Mersenne et la conjecture de Collatz

Jacques Prado

Mersenne et la conjecture de Collatz

J.Prado

21 août 2021

Résumé

En donnant une interprétation différente de la conjecture de Collatz, aussi dite conjecture de Syracuse ou encore conjecture $3n+1$, il est possible d'aborder différemment le problème. Cette nouvelle formulation permet de remplacer la notion de convergence vers 1 par une convergence vers les diviseurs Q_{2m} des nombres de Mersenne définis par $M_{2m} = 2^{2m} - 1 = 3 \cdot Q_{2m}$. Cette soumission a pour but de présenter la conjecture sous une forme qui ne semble pas avoir été explorée jusqu'à aujourd'hui. Cette approche permet de construire les trajectoires convergentes par inversion de la relation de Collatz et conduit ainsi à un partitionnement complet des nombres impairs ce qui implique la véracité de la conjecture.

1 Introduction

Nous rappelons que la conjecture de Collatz est liée à la suite d'entiers positifs définis par les relations suivantes :

$$f(n) = \begin{cases} 3n+1 & \text{si } n \text{ impair,} \\ \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ pair.} \end{cases} \tag{1}$$

La conjecture de Collatz dit que pour tout n la suite se termine toujours en 1.

Il est possible de reformuler (1) en ne faisant apparaître que les valeurs impaires de n ce qui s'écrit :

$$2^{\gamma} n_k = 3n_{k-1} + 1 \tag{2}$$

Où les n_k sont tous des entiers positifs impairs. On en déduit simplement que si $n_k = 1$, alors :

$$n_{k-1} = \frac{2^{\gamma}-1}{3} \tag{3}$$

L'équation (3) n'a de solution que si $(2^{\gamma} - 1)$ est divisible par 3. En écrivant $3 = \left(2^2 - 1\right)$ on est ramené à la solution simple :

$$n_{k-1} = \frac{2^{2m}-1}{2^2-1} \tag{4}$$

où $\left(2^{2m} - 1\right) = M_{2m}$ est un nombre de Mersenne défini par $M_p = (2^p - 1)$ qui est divisible par 3 quand p est pair.

Lorsque $n_k \neq 1$ alors (3) devient :

$$n_{k-1} = \quad \tfrac{2^{\gamma} n_k - 1}{3} \tag{5}$$

De manière évidente (5) n'a pas de solution si n_k est un multiple de 3. Dans ces conditions, n_k étant impair ne peut prendre que les formes suivantes :

$$\begin{cases} n_k = 3q_k + 1 & \text{où } q_k \text{ est pair} \\ n_k = 3q_k + 2 & \text{où } q_k \text{ est impair} \end{cases} \tag{6}$$

De même, γ peut être pair ($\neq 0$) ou impair : $\begin{cases} \gamma = 2m \\ \gamma = 2m-1 \end{cases}$

Si n_k est un multiple de 3 impair alors $n_k = n_0$ est le début d'une trajectoire dont le terme suivant est de la forme $3q_1 + 1$ ou $3q_1 + 2$.

2 Nouvelle écriture des nombres impairs

À partir de ce qui précède il est possible de définir une écriture équivalente aux nombres impairs égaux à $0, 1,$ ou 2 modulo 3.

2.1 $n_0 = 3q_0$, où q_0 est impair

Dans ce cas la première itération de la suite de Collatz est donnée par :

$$2^{\gamma} n_1 = \quad 3^2 q_0 + 1 \tag{7}$$

2.1.1 Cas $n_1 = 3q_1 + 1$, $\gamma = 2m - 1$ et q_1 pair

Alors :

$$2^{2m-1}\left(3q_1 + 1\right) = 3^2 q_0 + 1 \tag{8}$$

On en déduit :

$$3q_0 = 2^{2m-1} q_1 + \frac{2^{2m-1} - 1}{3} \tag{9}$$

L'équation (9) n'a pas de solution entière puisque le nombre de Mersenne $2^{2m-1} - 1$ n'est pas divisible par 3.

2.1.2 Cas $n_1 = 3q_1 + 1$, $\gamma = 2m$ et q_1 pair

Alors :

$$2^{2m}\left(3q_1 + 1\right) = 3^2 q_0 + 1 \tag{10}$$

On en déduit :

$$3q_0 = 2^{2m} q_1 + \frac{2^{2m} - 1}{3} \tag{11}$$

L'équation (11) a une solution entière puisque le nombre de Mersenne $2^{2m} - 1 = 3Q_{2m}$ est divisible par 3. On en déduit :

$$3q_0 = 2^{2m} q_1 + Q_{2m} \qquad \text{où } q_1 \text{ est pair} \tag{12}$$

2.1.3 Cas $n_1 = 3q_1 + 2$, $\gamma = 2m - 1$ et q_1 impair

Alors :

$$2^{2m-1} (3q_1 + 2) = 3^2 q_0 + 1 \tag{13}$$

On en déduit :

$$3q_0 = 2^{2m-1} q_1 + \frac{2^{2m} - 1}{3} \tag{14}$$

L'équation (14) a une solution entière puisque le nombre de Mersenne $2^{2m} - 1 = 3Q_{2m}$ est divisible par 3. On en déduit :

$$3q_0 = 2^{2m} q_1 + Q_{2m} \qquad \text{où } q_1 \text{ est impair} \tag{15}$$

2.1.4 Cas $n_1 = 3q_1 + 2$, $\gamma = 2m$ et q_1 impair

Alors :

$$2^{2m} (3q_1 + 2) = 3^2 q_0 + 1 \tag{16}$$

On en déduit :

$$3q_0 = 2^{2m} q_1 + \frac{2^{2m+1} - 1}{3} \tag{17}$$

L'équation (17) n'a pas de solution entière puisque le nombre de Mersenne $2^{2m+1} - 1$ n'est pas divisible par 3.

