Mersenne et la conjecture de Collatz

J.Prado

2 avril 2022

Résumé

By giving a different interpretation of the Collatz conjecture, also called the Syracuse conjecture or the $3n+1$ conjecture, it is possible to approach the problem differently. This new formulation allows us to replace the notion of convergence to 1 by a convergence to the divisors Q_{2m} of the Mersenne numbers defined by $M_{2m} = 2^{2m} - 1 = 3 \cdot Q_{2m}$. The purpose of this submission is to present the conjecture in a form which does not seem to have been explored until today. This approach leads to a partition of odd numbers and allows trajectories to be constructed by inversion of the Collatz relation. We deduce the veracity of the conjecture.

Résumé

En donnant une interprétation différente de la conjecture de Collatz, aussi dite conjecture de Syracuse ou encore conjecture $3n+1$, il est possible d'aborder différemment le problème. Cette nouvelle formulation permet de remplacer la notion de convergence vers 1 par une convergence vers les diviseurs Q_{2m} des nombres de Mersenne définis par $M_{2m} = 2^{2m} - 1 = 3 \cdot Q_{2m}$. Cette soumission a pour but de présenter la conjecture sous une forme qui ne semble pas avoir été explorée jusqu'à aujourd'hui. Cette approche conduit à une partition des nombres impairs et permet de construire les trajectoires par inversion de la relation de Collatz. On en déduit la véracité de la conjecture.

1 Introduction

Nous rappelons que la conjecture de Collatz est liée à la suite d'entiers positifs définis par les relations suivantes :

$$f(n) = \begin{cases} 3n+1 & \text{si } n \text{ impair,} \\ \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ pair.} \end{cases} \tag{1}$$

La conjecture de Collatz dit que pour tout n la suite se termine toujours en 1. Les valeurs paires de n n'étant pas représentatives des properiétés de convergences, il est possible de reformuler (1) en ne faisant apparaître que les valeurs impaires de n ce qui s'écrit :

$$2^{\gamma} n_k = 3n_{k-1} + 1 \tag{2}$$

Où les n_k sont tous des entiers positifs impairs. On en déduit simplement que si $n_k = 1$, alors :

$$n_{k-1} = \frac{2^{\gamma}-1}{3} \tag{3}$$

L'équation (3) n'a de solution que si $(2^\gamma - 1)$ est divisible par 3. En écrivant $3 = \left(2^2 - 1\right)$ on est ramené à la solution simple :

$$n_{k-1} = \tfrac{2^{2m}-1}{2^2-1} \tag{4}$$

où $\left(2^{2m} - 1\right) = M_{2m}$ est un nombre de Mersenne défini par $M_p = (2^p - 1)$ qui est divisible par 3 quand p est pair.

Cela permet de remplacer la convergence vers 1 par une convergence vers les diviseurs de Mersenne notés Q_{2m} définis par :

$$2^{2m} - 1 = 3 \cdot Q_{2m} \tag{5}$$

Lorsque $n_k \neq 1$ alors (3) devient :

$$n_{k-1} = \tfrac{2^\gamma n_k - 1}{3} \tag{6}$$

De manière évidente (6) n'a pas de solution si n_k est un multiple de 3. Dans ces conditions, n_k étant impair ne peut prendre que les formes suivantes :

$$\begin{cases} n_k = 3q_k + 1 & \text{où } q_k \text{ est pair} \\ n_k = 3q_k + 2 & \text{où } q_k \text{ est impair} \end{cases} \tag{7}$$

De même, γ peut être pair ($\neq 0$) ou impair : $\begin{cases} \gamma = 2m \\ \gamma = 2m - 1 \end{cases}$

On est donc ramené à l'étude de :

$$\begin{aligned} 2^\lambda \cdot (3q_k + 1) = 3 \cdot n_{k-1} + 1 \\ 2^\lambda \cdot (3q_k + 2) = 3 \cdot n_{k-1} + 1 \end{aligned} \tag{8}$$

On remarque que la convergence au sens de Collatz, ne peut être obtenue qu'à l'aide de la relation $2^\lambda \cdot (3q_k + 1) = 3 \cdot n_{k-1} + 1$, dans laquelle $\lambda = 2m$ et $q_k = 0$, nous avons alors $n_{k-1} = Q_{2m}$. Tant que n_{k-1} est différent de Q_{2m}, les relations données par (eq. 8) sont valables pour q_k pair si $n_k = 3q_k + 1$ et q_k impair si $n_k = 3q_k + 2$. Nous allons utiliser cette remarque dans la suite afin de reformuler les relations entre n_k et n_{k-1}.

2 Nouvelle écriture des nombres impairs

À partir de ce qui précède il est possible de définir une écriture équivalente aux nombres impairs égaux à $0, 1,$ ou 2 modulo 3 à partir de la relation définie par Collatz. Si dans la relation $2^\lambda \cdot (3q_k + 1)$ on remplace λ par $2m$ et en développant on obtient :

$$2^\lambda \left(3q_k + 1\right) = 2^{2m} \cdot 3 \cdot q_k + 2^{2m} \tag{9}$$

À l'aide des nombres de Mersenne, $2^{2m} = 3Q_{2m} + 1$, cela donne l'égalité :

$$2^{2m} \cdot 3 \cdot q_k + \left[2^{2m}\right] = 3 \cdot 2^{2m} \cdot q_k + [3 \cdot Q_{2m} + 1] \tag{10}$$

Soit :

$$2^{2m}(3 \cdot q_k + 1) = 3(2^{2m} \cdot q_k + Q_{2m}) + 1 \tag{11}$$

Cette relation montre que si $n_k = 3q_k + 1$ alors tout prédécesseur au sens de la suite de Collatz s'écrit $n_{k-1} = 2^{2m} \cdot q_k + Q_{2m}$, avec q_k pair.

On peut montrer de même que si $n_k = 3q_k + 2$ alors $n_{k-1} = 2^{2m-1} \cdot q_k + Q_{2m}$, avec q_k impair.

$$2^{2m-1}(3 \cdot q_k + 2) = 3(2^{2m-1} \cdot q_k + Q_{2m}) + 1 \tag{12}$$

En conclusion si dans la suite des valeurs n_k toutes impaires :

— $n_k = 3q_k + 1$: alors n_{k-1} est donné par (11) et n_k étant impair, q_k est pair et $\gamma = 2m$.

