoheadrightarrow_V w'$ (resp. $w \twoheadrightarrow_\Sigma w'$) si le mot w' est une réécriture du mot w via une succession de règles de réécriture V (resp. V et/ou H).

Théorème 2 (G.)**.** (2018) Le groupe modulaire $PSL_2(\mathbb{Z})$, en tant que monoïde, est isomorphe au monoïde quotient $\Sigma^*/\sim_\Sigma$.

Un isomorphisme entre $\Sigma^*/\sim_\Sigma$ et $PSL_2(\mathbb{Z})$ est donné par le morphisme

$$\mu(a) = \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a+1 \end{pmatrix}.$$

Remarque 3.1.

- *Le noyau K_μ est la classe d'équivalence du mot vide $\emptyset$ pour la relation d'équivalence $\sim_\Sigma$.*

  En particulier, les expansions (la longueur du mot augmente) $V : (ab \to (a+1)0(b+1))$ et $H : (\emptyset \to 000)$ et les réductions (la longueur du mot diminue) $v = V^{-1} : ((a+1)0(b+1) \to ab)$ et $h = H^{-1} : (000 \to \emptyset)$ sont compatibles avec le morphisme $\mu : \Sigma^* \to PSL_2(\mathbb{Z})$. En effet, un simple calcul matriciel permet de montrer que, pour tout entier naturel a et b, on a :

$$\mu(a+1)\mu(0)\mu(b+1) = \pm\mu(a)\mu(b) \qquad et \qquad \mu(0)^3 = \pm I_3.$$

  On note $w \to_v w'$, $w \to_h w'$, $w \twoheadrightarrow_\Sigma w'$ ou $w \twoheadrightarrow_{v,V} w'$ si un mot w' est une réécriture d'un mot w via les règles v, h ou via une successions de ses règles.

- *Soient $a, b \in \Sigma$. On a, par itération :*

$$\begin{array}{lll} a00b \longrightarrow_V (a+1)010b & \longrightarrow_v & (a+1)00(b-1) \\ & \cdots & \\ & \twoheadrightarrow_{v,V} & (a+b)000 \\ & \twoheadrightarrow_\Sigma & (a+b) \end{array}$$

En particulier, et cela se vérifie également par calcul matriciel, on a :

$$\mu(a00b) = \mu((a+b)000) = \mu(a+b).$$

Tout mot de Σ^* se réécrit via une successions d'expansions H et V et de réductions v et h à un mot réduit de l'ensemble

$$\mathcal{R}\text{éduit}_\Sigma = \{\emptyset, 0, 00\} \bigcup \{\emptyset, 0, 00\}\, \mathcal{L}'\, \{\emptyset, 0, 00\}$$

avec $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}$ et $\mathcal{L} = \Big(\mathbb{N} \setminus \{0\}\Big)^*$. Ce sont les mots de Σ^* ne comportant pas de zéro intérieur et avec éventuellement 1 ou 2 zéro(s) en début et/ou fin de mots.

Les morphismes de longueurs λ, de somme σ et principalement le morphisme d'indice Ind définis ci-après, permettent de préciser et de partitionner le noyau K_μ.

3.2 Longueur, somme et indice sur Σ^*

Définition 3.2. *On considère les morphismes de monoïde suivants, définis sur le monoïde libre Σ^* :*

- *Le morphisme de* ***longueur*** *λ est défini par :*

$$\begin{array}{rccc} \lambda : & \Sigma^* & \longrightarrow & (\mathbb{N}, +) \\ & \emptyset & \longmapsto & 0 \\ & a & \longmapsto & 1 \end{array}$$

- *Le morphisme de* ***somme*** *σ est défini par :*

$$\begin{array}{rccc} \sigma : & \Sigma^* & \longrightarrow & (\mathbb{N}, +) \\ & \emptyset & \longmapsto & 0 \\ & a & \longmapsto & a \end{array}$$

- *Le morphisme d'****indice*** *Ind est défini par :*

$$\begin{array}{rccc} Ind : & \Sigma^* & \longrightarrow & (\frac{1}{12}\mathbb{Z}, +) \\ & \emptyset & \longmapsto & 0 \\ & a & \longmapsto & \dfrac{2-a}{12} \end{array}$$

Remarque 3.2.

1. *Le morphisme λ compte le nombre de lettre d'un mot sur le monoïde Σ^*. Il correspond à la longueur du mot.*
2. *Le morphisme σ correspond à la somme des lettres d'un mot de Σ^*.*
3. *Le morphisme d'indice s'exprime linéairement en fonction de λ et σ :*

$$Ind = \frac{1}{12}(2\lambda - \sigma).$$

Dans la partie (3.3), on montre que, sur le noyau de μ, le morphisme d'indice correspond au nombre de tour (au demi-tour près) qu'effectue la famille des bases obtenues par un chaînage associé à un mot de Σ^*.

Lemme 3.1.

i L'indice d'un mot est invariant par l'expansion $V = (ab \longrightarrow (a+1)0(b+1))$ (et par réduction v également).

ii L'indice d'un mot augmente de $\dfrac{1}{2}$ par l'expansion $H : (\emptyset \longrightarrow 000)$ (et diminue de $\dfrac{1}{2}$ par la réduction h).

Démo. Comme $Ind = \dfrac{1}{12}(2\lambda - \sigma)$, on a :

- Avec l'expansion V, la longueur d'un mot augmente de 1 et la somme augmente de 2. Donc la variation de l'indice est $\frac{1}{12}(2 \times 1 - 2) = 0$.
- On a : $Ind(000) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} = Ind(\emptyset) + \frac{1}{2}$.

□

Proposition 3.1 (G.). *(2018) Un mot w du noyau K_μ de μ est une réécriture du mot vide $\emptyset$, avec*

$$\begin{cases} n_H = 2Ind(w) & \text{expansions } H \\ n_V = \frac{1}{2}\sigma(w) & \text{expansions } V \end{cases}$$

Démo. On pourra consulter ([G]).

Ce résultat précise que le système de réécriture $< K_\mu | v, h >$ sur la classe d'équivalence du mot vide est confluent. Ce n'est pas le cas pour d'autres mots réduits de l'ensemble $\mathcal{R}_{\text{éduit}}$.

Notons que, parmi les expansions H et V, seule l'expansion H modifie l'indice d'un mot, qui augmente de $\frac{1}{2}$ et seules les expansions V modifient la somme d'un mot, qui augmente de 2. □

Remarque 3.3. *Comme n_H et n_V sont des entiers naturels, on en déduit que :*

- *les mots du noyau K_μ ont un indice demi-entier : $Ind(K_\mu) \subset \frac{1}{2}\mathbb{N}$.*
- *Les mots du noyau K_μ ont une somme paire : $\sigma(K_\mu) \subset 2\mathbb{N}$.*

Par ailleur, comme l'expansion V ne s'applique pas sur le mot vide, un mot de K_μ s'obtient avec $(2Ind(w) - 1)$ expansion(s) H et $\frac{1}{2}\sigma(w)$ expansion(s) V sur le mot 000.

3.3 Indice et nombre de tours

Le morphisme d'indice joue un rôle fondamentale dans l'étude.

Dans cette partie, on montre qu'il permet de compter le nombre de tours d'une famille de base obtenue par un chaînage et donc, de "trier" parmi les mots de $\Sigma^* \subset \Sigma_2^*$ de longueur paire, ceux correspondants à des chaînages dont la ligne brisée associée fait exactement 1 tour.

Proposition 3.2. *Soit (v_0, w_0) une base du réseau $\mathbb{Z}^2$.*
Soit $(a_1.a_2 \dots a_n)$ un mot de Σ^* dans le noyau K_μ de μ, d'indice $Ind(w) \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$.
Soit $(v_i, w_i)_{1 \le i \le n}$ la famille des bases définie par les images successives

$$(v_i, w_i) = (v_{i-1}, w_{i-1})\tilde{\mu}(a_i).$$

La suite des vecteurs $(v_i)_i$ effectue une rotation globale d'un angle cumulé égale à

$$\sum_{i=0}^{n-1} \measuredangle(v_i, v_{i+1}) = \sum_{i=0}^{n-1} \measuredangle(w_i, w_{i+1}) = 2Ind(w)\pi \in \pi\mathbb{N}.$$

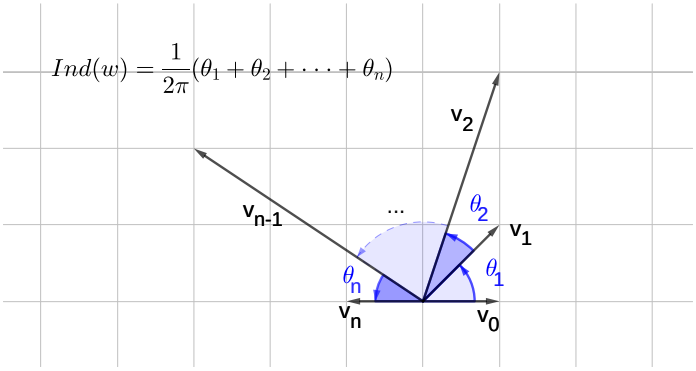


Figure 5: Le morphisme Ind compte le nombre de tour (au demi-tour près) que fait la suite des vecteurs $(v_i)_{0 \le i \le n}$.

Démo. Sans perdre de généralité, on se place dans le cas de bases directes. Soit $B_0 = (v_0, w_0)$ une base initiale fixée directe. Regardons les effets des expansions H et V sur les bases :

- Pour l'expansion H : On a :

$$\begin{aligned} B_0 = (v_0, w_0) &\xrightarrow[[0]]{} B_1 = (v_1, w_1) = (w_0, -v_0 + w_0) \\ &\xrightarrow[[0]]{} B_2 = (v_2, w_2) = (-v_0 + w_0, -v_0) \\ &\xrightarrow[[0]]{} B_3 = (v_3, w_3) = (-v_0, -w_0) \end{aligned}$$

  Conformément à la décomposition d'un chaînage (cf prop (2.1)), les bases successives sont adjacentes.

  Les premiers vecteurs $v_0, v_1, v_2, v_3 = -v_0$ sont dans le demi-plan positif déterminé par v_0 et rangés dans le même ordre.

  Il en est de même pour les second vecteurs de base $(w_0, w_1, w_2, w_3 = -w_0)$.

  La suite des bases effectue une rotation d'un demi-tour dans le sens positif.

  Ainsi, en appliquant l'expansion $\emptyset \to 000$ à un mot du monoïde libre Σ^*, on rajoute un demi-tour à la rotation de la suite des bases obtenues par les images successives par l'application $\tilde{\mu}$ dans $Sl_2(\mathbb{Z})$.

- Pour l'expansion V : On a :

$$\begin{aligned} B_0 = (v_0, w_0) &\xrightarrow[[a]]{} B_1 = (v_1, w_1) = (w_0, -v_0 + (a+1)w_0) \\ &\xrightarrow[[b]]{} B_2 = (v_2, w_2) \\ &\qquad = (-v_0 + (a+1)w_0, -(b+1) + [(a+1)(b+1) - 1]\, w_0) \end{aligned}$$

  et

$$\begin{aligned} B_0 = (v_0, w_0) &\xrightarrow[[a+1]]{} B'_1 = (v'_1, w'_1) = (w_0, -v_0 + (a+2)w_0) \\ &\xrightarrow[[0]]{} B'_2 = (v'_2, w'_2) = (-v_0 + (a+2)w_0, -v_0 + (a+1)w_0) \\ &\xrightarrow[[b+1]]{} B'_3 = (v'_3, w'_3) \\ &\qquad = (-v_0 + (a+1)w_0, -(b+1) + [(a+1)(b+1) - 1]\, w_0) \\ &\qquad = B_2 \end{aligned}$$

  Les bases successives sont adjacentes.

  Les premiers vecteurs v_0, v_1, v_2 d'une part et v_0, v'_1, v'_2, v'_3 d'autre part sont rangés dans cet ordre. Comme $v'_1 = v_1$ et $v'_3 = v_2$, le vecteur v'_2 est situé entre v_1 et v_2.

  Il en est de même pour les second vecteurs de base $(w_i)_i$ et $(w'_i)_i$.

  Géométriquement, avec cette expansion, on insère une base intermédiaire entre la base initiale et la base finale.

  L'expansion V ne modifie pas la rotation globale de la suite des bases.

Finalement, comme un mot w de K_μ est construit à partir de $n_H = 2Ind(w)$ expansions H, la rotation cumulée des vecteurs (v_i) est égale à $n_H \times \pi$. □

Remarque 3.4. *Étant donnés un mot $w = a_1 a_2 \cdots a_n$ du noyau K_μ et une base (v_0, w_0) de $\mathbb{Z}^2$, on note $(B_i)_{0 \le i \le n} = (v_i, w_i)_{0 \le i \le n}$ la suite des images successives par les applications linéaires $\mu(a_i)$.*

Si $Ind(w) \in \mathbb{N}$, alors $(B_i)_i$ fait un nombre de tour entier et on a $(v_n, w_n) = (v_0, w_0)$. Donc le mot w est dans le noyau de $\tilde{\mu} : \Sigma^* \longrightarrow Sl_2(\mathbb{Z})$.

Si $Ind(w) \notin \mathbb{N}$, alors $(v_n, w_n) = (-v_0, -w_0)$. Donc le mot w n'est pas dans le noyau de $\tilde{\mu}$.

3.4 Partitions de K_μ et de K_C

3.4.1 Les sous-ensembles K_μ^k, $K_\mu^{k,l}$, K_C^k et $K_C^{k,l}$

Le morphisme d'indice partitionne le noyau K_μ du morphisme $\mu : \Sigma^* \longrightarrow PSl_2(\mathbb{Z})$.

Pour tout demi-entier $k \in \frac{\mathbb{N}}{2}$, on note K_μ^k l'ensemble des mots du noyau K_μ d'indice k de sorte que :

$$K_\mu = \bigsqcup_{k \in \frac{\mathbb{N}}{2}} K_\mu^k.$$

Remarque 3.5. *L'expansion V ne s'applique pas sur le mot vide. Donc $K_\mu^0 = \{\emptyset\}$.*

Étant donné un demi-entier $k \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ non nul, le sous-ensemble K_μ^k est non vide ; il contient le mot $(000)^{2k}$. Ce sous-ensemble est infini : l'expansion V, qui augmente strictement la longueur d'un mot, peut toujours s'appliquer sur un facteur d'un mot de K_μ^k.

Proposition 3.3. *Soient w un mot du sous-ensemble K_μ^k et p un mot de $K_\mu^{k'}$.*

Si $w = ps$ alors $k' \leq k$ et $s \in K_\mu^{k-k'}$.

Démo. Comme w et p sont dans le noyau de μ, il est clair que $\mu(s) = \pm I$ et que s est aussi dans K_μ.