2.2 $n_k = 3q_k + 1$, $\gamma = 2m$ et q_k pair

Dans ces conditions à l'aide de (2) et (6) nous avons :

$$2^{2m} (3q_k + 1) = 3n_{k-1} + 1 \tag{18}$$

Soit :

$$n_{k-1} = \quad \tfrac{2^{2m}3q_k+2^{2m}-1}{3} \tag{19}$$

En utilisant la propriété des nombres de Mersenne :$M_{2m} = 2^{2m} - 1 = 3Q_{2m}$, alors (19) peut s'écrire :

$$n_{k-1} = \quad 2^{2m}q_k + Q_{2m} \tag{20}$$

2.3 $n_k = 3q_k + 1$, $\gamma = 2m - 1$ et q_k pair

Dans ces conditions à l'aide de (2) et (6) nous avons :

$$2^{2m-1}\left(3q_k + 1\right) = 3n_{k-1} + 1 \tag{21}$$

Soit :

$$n_{k-1} = \quad \tfrac{2^{2m-1}3q_k+2^{2m-1}-1}{3} \tag{22}$$

Dans la mesure où $M_{2m-1} = 2^{2m-1} - 1$, n'est pas divisible par 3, il n'y a pas de solution.

2.4 $n_k = 3q_k + 2$, $\gamma = 2m$ et q_k impair

Dans ces conditions à l'aide de (2) et (6) nous avons :

$$2^{2m}\left(3q_k + 2\right) = 3n_{k-1} + 1 \tag{23}$$

Soit :

$$n_{k-1} = \quad \tfrac{2^{2m}3q_k+2^{2m+1}-1}{3} \tag{24}$$

Dans la mesure où $M_{2m+1} = 2^{2m+1} - 1$, n'est pas divisible par 3, il n'y a pas de solution.

2.5 $n_k = 3q_k + 2$, $\gamma = 2m - 1$ q_k impair

Dans ces conditions à l'aide de (2) et (6) nous avons :

$$2^{2m-1}\left(3q_k + 2\right) = 3n_{k-1} + 1 \tag{25}$$

Soit :

$$n_{k-1} = \quad \tfrac{2^{2m-1}3q_k+2^{2m}-1}{3} \tag{26}$$

En utilisant la propriété des nombres de Mersenne $M_{2m} = 2^{2m} - 1 = 3Q_{2m}$, alors (26) peut s'écrire :

$$n_{k-1} = \quad 2^{2m-1}q_k + Q_{2m} \tag{27}$$

En conclusion si dans la suite des valeurs n_k toutes impaires :

— $n_0 = 3q_0$: alors n_0 est le début d'une trajectoire dont le terme suivant est de la forme $3q_1 + 1$ ou de la forme $3q_1 + 2$ selon les équations (12) ou (15).
— $n_k = 3q_k + 1$: alors n_{k-1} est donné par (20) et n_k étant impair, q_k est pair et $\gamma = 2m$.
— $n_k = 3q_k + 2$: alors n_{k-1} est donné par (27) et n_k étant impair, q_k est impair et $\gamma = 2m-1$.

3 Trajectoires de Collatz

3.1 Construction des trajectoires convergentes

Ce qui précède permet de définir une équivalence entre deux écritures des nombres impairs et d'effectuer la liaison par l'intermédiaire de l'expression $3n + 1$. Les résultats sont résumés dans le tableau ci-dessous où $Q_{2m} = (2^{2m} - 1)/3$:

$f(n) = 3n + 1$	$\Leftrightarrow$	$n \in \{3q, 3q+1, 3q+2\}$
$2^{2m-1}(3q_k + 2)$	$=$	$3(2^{2m-1}q_k + Q_{2m}) + 1$ si $n = 3q + 1$ou $3q + 2$
$2^{2m}(3q_k + 1)$	$=$	$3(2^{2m}q_k + Q_{2m}) + 1$ si $n = 3q + 1$ou $3q + 2$
$2^{2m-1}(3q_k + 2)$	$=$	$3(2^{2m-1}q_k + Q_{2m}) + 1$si $n = 3q \neq Q_{2m}$
$2^{2m}(3q_k + 1)$	$=$	$3(2^{2m}q_k + Q_{2m}) + 1$si $n = 3q \neq Q_{2m}$
$2^{2m}(1)$	$=$	$3Q_{2m} + 1$

Cette correspondance des écritures est valable pour tout nombre impair. Elle définit une inversion de la relation des suites de Collatz et permet donc de construire par le calcul l'ensemble des trajectoires convergentes en partant de l'un des points de convergence possible représentés par les Q_{2m}.