— $n_k = 3q_k + 2$: alors n_{k-1} est donné par (12) et n_k étant impair, q_k est impair et $\gamma = 2m - 1$.

$n_k = 3n_{k-1} + 1$	$\Leftrightarrow$	$n_{k-1} \in \{3q_{k-1}, 3q_{k-1} + 1, 3q_{k-1} + 2\}$
$2^{2m-1}(3q_k + 2)$	$=$	$3n_{k-1} + 1 = 3(2^{2m-1}q_k + Q_{2m}) + 1$ si $n_{k-1} \neq Q_{2m}$
$2^{2m}(3q_k + 1)$	$=$	$3n_{k-1} + 1 = 3(2^{2m}q + Q_{2m}) + 1$ si $n_{k-1} \neq Q_{2m}$
$2^{2m}(1)$	$=$	$3Q_{2m} + 1$ si $n_{k-1} = Q_{2m}$

TAB. 1: Équivalence d'écriture

On trouvera en annexe (Annexe A) une étude exhaustive montrant qu'il n'y a pas d'autres possibilités et les résultats sont résumés dans le tableau (Tab. 1) dans lequel $Q_{2m} = (2^{2m} - 1)/3$.

On déduit de ce résultat que si le nombre impair initial n_0 peut être choisi quelconque, dès la première itération la suite des nombres impairs ne comporte aucun multiple de 3.

Il en résulte que tout nombre impair non multiple de 3 possède une infinité de prédécesseurs au sens de la suite de Collatz. En résumé :

$$\begin{aligned} &Si\ \ n_k = (3 \cdot q_k + 1)\ alors\ n_{k-1} = 2^{2m} \cdot q_k + Q_{2m} \\ &Si\ \ n_k = (3 \cdot q_k + 2)\ alors\ n_{k-1} = 2^{2m-1} \cdot q_k + Q_{2m} \end{aligned} \tag{13}$$

Dans les relations définies par (eq 13) q_k est pair quand n_k est congru à 1 modulo 3 et impair quand n_k est congru à 2 modulo 3, dans les deux cas $m = [1, 2, \cdots, \infty[$.

3 Partition des nombres impairs

D'après ce qui précède (eq. 13), les valeurs n_k et n_{k-1}satisfont aux suites de Collatz par le fait que :

$$\begin{aligned} &Si\ \ n_k = (3 \cdot q_k + 1)\ alors\ 2^{2m} n_k = 3n_{k-1} + 1 \\ &Si\ \ n_k = (3 \cdot q_k + 2)\ alors\ 2^{2m-1} n_k = 3n_{k-1} + 1 \end{aligned} \tag{14}$$

Dans (eq. 14), si les valeurs n_k sont congrues à 1 ou 2 modulo 3, les valeurs n_{k-1}sont des nombres impairs quelconques c'est à dire congrus à 0, 1 ou 2 modulo 3 avec la particularité que lors d'une congruence à 0 le nombre n_{k-1} correspond à $k = 1$ c'est à dire l'origine d'une trajectoire puisque les multiples de 3 ne peuvent pas être obtenus comme résultats de l'opération $3n + 1$.

Il est ainsi possible d'établir une nouvelle écriture des nombres impairs, écriture qui fait apparaître explicitement les puissances de 2 et ce que nous avons appelé diviseur de Mersenne i.e. $Q_{2m} = \left(2^{2m} - 1\right)/3$. On notera $n_{k-1}(q_k, m)$ un nombre impair de la façon suivante :

$$\begin{array}{c} n_{k-1}(q_k, m) = 2^{2m} q_k + Q_{2m} \; si \; q_k \; est \; pair \\ n_{k-1}(q_k, m) = 2^{2m-1} q_k + Q_{2m} \; si \; q_k \; est \; impair \end{array} \quad pour \; m = [1, 2, \cdots, \infty[\tag{15}$$

Dans ces relations, seul n_0 peut être un multiple de 3.

La valeur de q_k et celle de m sont obtenues uniquement par application de la relation de Collatz :

$$f(n) = 3 \cdot n_{k-1}(q_k, m) + 1 \tag{16}$$

Sachant que $f(n)$ ne peut prendre que des valeurs de la forme $2^{2m}(3 \cdot q_k + 1)$ ou $2^{2m-1}(3 \cdot q_k + 2)$ on en déduit directement l'écriture de $n_{k-1}(q_k, m)$ sous une des deux formes données par (eq. 15).

Exemple ;

Soit le nombre 453 que l'habitude permet d'écrire $2 \cdot 226 + 1$, son écriture sous la forme $n_{k-1}(q_k, m)$ passe par l'utilisation de la relation de Collatz.

$$1360 = 3 \cdot 453 + 1 \tag{17}$$

$$2^4 \cdot 85 = 3 \cdot 453 + 1 \tag{18}$$

$$2^4 \cdot 85 = 2^4 (3 \cdot 28 + 1) \tag{19}$$

On en déduit : $453 = 2^4 \cdot 28 + 5$ ce qui est de la forme $2^{2m} q_k + Q_{2m}$ avec $q_k = 28$ et $m = 2$ d'où $Q_{2m} = 5$. On vérifiera aisément que 453 est un multiple de 3, mais que c'est aussi par construction un prédécesseur de $85 = Q_8$. On a donc une trajectoire à trois termes $453 \to 85 \to 1$.

q_k pouvant prendre toutes les valeurs entières ($q_k \in \mathbb{N}$) nous obtenons une partition des nombres impairs en associant à chaque valeur de q_k une suite infinie de nombres impairs $n_{k-1}(q_k, m)$ obtenue à l'aide des relations de (eq. 15)

3.1 Partition à l'aide de la notion de prédécesseur

Les propriétés des prédécesseurs (cf Tab. 1) des nombres congrus à 1 ou 2 modulo 3 permettent d'obtenir une partition complète des nombres impairs. Nous en donnons une représentation à l'aide de deux tableaux faisant apparaître de manière ordonnée et indexés par les entiers naturels les nombres impairs regroupés selon leur propriété de prédécesseur d'un nombre impair donné de la forme $3q+1$ (q est pair), c'est le tableau supérieur de la figure (Fig. 1) ou $3q+2$ (q est impair), c'est le tableau inférieur de cette même figure. Les points de départ du tableau des prédécesseurs sont les nombres Q_{2m} qui apparaissent dans la deuxième colonne du tableau supérieur $q = 0$ comme prédécesseurs du chiffre 1.