Et on a $Ind(w) = Ind(p) + Ind(s)$. □

Pour tout demi-entier $k \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$, le morphisme de longueur partitionne le sous-ensemble K_μ^k en sous-ensembles $K_\mu^{k,n}$ avec $n \in \mathbb{N}$, de sorte que

$$K_\mu^k = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} K_\mu^{k,n}.$$

Remarque 3.6. *Il est clair qu'à indice fixé et longueur fixée, la somme est également fixée. Donc le cardinal de $K_\mu^{k,n}$ est majoré : l'ensemble $K_\mu^{k,n}$ est fini.*

Remarque 3.7. *Les mots du noyau K_C du morphisme $C : \Sigma_2^* \longrightarrow GA(\mathbb{Z}^2)$ sont dans le noyau K_μ :*

$$K_C \subsetneq K_\mu.$$

Il y a trois types de mots dans le noyau K_μ qui n'appartiennent pas au noyau K_C :

- *Des mots de longueurs impairs qui ne sont pas associés à des lignes brisées par un chaînage positif.*
- *Des mots associés à des lignes brisées qui ne font pas un nombre de tour entier.*
- *Des mots associés à des lignes brisées qui font un nombre de tours entier mais qui ne se referment pas.*

Le morphisme d'indice partitionne également le noyau K_C. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on note K_C^k l'ensemble des mots du noyau K_C d'indice k. De même, le morphisme de longueur partitionne les sous-ensembles K_C^k en sous-ensembles $K_C^{k,2n}$ avec $n \in \mathbb{N}$, de sorte que

$$K_C = \bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} K_C^k \quad et \quad K_C^k = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} K_C^{k,2n}$$

3.4.2 Le sous-ensemble $K_\mu^{\frac{1}{2}}$

Dans cette partie, on s'interesse au sous-ensemble $K_\mu^{\frac{1}{2}}$. Ces mots ne sont pas associés à des polygones : les lignes brisées associées ne se referment pas et les vecteurs des bases successives font une rotation de seulement un demi-tour.

Proposition 3.4. *L'ensemble $K_\mu^{\frac{1}{2}}$ est engendré par l'expansion $V : ab \to (a+1)0(b+1)$ sur le mot 000 :*

$$K_\mu^{\frac{1}{2}} = \langle 000|V\rangle.$$

Démo. D'après la proposition (3.1), le sous-ensemble $K_\mu^{\frac{1}{2}}$ est l'ensemble des mots du noyau K_μ engendrée par 1 expansion $H : \emptyset \to 000$ et des expansions $V : ab \to (a+1)0(b+1)$ sur le mot vide.

Or, l'expansion V ne s'applique pas sur le mot vide. D'où le résultat. □

Remarque 3.8. *D'un point de vue récursif, les mots de $K_\mu^{\frac{1}{2},n+1}$ sont obtenus avec une expansion V sur les mots de $K_\mu^{\frac{1}{2},n}$:*

$$K_\mu^{\frac{1}{2},n+1} = V(K_\mu^{\frac{1}{2},n}).$$

Remarque 3.9. *Pour $0 \leq i \leq 2$ on a : $K_\mu^{\frac{1}{2},i} = \emptyset$ et $K_\mu^{\frac{1}{2},3} = \{000\}$.*

Le sous-ensemble $K_\mu^{\frac{1}{2},4}$ est l'ensemble des mots obtenus avec une expansion V sur les mots de $K_\mu^{\frac{1}{2},3}$. Donc $K_\mu^{\frac{1}{2},4} = \{1010, 0101\}$.

De même, on obtient $K_\mu^{\frac{1}{2},5} = \{20110, 11021, 10201, 02011, 01102\}$.

L'ensemble des mots du noyau K_μ d'indice $\frac{1}{2}$ et de longueur n est dénombré par les nombres de Catalan (voir [G]), et on a :

$$card(K_\mu^{\frac{1}{2},n}) = c_{n-2},$$

où $c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ *le* $n^{ème}$ *nombre de Catalan.*

Proposition 3.5. *Soient* $n \in \mathbb{N}$ *et* $w \in \Sigma^*$.

$$w \in K_\mu^{\frac{1}{2},n} \iff w.w = w^2 \in K_C^{1,2n}.$$

Démo.

Clairement, $\begin{cases} Ind(w) = \frac{1}{2} \\ \sigma(w) = n \end{cases} \iff \begin{cases} Ind(w^2) = 1 \\ \sigma(w^2) = 2n \end{cases}$

Si w est dans le noyau de μ d'indice $\frac{1}{2}$, alors $\tilde{\mu}(w) = -I_2$. Notons $C(w) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & e \\ 0 & -1 & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $e, f \in \mathbb{Z}$.

Par simple produit matriciel, on a $C(w^2) = C(w)^2 = I_3$.
Donc w^2 est dans le noyau K_C.

Réciproquement, Si $w^2 \in K_C^{1,2n}$, alors $\tilde{\mu}(w^2) = I_2$.
Donc $\mu(w) = \pm I_2$. Donc $w \in K_\mu$. □

Remarque 3.10. *Si* $w \in K_\mu^{\frac{1}{2}}$ *est un mot de longueur pair, il est associé à une ligne brisée localement convexe et localement* $2-$*minimale. Comme* w^2 *est dans le sous-ensemble* K_C^1*, il est associé à un* $2n-$*gone convexe localement* $2-$*minimal. D'après la proposition (2.5), on a :*

$$A(w^2) = 2A(w).$$

3.4.3 Le sous-ensemble K_μ^1

L'ensemble des polygones convexes entiers localement $2-$*minimaux est l'ensemble des lignes brisées localement convexes et localement* $2-$*minimales qui se referment bien et d'indice* 1*. Ils sont donnés par l'ensemble des mots du noyau* K_C^1 *et on a :*

$$K_C^1 \subset K_\mu^1.$$

Avec un algorithme naf, on peut aisément lister les éléments de K_μ^1 *de longueur paire* $2n$ *donnée, enlever les mots associés à des lignes brisées qui ne se referment pas, calculer les aires des* $n-$*gones de* K_C^1 *et sélectionner les classes de polygones modulo* $SA(\mathbb{Z}^2)$ *d'aire minimale.*

Mais, le cardinal des ensembles $K_\mu^{1,n}$*, calculé dans [G], ne permet pas d'obtenir un algorithme efficient. Les premières valeurs sont*

$$card(K_\mu^{1,2n})_{n\geq 3} = \{1, 34, 605, 9646, 149226, \dots\}.$$

Dans cette partie, on montre qu'à permutation cyclique près, l'ensemble des mots de K_μ^1 est engendré par l'expansion $V : ab \to (a+1)0(b+1)$ sur le mot 000000.

Proposition 3.6 ([G] p 124)**.** *Soit* w *un mot de* K_μ^1.

Si le mot w *ne se réduit pas au mot* 000000 *de* K_μ^1 *via des réductions* v*, alors* w *est obtenu par des expansions* V *sur le facteur* $pa00$ *d'une part, et sur le facteur* $00bs$ *d'autre part, d'un mot de* K_μ^1 *de la forme* $pa00.00bs$*, avec* $p, s \in \Sigma^*$ *et* $a, b \in \Sigma$.

Corollaire 3.1. *Soit* w *un mot de* K_μ^1.

Il existe un mot $w' \in K_\mu^1$ *tel que* $\begin{cases} 000000 \twoheadrightarrow_V w' \\ w \in \mathbb{Z}w'. \end{cases}$

Autrement dit, le mot w *est une permutation circulaire d'un mot* w' *engendré par des expansions* V *sur le mot* 000000*.*

Démo. Si w se réduit au mot 000000 par des réductions v, c'est clair.

Sinon, d'après la proposition 3.6, le mot w est engendré par des expansions V sur les facteurs $pa00$ et $00bs$ d'un mot de K_μ^1 de la forme $pa0000bs$.

Le mot $pa0bs$ est dans le sous-ensemble $K_\mu^{\frac{1}{2}}$; il se réduit au mot 000 par des réductions v.

Par ailleurs, le sous-ensemble $K_\mu^{\frac{1}{2}}$ est stable par permutation circulaire, donc le mot $bspa0$ se réduit également au mot 000 par des réductions v.

Notons $w = w_1 w_2$ avec $pa00 \twoheadrightarrow_V w_1$ et $00bs \twoheadrightarrow_V w_2$.

Ainsi, le mot w est une permutation circulaire du mot $w_2 w_1$, qui se réduit par réductions v au mot $00bspa00$, qui se réduit encore par réductions v au mot 000000. □

Corollaire 3.2. *À permutation circulaire près, le sous-ensemble K_μ^1 est engendré par la règle de réécriture V sur le mot* 000000 *:*

$$K_\mu^1/\mathbb{Z} = \langle 000000 | V \rangle.$$

4 Les mots de $(0\Sigma)^*$

On note $(0\Sigma)^*$ l'ensemble des mots de $\Sigma_2^* \subset \Sigma^*$ de longueur paire de la forme

$$w = 0a_1 \cdot 0a_2 \cdots 0a_n.$$

Dans la suite, pour alléger les notations, on sera amené, selon le contexte, à noter un mot de $(0\Sigma)^*$ sous forme condensée par

$$w = \lfloor a_1 a_2 \cdots a_n \rfloor.$$

4.1 L'expansion $V_2 : \Big(0a.0b \longrightarrow 0(a+1).02.0(b+1)\Big)$

Définition 4.1. *Soit V_2 la règle de réécriture (ou expansion) définie sur $(0\Sigma)^* \subset \Sigma_2^*$ par*

$$V_2 : \Big(0a.0b \longrightarrow 0(a+1).02.0(b+1)\Big).$$

On note $w \longrightarrow_{V_2} w'$ si le mot w' est une réécriture du mot w par l'expansion V_2.

Remarque 4.1. *L'expansion V_2 est la composée de deux expansions V :*

$$0a.0b \;\longrightarrow_V\; 0(a+1)01b \;\longrightarrow_V\; 0(a+1)020(b+1).$$

L'expansion V_2 conserve l'indice d'un mot et la longueur d'un mot augmente de 2 (la parité le la longueur d'un mot est conservée).

En notation condensée, l'expansion V_2 s'écrit

$$V_2 : \Big(\lfloor ab \rfloor \longrightarrow \lfloor (a+1)2(b+1) \rfloor\Big).$$

On note $v_2 = V_2^{-1}$ la réduction $v_2 : \Big(\lfloor (a+1)2(b+1) \rfloor \longrightarrow \lfloor ab \rfloor\Big)$.

Remarque 4.2. *Soit $\mathcal{R}_0 = (v_0, w_0, t_0)$ un repère du réseau.*

Notons (v_1, v_2) et (v'_1, v'_2, v'_3) les familles des premiers vecteurs des repères chaînés au repère $\mathcal{R}_0$ par les chaînages $0a.0b = \lfloor ab \rfloor$ et $0(a+1).02.0(b+1) = \lfloor (a+1)2(b+1) \rfloor$.

Comme ces deux chaînages commencent tous les deux par 0, les premiers vecteurs v_1 et v'_1 sont égaux.

De plus, comme $\tilde{\mu}\Big(0a.0b\Big) = \tilde{\mu}\Big(0(a+1).02.0(b+1)\Big)$, les derniers vecteurs v_2 et v'_3 sont égaux.

Avec les produits matriciels $C(0,a)$, $C(0,a)C(0,b)$ et $C(0,a+1)C(0,2)$, on a lit les coordonnées des vecteurs dans la base v_0, w_0, et on a :

$$v_1 = v'_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_2 = v'_3 = \begin{pmatrix} -a \\ a-1 \end{pmatrix} \text{ et } v'_2 = \begin{pmatrix} -a-1 \\ a \end{pmatrix} = v_1 + v_2.$$

Ainsi, géométriquement, l'expansion V_2 modifie une ligne brisée et insère le vecteur somme $v_1 + v_2$ entre v_1 et v_2.

4.2 Le sous-ensemble $\Omega = K_\mu^{\frac{1}{2}} \bigcap (0\Sigma)^*$

Dans cette partie, on étudie les mots du monoïde libre $(0\Sigma)^*$ qui sont dans le noyau K_μ et qui sont associés au $\frac{1}{2}$ tour. On note Ω le sous-ensemble

$$\Omega = K_\mu^{\frac{1}{2}} \bigcap (0\Sigma)^*.$$

L'ensemble Ω est partitionné par le morphisme de longueur. On note Ω_n l'ensemble des mots de Ω de longueur $2n$, de sorte que

$$\Omega_n = K_\mu^{\frac{1}{2},2n} \bigcap (0\Sigma)^* \quad \text{et} \quad \Omega = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n,$$

les sous-ensembles Ω_0 et Ω_1 étant vides.

4.2.1 Présentation de Ω

Lemme 4.1. *Soit $n \geq 3$. Soit $w = 0a_1.0a_2 \cdots 0a_n = \lfloor a_1 a_2 \cdots a_n \rfloor$ un mot de Ω_n.*

$$\textit{Alors} \quad \begin{cases} a_i \geq 2 \textit{ pour tout indice } 1 \leq i \leq n. \\ a_j = 2 \textit{ pour un certain indice } 2 \leq j \leq n-1. \end{cases}$$

Démo. Supposons que l'un des entiers a_i soit nul. Comme le noyau est stable par permutation circulaire, on peut supposer que $a_1 = 0$. Notons $w = 000a_2 \cdots 0a_n$.

Ainsi, $w \sim_h a_2 \cdots 0a_n$ et le facteur $a_2 \cdots 0a_n$ est un mot du noyau K_μ d'indice 0. Or, $K_\mu^0 = \{\emptyset\}$. Impossible car $n \geq 3$.

Supposons que l'un des entiers a_i (par exemple a_1) soit égale à 1. Notons $w = 010a_2 \cdots 0a_n$. Ainsi, $w \to_v w' = 00(a_2 - 1)0a_3 \cdots 0a_n$. Le mot w' est dans le sous-ensemble $K_\mu^{\frac{1}{2}}$: il se réduit au mot 000 par une famille de réductions v.

Donc le facteur $(a_2-1)0a_3 \cdots 0a_n$, avec $n \geq 3$, se réduit au mot 0 par une suite non vide de réductions v. Or, l'expansion $V = v^{-1}$ ne s'applique pas au mot 0. Impossible.

Enfin, supposons que $a_i \geq 3$ pour tout indice $2 \leq i \leq n-1$. On a :

$$\begin{array}{rll} w = 0a_1 0a_2 \cdots 0a_n & \to_v & 0(a_1-1)(a_2-1)0a_3 \cdots 0a_n \\ & \to_v & 0(a_1-1)(a_2-2)(a_3-1)\cdots 0a_n \\ & \to_v & \cdots \\ & \to_v & 0(a_1-1)(a_2-2)(a_3-2)\cdots(a_{n-1}-2)(a_n-1). \end{array}$$

Le mot $0(a_1-1)(a_2-2)(a_3-2)\cdots(a_{n-1}-2)(a_n-1)$ est dans l'ensemble $\mathcal{R}_{\text{éduit}}$ (cf remarque (3.1)) des mots réduits pour la relation d'équivalence $\sim_\Sigma$, distinct du mot vide. Donc il n'est pas dans le noyau K_μ. Impossible.

□

Proposition 4.1. *L'ensemble Ω est engendré par l'expansion V_2 sur le mot $0101 = \lfloor 11 \rfloor$:*

$$\Omega =< 0101 | V_2 >=< \lfloor 11 \rfloor | \lfloor ab \longrightarrow (a+1)2(b+1) \rfloor > .$$

Démo. On montre par récurrence que l'ensemble Ω_n est l'ensemble des mots obtenus avec $n-2$ expansions V_2 sur le mot $\lfloor 11 \rfloor$.

Clairement, c'est vrai pour $n = 2$ car $\Omega_2 = \{\lfloor 11 \rfloor\}$.

D'après le lemme (4.1), un mot w de Ω_{n+1} est de la forme

$$w = \lfloor a_1 \cdots a_{j-1} 2 a_{j+1} \cdots a_n \rfloor \text{ avec } a_{j-1}, a_{j+1} \geq 2.$$

Ainsi, $w \to_{v_2} w' = \lfloor a_1 \cdots (a_{j-1}-1)(a_{j+1}-1) \cdots a_n \rfloor$.