Nous donnons quelques exemples de construction des termes impairs prédecesseurs des valeurs Q_{2m} vrais pour $m = [1, 2, \cdots, \infty[$:

m	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
M_{2m}	3	15	63	255	1023	4095	$\cdots$
Q_{2m}	1	5	*21*	85	341	*1365*	$\cdots$

Les valeurs de Q_{2m}en italique correspondent à des trajectoires à un seul terme puisqu'elles sont multiples de 3. La première valeur $Q_2 = 1$ correspond au cycle 4 :2 :1 puisque l'on a :

$$2^2 \cdot 1 = 3 \cdot 1 + 1 \tag{28}$$

Prenons les prédécesseurs de $Q_4 = 5$, comme 5 est de la forme $3q + 2 = 3 \cdot 1 + 2$, alors les prédécesseurs immédiats ont la forme donnée par la relation (27) avec $q_k = 1$:

$$n_{k-1} = \quad 2^{2m-1} \cdot 1 + Q_{2m} \tag{29}$$

Soit :

m	1	2	3	$\cdots$
préd(5)	$2 \cdot 1 + 1 =$*3*	$2^3 \cdot 1 + 5 = 13$	$2^5 \cdot 1 + 21 = 53$	$\cdots$

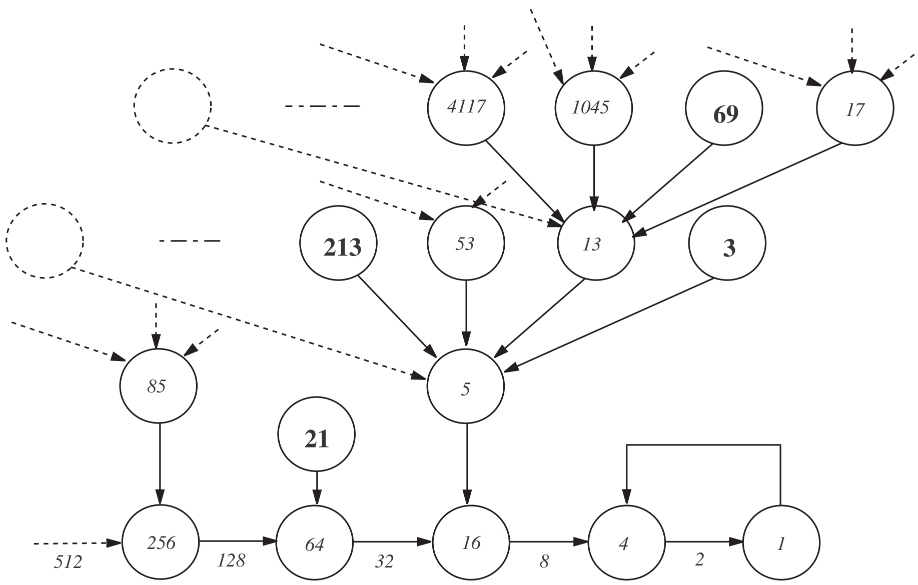

FIG. 1: Trajectoires

Il y a une infinité de prédécesseurs et pour chaque prédécesseur qui n'est pas multiple de 3 on peut recommencer la procédure. Ainsi avec la valeur 13 de la forme $3q + 1 = 3 \cdot 4 + 1$, on déduit ses prédécesseurs qui prennent les formes données par la relation (20) avec $q_k = 4$:

Soit :

m	1	2	3	$\cdots$
préd(13)	$2^2 \cdot 4 + 1 = 17$	$2^4 \cdot 4 + 5 =$*69*	$2^8 \cdot 4 + 21 = 1045$	$\cdots$

On construit progressivement toutes les valeurs qui vont former des trajectoires finissant en 5 c'est à dire convergeront vers 1.

Dans l'exemple qui précède, pour construire la trajectoire qui commence en 3, comme 5 succède à 3 et que $5 = Q_4$, on obtient : $3 \rightarrow 5 \rightarrow 1$. Ce qui est conforme à la suite de Collatz.

De même en partant de 17 prédécesseur de 13,on obtient : $17 \rightarrow 13 \rightarrow 5 \rightarrow 1$. Comme 17 n'est pas multiple de 3, on aurait pu remonter jusqu'à 9, ce qui aurait donné la trajectoire : $9 \rightarrow 7 \rightarrow 11 \rightarrow 17 \rightarrow 13 \rightarrow 5 \rightarrow 1$.

Pour prendre un exemple plus complexe, en partant de 5 on aurait pu remonter par 53 et l'un des chemins tracé serait remonté jusqu'à 27 dont on sait qu'il génère une trajectoire de longueur 111 , nombres pairs compris, en suivant un chemin chaotique. Un autre chemin suivi depuis 5 et 53 se termine en 165. Il se trouve que la trajectoire partant de 27 et celle partant de 165 sont exactement de même longueur, les deux se rejoignant au nombre 31 et suivent donc ensuite le même trajet jusqu'à 5.