q	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	···
3q+1	1	7	13	19	25	31	37	43	49	55	61	···
(2^2)q + Q2	Q2=1	9	17	25	33	41	49	57	65	73	81	···
(2^4)q + Q4	Q4=5	37	69	101	133	165	197	229	261	293	325	···
(2^6q) + Q6	Q6=21	149	277	405	533	661	789	917	1045	1173	1301	···
(2^8)q + Q8	Q8=85	597	1109	1621	2133	2645	3157	3669	4181	4693	5205	···
(2^10)q + Q10	Q10=341	2389	4437	6485	8533	10581	12629	14677	16725	18773	20821	···
(2^12)q + Q12	Q12=1365	9557	17749	25941	34133	42325	50517	58709	66901	75093	83285	···
···	···	···	···	···	···	···	···	···	···	···	···	···

q	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	···
3q+2	5	11	17	23	29	35	41	47	53	59	65	···
(2^1)q + Q2	3	7	11	15	19	23	27	31	35	39	43	···
(2^3)q + Q4	13	29	45	61	77	93	109	125	141	157	173	···
(2^5)q + Q6	53	117	181	245	309	373	437	501	565	629	693	···
(2^7)q + Q8	213	469	725	981	1237	1493	1749	2005	2261	2517	2773	···
(2^9)q + Q10	853	1877	2901	3925	4949	5973	6997	8021	9045	10069	11093	···
(2^11)q + Q12	3413	7509	11605	15701	19797	23893	27989	32085	36181	40277	44373	···
···	···	···	···	···	···	···	···	···	···	···	···	···

FIG. 1: Tableau de partition des nombres impairs

Chaque colonne est constituée à l'aide des prédécesseurs des nombres qui figurent sur la deuxième ligne de chaque colonne, dans les cases jaunes pour les nombres congrus à 1 modulo 3, dans les cases vertes pour les nombres congrus à 2 modulo 3. comme il a été vu précédemment, tout nombre impair congru à 1 ou 2 possède ses propres prédécesseurs et donc les nombres congrus à 1 ou 2 de la deuxième ligne des tableaux de la figure (Fig. 1) représentent les successeurs associés à chacun des nombres figurants dans la colonne correspondante et aucun nombres impairs ne possèdent de prédécesseurs en commun.

Ainsi en notant $I = 2\mathbb{N}+1$ l'ensemble des nombres impairs, $R_1(q_k) = pr\acute{e}d(3.q_k+1) = \bigcup_{m=1}^{\infty}\left(2^{2m}q_k + Q_{2m}\right)$ le sous-ensemble des prédécesseurs d'un nombre impair congru à 1 modulo 3 et $R_2(q_k) = pr\acute{e}d(3.q_k+2) = \bigcup_{m=1}^{\infty}\left(2^{2m-1}q_k + Q_{2m}\right)$ le sous-ensemble des prédécesseurs d'un nombre impair congru à 2 modulo 3, on obtient la partition suivante :

$$I = \oplus_{q_k\, pair} R_1 \left(q_k\right) \bigcup \oplus_{q_k\, impair} R_2 \left(q_k\right) \tag{20}$$

où $\oplus$ représente la somme directe.

En tant que successeur, un nombre appartient aussi à la famille des prédécesseurs du prochain successeur, dans cette fonction il ne peut apparaître qu'une seule fois dans une autre colonne, sinon il serait prédécesseur de plusieurs valeurs ce qui est contraire à l'unicité de la représentation de chaque nombre impair sous la forme $2^\lambda q + Q_{2m}$.

Seul le nombre 1 fait exception à cette règle puisqu'il apparaît à la fois comme successeur et comme prédécesseur de lui-même ce qui est la représentation du cycle 1 : 1.

4 Propriétés des prédécesseurs

4.1 Relation entre deux prédécesseurs d'un même nombre

Commençons par le cas où dans la relation $2^\gamma n_k = 3n_{k-1} + 1$, on a $n_k = 3q_k + 1$. Dans ces conditions, on a (cf 11) :

$$2^{2m}(3 \cdot q_k + 1) = 3(2^{2m} \cdot q_k + Q_{2m}) + 1 \tag{21}$$

Ce qui, avec les notations précédentes, donne :

$$2^{2m} n_k = 3n_{k-1} \left(q_k, m\right) + 1 \tag{22}$$

Les $n_{k-1} \left(q_k, m\right)$ changent de valeur quand m change de valeur, mais ils ont tous le même successeur n_k. Remplaçons m par $m+1$ pour définir la relation entre deux prédécesseurs :

$$2^{2m+2} n_k = 3n_{k-1} \left(q_k, m+1\right) + 1 = 3(2^{2m+2} \cdot q_k + Q_{2m+2}) + 1 \tag{23}$$

Or :

$$Q_{2m} = \frac{2^{2m} - 1}{3} = \sum_{k=0}^{m-1} 2^{2k} \tag{24}$$

on en déduit simplement que $Q_{2m+2} = 2^2 Q_{2m} + 1$, et donc :

$$2^{2m+2} q_k + Q_{2m+2} = 2^2 \left(2^{2m} q_k + Q_{2m}\right) + 1 \tag{25}$$

Soit :

$$n_{k-1} \left(q_k, m+1\right) = 2^2 n_{k-1} \left(q_k, m\right) + 1 \tag{26}$$

On obtient le même résultat lorsqu'on raisonne avec n_k de la forme $3q_k + 2$, la liste des prédécesseurs d'un nombre impair suit la même règle de construction que la liste des diviseurs Q_{2m} des nombres de Mersenne $2^{2m} - 1$. De plus, il est facile de voir que la différence entre deux prédécesseurs successifs du même nombre satisfait à la suite de Collatz :

$$n_{k-1} \left(q_k, m+1\right) - n_{k-1} \left(q_k, m\right) = 3n_{k-1} \left(q_k, m\right) + 1 \tag{27}$$

4.2 Régularité du tableau des prédécesseurs

L'équation (eq 27) est définie quelque soit $q_k \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Pour les valeurs de q_k pair (en considérant 0 comme chiffre pair, on obtient :

$$2^{2m}\left(3q_k+1\right) = n_{k-1}\left(q_k, m+1\right) - n_{k-1}\left(q_k, m\right) \tag{28}$$

Soit :

$$\frac{n_{k-1}(q_k,m+1)-n_{k-1}(q_k,m)}{3q_k+1} = 2^{2m} \tag{29}$$

Ainsi si dans le tableau de partition on remplace les prédécesseurs par la différence de 2 prédécesseurs consécutifs divisée par leur successeur on obtient une puissance de 2 paire et toutes les colonnes du tableau sont équivalentes.