Comme le sous-ensemble $K_\mu^{\frac{1}{2}}$ est stable par réduction v, il est stable par réduction v_2 et le mot w' est dans l'ensemble Ω_n.

□

Remarque 4.3.

- *Pour $n \geq 4$, un mot $w = \lfloor a_1 \cdots a_{j-1} 2 a_{j+1} \cdots a_n \rfloor \in \Omega_n$ se réduit par une réduction v_2 au mot $w' = \lfloor a_1 \cdots (a_{j-1}-1)(a_{j+1}-1) \cdots a_n \rfloor \in \Omega_{n-1}$.*

  Or d'après le lemme (4.1), les entiers $a_{j-1} - 1$ et $a_{j+1} - 1$ sont supérieurs ou égaux à 2. Donc a_{j-1} et $a_{j+1} \geq 3$.

  Finalement, pour $n \geq 4$, les mots des sous-ensembles Ω_n n'ont pas de facteurs $\lfloor 22 \rfloor$, et ce, à permutation circulaire près.

- *Pour $n \geq 5$, un mot de Ω_n n'admet pas de facteur $\lfloor 323 \rfloor$, ni de facteur $\lfloor 232 \rfloor$, à permutation circulaire près.*

  En effet, s'il existe $p, s \in \Sigma^*$ tels que $w = \lfloor p323s \rfloor \in \Omega_n$, alors w se réduit au mot $w' = \lfloor p22s \rfloor \in \Omega_{n-1}$. Impossible.

  Et s'il existe $p, s \in \Sigma^*$ et $a \geq 4 \in \Sigma$ tels que $w = \lfloor pa232s \rfloor \in \Omega_n$, alors w se réduit au mot $w' = \lfloor p(a-1)22s \rfloor \in \Omega_{n-1}$. Impossible.

- *De même, pour $n \geq 6$, les mots de Ω_n n'admettent pas de facteur $\lfloor 2423 \rfloor$, $\lfloor 3242 \rfloor$, $\lfloor 4233 \rfloor$, $\lfloor 3324 \rfloor$, $\lfloor 2332 \rfloor$.*

Remarque 4.4. *Les premiers ensembles Ω_n sont :*

- $\Omega_2 = \{\lfloor 11 \rfloor\}$.
- $\Omega_3 = \{\lfloor 222 \rfloor\}$.
- $\Omega_4 = \{\lfloor 3232 \rfloor, \lfloor 2323 \rfloor\}$.
- $\Omega_5 = \{\lfloor 42332 \rfloor, \lfloor 33242 \rfloor, \lfloor 32423 \rfloor, \lfloor 24233 \rfloor, \lfloor 23324 \rfloor\}$.

Remarque 4.5. *La proposition (4.1) implique tout mot w de Ω_n admet un facteur 2 intérieur isolé. Notons $w = pa2bs$ avec $a, b \geq 3 \in \Sigma$ et $p, s \in \Sigma^*$. Or, le noyau K_μ est stable par permutation circulaire. Donc, le mot $w' = 2bspa$ est aussi dans Ω_n et admet aussi un facteur intérieur 2 isolé.*

Donc, le mot w admet au moins deux facteurs 2.

4.2.2 A permutation circulaire près

Pour tout entier n, avec la notation condensée, le sous-ensemble Ω_n du noyau K_μ est stable par permutation circulaire.

On note $\mathbb{Z}w = \mathbb{Z}\lfloor a_1 a_2 \cdots a_n \rfloor$ l'orbite d'un mot $w = \lfloor a_1 a_2 \cdots a_n \rfloor$ pour l'action de permutation circulaire :

$$\begin{array}{lcl} \mathbb{Z} \times \Omega_n & \longrightarrow & \Omega_n \\ (k, \lfloor a_1.a_2 \cdots a_n \rfloor) & \longmapsto & \lfloor a_n.a_1.a_2 \cdots a_{n-1} \rfloor \end{array}$$

On note $\Omega_n/\mathbb{Z}$ l'ensemble des orbites des mots de Ω_n de longueur n.

Théorème 3 (G- 2018)**.** Soit $n \geq 2 \in \mathbb{N}$.

$$card(< \lfloor 11 \rfloor | \lfloor ab \longrightarrow (a+1)2(b+1) \rfloor >) = c_{n-2}.$$

Remarque 4.6. *On pourra consulter ([G]) pour une démonstration détaillée.*

Dans un contexte légèrement différent, il est démontré que l'ensemble $< \lfloor 11 \rfloor | \lfloor ab \longrightarrow (a+1)2(b+1) \rfloor >$ est en bijection avec l'ensemble des arbres trivalents plantés (planted trivalent plane trees dans ([St])).

Au mot $\lfloor 11 \rfloor$, on associe l'arbre binaire enraciné à deux sommets (la racine et une feuille) et une branche.

L'expansion V_2 correspond à l'expansion "pousse" sur l'ensemble des arbres binaires enracinés, qui remplace une feuille par un sommet intérieur ayant de fils de degré 1, (le sommet est relié à deux nouvelles feuilles par deux nouvelles arêtes), comme représenté sur la figure (6).

Un mot est obtenu par lecture anti-horaire d'un arbre binaire enraciné, en commençant par la racine, en comptant les arêtes qui séparent deux feuilles.

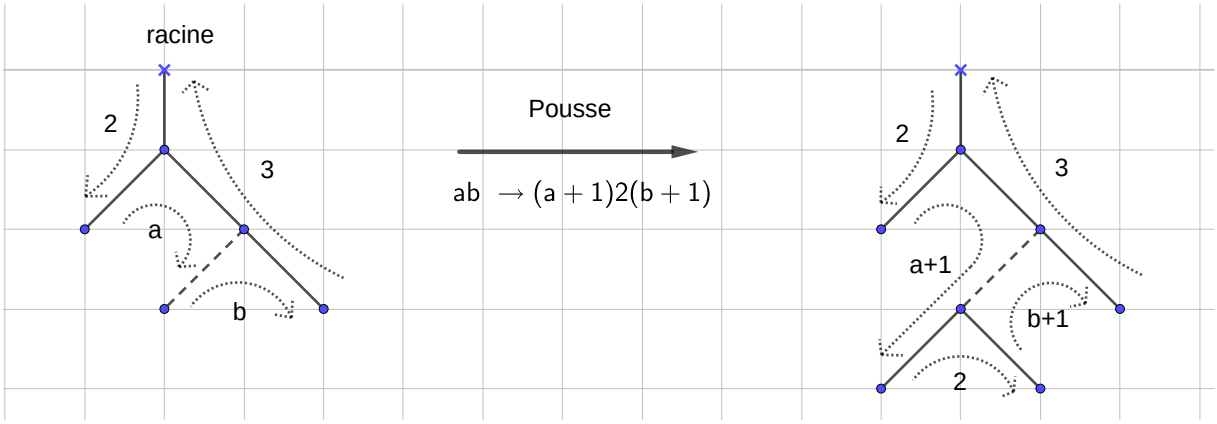


Figure 6: Lecture anti-horaire d'un arbre binaire enraciné et représentation de l'expansion "pousse" sur un arbre associée à l'expansion V_2 sur un mot.

Corollaire 4.1. *Soit $n \geq 2 \in \mathbb{N}$.*

$$card(\Omega_n) = c_{n-2}.$$

Théorème 4. Soit $n \geq 2 \in \mathbb{N}$.
Le nombre d'orbites $card(\Omega_n/\mathbb{Z})$ pour l'action de permutation circulaire sur l'ensemble Ω_n est

$$card(\Omega_n/\mathbb{Z}) = \frac{1}{n}c_{n-2} + \frac{1}{2}c_{\frac{n-2}{2}} + \frac{2}{3}c_{\frac{n-3}{3}}$$

où c_k est le $k^{\text{ème}}$ nombre de Catalan si $k \in \mathbb{N}$ et $c_k = 0$ sinon.

Démo. Le sous-ensemble Ω_n est en bijection avec l'ensemble des arbres binaires enracinés à $2n-2$ sommets. Donc, les classes d'équivalence pour l'action de permutation circulaire sont en bijection avec l'ensemble des arbres trivalents non enracinés. (cf. la suite référencée A001683 dans l'OEIS [OEIS]). □

Remarque 4.7. *Les premiers termes de la suite* $(card(\Omega_n/\mathbb{Z}))_n$ *sont*

$$(card(\Omega_n/\mathbb{Z}))_{n\geq 2} = \{1, 1, 1, 1, 4, 6, 19, 49, 150, 442, 1424, \dots\}.$$

En particulier, on a $card(\Omega_7/\mathbb{Z}) = 6$ *et*

$$\Omega_7/\mathbb{Z} = \{\mathbb{Z}\lfloor 62\mathbf{333}32\rfloor, \mathbb{Z}\lfloor \mathbf{53}24332\rfloor,\ \mathbb{Z}\lfloor \mathbf{524}2432\rfloor,\ \mathbb{Z}\lfloor 52\mathbf{34}242\rfloor,\ \mathbb{Z}\lfloor 5233\mathbf{4}23\rfloor, \mathbb{Z}\lfloor \mathbf{44}23532\rfloor\}.$$

4.2.3 Les facteurs des mots de Ω

Dans cette section, on étudie les facteurs des mots de Ω.

Certains facteurs particuliers apparaîssent et confèrent aux lignes brisées associées des propriétés notables, comme celles des configurations non minimales (voir partie 5.4) ou celles des raccourcis (voir partie 5.5).

Proposition 4.2. *Soit* $n \geq 7$.
Un mot w *de* Ω_n *admet, à permutation circulaire près,*

1. *soit un facteur* $\lfloor 333\rfloor$,
2. *soit un facteur* $\lfloor ab\rfloor$ *avec* $a, b \geq 3$ *et* $a + b \geq 7$,
3. *soit un facteur* $\lfloor a2b\rfloor$ *avec* $a, b \geq 4$ *et* $a + b \geq 9$.

Démo. On procède par récurence.

On vérifie que la propriété est vraie pour les 42 éléments de Ω_7 en observant les 6 orbites de $\Omega_7/\mathbb{Z}$ (voir remarque 4.7).

Considérons un mot w de Ω_{n+1}. Il existe un mot w' de Ω_n tel que $w' \longrightarrow_{V_2} w$ et w' satisfait la propriété.

On a alors trois cas sont possibles :

1. Soit $w' \in \mathbb{Z}\lfloor 333s\rfloor$, avec $s \in \Sigma^*$.

   Si le facteur $\lfloor 333\rfloor$ n'est pas modifié alos le mot w vérifie le premier point.

   Sinon, $w \in \left\{\mathbb{Z}\lfloor \mathbf{24}33\mathbf{s}'\rfloor, \mathbb{Z}\lfloor \mathbf{4243}s\rfloor, \mathbb{Z}\lfloor 3\mathbf{4424}s\rfloor, \mathbb{Z}\lfloor 33\mathbf{42s}''\rfloor\right\}$ avec $s', s'' \in \Sigma^*$. Donc le second point est vérifié.

2. Soit $w' \in \mathbb{Z}\lfloor abs\rfloor$ avec $a, b \geq 3$ et $a + b \geq 7$, $s \in \Sigma^*$.

   Si le facteur $\lfloor ab\rfloor$ n'est pas modifié, alors le mot w vérifie le second point.

   Sinon, $w \in \left\{\mathbb{Z}\lfloor \mathbf{2(a+1)}b\mathbf{s}'\rfloor, \mathbb{Z}\lfloor a(\mathbf{b+1})\mathbf{2s}''\rfloor, \mathbb{Z}\lfloor (\mathbf{a+1})\mathbf{2}(\mathbf{b+1})s\rfloor\right\}$ avec $s', s'' \in \Sigma^*$

   Pour les deux premières orbites, le second point est vérifié. Pour la troisième orbite, le troisième point est vérifié.

3. Soit $w' \in \mathbb{Z}\lfloor a2b\rfloor s$ avec $a, b \geq 4$ et $a + b \geq 9$ et $s \in \Sigma^*$.

   Si le facteur $\lfloor a2b\rfloor$ n'est pas modifié alors le mot w vérifie le troisième point.

   Sinon, on a $w \in \left\{\mathbb{Z}\lfloor \mathbf{2(a+1)}2b\mathbf{s}'\rfloor, \mathbb{Z}\lfloor a2(\mathbf{b+1})\mathbf{2s}''\rfloor, \mathbb{Z}\lfloor (\mathbf{a+1})\mathbf{23}bs\rfloor, \mathbb{Z}\lfloor a\mathbf{32}(\mathbf{b+1})s\rfloor\right\}$ avec $s', s'' \in \Sigma^*$.

   Pour les deux premières orbites, le troisième point est vérifié. Pour les deux dernières, le second point est vérifié.

□

Proposition 4.3. *Soit w un mot de Ω_n qui, à permutation circulaire près sur $(0\Sigma)^*$, admet un facteur $\lfloor 333 \rfloor$. Alors $n \geq 6$ et on a :*

- *soit w est dans l'orbite $\mathbb{Z}\lfloor 2(n-1)23^{n-3} \rfloor$,*
- *soit w admet un facteur $\lfloor a333 \rfloor$ ou un facteur $\lfloor 333a \rfloor$ avec $a \geq 4$ (à permutation circulaire près).*

Démo. Soit w un mot de Ω_n comportant un facteur $\lfloor 333 \rfloor$ à permutation circulaire près.

D'après la remarque 4.5, le mot w admet également deux facteurs 2 non consécutifs.

Donc $n \geq 6$ et le mot w est dans l'orbite d'un mot w' de la forme $w' = \lfloor a3^k bcs \rfloor$ avec $k \geq 3$, les entiers a, b et c sont ≥ 2 avec $a, b \neq 3$ et éventuellement un suffixe $s \in (0\Sigma)^*$.

Si $a < 4$ et $b < 4$ alors $a = b = 2$ et w' est de la forme $\lfloor 23^k 2cs \rfloor$, qui se réduit par des réductions v_2 :

$$\begin{array}{rl} w' = \lfloor 23^k 2cs \rfloor & \longrightarrow_{v_2} \lfloor 23^{k-1} 2(c-1)s \rfloor \\ & \longrightarrow_{v_2} \lfloor 23^{k-2} 2(c-2)s \rfloor \\ & \cdots \\ & \longrightarrow_{v_2} \lfloor 232(c-k+1)s \rfloor \\ & \longrightarrow_{v_2} \lfloor 22(c-k)s \rfloor \end{array}$$

Ce mot $\lfloor 22(c-k)s \rfloor$ admet un facteur $\lfloor 22 \rfloor$, donc il est de longueur 3 et on a : $c - k = 2$ et $s = \emptyset$.

Finalement, $w \in \mathbb{Z}w' = \mathbb{Z}\lfloor c23^{c-2}2 \rfloor$ avec $c \geq 5$ et $n = c + 1$. □

Corollaire 4.2. *Soit $n \geq 7$. Soit $w \in \Omega_n$*

Si w n'admet pas de facteur de la forme $\lfloor ab \rfloor$ avec $a, b \geq 3$ et $a + b \geq 7$, ni de facteur de la forme $\lfloor a2b \rfloor$ avec $a, b \geq 4$ et $a + b \geq 9$ alors

$$w \in \mathbb{Z}\lfloor (n-1)23^{n-3}2 \rfloor.$$

Démo. D'après la proposition 4.2, le mot w admet un facteur $\lfloor 333 \rfloor$. Or, le mot w n'admet pas de facteur $\lfloor a3 \rfloor$, nu de facteur $\lfloor 3a \rfloor$ pour tout entier $a \geq 4$.