Si il est difficile de prédire le comportement en partant d'un nombre impair quelconque, la procédure proposée de construction des trajectoires permet de conclure que ce nombre choisi au hasard appartient nécessairement à une trajectoire qui finira en un nombre Q_{2m} donc en 1.

La figure (Fig. 1) illustre la construction, les nombres en gras n'ont pas de prédécesseurs.

4 Structures associées aux trajectoires

4.1 Quelques remarques

De ce qui a été vu précédemment on peut déduire de manière simple que tout le processus de l'algorithme de Collatz tient dans les propriétés des nombres de Mersenne $M_{2m} = 2^{2m} - 1$, pour lesquels on a vu que :

$$2^{2m} = 3 \cdot Q_{2m} + 1 \tag{30}$$

Cette relation permet de définir les derniers termes impairs Q_{2m} des trajectoires convergentes, mais à partir de cette relation on peut déterminer l'ensemble des nombres impairs qui peuvent être mis en relation de manière équivalente à l'algorithme $3n + 1$ de Collatz.

Nous disposons pour cela de deux interprétations équivalentes de l'algorithmes de Collatz. Nous avons vu que dans la relation $3n+1$, la valeur de n pouvait être un nombre impair quelconque caractérisé par le fait d'être congru à $0, 1$ ou 2 modulo 3. Par contre le nombre pair qui en découle ne peut prendre que des valeurs de la forme $2^{2m}(3q + 1)$ ou $2^{2m-1}(3q + 2)$. Et donc la relation : $n_k = 3n_{k-1} + 1$ se traduit par la première équivalence suivante :

$$\left\{ \begin{array}{c} 2^{2m}\,(3q_k + 1) \\ \\ 2^{2m-1}\,(3q_k + 2) \end{array} \right\} \equiv 3 \cdot \left\{ \begin{array}{c} 3q_{k-1} \\ (3q_{k-1} + 1) \\ (3q_{k-1} + 2) \end{array} \right\} + 1 \tag{31}$$

Dans (31) les valeurs de q_k et q_{k-1} ont la bonne parité pour que toutes les valeurs considérées soient impaires.

De même les relations (12), (15), (20) et (27) permettent de donner une seconde équivalence à l'algorithme de Collatz :

$$\begin{array}{r} 2^{2m}(3 \cdot q_k + 1) = 3(2^{2m} \cdot q_k + Q_{2m}) + 1 \\ 2^{2m-1}(3 \cdot q_k + 2) = 3(2^{2m-1} \cdot q_k + Q_{2m}) + 1 \end{array} \tag{32}$$

Les relations (31) et (32), qui sont valables pour tous les nombres impairs, permettent de déduire une notation particulière de ces nombres puisqu'on peut vérifier simplement que :

$$\left\{ \begin{array}{c} 3q_{k-1} \\ 3q_{k-1} + 1 \end{array} \right\} \equiv \; 2^{2m} \cdot q_k + Q_{2m} \tag{33}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} 3q_{k-1} \\ 3q_{k-1} + 2 \end{array} \right\} \equiv \; 2^{2m-1} \cdot q_k + Q_{2m} \tag{34}$$

Les équivalences définies par (33) et (34) indiquent que quelquesoit le choix d'un nombre impair non multiple de 3, il possède une infinité de prédécesseurs calculables en faisant varier m de 1 à l'infini. Si un prédécesseur est multiple de 3, la trajectoire inverse correspondante s'arrête et ce nombre représente le début d'une des trajectoires passant par le nombre choisi initialement. Ainsi tout nombre impair, non multiple de 3, peut être considéré comme le point de convergence de toutes les trajectoires qui y conduisent.

Si maintenant on calcule le successeur de ce nombre à l'aide de la relation $3n + 1$, alors ce successeur, nécessairement non multiple de 3, devient le nouveau point de convergence de toutes les trajectoires calculables qui y conduisent.

En effet dans tous les cas, sauf un, les prédécesseurs d'un nombre impair lui sont supérieurs en valeur. L'exception est donnée par :

$$2(3q_k + 2) = 3 \cdot (2q_k + 1) + 1 \tag{35}$$

La relation (35) représente le seul cas dans lequel le successeur $(3q_k + 2)$ est supérieur au prédécesseur $(2q_k + 1)$.

Si il existe une trajectoire divergente il devient difficile de l'identifier car la relation (30) est valide lorsque $m \to \infty$ et montre que des trajectoires convergentes peuvent venir de l'infini.