De même si q_k est un nombre impair, on obtient :

$$\frac{n_{k-1}(q_k,m+1)-n_{k-1}(q_k,m)}{3q_k+2} = 2^{2m-1} \tag{30}$$

Cette fois les colonnes sont remplies avec les puissances de 2 impaires.

Le résultats est donné figure (Fig. 2).

Une autre régularité peut être mise en évidence, c'est l'équirépartition des nombres impairs dans chaque sous ensemble de prédécesseurs.

4.3 Équirépartition des prédécesseurs

4.3.1 Supposons qu'un prédécesseur soit un multiple de 3

Soit $n_{k-1}\left(q_k, m\right) = 3\cdot q_{k-1}$, à l'aide de la relation (26) :

$$n_{k-1}\left(q_k, m+1\right) = 2^2 3\cdot q_{k-1}+1 \tag{31}$$

$$n_{k-1}\left(q_k, m+2\right) = 2^4 3\cdot q_{k-1}+5 \tag{32}$$

$$n_{k-1}\left(q_k, m+3\right) = 2^6 3\cdot q_{k-1}+21 = 3\left(2^6 q_{k-1}+7\right) \tag{33}$$

On en déduit que si l'un des prédécesseurs est multiple de 3 alors tous les 3 prédécesseurs on aura un multiple de 3.

4.3.2 Supposons qu'un prédécesseur soit de la forme $3\cdot q_{k-1}+1$

Soit $n_{k-1}\left(q_k, m\right) = 2^{2m}q_k + Q_{2m} = 3\cdot q_{k-1}+1$, il vient :

$$2^{2m+2} + Q_{2m+2} = 2^{2m+2}q_k + 4Q_{2m} + 1 \tag{34}$$

q	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	...
3q+1	1	7	13	19	25	31	37	43	49	55	61	...
	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	...
	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	...
	64	64	64	64	64	64	64	64	64	64	64	...
	256	256	256	256	256	256	256	256	256	256	256	...
	1024	1024	1024	1024	1024	1024	1024	1024	1024	1024	1024	...
	4096	4096	4096	4096	4096	4096	4096	4096	4096	4096	4096	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

q	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	...
3q+2	5	11	17	23	29	35	41	47	53	59	65	...
	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	...
	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	...
	32	32	32	32	32	32	32	32	32	32	32	...
	128	128	128	128	128	128	128	128	128	128	128	...
	512	512	512	512	512	512	512	512	512	512	512	...
	2048	2048	2048	2048	2048	2048	2048	2048	2048	2048	2048	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

FIG. 2: Régularité du tableau de partition

$$2^{2m+4} + Q_{2m+4} = 2^{2m+4} q_k + 16 Q_{2m} + 5 \tag{35}$$

$$2^{2m+6} + Q_{2m+6} = 2^{2m+6} q_k + 64 Q_{2m} + 21 \tag{36}$$

$$2^{2m+6} + Q_{2m+6} = 2^6 \left(2^{2m} q_k + Q_{2m} \right) + 21 \tag{37}$$

$$2^{2m+6} + Q_{2m+6} = 2^6 \left(3 \cdot q_{k-1} + 1 \right) + 21 \tag{38}$$

$$2^{2m+6} + Q_{2m+6} = 2^6 3 \cdot q_{k-1} + 2^6 + 2^4 + 2^2 + 1 \tag{39}$$

$$2^{2m+6} + Q_{2m+6} = 2^6 3 \cdot q_{k-1} + 2^2 \left(2^4 + 2^2 + 1\right) + 1 \tag{40}$$

$$2^{2m+6} + Q_{2m+6} = 2^6 3 \cdot q_{k-1} + 2^2 \left(3 \cdot 7\right) + 1 \tag{41}$$

$$2^{2m+6} + Q_{2m+6} = 3 \left(2^6 \cdot q_{k-1} + 2^2 \cdot 7\right) + 1 \tag{42}$$

Le terme obtenu est bien congru à 1 modulo 3, on en déduit que tous les 3 prédécesseurs on aura un terme congru à 1 modulo 3.

4.3.3 Supposons qu'un prédécesseur soit de la forme $3 \cdot q_{k-1} + 2$

Soit $n_{k-1}(q_k, m) = 2^{2m-1} q_k + Q_{2m} = 3 \cdot q_{k-1} + 2$, il vient :

$$2^{2m+1} + Q_{2m+2} = 2^{2m+1} q_k + 4Q_{2m} + 1 \tag{43}$$

$$2^{2m+3} + Q_{2m+4} = 2^{2m+3} q_k + 16Q_{2m} + 5 \tag{44}$$

$$2^{2m+5} + Q_{2m+6} = 2^{2m+5} q_k + 64Q_{2m} + 21 \tag{45}$$

$$2^{2m+5} + Q_{2m+6} = 2^6 \left(2^{2m-1} q_k + Q_{2m}\right) + 21 \tag{46}$$

$$2^{2m+5} + Q_{2m+6} = 2^6 \left(3 \cdot q_{k-1} + 2\right) + 21 \tag{47}$$

$$2^{2m+5} + Q_{2m+6} = 2^6 3 \cdot q_{k-1} + 2^7 + 2^4 + 2^2 + 1 \tag{48}$$

En remarquant que $2^7 + 2^4 + 2^2 + 1 = 2^4 \left(2^3 + 1\right) + 2^2 + 1$, que $2^3 + 1 = 3^2$ et que $2^2 + 1 = \left(2^2 - 1\right) + 2 = 3 + 2$, il vient :

$$2^{2m+5} + Q_{2m+6} = 3 \left(2^6 \cdot q_{k-1} + 2^4 \cdot 3 + 3 + 1\right) \;\; + 2 \tag{49}$$

$$2^{2m+5} + Q_{2m+6} = 3 \left(2^6 \cdot q_{k-1} + 52\right) \;\; + 2 \tag{50}$$

Le terme obtenu est bien congru à 2 modulo 3, on en déduit que tous les 3 prédécesseurs on aura un terme congru à 2 modulo 3.