Donc, d'après le lemme 4.3, le mot w est dans l'orbite $\mathbb{Z}\lfloor (n-1)23^{n-3}2 \rfloor$. □

Proposition 4.4. *Soit w un mot de Ω_n qui, à permutation circulaire près sur $(0\Sigma)^*$, admet un facteur $\lfloor 424 \rfloor$. Alors :*

- *soit $n = 6$ et $w \in \mathbb{Z}\lfloor 424242 \rfloor$,*
- *soit $n = 7$ et $w \in \mathbb{Z}\lfloor 2342425 \rfloor$ ou $w \in \mathbb{Z}\lfloor 5242432 \rfloor$,*
- *soit $n \geq 8$ et le mot w admet un facteur de la forme $\lfloor a424b \rfloor$ avec $a, b \geq 3$, à permutation circulaire près.*

Démo. Les mots des sous-ensembles Ω_2, Ω_3 et Ω_4 ne comportent pas ce facteur. Donc $n \geq 6$.

Le mot w est dans l'orbite d'un mot w' de la forme $\lfloor a424bs \rfloor$, avec $2 \leq a, b \leq 4$ et $s \in (0\Sigma)^* \setminus \{\emptyset\}$.

Si $a = b = 2$ alors $w' = 24242s$. Il se réduit au mot $\lfloor 2332s \rfloor$, qui comporte un facteur $\lfloor 2332 \rfloor$. Avec la remarque 4.3, on en déduit le mot w est dans Ω_6 et $w' = \lfloor 242424 \rfloor$.

Si $a = 2$ et $b = 3$ alors le mot w' est de la forme $w' = \lfloor 242432s \rfloor$ et se réduit au mot $\lfloor 23332s \rfloor$. D'après le lemme 4.3, on a $s = 5$. Donc $w' = \lfloor 2424325 \rfloor$.

De même, si $a = 3$ et $b = 2$, on montre que $w \in \mathbb{Z}\lfloor 5234242 \rfloor$.

Sinon, $a, b \in \{3, 4\}$. Les sous-ensembles Ω_6 et Ω_7 n'admettent pas de mots comportant de tels facteurs. Donc $n \geq 8$.

□

Proposition 4.5. *Soit $n \geq 7$ et soit w un mot de Ω_n, tel que, w n'admet pas de facteurs $\lfloor a2b \rfloor$, avec $a, b \geq 4$ et $a + b \geq 9$, à permutation circulaire près.*

Alors, à permutation circulaire près, soit

i. w est dans l'orbite $\lfloor (n-1)23^{n-3}2 \rfloor$.

ii. w admet un facteur $\lfloor ab \rfloor$, avec $a, b \geq 4$,

iii. w admet un facteur $\lfloor abc \rfloor$, avec $a, b, c \geq 3$ et $a + c \geq 7$,

iv. w admet un facteur $\lfloor abc \rfloor$, avec $a, c \geq 3$ et $b \geq 5$,

v. w *admet un facteur* $\lfloor 424 \rfloor$,

vi. w *admet un facteur de l'ensemble* $\{\lfloor a32b \rfloor, \lfloor c234 \rfloor, \lfloor 432c \rfloor, a, b \geq 5, c \geq 7\}$.

Démo. On résonnera à permutation circulaire près.

Supposons que w ne vérifie pas les points (i), (ii), (iii), (iv), (v).

Le mot w se factorise en un produit de facteurs de la forme $\lfloor 2a_1a_2 \cdots a_k \rfloor$, avec $a_i \geq 3$ et $k \geq 1$ (le facteur $\lfloor 22 \rfloor$ n'est pas possible dans un mot de longueur ≥ 3).

- Pour $k \geq 4$, d'après le lemme 4.3, si w admet un facteur $a_1a_2 \cdots a_k$ avec $k \geq 4$ alors il vérifie soit (i), soit (iii). Impossible. Donc on considère les facteurs $\lfloor 2a_1a_2 \cdots a_k \rfloor$ pour $k \leq 3$.

  Pour $k = 3$, d'après nos hypothèses, le seul facteur possible est le facteur $\lfloor 2343 \rfloor$. Nous appelerons ce facteur le facteur F_3.

  Pour $k = 2$: comme $n \geq 7$, le facteur $\lfloor 2332 \rfloor$ (voir rem 4.3) n'est pas possible. Donc les facteurs possibles sont $\lfloor 23a \rfloor$ et $\lfloor 2a3 \rfloor$ avec $a \geq 4$. Ces facteurs sont dits des facteurs de type F_2.

  Pour $k = 1$, comme $n \geq 7$, le facteur $\lfloor 232 \rfloor$ n'est pas possible (voir rem 4.3). Donc les facteurs possibles sont les facteurs $\lfloor a_1 \rfloor$, avec $a_1 \geq 4$. Ces facteurs sont dits de type F_1.

- D'après (ii), le mot w n'admet pas deux facteurs de type F_1 consécutifs.

- Le mot w n'admet pas deux facteurs de type F_3 consécutifs car $\lfloor 323 \rfloor$ n'est pas possible pour $n \geq 7$ (voir rem 4.3).

- Si w admet un facteur de type F_2, consécutif à un facteur F_3 : Sans perdre de généralité, supposons que le facteur F_3 est à gauche. L'autre cas s'obtient par symétrie.

  Comme $n \geq 7$ et que les facteurs $\lfloor 22 \rfloor$ et $\lfloor 323 \rfloor$ ne sont pas possibles (et ce à permutation circulaire près), le mot w est de la forme $w = \lfloor 2.343.2.a3.2.bs \rfloor$ avec $a, b \geq 4$ et $s \in (0\Sigma)^*$. Il se réduit à :

$$\begin{array}{rll} w = \lfloor 2.343.2.a3.2.bs \rfloor & \longrightarrow_{v_2} & \lfloor 2342(a-1)2(b-1)s \rfloor \\ & \longrightarrow_{v_2} & \lfloor 233(a-3)(b-2)s \rfloor \end{array}$$

  - Si $b - 2 = 2$ alors $a - 3 \geq 3$.

    Pour $a - 3 = 3$, le mot $\lfloor 233(a-3)(b-2)s \rfloor$ est le mot $\lfloor 233325 \rfloor$ (voir prop 4.3). Donc $s = 5$ et $w = \lfloor 2.343.2.63.2.\mathbf{45} \rfloor$. Impossible.

    Donc $a - 3 \geq 4$ et le mot w admet un facteur $\lfloor 7324 \rfloor$.
  - si $b - 2 \geq 3$ alors $a - 4 \geq 2$. Ainsi, w admet un facteur $\lfloor a23b \rfloor$ avec $a, b \geq 5$

- Si w admet un facteur F_3, qui n'est pas consécutif à un facteur de type F_2 :

  Comme $n \geq 7$, un facteur F_3 est entouré de deux facteurs de type F_1.

  Le mot w est de la forme $w = \lfloor 2.a.2.343.2.b.s \rfloor$, avec $a, b \geq 4$ et $s \in (0\Sigma)^*$.

  Plus précisément, les facteurs $\lfloor c2d \rfloor$, avec $c, d \geq 4$ et $\lfloor 22 \rfloor$ n'étant pas admis, le suffixe s est non vide et est de la forme $23s'3$ avec $s' \in (0\Sigma)^*$. Ainsi, le mot w se réduit à :

$$\begin{array}{rll} w = \lfloor 3.2.a.2.343.2.b.2.3s' \rfloor & \longrightarrow_{v_2} & \lfloor 2(a-2)242(b-2)2s' \rfloor \\ & \longrightarrow_{v_2} & \lfloor 2(a-3)2(b-3)2s' \rfloor \\ & \longrightarrow_{v_2} & \lfloor 2.(a-4)(b-4)2.s' \rfloor \end{array}$$

  On obtient un mot de longueur supérieur à 4 et on a : $a - 4 \geq 3$ et $b - 4 \geq 3$. Finalement, le w admet un facteur $\lfloor a234 \rfloor$, avec $a \geq 7$.

- Si w n'admet pas de facteur F_3 et admet au moins un facteur de type F_1 :

  Comme deux facteurs de type F_1 ne sont pas consécutifs, le mot w est de la forme $w = \lfloor 2.a.2.3b.2.s \rfloor$ avec $a, b \geq 4$ et $s \in (0\Sigma)^* \setminus \{\emptyset\}$.

  Comme le facteur $\lfloor 22 \rfloor$ n'est pas possible, le suffixe s est non vide.

  Comme les facteurs $\lfloor c2d \rfloor$ avec $c, d \geq 4$ ne sont pas possibles, le suffixe s commence par un facteur 3. Donc w est de la forme $w = \lfloor 2.a.2.3b.2.3s' \rfloor$.

  Puis, comme le facteur $\lfloor 232 \rfloor$ n'est pas possible, le suffixe s' est non vide : il commence par un facteur $c \geq 4$. Donc w est de la forme $w = \lfloor 2.a.2.3b.2.3cs'' \rfloor$.

  Par itération, on est déduit que le mot w n'est pas un mot de longueur fini. Impossible.

  Donc si w n'admet pas de facteur F_3 alors il n'admet que des facteurs de type F_2.

- Terminons l'ensemble des possibilités avec le cas où w n'admet que des facteurs de type F_2.

  Sans perdre de généralité, supposons que w admet un facteur $\lfloor 23a2 \rfloor$. Le cas $\lfloor 23a2 \rfloor$ s'obtient pas symétrie.

  Comme précédement, le mot w, de longueur ≥ 7 est de la forme $w = \lfloor 2.3a.2.3b.2.3c.s \rfloor$, avec $a, b, c \geq 4$ et $s \in (0\Sigma)^*$. Il se réduit à :

$$\begin{array}{rcl} \lfloor 2.3a.2.3b.2.3c. \rfloor & \longrightarrow_{v_2} & \lfloor 23(a-1)2(b-1)2c \rfloor \\ & \longrightarrow_{v_2} & \lfloor 23(a-2)(b-3)(c-1) \rfloor \end{array}$$

  On obtient un mot de longueur ≥ 5. Donc $a - 2 \geq 3$ et $b - 3 \geq 2$.

  Donc w admet un facteur $\lfloor a23b \rfloor$ avec $a, b \geq 5$.

□

5 Configurations locales particulières

5.1 Règles compatibles avec $C : \Sigma_2^* \longrightarrow SA(\mathbb{Z}^2)$

Les règles de réécriture H et V, compatibles avec le morphisme $\mu : \Sigma^* \longrightarrow PSL_2(\mathbb{Z})$ permettent d'étudier la rotation d'une ligne brisée.

Mais, ces relations ne conservent pas la parité de la longueur d'un mot de Σ_2^*. Elles ne sont pas compatibles avec les chaînages.

Notons $\sim_C$ la relation d'équivalence définie par le morphisme C de sorte que, étant deux mots w et w' de Σ_2^*, on a

$$w \sim_C w' \qquad \Leftrightarrow \qquad C(w) = C(w').$$

5.2 Les switch

Lemme 5.1. *Soient a, b, c, d, e et f des entiers naturels. On a :*

$$ab.c0.de.0(f+1) \sim_C a(b+1).0c.d0.ef.$$

Démo. Par simple calcul matriciel.

□

Définition 5.1. *Soient a, b, c, d, e, f des entiers naturels.*

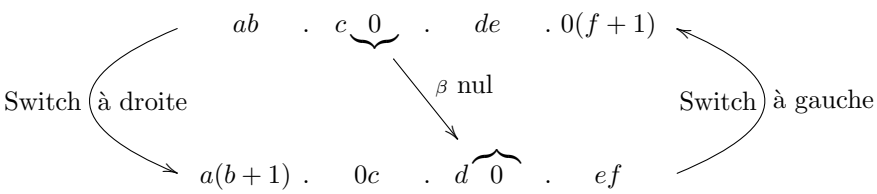
*On appelle **un switch à droite** une règle de réécriture sur Σ_2^* de la forme*

$$ab.c0.de.0(f+1) \longrightarrow a(b+1).0c.d0.ef.$$

*Identiquement, on appelle **le switch à gauche** la règle de réécriture sur Σ_2^* de la forme*

$$a(b+1).0c.d0.ef \longrightarrow ab.c0.de.0(f+1).$$

Un switch s'applique à un chaînage comportant un chaînage élémentaire $\alpha\beta$ avec un β nul. Ce zéro est "envoyé" sur un chaînage élémentaire voisin :



Géométriquement, sur les lignes brisées, un switch fait basculer un sommet d'une ligne brisée vers un autre point du réseau "disponible", comme sur l'exemple 04.01.30.13 $\sim_C$ 03.10.31.04 représenté sur la figure (5.2). Les aires sont alors conservées :

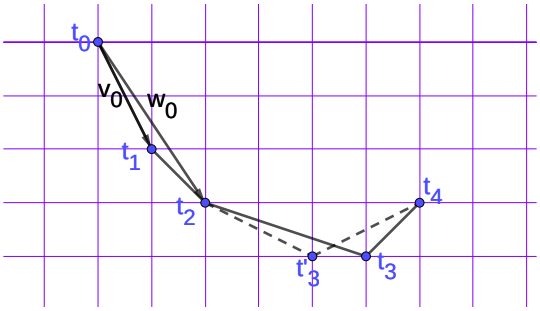


Figure 7: Exemple de switch avec les chaînages équivalents 04.01.30.13 et 03.10.31.04 (en pointillés), représenté avec le repère $(v_0, w_0, t_0) = ((1, -2), (2; -3), t_0)$.

Proposition 5.1. *Les aires délimitées par les lignes brisées définies par des chaînages équivalents via un switch, sont égales.*

Autrement dit, un switch conserve les aires.

Démo. Soient a, b, c, d, e, f des entiers naturels tels que $ab.c0.de.0(f+1) \sim_C a(b+1).0c.d0.ef$.

Soient $l = (t_0, t_1, \ldots, t_4)$ et $l' = (t_0, t'_1, \ldots, t'_4)$ les lignes brisées obtenues respectivement par les chaînages $ab.c0.de.0(f+1)$ et $a(b+1).0c.d0.ef$ sur un repère $R_0 = (v_0, w_0, t_0)$.

On a $t_1 = v_0 + t_0 = t'_1$ et $t_2 = t_1 + v_1 = t_1 - v_0 + (a+1)w_0 = t'_1 + v'_1 = t'_2$.

De plus, les sommets t_4 et t'_4 sont respectivement les origines des repères $C_{ab.c0.de.0(f+1)}(R_0)$ et $C_{a(b+1).0c.d0.e,f}(R_0)$. Les produits matriciels étant identiques, on a $t_4 = t'_4$.

Donc, seuls les sommets t_3 et t'_3 des lignes brisées diffèrent.

Comme les lignes brisées sont localement $2-$minimales, les triangles $t_2t_3t_4$ et $t_2t'_3t_4$ n'ont pas de point intérieur et les côtés $v_2 = t_3 - t_2$, $v_3 = t_4 - t_3$, $v'_2 = t'_3 - t_2$ et $v'_3 = t_4 - t'_3$ sont primitifs. Donc, d'après le théorème de Pick, ces triangles ont la même aire.

□

5.3 Les biseautages

Dans cette partie, on étudie un autre type de règle de réécriture sur les chaînages : les biseautages (et les patching). Ces règles de réécriture sur Σ_2^* modifie le nombre de chaînages élémentaires. Géométriquement, sous les lignes brisées, un biseautage supprime (ou on rajoute) un sommet à la ligne brisée associée tout en conservant le caractère locale $2-$minimal.

On peut les voir comme des biseautages : on "enlève" (ou on recolle) un "petit" triangle.