On peut aussi constater, en développant les relations données par (32), qu'à chaque itération il y a implicitement une relation faisant apparaître un nombre de Mersenne et que l'algorithme ainsi interprété ressemble à une recherche par essai-erreur d'un point de convergence. Ici on cherche la bonne valeur pour le terme Q_{2m}.

$$\begin{aligned} 2^{2m} \cdot 3 \cdot q_k + \left[2^{2m}\right] &= 3 \cdot 2^{2m} \cdot q_k + [3 \cdot Q_{2m} + 1] \\ 2^{2m-1} \cdot 3 \cdot q_k + \left[2^{2m}\right] &= 3 \cdot 2^{2m-1} \cdot q_k + [3 \cdot Q_{2m} + 1] \end{aligned} \tag{36}$$

4.2 Relations entre prédécesseurs

4.2.1 Relation entre deux prédécesseurs d'un même nombre

Commençons par le cas où dans la relation $2^\gamma n_k = 3n_{k-1} + 1$, on a $n_k = 3q_k + 1$. Dans ces conditions, on a (cf 33) :

$$2^{2m}(3 \cdot q_k + 1) = 3(2^{2m} \cdot q_k + Q_{2m}) + 1 \tag{37}$$

Le prédécesseur dépendant de m, utilisons le changement de notation :

$$2^{2m} n_k = 3n_{k-1,m} + 1 \tag{38}$$

Les $n_{k-1,m}$ changent de valeur quand m change de valeur, mais ils ont tous le même successeur n_k. Remplaçons m par $m + 1$ pour définir la relation entre deux prédécesseurs :

$$2^{2m+2} n_k = 3(2^{2m+2} \cdot q_k + Q_{2m+2}) + 1 \tag{39}$$

Or (cf 55) : $Q_{2m+2} = 2^2 Q_{2m} + 1$, on en déduit :

$$2^{2m+2} q_k + Q_{2m+2} = 2^2 \left(2^{2m} q_k + Q_{2m}\right) + 1 \tag{40}$$

Soit :

$$n_{k-1,m+1} = 2^2 n_{k-1,m} + 1 \tag{41}$$

On obtient le même résultat lorsqu'on raisonne avec n_k de la forme $3q_k + 2$, la liste des prédécesseurs d'un nombre impair suit la même règle de construction que la liste des diviseurs Q_{2m} des nombres de Mersenne. De plus, il est facile de voire que la différence entre ces prédécesseurs satisfait à la suite de Collatz :

$$n_{k-1,m+1} - n_{k-1,m} = 3n_{k-1,m} + 1 \tag{42}$$

4.2.2 Alternance des prédécesseurs

Supposons qu'un prédécesseur soit un multiple de 3, soit $n_{k-1,m} = 3 \cdot N$, à l'aide de la relation (41) :

$$n_{k-1,m+1} = 2^2 3 \cdot N + 1 \tag{43}$$

$$n_{k-1,m+2} = 2^4 3 \cdot N + 5 \tag{44}$$

$$n_{k-1,m+3} = 2^6 3 \cdot N + 21 = 3\left(2^6 N + 7\right) \tag{45}$$

On en déduit que si l'un des prédécesseurs est multiple de 3 alors tous les 3 prédécesseurs on aura un multiple de 3.

On pourrait montrer de la même manière que les prédécesseurs de la forme $3q + 1$ et ceux de la forme $3q + 2$ se répètent tous les trois termes. On en déduit ainsi que la liste des prédécesseurs d'un nombre impair congru à 1 ou 2 modulo 3 est constituée d'une suite de nombres impairs congrus à 0, 1 ou 2 modulo 3. Par construction, ces listes ne contiennent jamais de nombre commun et sont le reflet de la liste des nombres Q_{2m} appelés ici diviseurs de Mersenne.

4.2.3 Interprétation graphique des trajectoires

Des relatons précédentes on peut déduire une structure associée à chaque nombre impair congru à 1 ou 2 modulo 3. La figure (Fig. 2) représente la structure montrant comment les prédécesseurs sont déduits d'un nombre impair $n_k = 3q_k + 1$ et la figure (Fig. 3) celle associée aux nombres impairs $n_k = 3q_k + 2$.

Ces structures peuvent être appliquées à tous les $n_{k-1,m}$ qui ne sont pas multiples de 3, on obtient ainsi un maillage particulier de l'ensemble des nombres impairs. On peut remonter vers l'infini à chaque étape puisque, (cf 45), on ne peut pas avoir une liste de prédécesseurs qui soient tous multiples de 3 . Par contre dans le sens de la suite de Collatz on ne peut pas aller plus loin que la structure donnée par la figure (Fig. 4).

4.2.4 Tableau de partitionnement des nombres impairs

Les graphiques précédents et les propriétés des prédécesseurs des nombres congrus à 1 ou 2 modulo 3 permettent d'obtenir deux tableaux faisant apparaître de manière ordonnée et indéxée par les entiers naturels un partitionnement complet des nombres impairs regroupés selon leur propriété de prédécesseur d'un nombre impair donné de la forme $3q + 1$ (q est pair), c'est le tableau supérieur de la figure (Fig. 5) ou $3q + 2$ (q est impair), c'est le tableau inférieur de cette même figure.