Les prédécesseurs se présentent pour chaque nombre sous forme d'une alternance de triplet congrus à 0, 1 et 2 modulo 3. La représentation de ce résultat est donnée figure (Fig. 3).

Il est alors possible de construire de manière systématique les trajectoires qui mènent à 1 en suivant le chemin inverse de l'algorithme de Collatz.

q	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	···
3q+1	1	7	13	19	25	31	37	43	49	55	61	···
	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	···
	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	···
	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	···
	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	···
	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	···
	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	···
···	···	···	···	···	···	···	···	···	···	···	···	···

q	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	···
3q+2	5	11	17	23	29	35	41	47	53	59	65	···
	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	···
	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	···
	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	···
	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	···
	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	···
	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	···
···	···	···	···	···	···	···	···	···	···	···	···	···

FIG. 3: Tableau des congruences modulo 3

5 Trajectoires de Collatz

5.1 Trajectoires par inversion de la suite de Collatz

En partant de $q = 0$, ce qui correspond au premier nombre $3q + 1 = 1$, on obtient la première liste de prédécesseurs qui sera constituée des diviseurs de Mersenne :

$$n_{k-1}(0, m) = 2^{2m} \cdot 0 + Q_{2m} = Q_{2m} \tag{51}$$

La suite obtenue est une suite infinie qui commence par les termes 1, 5, 21, 85, 341, 1365, $\cdots$. Il est alors possible de construire les trajectoires en fonction de leur longueur (encore appelée temps de vol). En effet nous avons établi que les multiples de 3 n'ont pas de prédécesseurs et que dans les prédécesseurs de tout autre nombre impair il y a un multiple de 3 toutes les 3 valeurs. Ici $21 = Q_6$ est un multiple de 3, il s'ensuit que tous les Q_{6m} sont multiples de 3 et qu'en partant de ces valeurs on obtient toutes les trajectoires qui aboutissent en 1 en une seule itération puisqu'on vérifie à chaque fois que $3 \cdot Q_{6m} + 1 = 2^{6m}$. Si l'on prend le voisin inférieur de Q_6, nous obtenons

$Q_4 = 5$ qui est congru à 2 modulo 3 il s'ensuit que tous les Q_{6m-2} sont congrus à 2 modulo 3. De même on peut aisément vérifier que tous les Q_{6m+2} sont congrus à 1 modulo 3.

Il est ainsi possible de remonter d'une étape à partir des valeurs congrues à 1 ou 2 modulo 3 et pour chacune d'entre elles on obtient une liste infinie de prédécesseurs de même constitution que la liste des prédécesseurs directs de 1 c'est à dire une infinité de multiples de 3 qui vont définir les trajectoires qui aboutissent à 1 en 2 itérations et une infinité de valeurs congrues à 1 ou 2 modulo 3 qui vont permettre de remonter d'une étape pour obtenir des trajectoires de longueur 3. Le processus peut être itérer à l'infini puisque la structure est la même à chaque étape, comme la liste des prédécesseurs ne se répète jamais on obtient ainsi toutes les trajectoires possibles sans qu'il ne puisse y avoir de boucles autre que celle du cas particulier de 1.

On en donne une illustration figure (Fig. 4) où les chiffres 0,1 et 2 correspondent à l'ensemble des prédécesseurs respectivement congrus à 0, 1 ou 2 modulo 3.

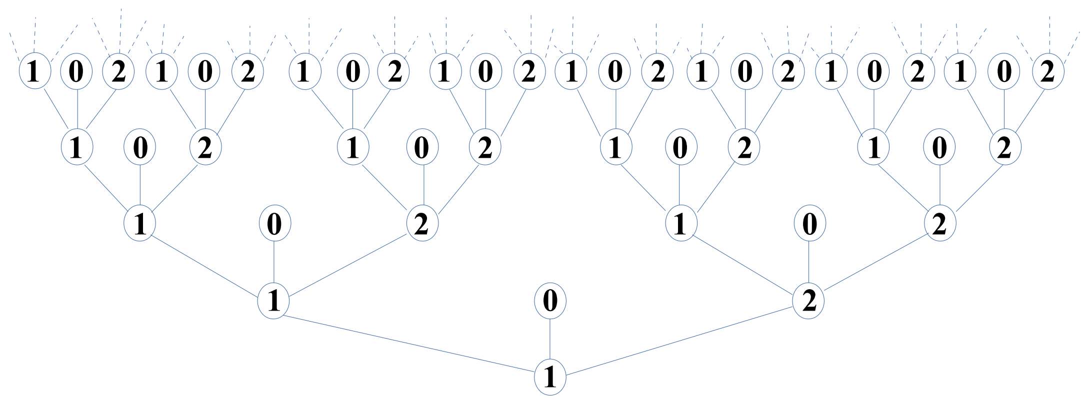

Fig. 4: Arbre des congruences

Il est alors possible de regrouper les congruences par étage. Ainsi en notant $P_1(0)$, $P_1(1)$ et $P_1(2)$ les prédécesseurs de premier niveau du chiffre 1, $P_2(0)$, $P_2(1)$ et $P_2(2)$ les ensembles de prédécesseurs des chiffres du premier niveau (i.e. les $P_1(i)$) on obtient un diagramme concentré sous forme d'une tour où chaque niveau comprend le point de départ (i.e. les éléments de l'ensemble $P_l\,(0)$) des trajectoires de longueur l, les éléments des ensembles $P_l\,(1)$ et $P_l\,(2)$ permettant de passer à l'étage $l+1$. On obtient ainsi une représentation du principe de l'algorithme de Collatz pour lequel toute trajectoire complète de longueur l débute par un élément d'un ensemble $P_l\,(0)$ et suit un chemin vers le chiffre 1 qui prend de manière qui semble chaotique les valeurs des éléments des ensembles $P_{l-i}\,(1)$ ou $P_{l-i}\,(2)$. Il existe une infinité de trajectoires de longueur entière $l \in \mathbb{N}^*$, on peut alors écrire :

Une représentation graphique en est donnée figure (Fig. 5) où T_l représente le niveau de départ d'une trajectoire de longueur l.