Lemme 5.2. *Soient a, b, c, d et e des entiers naturels. On a :*

$$ab.c0.de \sim_C a(b+1).0(c+1).0(d+1).0(e+1).$$

Démo. Par un simple calcul matriciel.

□

Définition 5.2. *Soient a, b, c, d, e des entiers naturels.*

*On appelle **un biseautage**, une règle de réécriture sur Σ_2^* de la forme*

$$a(b+1).0(c+1).0(d+1).0(e+1) \longrightarrow ab.c0.de.$$

*On appelle **un patching** la règle de réécriture inverse, de la forme*

$$ab.c0.de \longrightarrow a(b+1).0(c+1).0(d+1).0(e+1).$$

Proposition 5.2. *Soient a, b, c, d, e des entiers naturels.*

Notons A et A' les aires délimitées par les lignes brisées définies respectivement par les images d'un repère R_0 par les chaînages $a(b+1).0(c+1).0(d+1).0(e+1)$ et $ab.c0.de$. Alors :

$$A' = A - \frac{1}{2}.$$

Autrement dit, un biseautage réduit l'aire de $\frac{1}{2}$.

Démo. Notons $(t_0, t_1, t_2, t_3, t_4)$ et (t_0, t'_1, t'_2, t'_3) les lignes brisées définies par les images respectives d'un repère $R_0 = (v_0, w_0, t_0)$ par les chaînages $a(b+1).0(c+1).0(d+1).0(e+1)$ et $ab.c0.de$.

Tout comme pour le switch, les deux chaînages commmencent par le même coefficients a. Donc $t_1 = t'_1$ et $t_2 = t'_2$.

De plus, comme $C(a(b+1).0(c+1).0(d+1).0(e+1)) = C(ab.c0.de)$, les derniers sommets t_4 et t'_3, origines des repères finaux sont identiques.

Donc, un biseautge supprime un sommet : il transforme une ligne brisée $(t_0, t_1, t_2, t_3, t_4)$ en la ligne brisée (t_0, t_1, t_2, t_4) tout en conservant les propriétés locales de convexité et $2-$minimalité. En particulier, les vecteurs $v_2 = t_3 - t_2$, $v_3 = t_4 - t_3$ et $v'_2 = t_4 - t_2$ sont primitif et le triangle $t_2t_3t_4$ n'admet pas de point intérieur.

Donc, avec le théorème de Pick, on conclu que la différence d'aire δA, égale à l'aire du triangle $t_2t_3t_4$, est $\delta A = \frac{1}{2}$. □

Remarque 5.1. *Il est possible d'appliquer un patching lorsqu'un chaînage admet un coefficient β nul. Cela revient à rajouter un sommet à la ligne brisée tout en conservant les propriétés locales de convexité et de $2-$minimalité.*

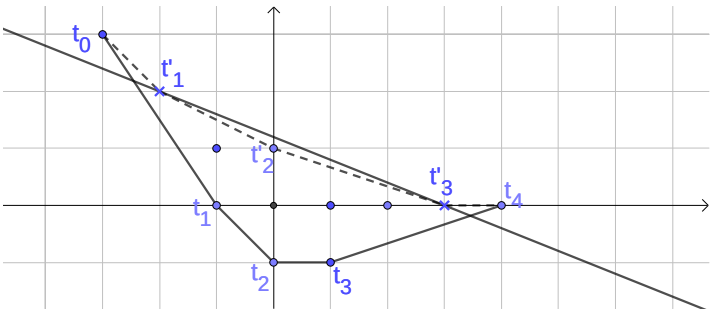
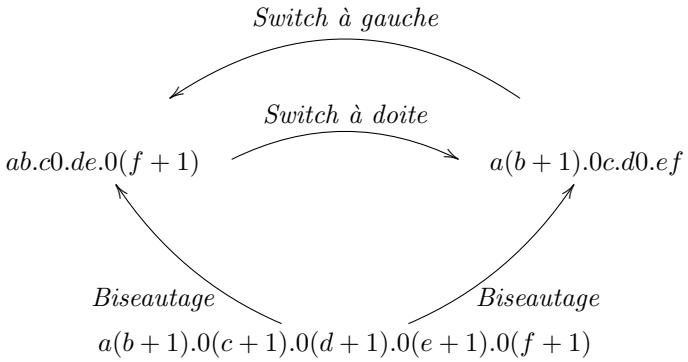


Figure 8: Ligne brisée associée au chaînage $04.05.0\beta$.

Inversement, quand un chaînage admet un facteur pour lequel un biseautge s'applique, on peut supprimer un sommet tout en conservant les propriétés locales de convexité et de $2-$*minimalités. On a alors le choix entre deux sommets différents :*



Par exemple, la ligne brisée $(t_0, t_1, t_2, t'_3, t_3, t_4)$ *de la figure (5.2) correspond au chaînage* 04.02.04.02.04 *On peut appliquer un biseautage à deux endroits distincts. On obtient ainsi les chaînages* 03.10.31.04 *et* 04.01.30.13 *associés respectivement aux lignes brisées* $(t_0, t_1, t_2, t'_3, t_4)$ *et* $(t_0, t_1, t_2, t_3, t_4)$.

Corollaire 5.1. *Soit* $\mathcal{P}$ *un* n*-gone d'aire minimale* $a(n)$.

Si le chaînage associé à $\mathcal{P}$ *admet un facteur comportant un* β *nul (autrement dit, un chaînage élémentaire* $\alpha 0$*), alors* $a(n+1) = a(n) + \frac{1}{2}$.

Démo. En appliquant un patching sur le chaînage du polygone minimal $\mathcal{P}$, on obtient le chaînage d'un $(n+1)-$gone d'aire $a(n) + \frac{1}{2}$.

Comme la fonction d'aire est strictement croissante à valeurs demi-entières, (cf remarque (1.3)), un tel polygone est un $(n+1)-$gone d'aire minimale. □

5.4 Configurations non minimales - Polygones non minimaux

Dans cette partie, on s'interesse à des chaînages de la forme $0a_1.0a_2 \cdots 0a_n$ dans $(0\Sigma)^* \subset \Sigma_2^*$.

Les propriétés suivantes étant vérifiées pour des chaînages de Σ^* pas nécessairement dans $\Omega = K_C^1 \cap (0\Sigma)^*$, on n'utilisera pas la notation condensée.

On présente quatre configurations non minimales : si un chaînage de K_C^1 admet un de ces quatre types de facteurs, alors le polygone convexe associé n'est pas minimal.

Définition 5.3. *Soit* w *un chaînage de* Σ_2^*.

On dit w *est une* ***configuration non minimale*** *si pour tout* $s \in \Sigma_2^*$ *tel que* $ws \in K_C^1$*, le polygone convexe associé au chaînage* ws *n'est pas minimal.*

Remarque 5.2. *Soit* $w = \alpha_1\beta_1 \cdots \alpha_k\beta_k$ *est une configuration non minimale. Soit* $s = \alpha_{k+1}\beta_{k+1} \cdots \alpha_n\beta_n \in \Sigma_2^*$ *tel que* $ws \in K_C^1$.

Pour tout indice $1 \leq i \leq n$*, le chaînage* $w' = \alpha_i\beta_i \cdots \alpha_n\beta_n\alpha_1\beta_1 \cdots \alpha_{i-1}\beta_{i-1}$ *est une permutation circulaire du chaînage* ws*. Donc le polygone convexe associé au chaînage* w' *n'est pas minimal.*

Lemme 5.3. *Soient* a, b *deux entiers tels que* $a, b \geq 4$ *et* $a + b \geq 9$.

Le chaînage $0a.0b$ *est une configuration non minimale.*

Démo. On considère le mot $w = 0a.0b.\alpha\beta$ avec $a, b \geq 4$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$.

On choisit un "bon" repère $R_0 = (v_0, w_0, t_0)$ pour avoir une représentation simple du chaînage w.

On pose $R_0 = C_{0,a}^{-1}(R_1)$ avec $R_1 = (v_1, w_1, t_1) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

Ainsi, on obtient la ligne brisée, représentée sur la figure (8) pour $\alpha = 0$,

$$l = (t_0, t_1, \ldots, t_4) = \left(\begin{pmatrix} -(a-1) \\ (a-1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (b-1)(\alpha+1) \\ \alpha \end{pmatrix} \right).$$

On pose $(t'_1, t'_2, t'_3) = \left(\begin{pmatrix} -(a-2) \\ a-2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b-2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

Si $a + b \geq 9$, le sommet t'_2 est sous la droite $(t'_1 t'_3)$.

Ainsi, pour tous sommets $(t_5, \cdots t_{n-1})$ tels que le polygone $\mathcal{P} = (t_0, t_1, \ldots t_{n-1})$ est convexe et localement 2−minimal, le polygone $\mathcal{P}' = (t_0, t'_1, t'_2, t'_3, t_4, \ldots, t_{n-1})$ est aussi convexe, d'aire strictement inférieur à celle de $\mathcal{P}$.

Donc $0a.0b$ est une configuration non minimale.

□

Lemme 5.4. *Soient a, b deux entiers tels que $(a, b) = (6, 6)$ ou $a, b \geq 5$ et $a + b \geq 13$.*

Le chaînage $0a.02.0b$ est une configuration non minimale.

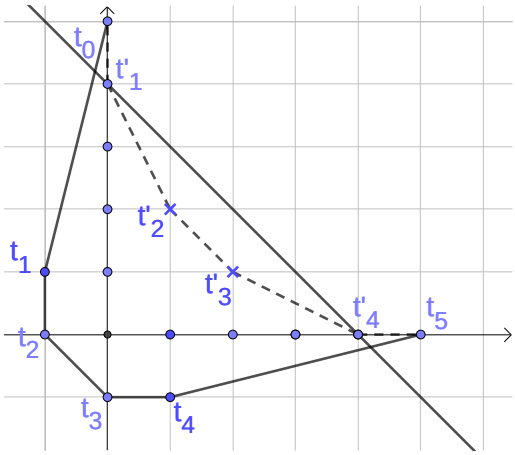


Figure 9: Ligne brisée associée au chaînage $06.02.06.0\beta$.

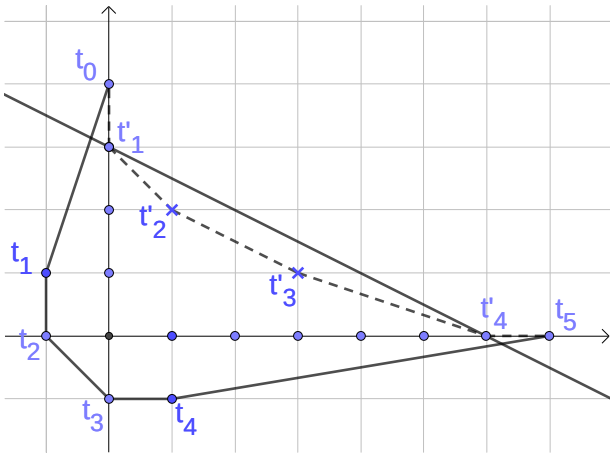


Figure 10: Ligne brisée associée au chaînage $05.02.08.0\beta$.

Démo. On considère le mot $w = 0a.02.0b.\alpha\beta$ avec $a, b \geq 5$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$.

On va choisir un "bon" repère $R_0 = (v_0, w_0, t_0)$ pour avoir une représentation simple du chaînage w.

On pose $R_0 = C_{0,a}^{-1}(R_1)$ avec $R_1 = (v_1, w_1, t_1) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

Ainsi, on obtient la ligne brisée, représentée sur les figures (9) et (10) pour $\alpha = 0$,

$$l = (t_0, t_1, \ldots, t_5) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ a-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (b-1)(\alpha+1) \\ \alpha \end{pmatrix} \right).$$

- Si $a, b \geq 6$, on pose

$$(t'_1, t'_2, t'_3, t'_4) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ a-2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b-2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

.

Ainsi, pour tous sommets $(t_6, \cdots t_{n-1})$ tels que le polygone $\mathcal{P} = (t_0, t_1, \ldots t_{n-1})$ est convexe et localement 2−minimal, le polygone $\mathcal{P}' = (t_0, t'_1, t'_2, t'_3, t'_4, t_5, \ldots, t_{n-1})$ est aussi convexe, d'aire strictement inférieur à celle de $\mathcal{P}$.

Donc $0a.02.0b$ est une configuration non minimale.

- Si $(a, b) = (5, b)$ avec $b \geq 8$, on pose

$$(t'_1, t'_2, t'_3, t'_4) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ a-2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b-2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

.

Ainsi, pour tous sommets $(t_6, \cdots t_{n-1})$ tels que le polygone $\mathcal{P} = (t_0, t_1, \ldots t_{n-1})$ est convexe et localement 2−minimal, le polygone $\mathcal{P}' = (t_0, t'_1, t'_2, t'_3, t'_4, t_5, \ldots, t_{n-1})$ est convexe, d'aire strictement inférieur à celle de $\mathcal{P}$.

Donc 05.02.0b est une configuration non minimale.

- Si $(a, b) = (a, 5)$ avec $a \geq 8$, on pose

$$(t'_1, t'_2, t'_3, t'_4) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ a-2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b-2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

.

Ainsi, pour tous sommets $(t_6, \cdots t_{n-1})$ tels que le polygone $\mathcal{P} = (t_0, t_1, \ldots t_{n-1})$ est convexe et localement 2−minimal, le polygone $\mathcal{P}' = (t_0, t'_1, t'_2, t'_3, t'_4, t_5, \ldots, t_{n-1})$ est convexe, d'aire strictement inférieur à celle de $\mathcal{P}$.

Donc 0a.02.05 est une configuration non minimale.

□

Lemme 5.5. *Soient a, b, c des entiers tels que $a, c \geq 4$ et $b \geq 3$.*
Le chaînage 0a.0b.0c *est une configuration non minimale.*

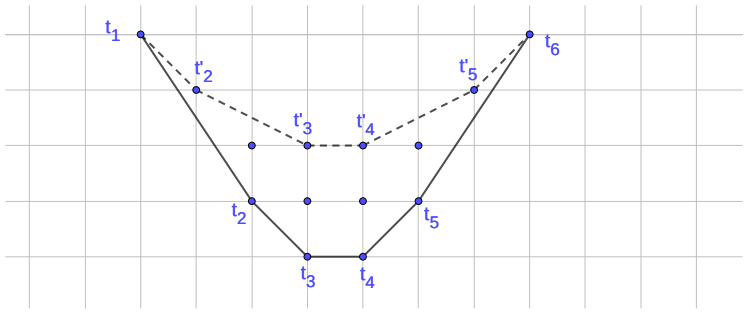


Figure 11: Le chaînage 04.03.04 est une configuration non minimale.

Démo. La démonstration est similaire à celles des deux précédents lemmes.
On pourra visualiser cette configuration sur la figure (11) pour le cas limite $a = c = 4$ et $b = 3$. □

Lemme 5.6. *Soit $a \geq 5$ un entier.*
Le chaînage 03.0a.03 *est une configuration non minimale.*

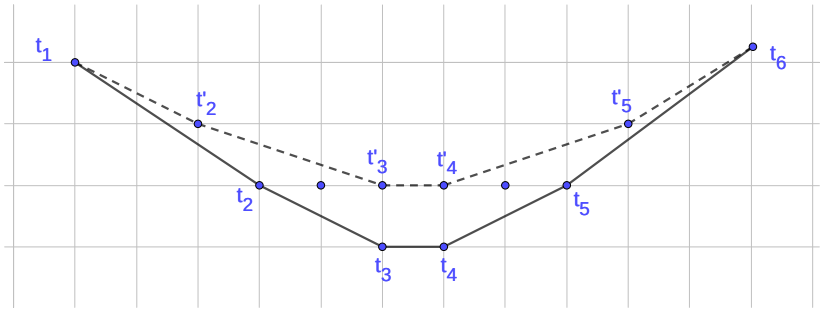


Figure 12: Le chaînage 03.05.03 est une configuration non minimale.