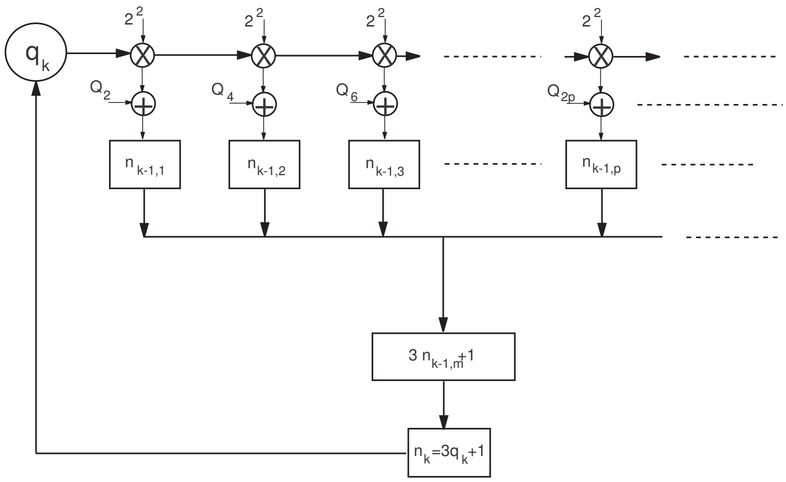

FIG. 2: Structure associée à $3q_k + 1$

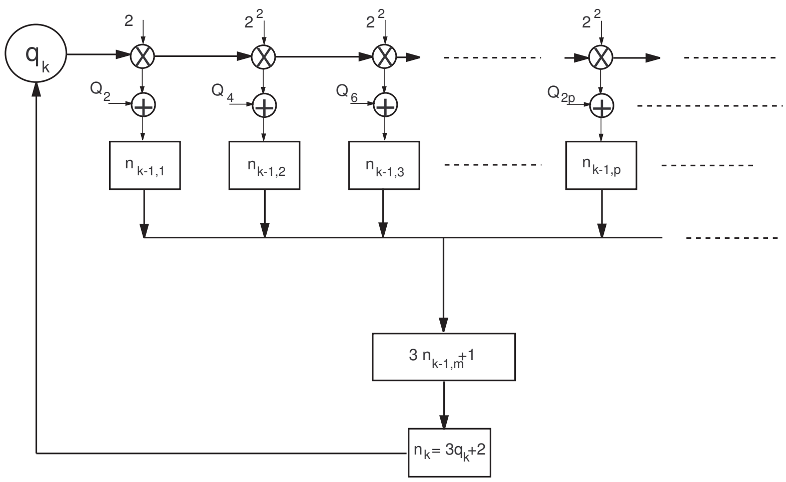

FIG. 3: Structure associée à $3q_k + 2$

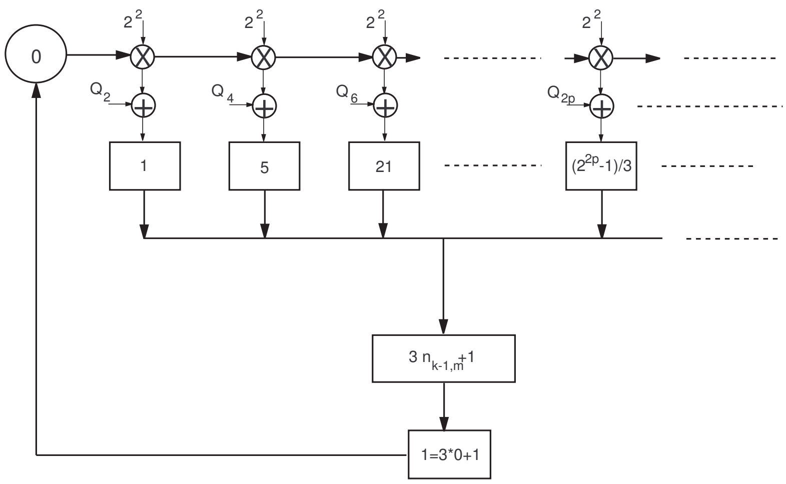

FIG. 4: Structure finale

Ces deux tableaux permettent de parcourir les trajectoires de Collatz dans le sens direct selon l'algorithme $3n+1$ ou dans le sens inverse pour remonter à partir d'un point de convergence Q_{2m} situé dans la colonne $q = 0$ du tableau supérieur. Les deux tableaux étant de dimensions infinies, on donnera un exemple simple que l'on peut suivre sur la figure (Fig. 5) pour une trajectoire de longueur finie.

Choisissons le nombre 9 de la colonne $q = 2$ du tableau supérieur. Ce nombre a pour successeur 7 qui est la tête de colonne. Ce nombre 7 se retrouve dans la colonne $q = 3$ du tableau inférieur et son successeur est donc 11 qui est lui-même dans la colonne $q = 5$ et a donc pour successeur 17 dont le successeur est 13 (colonne $q = 4$) et enfin 5 colonne $q = 1$ qui renvoie à 5 de la colonne $q = 0$ et donc à 1. Dans le sens de l'algorithme de Collatz il n'y a qu'une trajectoire possible, par contre dans le sens inverse il y a un choix infini de trajectoires.

En partant de 5 de la colonne $q = 0$, on est renvoyé à 5 tête de la colonne $q = 1$, il y a alors un choix infini de prédécesseur, dont le 13 de la trajectoire précédente. Tous les multiples de 3 présents dans cette colonne représentent des débuts de trajectoires de même longueur en termes de nombres impairs, les autres termes renvoient à des prédécesseurs possibles qui apparaissent en nombre infini.