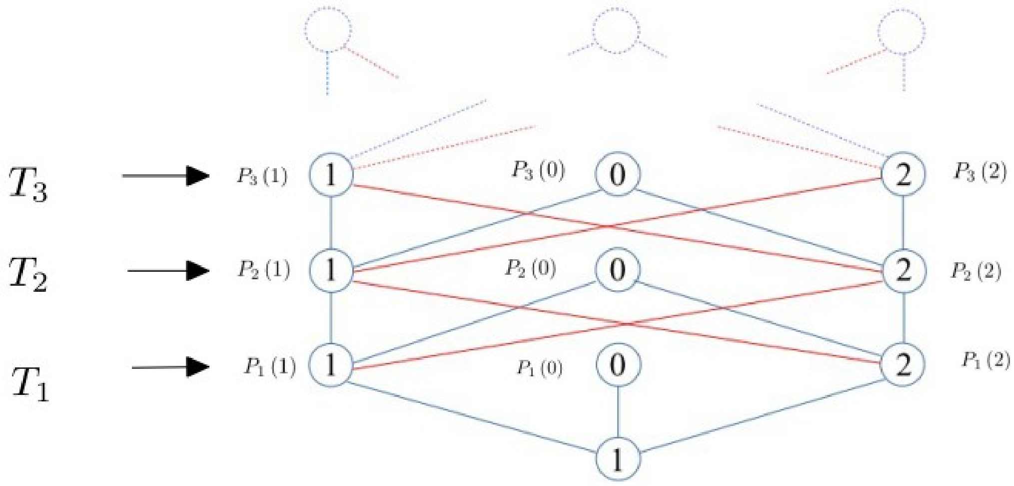

FIG. 5: Tour des congruences

Le processus est parfaitement déterministe toutes les trajectoires sont construites à l'aide d'une suite d'iérations à partir de 1 ce qui exclus toute trajectoire divergente.

Compte-tenu des relations prédécesseurs-successeurs il est possible de tenter une interprétation simple de l'apparence de trajectoire croissante, deux interprétations en sont données en Annexe B.

6 Conclusion

De ce qui précède on peut en conclure que la conjecture de Collatz est exacte. La méthode proposée pour le montrer repose sur le fait d'avoir pu exprimer formellement la procédure d'inversion de la suite de Collatz à l'aide d'une nouvelle représentation des nombres impairs basée sur l'utilisation d'une partie des nombres de Mersenne notés $2^{2m}-1$ et qui ont la particularité d'être tous des multiples de 3, propriété rarement utilisée contrairement au caracrère de primalité de l'autre partie des nombres de Mersenne notés $2^{2m+1}-1$. La difficulté d'exprimer la convergence vers 1 tient à plusieurs facteurs notamment qu'il ne s'agit pas d'une convergence au sens habituel du terme puisque chaque trajectoire (suffisamment longue) semble chaotique, que le fait de faire apparaître les nombres pairs sur les trajectoires sème la confusion dans la mesure où ils n'amènent aucune information sur la convergence et qu'une infinité de ces nombres n'apparaît sur aucune trajectoire comme successeur d'un nombre impair.

On trouvera dans les références suivantes, Lagarias [2003], Lagarias [2012], Pochon and Favre [2021] et Tao [2011], un état suffisamment exhaustif des travaux concernant les études sur la suite de Collatz (Syracuse).

A Écriture des nombres impairs

Il est possible de définir une écriture équivalente aux nombres impairs égaux à $0, 1$, ou 2 modulo 3 à partir de la relation définie par Collatz.

A.1 $n_0 = 3q_0$, où q_0 est impair

Dans ce cas la première itération de la suite de Collatz est donnée par :

$$2^{\gamma} n_1 = \quad 3^2 q_0 + 1 \tag{52}$$

A.1.1 Cas $n_1 = 3q_1 + 1$, $\gamma = 2m - 1$ et q_1 pair

Alors :

$$2^{2m-1}(3q_1 + 1) = 3^2 q_0 + 1 \tag{53}$$

On en déduit :

$$3q_0 = 2^{2m-1} q_1 + \frac{2^{2m-1} - 1}{3} \tag{54}$$

L'équation (54) n'a pas de solution entière puisque le nombre de Mersenne $2^{2m-1} - 1$ n'est pas divisible par 3.

A.1.2 Cas $n_1 = 3q_1 + 1$, $\gamma = 2m$ et q_1 pair

Alors :

$$2^{2m}(3q_1 + 1) = 3^2 q_0 + 1 \tag{55}$$

On en déduit :

$$3q_0 = 2^{2m}q_1 + \frac{2^{2m}-1}{3} \tag{56}$$

L'équation (56) a une solution entière puisque le nombre de Mersenne $2^{2m} - 1 = 3Q_{2m}$ est divisible par 3. On en déduit :

$$3q_0 = 2^{2m}q_1 + Q_{2m} \qquad \text{où } q_1 \text{ est pair} \tag{57}$$

A.1.3 Cas $n_1 = 3q_1 + 2$, $\gamma = 2m - 1$ et q_1 impair

Alors :

$$2^{2m-1}(3q_1 + 2) = 3^2 q_0 + 1 \tag{58}$$

On en déduit :

$$3q_0 = 2^{2m-1}q_1 + \frac{2^{2m}-1}{3} \tag{59}$$

L'équation (59) a une solution entière puisque le nombre de Mersenne $2^{2m} - 1 = 3Q_{2m}$ est divisible par 3. On en déduit :

$$3q_0 = 2^{2m}q_1 + Q_{2m} \qquad \text{où } q_1 \text{ est impair} \tag{60}$$

A.1.4 Cas $n_1 = 3q_1 + 2$, $\gamma = 2m$ et q_1 impair

Alors :

$$2^{2m}(3q_1 + 2) = 3^2 q_0 + 1 \tag{61}$$

On en déduit :

$$3q_0 = 2^{2m}q_1 + \frac{2^{2m+1}-1}{3} \tag{62}$$

L'équation (62) n'a pas de solution entière puisque le nombre de Mersenne $2^{2m+1} - 1$ n'est pas divisible par 3.