Démo. Cette configuration est représentée sur la figure (12) pour $a = 5$. □

5.5 Des raccourcis

Dans cette partie, on étudie des configurations particulières de la forme

- $0a.02.0b = \lfloor a2b \rfloor$,
- $0a.02.03.0b = \lfloor a23b \rfloor$ ou $0a.03.02.0b = \lfloor a32b \rfloor$,
- $0a.04.02.04.0b = \lfloor a424b \rfloor$,
- $0a.03.03 = \lfloor a33 \rfloor$ ou $03.03.0a = \lfloor 33a \rfloor$

avec des conditions sur les entiers a et b.

Considérant un $n-$gone dont le chaînage admet un de ces facteurs, en prenant un "raccourci", on obtient un $(n-1)$gone inclu dans le $n-$gone initial. Via cette inclusion, on minimise la différence d'aire entre le $n-$gone et le $(n-1)-$gone.

Comme ces raccourcis sont valables sur des polygones convexes localement $2-$minimaux dont les chaînages sont dans Σ_2^*, pas nécessairement dans $(0\Sigma)^*$, on n'utilisera pas la notation condensée dans cette partie.

Lemme 5.7. *Soient a, b deux entiers tels que $a, b \geq 4$ et $a + b \geq 9$.*

Soit $\mathcal{P}$ un $n-$gone convexe entier localement $2-$minimal dont le chaînage, à permutation circulaire près sur Σ_2^*, comporte le facteur $0a.02.0b$.

Le $n-$gone $\mathcal{P}$ d'aire A contient un $(n-1)$-gone $\mathcal{P}'$ d'aire

$$A' \leq A - (a + b - \frac{3}{2}) \leq A - \frac{15}{2}.$$

On dit que le polygone $\mathcal{P}$ admet un raccourci $a2b$.

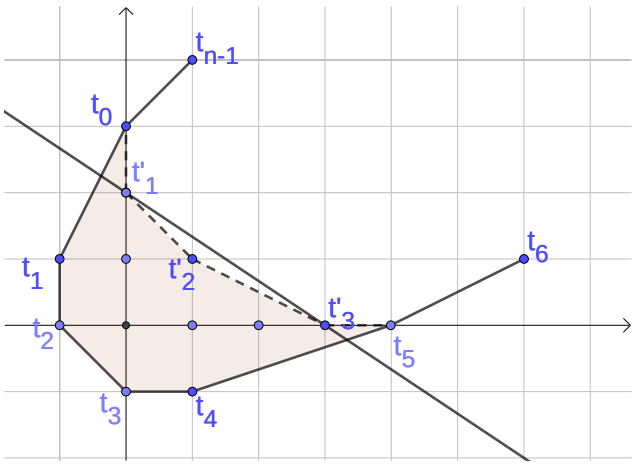


Figure 13: fig: Représentation d'un raccourci avec un polygone dont le chaînage comporte un facteur 04.02.05.

Démo. Sans perdre de généralité, choisissons le repère $R_0 = (v_0, w_0, t_0)$ tel que $R_0 = C_{0,a}^{-1}(R_1)$ avec

$$R_1 = (v_1, w_1, t_1) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Ainsi, la ligne brisée obtenue par un chaînage $0a.02.0b.\alpha\beta$ est :

$$l = (t_0, t_1, \ldots, t_5) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ a-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (b-1)(\alpha+1) \\ \alpha \end{pmatrix} \right).$$

La figure (13) représente le cette ligne brisée pour $(a, b) = (4, 5)$ et $\alpha = 0$.

On pose $t'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ b-2 \end{pmatrix}$, $t'_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $t'_5 = \begin{pmatrix} c-2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Si $b, c \geq 4$ et $b + c \geq 5$, le point t'_4 est intérieur au triangle $\Delta(t'_3, O, t'_5)$.

On construit ainsi un $(n-1)-$gone convexe inclu dans le $n-$gone $\mathcal{P}$, pas nécessairement $2-$minimale. D'après la proposition (1.2), ce $(n-1)-$gone contient un $(n-1)-$gone convexe $2-$minimal.

Concernant l'aire, le nombre de points intérieurs diminue de $\delta i \geq a-1+b-1-1+1 = a+b-2 \geq 9-2 = 7$ et le nombre de points au bord dimininue de $\delta b = 1$.

D'après le théorème de Pick, la différence d'aire est supérieure à

$$A - A' \geq \delta i + \frac{1}{2}\delta b = 7 + \frac{1}{2} = \frac{15}{2}.$$

□

Lemme 5.8. *Soient $n \geq 6$ et $a \geq 7$ deux entiers.*

Soit $\mathcal{P}$ un $n-$gone convexe entier localement $2-$minimal dont le chaînage, à permutation circulaire près sur $(0\Sigma)^*$, comporte un facteur $0a.02.03.04$ ou un facteur $04.03.02.0a$.

Le $n-$gone $\mathcal{P}$ d'aire A contient un $(n-1)$-gone convexe $2-$minimale d'aire

$$A' \leq A - (a + \frac{13}{2}) \leq A - \frac{27}{2}.$$

On dit que le polygone $\mathcal{P}$ admet un raccourci $a234$.

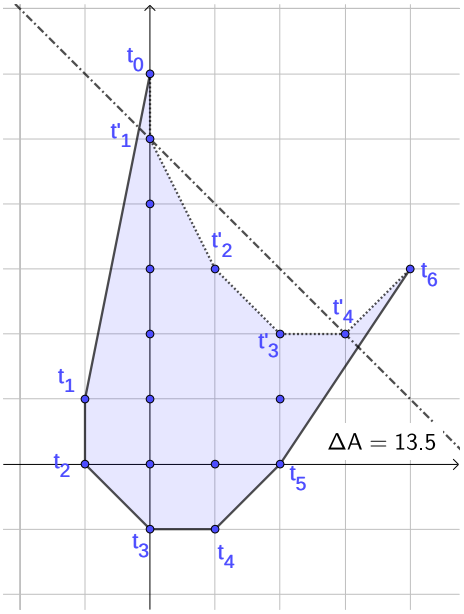


Figure 14: Le raccourci $a234$ avec $a = 7$.

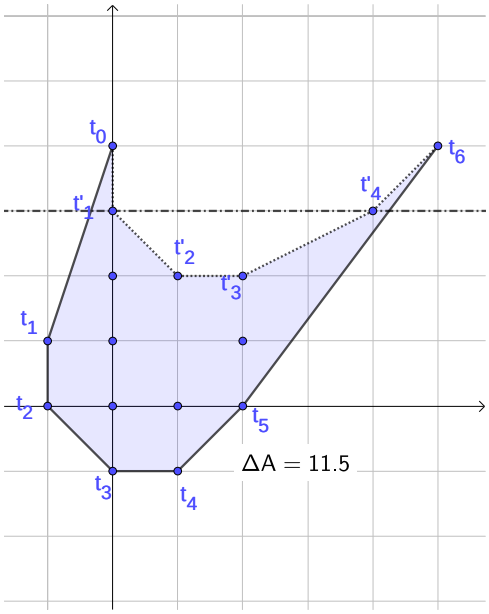


Figure 15: Le raccourci $a23b$ avec $a = b = 5$.

Démo. On considère le cas du facteur $0a.02.03.04$. Comme pour la démonstration de la proposition 5.7, on choisit le repère $R_0 = (v_0, w_0, t_0)$ tel que $R_0 = C_{0,a}^{-1}(R_1)$ avec

$$R_1 = (v_1, w_1, t_1) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Ainsi, la ligne brisée obtenue par un chaînage $0a.02.03.04.\alpha\beta.\alpha'\beta'$ est (voir figure 14, pour $a = 7$ et $\alpha = 0$) :

$$l = (t_0, t_1, \ldots, t_6) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ a-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4+3\alpha \\ 3+4\alpha \end{pmatrix} \right).$$

On pose $t'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ a-2 \end{pmatrix}$, $t'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $t'_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $t'_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Le $(n-1)-$gone convexe $(t_0, t'_1, t'_2, t'_3, t'_4, t_6, \cdots, t_{n-1})$, inclu dans $\mathcal{P} = (t_0, t_1, \cdots, t_{n-1}$, contient un $(n-1)-$gone convexe localement $2-$minimal $\mathcal{P}'$ d'aire A'.

Le nombre de points intérieurs diminue de $\delta i \geq (a-1)+4+2+1 = a+6$ et le nombre de points au bord dimininue de $\delta b = 1$.

D'après le théorème de Pick, la différence d'aire vérifie

$$A - A' \geq \delta i + \frac{1}{2}\delta b \geq 13 + \frac{1}{2} = \frac{27}{2}.$$

□

Lemme 5.9. *Soient a et b deux entiers ≥ 5.*

Soit $\mathcal{P}$ un $n-$gone convexe entier localement $2-$minimal dont le chaînage, à permutation circulaire près sur $(0\Sigma)^*$, comporte un facteur $0a.02.03.0b$ ou un facteur $0a.03.02.0b$.

Le $n-$gone $\mathcal{P}$ d'aire A contient un $(n-1)$-gone convexe d'aire

$$A' \leq A - (a + b + \frac{3}{2}) \leq A - \frac{23}{2}.$$

On dit que le polygone $\mathcal{P}$ admet un raccourci $a23b$.

Démo. Comme précédemment, la ligne brisée obtenue par un chaînage $0a.02.03.0b.\alpha\beta.\alpha'\beta'$ est (voir figure 15, pour $a = b = 5$ et $\alpha = 0$) :

$$l = (t_0, t_1, \ldots, t_6) = \Big(\begin{pmatrix} 0 \\ a-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (b-1)(\alpha+1)+1 \\ b\alpha + b - 1 \end{pmatrix} \Big).$$

On pose $t'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ a-2 \end{pmatrix}$, $t'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $t'_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $t'_4 = \begin{pmatrix} b-1 \\ b-2 \end{pmatrix}$.

Le $(n-1)-$gone convexe $(t_0, t'_1, t'_2, t'_3, t'_4, t_6, \cdots, t_{n-1})$, inclu dans $\mathcal{P} = (t_0, t_1, \cdots, t_{n-1}$, contient un $(n-1)-$gone convexe localement $2-$minimal $\mathcal{P}'$ d'aire A'.

Le nombre de points intérieurs diminue de $\delta i \geq (a-1) + 2 + 1 + (b-1) = a + b + 1$ et le nombre de points au bord dimininue de $\delta b = 1$.

D'après le théorème de Pick, la différence d'aire vérifie

$$A - A' \geq \delta i + \frac{1}{2}\delta b \geq 11 + \frac{1}{2} = \frac{23}{2}.$$

□

Lemme 5.10. *Soient a et b deux entiers ≥ 3.*

Soit $\mathcal{P}$ un $n-$gone convexe entier localement $2-$minimal dont le chaînage, à permutation circulaire près sur $(0\Sigma)^*$, comporte un facteur $0a.04.02.04.0b$.

Le $n-$gone $\mathcal{P}$ d'aire A contient un $(n-1)$-gone convexe d'aire

$$A' \leq A - \frac{15}{2}.$$

On dit que le polygone $\mathcal{P}$ admet un raccourci $a424b$.

Démo. Comme précédemment, la ligne brisée obtenue par un chaînage $0a.04.02.04.0b.\alpha\beta.\alpha'\beta'$ (voir figure 16, pour $a = b = 3$ et $\alpha = 0$) sur le repère $\mathcal{R}_0$ tel que $\mathcal{R}_1 = C_{0,a}(\mathcal{R}_0) = \Big(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Big)$ est :

$$l = (t_0, t_1, \ldots, t_7) = \Big(\begin{pmatrix} a-1 \\ 2a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (2b-1)(\alpha+1)+1 \\ b(\alpha+1) - 1 \end{pmatrix} \Big).$$

On pose $t'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $t'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $t'_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$et $t'_5 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Le $(n-1)-$gone convexe $(t_0, t'_1, t'_2, t'_3, t'_4, t'_5, t_7, \cdots, t_{n-1})$, inclu dans $\mathcal{P} = (t_0, t_1, \cdots, t_{n-1})$, contient un $(n-1)-$gone convexe localement $2-$minimal $\mathcal{P}'$ d'aire A'.

Le nombre de points intérieurs diminue de $\delta i \geq 7$ et le nombre de points au bord dimininue de $\delta b = 1$.

D'après le théorème de Pick, la différence d'aire vérifie

$$A - A' \geq \delta i + \frac{1}{2}\delta b \geq \frac{15}{2}.$$

□

Lemme 5.11. *Soit a un entiers ≥ 4.*

Soit $\mathcal{P}$ un $n-$gone convexe entier localement $2-$minimal dont le chaînage, à permutation circulaire près sur $(0\Sigma)^*$, comporte un facteur $0a.03.03$ ou $03.03.0a$.

Le $n-$gone $\mathcal{P}$ d'aire A contient un $(n-1)$-gone convexe d'aire

$$A' \leq A - (a + \frac{7}{2}) \leq A - \frac{15}{2}.$$

On dit que le polygone $\mathcal{P}$ admet un raccourci $a33$.

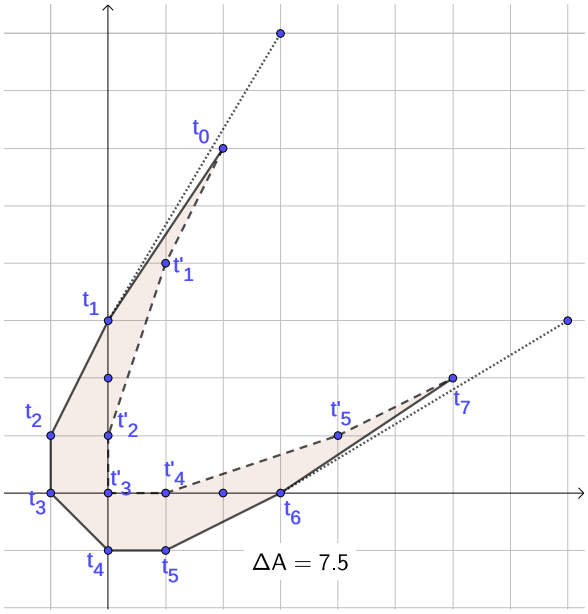


Figure 16: Le raccourci $a424b$ avec $a = b = 3$.

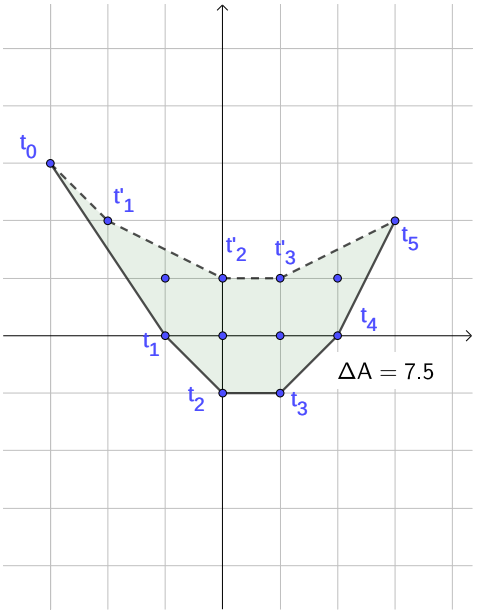


Figure 17: Le raccourci $a33$ avec $a = 4$.