Compte-tenu du maillage des nombres impairs représenté par les structures des trajectoires convergentes données par les figures (2), (3), (4) et le partitionnement des nombres impairs qui en découle, représenté par les tableaux de la figure (5) cela ne laisse pas de place à l'existence de trajectoires divergentes ni à celui de cycles différents du cycle 1 :1 en terme de nombres impairs.

D'après ce qui précède, on peut en conclure que la conjecture de Collatz est vraie.

5 Quelques résultats

5.1 Trajectoires montantes

Pour qu'une trajectoire soit montante, il faut que dans la récurrence le successeur soit supérieur au prédécesseur. Ce qui réduit les relations à :

q	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	⋯
3q+1	1	7	13	19	25	31	37	43	49	55	61	⋯
(2^2)q + Q2	Q2=1	9	17	25	33	41	49	57	65	73	81	⋯
(2^4)q + Q4	Q4=5	37	69	101	133	165	197	229	261	293	325	⋯
(2^6q) + Q6	Q6=21	149	277	405	533	661	789	917	1045	1173	1301	⋯
(2^8)q + Q8	Q8=85	597	1109	1621	2133	2645	3157	3669	4181	4693	5205	⋯
(2^10)q + Q10	Q10=341	2389	4437	6485	8533	10581	12629	14677	16725	18773	20821	⋯
(2^12)q + Q12	Q12=1365	9557	17749	25941	34133	42325	50517	58709	66901	75093	83285	⋯
⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯

q	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	⋯
3q+2	5	11	17	23	29	35	41	47	53	59	65	⋯
(2^1)q + Q2	3	7	11	15	19	23	27	31	35	39	43	⋯
(2^3)q + Q4	13	29	45	61	77	93	109	125	141	157	173	⋯
(2^5)q + Q6	53	117	181	245	309	373	437	501	565	629	693	⋯
(2^7)q + Q8	213	469	725	981	1237	1493	1749	2005	2261	2517	2773	⋯
(2^9)q + Q10	853	1877	2901	3925	4949	5973	6997	8021	9045	10069	11093	⋯
(2^11)q + Q12	3413	7509	11605	15701	19797	23893	27989	32085	36181	40277	44373	⋯
⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯

Fig. 5: Tableau de partitionnement des nombres impairs

$$2n_k = 3n_{k-1} + 1 \tag{46}$$

Si l'on tient compte des relations entre prédécesseurs et successeurs cela ne peut se produire qu'avec une relation de type (cf (35)) :

$$2^{2m-1}(3q_k + 2) = 3(2^{2m-1}q_k + Q_{2m}) + 1 \tag{47}$$

avec $m = 1$.

On peut vérifier que des trajectoires montantes sont obtenues en partant des nombres de Mersenne $M_{2m} = 2^{2m} - 1$ qui, en tant que multiples de 3, sont des débuts de trajectoires. Les trajectoires ainsi obtenues, dont on sait qu'elles se termineront en 1, commencent toutes par monter pendant $2m$ valeurs. Cela se vérifie simplement :

$n_0 = 2^{2m} - 1$		
$2n_1 = 3(2^{2m} - 1) + 1$	$= 2(3 \cdot 2^{2m-1} - 1)$	$n_1 = (3 \cdot 2^{2m-1} - 1)$
$2n_2 = 3(3 \cdot 2^{2m-1} - 1) + 1$	$= 2(3^2 \cdot 2^{2m-2} - 1)$	$n_2 = (3^2 \cdot 2^{2m-2} - 1)$
$\vdots$	$\vdots$	
$2n_k = 3(3^{k-1} \cdot 2^{2m-k+1} - 1) + 1$	$= 2(3^k \cdot 2^{2m-k} - 1)$	$n_k = (3^k \cdot 2^{2m-k} - 1)$
$\vdots$	$\vdots$	
$2n_{2m-1} = 3(3^{2m-2} \cdot 2^2 - 1) + 1$	$= 2(3^{2m-1} \cdot 2 - 1)$	$n_{2m-1} = (3^{2m-1} \cdot 2 - 1)$
$2l_{2m} = 3(3^{2m-1} \cdot 2 - 1) + 1$	$= 2(3^{2m} - 1)$	$l_{2m} = (3^{2m} - 1)$

Dans la dernière relation, le terme $l_{2m} = 3^{2m} - 1$ n'est pas un terme de la suite de Collatz des nombres impairs (2) car il est pair. Par contre ce terme est divisible au moins par $3^2 - 1 = 2^3$. Il est assez curieux de constater que, à l'aide de la suite de Collatz, les nombres de Mersenne $2^{2m} - 1$ sont situés à $2m$ itérations des nombres $3^{2m} - 1$. Le terme n_{2m} cherché sera donc obtenu en divisant l_{2m} par au moins 2^4 donc inférieur à n_{2m-1}.