A.2 $n_k = 3q_k + 1$, $\gamma = 2m$ et q_k pair

Dans ces conditions à l'aide de (2) et (7) nous avons :

$$2^{2m}(3q_k + 1) = 3n_{k-1} + 1 \tag{63}$$

Soit :

$$n_{k-1} = \frac{2^{2m}3q_k+2^{2m}-1}{3} \tag{64}$$

En utilisant la propriété des nombres de Mersenne :$M_{2m} = 2^{2m} - 1 = 3Q_{2m}$, alors (64) peut s'écrire :

$$n_{k-1} = 2^{2m}q_k + Q_{2m} \tag{65}$$

A.3 $n_k = 3q_k + 1$, $\gamma = 2m - 1$ et q_k pair

Dans ces conditions à l'aide de (2) et (7) nous avons :

$$2^{2m-1}(3q_k+1) = 3n_{k-1} + 1 \tag{66}$$

Soit :

$$n_{k-1} = \frac{2^{2m-1}3q_k+2^{2m-1}-1}{3} \tag{67}$$

Dans la mesure où $M_{2m-1} = 2^{2m-1} - 1$, n'est pas divisible par 3, il n'y a pas de solution.

A.4 $n_k = 3q_k + 2$, $\gamma = 2m$ et q_k impair

Dans ces conditions à l'aide de (2) et (7) nous avons :

$$2^{2m}(3q_k+2) = 3n_{k-1} + 1 \tag{68}$$

Soit :

$$n_{k-1} = \frac{2^{2m}3q_k+2^{2m+1}-1}{3} \tag{69}$$

Dans la mesure où $M_{2m+1} = 2^{2m+1} - 1$, n'est pas divisible par 3, il n'y a pas de solution.

A.5 $n_k = 3q_k + 2$, $\gamma = 2m - 1$ q_k impair

Dans ces conditions à l'aide de (2) et (7) nous avons :

$$2^{2m-1}(3q_k+2) = 3n_{k-1} + 1 \tag{70}$$

Soit :

$$n_{k-1} = \frac{2^{2m-1}3q_k+2^{2m}-1}{3} \tag{71}$$

En utilisant la propriété des nombres de Mersenne $M_{2m} = 2^{2m} - 1 = 3Q_{2m}$, alors (71) peut s'écrire :

$$n_{k-1} = 2^{2m-1}q_k + Q_{2m} \tag{72}$$

En conclusion pour toute valeur n_k impaire :

— $n_0 = 3q_0$: alors n_0 est le début d'une trajectoire dont le terme suivant est de la forme $3q_1 + 1$ ou de la forme $3q_1 + 2$ selon les équations (57) ou (60).
— $n_k = 3q_k + 1$: alors n_{k-1} est donné par (65) et n_k étant impair, q_k est pair et $\gamma = 2m$.
— $n_k = 3q_k + 2$: alors n_{k-1} est donné par (72) et n_k étant impair, q_k est impair et $\gamma = 2m - 1$.

B Trajectoires croissantes

B.1 Première méthode

Une suite croissante est obtenue par une succession de n_k défini par :

$$2n_k = 3n_{k-1} + 1 \tag{73}$$

C'est le seul cas où $n_k > n_{k-1}$. Réécrivons (eq. 73) sous la forme :

$$n_k = (3n_{k-1} + 1)/2 \tag{74}$$

Ajoutons 1 à chaque membre de l'égalité, il vient :

$$(n_k + 1) = \frac{3}{2}(n_{k-1} + 1) \tag{75}$$

Il résulte de l'équation (eq. 75) qu'une suite est croissante si il existe une suite y_k de nombres pairs définie par $y_k = \frac{3}{2}y_{k-1}$,avec $y_k = n_k + 1$. Il ne peut y avoir divergence que si la suite y_k diverge ce qui n'est envisageable que si y_0 est elle même une valeur infinie, car toute valeur finie de y_0 ne peut donner qu'une suite de longueur finie, donc non divergente.

Ceci suppose l'existence d'un nombre particulier, ce qui est contradictoire au fait que tout nombre impair appartient à l'infinité de prédécesseurs d'un même nombre quelque soit la valeur de celui-ci. De plus dans la liste des prédécésseurs le nombre qui vérifie la relation (eq. 73) est le plus petit prédécesseur en valeur. Il y a donc une infinité de trajectoires provenant de valeurs supérieures à chaque nombre de la suite croissante, cette suite croissante possède donc une valeur maximale même si celle-ci semble d'ordre infini.

B.2 Deuxième méthode

Une trajectoire croissante correspond à une suite définie par l'équation (eq 12) dans laquelle $m = 1$, de façon à obtenir un successeur de valeur supérieure. Pour qu'une trajectoire soit divergente, il faut que la suite des valeurs obtenues soit toujours de ce type :

$$2n_k = 3n_{k-1} + 1 \tag{76}$$

Si l'on définit comme point de départ $k = 1$, la suite obtenue s'écrit :

$$\begin{aligned} 2n_1 &= 3n_0 + 1 \\ 2n_2 &= 3n_1 + 1 \\ &\vdots \\ 2n_k &= 3n_{k-1} + 1 \\ &\vdots \end{aligned} \tag{77}$$

Dans cette suite, sauf éventuellement n_0, toutes les valeurs sont de la forme $n_k = 3q_k + 2$, et la règle de construction des prédécesseurs permet d'écrire également :

$$\begin{gathered} n_0 = 2q_1 + 1 \\ n_1 = 2q_2 + 1 = 3q_1 + 2 \\ \vdots \\ n_{k-1} = 2q_k + 1 = 3q_{k-1} + 2 \\ \vdots \end{gathered} \tag{78}$$