Démo. Sans perdre de générallité, supposons que w admet un facteur $0a.03.03$.

Comme précédemment, la ligne brisée obtenue par un chaînage $0a.03.03.\alpha\beta.\alpha'\beta'$ (voir figure 17, pour $a = 4$ et $\alpha = 0$) sur le repère $\mathcal{R}_0$ tel que $\mathcal{R}_1 = C_{0,a}(\mathcal{R}_0) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est :

$$l = (t_0, t_1, \ldots, t_5) = \left(\begin{pmatrix} -(a-1) \\ a-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3+2\alpha \\ 2+3\alpha \end{pmatrix} \right).$$

On pose $t'_1 = \begin{pmatrix} -(a-2) \\ a-2 \end{pmatrix}$, $t'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $t'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Le $(n-1)-$gone convexe $(t_0, t'_1, t'_2, t'_3, t_5, \cdots, t_{n-1})$, inclu dans $\mathcal{P} = (t_0, t_1, \cdots, t_{n-1})$, contient un $(n-1)-$gone convexe localement $2-$minimal $\mathcal{P}'$ d'aire A'.

Le nombre de points intérieurs diminue de $\delta i \geq a - 2 + 5 = a + 3 \geq 7$ et le nombre de points au bord dimininue de $\delta b = 1$.

D'après le théorème de Pick, la différence d'aire vérifie

$$A - A' \geq \delta i + \frac{1}{2}\delta b \geq \frac{15}{2}.$$

□

Proposition 5.3. *Soit w un mot de $K_C^{1,2n}$.*

Si w admet soit

1. *un facteur $0a.02.0b$ avec$a, b \geq 4$ et $a + b \geq 9$,*
2. *un facteur $0a.02.03.04$ ou un facteur $04.03.02.0a$ avec $a \geq 7$,*
3. *un facteur $0a.02.03.0b$ ou un facteur $0a.03.02.0b$ avec $a \geq 5$,*
4. *un facteur $0a.04.02.04.0b$ avec $a, b \geq 3$,*
5. *un facteur $0a.03.03$ ou un facteur $03.03.0a$ avec $a \geq 4$*

alors, le n-gone convexe localement $2-$minimale $\mathcal{P}$ associé à w contient un $(n-1)-$gone $\mathcal{P}'$ d'aire :

$$A(\mathcal{P}') \leq A(\mathcal{P}) - \frac{15}{2}.$$

6 $2n-$gones minimaux

Dans cette partie, on s'interresse aux polygones ayant un nombre paire de côtés. Ils sont associés aux chaînages de K_C^1 de longueur paire (ce sont des mots du monoïde Σ^* de longueurs dans $4\mathbb{N}$).

Le problème de minimisation d'aire est plus simple sur le sous-ensemble des $2n-$gones que sur l'ensemble des $(2n+1)-$gones : on peut réduire l'étude aux polygones ayant des côtés 2 à 2 parallèles. Cette propriété de symétrie est démontrée par Simpson (cf. [S]).

6.1 $2n-$gones parallèles et chaînages carrés

Définition 6.1. *Un $2n-$gone convexe $\mathcal{P} = (v_0, v_1, \cdots v_{2n-1})$ est un **polygone parallèle** (ou $2n-$**gone parallèle**) si, pour tout indice $0 \leq i \leq n-1$, les vecteurs côtés vérifient :*

$$v_{n+i} = -v_i \tag{6.8}$$

Les côtés de $\mathcal{P}$ sont deux à deux paralléles.

Théorème 5 (Simpson - 1990)**.** Pour tout entier $n \geq 1$, il existe un $2n-$gone convexe entier parallèle minimal.

Définition 6.2. *On appelle un **chaînage carré** un chaînage de la forme w^2, où w est chaînage.*

Corollaire 6.1. *Pour tout entier $n \geq 1$, il existe un chaînage carré w^2 tel que le polygone associé à w^2 (modulo l'ensemble des repères affines $\mathcal{R}$) est un $2n-$gone parallèle minimal.*

Démo. Soient $\mathcal{P}_1 = (v_0, v_1, \cdots v_{2n-1})$ un $2n-$gone convexe entier parallèle minimal défini par ses vecteurs côtés.

On note $w_1 = c_1 \cdots c_{2n}$ le chaînage qui lui est associé, où c_i est un chaînage élémentaire.

Soit $\mathcal{P}_2 = (v_n, v_{n+1}1, \cdots, v_{2n-1}, v_0, v_1, \cdots v_{n-1})$ le polygone convexe entier parallèle minimal obtenu par permutation circulaire des vecteurs côtés de $\mathcal{P}_1$.

On note w_2 le chaînage associé à $\mathcal{P}_2$. D'après la propriété sur les permutations circulaires d'un polygone (2.9), on a

$$w_2 = c_n \cdots c_{2n} c_1 \cdots c_{n-1}.$$

Or, le polygone $\mathcal{P}_1$ est parallèle et ses vecteurs côtés vérifient les relations (6.8). Donc, le polygone $\mathcal{P}_2$ est l'image du polygone $\mathcal{P}_1$ par la composée d'une rotation d'angle π et d'une translation.

Ainsi, modulo l'ensemble des applications spéciales affines, les polygones $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont identiques : ils sont associées au même chaînage. D'où $w_1 = w_2$. Donc

$$c_1 \cdots c_{2n} = c_n \cdots c_{2n} c_1 \cdots c_{n-1}.$$

Finalement, $w_1 = w_2 = (c_1 \cdots c_{n-1})^2$. □

Par ce corollaire, on réduit l'étude du problème de minimalisation d'aire des $2n-$gones convexes entiers à la recherche des chaînages carrés dans le noyau K_C^1, associés à des polygones minimaux.

Or, d'après la propriété (3.5), cela est équivalent à la recherche des mots du sous-ensemble $K_\mu^{\frac{1}{2}}$ dont les carrés w^2 sont associés à des polygones minimaux.

6.2 $2n-$gones parallèles minimaux et chaînages de $(0\Sigma)^*$

Dans cette section, on montre que l'on peut réduire la recherche des polygones convexes entiers miminaux à l'étude du sous-ensembles $\Omega = K_\mu^{\frac{1}{2}} \cap (0\Sigma)^*$, étudié dans la section (4.2).

Proposition 6.1. *Soit $\mathcal{P}$ un $2n-$gone convexe parallèle. Soit w^2 le chaînage carré associé à $\mathcal{P}$.*

Si $\mathcal{P}$ est minimal alors le chaînage w est de la forme

$$w = 0\beta_1.0\beta_2 \cdots 0\beta_n.$$

Démo. Quitte à opérer une permutation circulaire, on suppose que le chaînage w est de la forme $w = \alpha\beta_1.\alpha_2\beta_2.\cdots.\alpha_n\beta_n$ avec $\alpha \neq 0$ et $\alpha_i \geq 0$ pour tout indice $2 \leq i \leq n$.

Quitte à transformer le polygone $\mathcal{P}$ par une application linéaire de $GA(\mathbb{Z}^2)$, on considère que le premier repère chaîné est $R_0 = (v_0, w_0, t_0)$ avec :

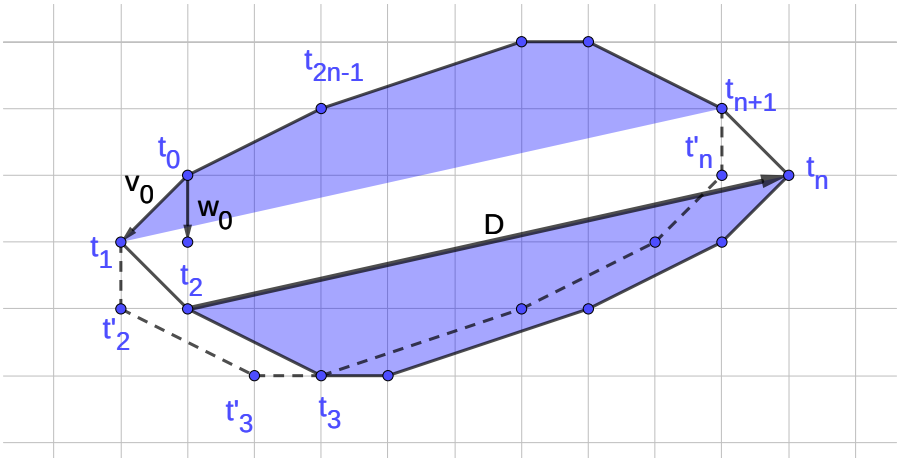


Figure 18: Polygone convexe parallèle $(t_0, t_1, \cdots, t_{2n-1})$ dont le chaînage carré admet un facteur 1β, pour $\beta \in \mathbb{N}$, avec $v_0 = (-1, -1)$ et $w_0 = (0, -1)$.

$$v_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } w_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{P} = (v_0, v_1 \cdots, v_{n-1}, -v_0, -v_1 \cdots, -v_{n-1})$ le polygone parallèle associé au chaînage carré w^2.
On a $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha \end{pmatrix}$.

On note $D = v_2 + v_3 + \cdots + v_{n-1} - v_0 = \begin{pmatrix} D_x \\ D_y \end{pmatrix}$.

- Si $D_y > 0$: Cette situation est illustrée pour $\alpha = 1$ sur la figure (18).

  On pose $\mathcal{P}' = (v_0, \mathbf{w_0}, v_2, \cdots, v_{n-1}, -v_0, -\mathbf{w_0}, -v_2, \cdots, -v_{n-1})$.

  D'après la remarque (1.1) sur les diagonales d'un polygone convexe, les déterminants $det(v_0, (\alpha + 1)w_0)$ et $det(v_2, -(\alpha + 1)w_0)$ sont nonn nuls et de même signe (positif ici). Donc les déterminants $det(v_0, w_0)$ et $det(w_0, v_2)$ sont non nul et de même signe, et du même signe que $det(v_i, v_{i+1})$ pour tout indice $2 \leq i \leq n - 1$.

  Donc, le polygone $\mathcal{P}'$ est convexe.

  De plus, D est à la fois une diagonale de $\mathcal{P}'$ issue de t_2 et une diagonale de $\mathcal{P}'$ isssue de t'_2. Donc $det(v_0, D) = \alpha D_x + D_y > 0$ et $det(w_0, D) = D_x > 0$.

  Notons A_1 l'aire du polygone $(v_2, v_3, \cdots v_{n-1}, v_0, -D)$, A_2 l'aire du parallélogramme $(v_1, D, -v_1, -D)$ et A'_2 l'aire du parallélogramme $(w_0, D, -w_0, -D)$. Ainsi, on a :

  $$\begin{cases} A(\mathcal{P}) = 2A_1 + A_2 \\ A(\mathcal{P}') = 2A_1 + A'_2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} A_2 = det(v_1, D) = \alpha D_x + D_y \\ A'_2 = det(w_0, D) = D_x \end{cases}$$

  .

  Finalement, comme $D_x, D_y > 0$ et $\alpha > 0$, on obtient

  $$A(\mathcal{P}) - A(\mathcal{P}') = (\alpha - 1)D_x + D_y > 0.$$

  Donc $\mathcal{P}'$ est un $2n-$gone convexe d'aire strictement inférieur à celle de $\mathcal{P}$.

- Si $D_y \leq 0$: On pose $\mathcal{P}' = (\mathbf{w_0}, v_1, \cdots, v_{n-1}, -\mathbf{w_0}, -v_1, \cdots, -v_{n-1})$.

  On pose $D' = v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-1} = v_0 + v_1 + D = \begin{pmatrix} D'_x \\ D'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_x \\ D_y - 1 - \alpha \end{pmatrix}$.

  En particulier, comme $D_y \leq 0$, on a $D'_y < 0$.

  Comme précédemment, le polygone $\mathcal{P}'$ est convexe et on obtient :

  $$A(\mathcal{P}) - A(\mathcal{P}') = det(v_0, D') - det(w_0, D) = -D_y > 0.$$

  Donc $\mathcal{P}'$ est un $2n-$gone convexe d'aire strictement inférieur à celle de $\mathcal{P}$.

Donc $\mathcal{P}$ n'est pas minimal.

□

6.3 Le $2n-$gone parallèle particulier $[(n23^{n-2}2)^2]$

Lemme 6.1. *Soit $n \geq 2$ un entier.*
Soit w un $(n+1)$-chaînage de l'orbite $\lfloor n23^{n-2}2 \rfloor$.
L'aire du polygone convexe entier parallèle associé au chaînage carré w^2 est

$$\frac{1}{6}(n^3+5n)$$

.

Le polygone parallèle donné par les vecteurs cotés

$$(v_0, v_1, \cdots, v_n) = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix}1\\n-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right)$$

est un représentant de cette classe.

Démo. On montre par récurence sur l'entier n, que les vecteurs cotés du polygone parallèle associé au chaînage $\lfloor 23^{n-2}2n \rfloor$ issue du repère $\mathcal{R}_0 = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \right)$ sont les vecteurs

$$(v_0, v_1, \cdots, v_n) = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix}1\\n-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right).$$

Pour $n=2$, le polygone convexe parallèle associé au chaînage $\lfloor (222)^2 \rfloor$ issue de $\mathcal{R}_0$ est l'hexagone minimal d'aire 3. Ses vecteurs cotés sont $(v_0, v_1, v_2) = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right)$.

Considérons les vecteurs cotés $(v_0, v_1, \cdots, v_{n-1})$ du polygone $\mathcal{P}$ associé au mot $w = 23^{n-3}2(n-1)$. En appliquant l'expansion V_2 sur le suffixe $\lfloor 2(n-1) \rfloor$, on insère (voir rem 4.2) entre v_{n-2} et v_{n-1}, le vecteur somme $S = v_{n-1} + v_{n-2} = \begin{pmatrix}1\\n-1\end{pmatrix}$ et on obtient le polygone parallèle

$$\mathcal{P}' = (v_0, v_1, \cdots, v_{n-2}, S, v_{n-1}).$$

Enfin, calculons l'aire du polygone parallèle $\mathcal{P}'$. Notons A l'aire de $\mathcal{P}$ et A' l'aire de $\mathcal{P}'$.
On note D la diagonale $D = -v_{n-1} + v_0 + v_1 + \cdots v_{n-2}$ du polygone $\mathcal{P} = (v_0, v_1, \cdots v_{n-1})$, de sorte que :

$$D = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n-1} 1 \\ -1 + \sum_{k=0}^{n-1} k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ \frac{n(n-1)}{2} - 1 \end{pmatrix}.$$

En découpant le polygone $\mathcal{P}'$ en trois zones, (voir figure 19), on obtient :

$$\begin{aligned} A' &= A + det(D, S) \\ &= A + \begin{vmatrix} n & 1 \\ \frac{n(n-1)}{2} - 1 & n-1 \end{vmatrix} \\ &= A + \frac{n^2 - n + 2}{2} \end{aligned}$$

Par récurrence, avec $A = \frac{1}{6}\Big((n-1)^3 + 5(n-1)\Big)$, on obtient $A' = \frac{1}{6}\Big(n^3 - 3n^2 + 3n - 1 + 5n - 5 + 3n^2 - 3n + 6\Big) = \frac{1}{6}\Big(n^3 + 5n\Big)$.