De même il existe une relation simple entre deux termes consécutifs d'une suite croissante. En effet deux termes consécutifs sont de la forme $n_k = 3q_k + 2$, on a donc

$$2(3q_k + 2) = 3(3q_{k-1} + 2) + 1 \tag{48}$$

Mais d'après les relations entre prédécesseur et successeur, cela peut aussi s'écrire :

$$2(3q_k + 2) = 3(2q_k + 1) + 1 \tag{49}$$

Il s'ensuit que :

$$2q_k + 1 = 3q_{k-1} + 2 \tag{50}$$

soit :

$$2q_k = 3q_{k-1} + 1 \tag{51}$$

Les nombres q_k de la relation (47) forment aussi une suite de Collatz.

5.2 Trajectoires de longueur 1

On appelle trajectoire de longueur 1 une trajectoire qui commence et se termine en un diviseur de $2^{2m}-1$ qui est lui-même multiple de 3. Le premier exemple est donné par $M_6 = 2^6-1 = 3\cdot Q_6$ et $Q_6 = 21 = 3\cdot 7$. On vérifie facilement que si on démarre une suite de Collatz en 21, on obtient immédiatement :

$$2^6 \cdot 1 = 3\cdot 21 + 1 \tag{52}$$

La question est de savoir si le nombre de trajectoires de longueur 1 est fini ou non. Pour obtenir une réponse on peut utiliser une récurrence élémentaire sur les diviseurs de M_{2m}.

En effet :

$$Q_{2m} = \frac{2^{2m}-1}{3} = \sum_{k=0}^{m-1} 2^{2k} \tag{53}$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} 2^{2k} = 1 + 2^2 \sum_{k=0}^{m-2} 2^{2k} \tag{54}$$

On déduit de ce qui précède que :

$$Q_{2m} = 2^2 Q_{2m-2} + 1 \tag{55}$$

En itérant la relation (55) on obtient :

$Q_{2m} = 2^2Q_{2m-2}+1$		
$Q_{2m+2} = 2^2Q_{2m}+1$	$= 2^4Q_{2m-2}+5$	
$Q_{2m+4} = 2^2Q_{2m+2}+1$	$= 2^6Q_{2m-2}+21$	

Ainsi, si Q_{2m-2} est multiple de 3 alors, après 3 itérations, Q_{2m+4} est aussi multiple de 3. En partant de $Q_6 = 3\cdot 7$ on obtient tous les diviseurs multiples de 3 que sont les Q_{6m}, $m = [1, 2, \cdots, \infty[$. Le nombre de trajectoires à un seul élément impair différent de 1 est donc infini, et les débuts de ces trajectoires sont les nombres Q_6, Q_{12}, $Q_{18}, \cdots$, c'est à dire 21, 1365, 87381, $\cdots$. On obtient pour les Q_{2m} les mêmes propriétés que pour les prédécesseurs (cf 45).

6 Conclusion

— De ce qui précède on peut conclure que toute trajectoire de nombres impairs au sens de la suite de Collatz commence par un multiple de 3, qui peut prendre une valeur aussi grande que l'on veut, et se termine sur un diviseur des nombres de Mersenne de puissance paire c'est à dire indirectement par 1. Ce qui se traduit par $2^{2m}\cdot 1 = 3\cdot Q_{2m} + 1$.

— Même si le multiple de 3 initial est très grand, la trajectoire associée peut être très courte si ce multiple de 3 est lui même un diviseur d'un nombre de Mersenne. Autrement dit les nombres de Mersenne multiple de 9 sont associés à des trajectoires à 1 élément impair différent de 1, le premier représentant est $Q_6 = 21$ qui donne la trajectoire $21 \to 1$. Il y en a une infinité défini par Q_{6m}.

— La valeur initiale ne présageant en rien de la longueur de la trajectoire, il reste à explorer les caractéristiques de trajectoires particulières si elles existent ?
— La nouvelle notation utilisée pour coder un nombre impair peut-elle servir dans d'autres domaines ?

De nombreuses questions peuvent encore se poser, mais la difficulté d'exprimer la convergence vers 1, qui est liée au désordre apparent généré par l'expression de la suite donnée par les relations (1) trouve une explication dans le fait que l'on puisse écrire un nombre impair $(3q, 3q{+}1$ou $3q + 2)$ de manière unique sous la forme $2^{\lambda}q + Q_{2m}$ où λ dépend de la parité de q.

On trouvera dans les références suivantes, [Lagarias, 2003], [Lagarias, 2012], [Pochon and Favre, 2021] et [Tao, 2011], un état suffisamment exhaustif des travaux concernant les études sur la suite de Collatz (Syracuse).

Références

Jeffrey C. Lagarias. The 3x+1 problem : An annotated bibliography (1963-1999). 2003. eprint : arxiv :math.NT/0309224 Sept. 13, 2003, v11.

Jeffrey C. Lagarias. The 3x+1 problem : An annotated bibliography, ii (2000-2009). 2012. eprint : arxiv :math.NT/0608208v6 Feb. 12, 2012.

Luc O. Pochon and A. Favre. La suite de Syracuse, un monde de conjectures. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01593181, 2021.

T. Tao. The collatz conjecture, littlewood-offord theory, and powers of 2 and 3. 2011. https://terrytao.wordpress.com/2011/08/25/.