On en déduit :

$$\begin{gathered} 2q_2 = 3q_1 + 1 \\ 2q_3 = 3q_2 + 1 \\ \vdots \\ 2q_k = 3q_{k-1} + 1 \\ \vdots \end{gathered} \tag{79}$$

On obtient des relations équivalentes sur les q_k qui définissent donc une suite croissante, dans laquelle chaque q_k est de la forme $q_k = 3r_k + 2$ et on peut itérer ainsi jusqu'à une valeur minimum dans la mesure où r_k satisfait aux mêmes relations que les q_k

Définissons la suite $q_{k,l}$ par $q_{k,l} = 3q_{k,l-1} + 2$, par itération on obtient :

$$q_{k,l} = \frac{n_k - 2\left(1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{l-1}\right)}{3^l} \tag{80}$$

Comme $1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{l-1} = (3^l - 1)/2$, il vient :

$$q_{k,l} = \frac{n_k + 1 - 3^l}{3^l} \tag{81}$$

$q_{k,l}$ n'est un nombre entier que si $n_k + 1$ est un multiple de 3^l, on en déduit :

$$n_k + 1 = 3^l y_k \tag{82}$$

En remplaçant n_k par son équivalent dans (eq 76) on obtient :

$$2\left(3^l y_k - 1\right) = 3\left(3^l y_{k-1} - 1\right) + 1 \tag{83}$$

Soit :

$$y_k = \frac{3}{2} y_{k-1} \tag{84}$$

L'équation (eq. 84) est équivalente à l'équation (eq. 75) et conduit donc au même résultat. On obtiendra une solution de suite croissante tant que y_k sera un nombre entier pair.

Cela est possible si on commence en y_0 par un nombre pair avec une puissance de 2 suffisante. En choisissant $y_0 = 2^l p$, avec p un nombre impair quelconque, on obtiendra une suite croissante de longueur l.

$$\begin{aligned} y_0 = 2^l p &\Rightarrow n_0 = 2^l p - 1 \\ y_1 = 3 \cdot 2^{l-1} p &\Rightarrow n_1 = 3 \cdot 2^{l-1} p - 1 \\ &\vdots \\ y_{l-1} = 3^{l-1} \cdot 2p &\Rightarrow n_{l-1} = 3^{l-1} \cdot 2p - 1 \end{aligned} \tag{85}$$

Le terme suivant $y_l = 3^l p$ étant impair, le terme n_l n'est pas obtenu à l'aide des relations définies par (eq 85) mais par la relation $3n_{l-1} + 1$, ainsi le terme n_{l-1} est un maximum de la partie croissante de la trajectoire.

Pour que la suite soit plus longue il faudrait augmenter la puissance de 2 dans y_0, mais il est clair que par construction, la suite $3^k 2^{l-k} p$ deviendra nécessairement impaire après l itérations et dans ces conditions le caractère croissant de la suite s'arrêtera.

Pour l'exemple, on donne les valeurs numériques de suites obtenues à l'aide de la méthode exposée, ce qui permet de vérifier que l'on obtiendrait les mêmes suites en adoptant la notation de Collatz.

Exemple avec $p = 1$, $l = 6$:

$y_o = 2^6$		$n_0 = 2^6 - 1 = 63$
$y_1 = 3 \cdot 2^5$		$n_1 = 3 \cdot 2^5 - 1 = 95 = \frac{3 \cdot 63 + 1}{2}$
$y_2 = 3^2 \cdot 2^4$		$n_2 = 3^2 \cdot 2^4 - 1 = 143 = \frac{3 \cdot 95 + 1}{2}$
$y_3 = 3^3 \cdot 2^3$		$n_3 = 3^3 \cdot 2^3 - 1 = 215 = \frac{3 \cdot 143 + 1}{2}$
$y_4 = 3^4 \cdot 2^2$		$n_4 = 3^4 \cdot 2^2 - 1 = 323 = \frac{3 \cdot 215 + 1}{2}$
$y_5 = 3^5 \cdot 2^1$		$n_5 = 3^5 \cdot 2 - 1 = 485 = \frac{3 \cdot 323 + 1}{2}$
$y_6 = 3^6$, impair		fin de la suite croissante : $n_6 = \frac{3 \cdot 485 + 1}{2^4} = 91$

Exemple avec $p = 7$, $l = 6$:

$y_o = 2^6 \cdot 7$		$n_0 = 2^6 \cdot 7 - 1 = 447$
$y_1 = 3 \cdot 2^5 \cdot 7$		$n_1 = 3 \cdot 2^5 \cdot 7 - 1 = 671 = \frac{3 \cdot 447 + 1}{2}$
$y_2 = 3^2 \cdot 2^4 \cdot 7$		$n_2 = 3^2 \cdot 2^4 \cdot 7 - 1 = 1007 = \frac{3 \cdot 671 + 1}{2}$
$y_3 = 3^3 \cdot 2^3 \cdot 7$		$n_3 = 3^3 \cdot 2^3 \cdot 7 - 1 = 1511 = \frac{3 \cdot 1007 + 1}{2}$
$y_4 = 3^4 \cdot 2^2 \cdot 7$		$n_4 = 3^4 \cdot 2^2 \cdot 7 - 1 = 2267 = \frac{3 \cdot 1511 + 1}{2}$
$y_5 = 3^5 \cdot 2^1 \cdot 7$		$n_5 = 3^5 \cdot 2 \cdot 7 - 1 = 3401 = \frac{3 \cdot 2267 + 1}{2}$
$y_6 = 3^6 \cdot 7$, impair		fin de la suite croissante : $n_6 = \frac{3 \cdot 3401 + 1}{2^4} = 2551$

Références

Jeffrey. C. Lagarias. The 3x+1 problem : An annotated bibliography (1963-1999). 2003. eprint : arxiv :math.NT/0309224 Sept. 13, 2003, v11.

Jeffrey. C. Lagarias. The 3x+1 problem : An annotated bibliography, ii (2000-2009). 2012. eprint : arxiv :math.NT/0608208v6 Feb. 12, 2012.

Luc. O. Pochon and A. Favre. La suite de Syracuse, un monde de conjectures. `https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01593181`, 2021.

T. Tao. The collatz conjecture, littlewood-offord theory, and powers of 2 and 3. 2011. `https://terrytao.wordpress.com/2011/08/25/`.