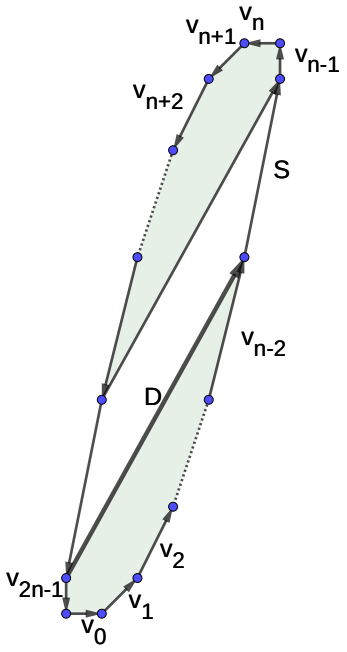


Figure 19: L'expansion V_2 insère un vecteur somme dans la famille des vecteurs cotés.

□

Remarque 6.1. *La suite d'entiers* $\frac{1}{6}(n^3+5n)$ *est répertoriée dans l'OEIS A004006.*

Dans [S], Simpson majore l'aire d'un polygone convexe ayant un nombre de coté paire avec cette suite. Il utilise un résultat de Rabinowitz [R3] sur le nombre de points entiers intérieurs à un polygone convexe minimal et exprime cette aire sous la forme $\binom{n}{3}+n-1$.

Lemme 6.2. *Soit* $n \geq 7$ *un entier impair.*

On note $n=2k+7$ *avec* $k \geq 0$. *Le chaînage* $w = \left[2.3^k.42524.3^k.2(n-2)\right]$ *est dans le sous-ensemble* Ω.

L'aire du polygone convexe entier parallèle associé au chaînage carré w^2 *est*

$$\frac{1}{6}(n^3-7n)+10.$$

Démo. Considérons le polygone $(v_0, v_1, \cdots, v_n) = \left(\binom{1}{0}, \binom{1}{1}, \binom{1}{2}, \cdots, \binom{1}{n-3}, \binom{0}{1} \right)$ repésentant le chaînage carré $\left[2.3^k.333.3^k.2(n-2)\right]$, sur lequel on fait deux expansions V_2 "au milieu".

Avec la première expansion, on obtient le chaînage $w_1 = \left[2.3^k.424.3.3^k.2(n-2)\right]$, représenté par le polygone parallèle $\left(\binom{1}{0}, \binom{1}{1}, \binom{1}{2}, \cdots, \binom{1}{k+1}, \binom{2}{2k+3}, \binom{1}{k+2}, \cdots, \binom{1}{n-3}, \binom{0}{1} \right)$.

On ajoute le vecteur somme $S = \binom{2}{2k+3}$.

La diagonale délimitée par les vecteurs invariants successifs est :

$$\begin{aligned} D &= \binom{1}{0} + \binom{1}{1} + \binom{1}{2} + \cdots + \binom{1}{k+1} - \binom{1}{k+2} - \cdots - \binom{1}{n-3} - \binom{0}{1} \\ &= \binom{-1}{-(k^2+6k+9)}. \end{aligned}$$

Donc, l'aire augmente de $det(D,S) = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -(k^2+6k+9) & 2k+3 \end{vmatrix} = 2k^2+10k+15.$

Avec la seconde expansion, on obtient le chaînage $\left[2.3^k.42524.3^k.2(n-2)\right]$, représenté par le polygone $\left(\binom{1}{0}, \binom{1}{1}, \cdots, \binom{1}{k+1}, \binom{2}{2k+3}, \binom{1}{k+2}, \binom{2}{2k+5}, \binom{1}{k+} \cdots, \binom{1}{n-3}, \binom{0}{1} \right)$.

On ajoute le vecteur somme $S' = \binom{2}{2k+5}$.

La diagonale est :

$$\begin{aligned} D' &= \binom{1}{0} + \binom{1}{1} + \binom{1}{2} + \cdots + \binom{1}{k+1} + \binom{2}{k+3} + \binom{1}{k+2} - \binom{1}{k+3} - \cdots - \binom{1}{n-3} - \binom{0}{1} \\ &= \binom{3}{-(k^2+2k+2)}. \end{aligned}$$

Donc, l'aire augmente de $det(D',S') = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -(k^2+2k+2) & 2k+5 \end{vmatrix} = 2k^2+10k+19.$

Finalement, l'aire augmente de $\delta A = 4k^2+20k+34 = n^2-4n+13$.

On conclut avec la formule du lemme 6.1.

□

Lemme 6.3. *Soit* $n \geq 8$ *un entier pair. On note* $n = 2k+8$ *avec* $k \geq 0$. *Le chaînage* $w = \left[2.3^{k+1}.42524.3^k.2(n-2)\right]$ *est dans le sous-ensemble* Ω.

L'aire du polygone convexe entier parallèle associé au chaînage carré w^2 *est*

$$\frac{1}{6}(n^3-7n)+11.$$

Démo. La démonstration est similaire à celle du lemme précédent. □

Proposition 6.2. *Soit* $n \geq 1$ *un entier.*

Soit w *un chaînage de l'orbite* $\left[n23^{n-2}2\right]$.

Le polygone convexe entier parallèle associé au chaînage carré w^2 *n'est pas minimal.*

Démo. Pour $n = 2k+7$ impair, l'aire du chaînage $w = \big[2.3^k.42524.3^k.2(n-2)\big]$ est strictement inférieure à l'aire du chaînage $\big[n23^{n-2}2\big]$.

La différence des aires est :

$$\frac{1}{6}(n^3+5n) - \Big(\frac{1}{6}(n^3-7n)+10\Big) = 2n-10.$$

Pour $n = 2k+8$ pair, l'aire du chaînage $w = \big[2.3^{k+1}.42524.3^k.2(n-2)\big]$ est strictement inférieure à l'aire du chaînage $\big[n23^{n-2}2\big]$.

La différence des aires est :

$$\frac{1}{6}(n^3+5n) - \Big(\frac{1}{6}(n^3-7n)+11\Big) = 2n-11.$$

□

6.4 Les premiers chaînages carrés associés aux polygones minimaux

Dans le tableau ci-dessous sont listés les chaînage de Ω_n, à permutation circulaire près, et à symétrie près, dont les carrés sont associés aux polygones convexes minimaux pour $3 \leq n \leq 17$.

n	$a(2n)$	chaînages
3	3	$\lfloor 222 \rfloor$
4	7	$\lfloor 3232 \rfloor$
5	14	$\lfloor 42332 \rfloor$
6	24	$\lfloor 424242 \rfloor$
7	40	$\lfloor 5242432 \rfloor$
8	59	$\lfloor 52425242 \rfloor$
9	87	$\lfloor 624252432 \rfloor$
10	121	$\lfloor 7234252432 \rfloor, \lfloor 6242525242 \rfloor$
11	164	$\lfloor 72425252432 \rfloor, \lfloor 62426242532 \rfloor$
12	210	$\lfloor 624262426242 \rfloor$
13	274	$\lfloor 7242624262432 \rfloor$
14	345	$\lfloor 82342624262432 \rfloor$
15	430	$\lfloor 823432724262432 \rfloor$
16	523	$\lfloor 7242624272426242 \rfloor$
17	632	$\lfloor 82426242724262432 \rfloor$

Remarque 6.2. *On remarque qu'un $(2n+2)-$gone minimal n'est pas nécessairement obtenu par une expansion V_2 sur un $2n-$gone minimal, comme c'est le cas pour $n = 15$.*

Remarque 6.3. *Avec les propriétés des raccourcis, on obtient les majorations de $a(2n-1)$ suivantes :*

$2n-1$	$a(2n)$	*raccourcis*	*majoration*
13	40	$\lfloor 524 \rfloor$	$a(13) \leq 32.5$
15	59	$\lfloor 524 \rfloor$	$a(15) \leq 51.5$
17	87	$\lfloor 624 \rfloor$	$a(17) \leq 78.5$
19	121	$\lfloor 7234 \rfloor$ *ou* $\lfloor 624 \rfloor$	$a(19) \leq 107.5$
21	164	$\lfloor 4327 \rfloor$ *ou* $\lfloor 724 \rfloor$ *ou* $\lfloor 525 \rfloor$	$a(21) \leq 150.5$
23	210	$\lfloor 624 \rfloor$ *ou* $\lfloor 724 \rfloor$	$a(23) \leq 200.5$
25	274	$\lfloor 4327 \rfloor$	$a(25) \leq 260.5$
27	345	$\lfloor 8234 \rfloor$ *ou* $\lfloor 624 \rfloor$	$a(27) \leq 230.5$
29	430	$\lfloor 8234 \rfloor$ *ou* $\lfloor 724 \rfloor$	$a(29) \leq 415.5$
31	523	$\lfloor 724 \rfloor$	$a(31) \leq 513.5$
33	632	$\lfloor 4328 \rfloor$ *ou* $\lfloor 824 \rfloor$	$a(33) \leq 617.5$

7 $2n+1-$gones minimaux

Théorème 6. Soit n un entier ≥ 7. On a :

$$a(2n-1) \leq a(2n) - \frac{15}{2}.$$

Démo. D'après la proposition (6.1), il existe un chaînage carré w^2 d'aire minimale $a(2n)$.

Comme w^2 est associé à un polygone minimal, il n'admet pas de configuration non minimal, à permutation circulaire près. Donc (voir section 5.4) w n'admet pas de facteurs

1. $\lfloor ab \rfloor$ avec $a, b \geq 4$ et $a+b \geq 9$,
2. $\lfloor a2b \rfloor$ avec $a, b \geq 5$ et $a+b \geq 13$,
3. $\lfloor abc \rfloor$ avec $a, c \geq 4$ et $b \geq 3$,
4. $\lfloor abc \rfloor$ avec $a, c \geq 3$ et $b \geq 5$,

et d'après la prop 6.2, le mot w n'est pas dans une orbite de la forme $\lfloor n23^{n-2}2 \rfloor$.

D'après la proposition 4.5, le mot w admet soit

i) un facteur $\lfloor a33 \rfloor$ ou un facteur $\lfloor 33a \rfloor$ avec $a \geq 4$,

ii) un facteur $\lfloor a424b \rfloor$ avec $a, b \geq 3$,

iii) un facteur $\lfloor a23b \rfloor$ ou $\lfloor a32b \rfloor$ avec $a, b \geq 5$,

iv) un facteur $\lfloor a234 \rfloor$ ou $\lfloor 432a \rfloor$ avec $a \geq 7$,

v) un facteur $\lfloor 24242 \rfloor$ ou $\lfloor 2424a \rfloor$ ou $\lfloor 34242 \rfloor$.

vi) un facteur $\lfloor a2442b \rfloor$, $a, b \geq 3$.

Si w admet un facteur parmi les quatre premier cas, on conclut avec la proposition 5.3 regroupant les raccourcis.

Sinon :

- Comme le facteur $\lfloor 24242 \rfloor$ se réduit au facteur $\lfloor 2332 \rfloor$, si w admet un facteur $\lfloor 24242 \rfloor$, alors $n \leq 6$. Impossible.
- Comme w n'admet pas de facteur $\lfloor a34 \rfloor$ pour $a \geq 3$, si w admet un facteur $\lfloor 34242 \rfloor$ alors il se réduit à un mot de la forme $\lfloor 23332s \rfloor$ Donc $n = 7$ et $w = \lfloor 2342425 \rfloor$. Impossible avec le facteur 425.
- Il en va de même pour le facteur $\lfloor 24243 \rfloor$. Impossible.
- Si w admet un facteur $\lfloor a2442b \rfloor$ alors pour $a = b = 3$, ce facteur seréduit au mot $\lfloor 2332 \rfloor$. Donc $n \leq 6$. Impossible.
- Enfin, si w admet un facteur $\lfloor 32442b \rfloor$ avec $b \geq 4$, comme w n'admet pas de facteur $\lfloor c2d \rfloor$ avec $c, d \geq 4$ et $c+d \geq 9$, et pas de facteur $\lfloor e424f \rfloor$ avec $e, f \geq 3$, alors w est de la forme $\lfloor 3244242s \rfloor$ avec $s \in (0\Sigma)^*$. Il se réduit au mot $\lfloor 23332s \rfloor$.

  Donc $n = 8$ et $w = \lfloor 32442425 \rfloor$. Impossible avec le facteur $\lfloor 425 \rfloor$.

□

Proposition 7.1. *Soit n un entier ≥ 7.*
Soit $w = (\alpha_i, \beta_i)_{1 \leq i \leq 2n-1}$ un $(2n-1)-$chaînage associé à un $(2n-1)-$gone minimal.
Alors pour tout $1 \leq i \leq 2n-1$ on a $\beta_i \neq 0$.

Démo. Supposons que w admette un chaînage élémentaire de la forme $\alpha 0$.

Alors, en appliquant un patching, on obtient un $2n-$gone d'aire $a(2n-1) + \frac{1}{2}$. Ce qui est impossible d'après la proposition (6) car $a(2n) > a(2n-1) + \frac{15}{2}$.

Donc w n'admet pas de facteur $\alpha 0$.

□

Remarque 7.1. *Les expérimentations suggèrent que, pour $n \geq 7$, les chaînages des $(2n-1)-$gones minimaux sont dans le sous-ensemble $K_C^1 \bigcap (0\Sigma)^*$.*

Dans le tableau ci-dessous, sont listés les premiers $(2n-1)$-gones minimaux dans cet ensemble (à permutation circulaire et à symétrie près) :

$2n-1$	*chaînages de* $K_C^1 \bigcap (0\Sigma)^*$	$a(2n-1)$
3	$\lfloor 000 \rfloor$	1/2
5	$\emptyset$	5/2
7	$\emptyset$	13/2
9	$\lfloor (233)^3 \rfloor$	21/2
11	$\emptyset$	43/2
13	$\lfloor 523332524242 \rfloor$	65/2
15	$\lfloor 523342425252523 \rfloor$	103/2
17	$\lfloor 62342524252523432 \rfloor$	151/2
19	$\lfloor 6232525242532623432 \rfloor$	213/2

Ces résultats, obtenus par programmation récursive du sous-ensemble $K_C^1 \bigcap (0\Sigma)^*$ via l'expansion V_2 sur le mot $\lfloor 222222 \rfloor$ s'accordent avec les illustrations des premiers n-gones minimaux de H. Pfoertner (2018), disponible sur l'OEIS [OEIS] sur la page de la séquence référencée A070911.

References

[BT] I. Barany and N. Tokushige, *The minimum area of convex lattice n-gons*, Combinatorica, **24**,No. 2, (2004), 171–185.

[Cai] T. X. Cai, *On the minimum area of convex lattice polygons*, Taiwanese Journal of Mathematics, **1**, No 4 (1997).

[Cas] W. Castryck, *Moving Out the Edges of a Lattice Polygon*, Discrete Comput. Geom., 47 (2012), 496–518.

[CS] C. J. Colbourn and R. J. Simpson, *A note on bounds on the minimum area of convex lattice polygons*, Bull. Austral. Math. Soc. **45** (1992), 237–240.

[G] C.Guichard, *Les nombres de Catalan et le groupe modulaire* $PSL_2(\mathbb{Z})$., http://www.theses.fr/2018GREAM057 (2018).

[OEIS] OEIS Foundation Inc. (2019), The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, http://oeis.org.

[R1] S. Rabinowitz, *Convex Lattice Polygons*, Ph.D. Dissertation (Polytechnic University, Brooklyn, New York, 1986).

[R2] S. Rabinowitz, $O(n^3)$ *bounds for the area of a convex lattice* $n-gon$, Geombinatorics, vol.II, **4** (1993), 85–88.

[R3] S. Rabinowitz, *On the number of lattice points inside a convex lattice* $n-gon$, Congr, Numer. 73, (1990), 99–124.

[S] R. J. Simpson, *Convex lattice polygons of minimum area*, Bull. Austral. Math. Soc. **42** (1990), 353–367.

[St] R. P. Stanley, *Catalan Numbers*, Cambridge University Press, 2015.