Mersenne et la conjecture de Collatz

Jacques Prado

Mersenne et la conjecture de Collatz

J.Prado

12/juin/2021

Résumé

En donnant une interprétation différente de la conjecture de Collatz, aussi dite conjecture de Syracuse ou encore conjecture $3n+1$, il est possible de montrer assez simplement qu'il n'existe pas de cycles de longueur $p \neq 1$. De plus, cette nouvelle formulation permet aussi de modifier la notion de convergence vers 1 par une convergence vers les diviseurs, notés Q_{2m}des nombres de Mersenne de la forme $M_{2m} = 2^{2m} - 1 = 3 \cdot Q_{2m}$. Cette soumission a pour but de présenter la conjecture sous une forme qui ne semble pas avoir été explorée jusqu'à aujourd'hui et qui, semble-t-il, permettrait de montrer que la conjecture s'avére exacte, en montrant qu'il existe une bijection entre la partition des nombres impairs modulo 3 et la partition des nombres impairs associés aux trajectoires se terminant en Q_{2m}.

1 Introduction

Nous rappelons que la conjecture de Collatz est liée à la suite d'entiers positifs définis par les relations suivantes :

$$f(n) = \begin{cases} 3n+1 & \text{si } n \text{ impair,} \\ \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ pair.} \end{cases} \tag{1}$$

La conjecture de Collatz dit que pour tout n la suite se termine toujours en 1.

Il est possible de reformuler (1) en ne faisant apparaître que les valeurs impaires de n ce qui s'écrit :

$$2^{\gamma_k} n_k = 3n_{k-1} + 1 \tag{2}$$

Où les n_k sont tous des entiers positifs impairs. On en déduit simplement que si $n_k = 1$, alors :

$$n_{k-1} = \frac{2^{\gamma_k} - 1}{3} \tag{3}$$

L'équation (3) n'a de solution que si $(2^{\gamma_k} - 1)$ est divisible par 3. En écrivant $3 = \left(2^2 - 1\right)$ on est ramené à la solution simple :

$$n_{k-1} = \frac{2^{2m} - 1}{2^2 - 1} \tag{4}$$

où $\left(2^{2m} - 1\right) = M_{2m}$ est un nombre de Mersenne défini par $M_p = (2^p - 1)$ qui est divisible par 3 quand p est pair.

Lorsque $n_k \neq 1$ alors (3) devient :

$$n_{k-1} = \tfrac{2^{\gamma_k} n_k - 1}{3} \tag{5}$$

De manière évidente (5) n'a pas de solution si n_k est un multiple de 3. Dans ces conditions, n_k étant impair ne peut prendre que les formes suivantes :

$$\begin{cases} n_k = 3q_k + 1 & \text{où } q_k \text{ est pair} \\ n_k = 3q_k + 2 & \text{où } q_k \text{ est impair} \end{cases} \tag{6}$$

De même, γ_k peut être pair ($\neq 0$) ou impair : $\begin{cases} \gamma_k = 2m_k \\ \gamma_k = 2m_k - 1 \end{cases}$

Si n_k est un multiple de 3 impair alors $n_k = n_0$ est le début d'une trajectoire dont le terme suivant est de la forme $3q_1 + 1$ ou $3q_1 + 2$.

2 Autre écriture des nombres impairs

À partir de ce qui précède il est possible de définir une écriture équivalente aux nombres impairs égaux à $0, 1$, ou 2 modulo 3.

2.1 $n_0 = 3q_0$, où q_0 est impair

Dans ce cas la première itération de la suite de Collatz est donnée par :

$$2^{\gamma_1} n_1 = 3^2 q_0 + 1 \tag{7}$$

2.1.1 Cas $n_1 = 3q_1 + 1$, $\gamma_1 = 2m_1 - 1$ et q_1 pair

Alors :

$$2^{2m_1 - 1} (3q_1 + 1) = 3^2 q_0 + 1 \tag{8}$$

On en déduit :

$$3q_0 = 2^{2m_1 - 1} q_1 + \frac{2^{2m_1 - 1} - 1}{3} \tag{9}$$

L'équation (9) n'a pas de solution entière puisque le nombre de Mersenne $2^{2m_1 - 1} - 1$ n'est pas divisible par 3.

2.1.2 Cas $n_1 = 3q_1 + 1$, $\gamma_1 = 2m_1$ et q_1 pair

Alors :

$$2^{2m_1} (3q_1 + 1) = 3^2 q_0 + 1 \tag{10}$$

On en déduit :

$$3q_0 = 2^{2m_1} q_1 + \frac{2^{2m_1} - 1}{3} \tag{11}$$

L'équation (11) a une solution entière puisque le nombre de Mersenne $2^{2m_1} - 1 = 3Q_{2m_1}$ est divisible par 3. On en déduit :

$$3q_0 = 2^{2m_1} q_1 + Q_{2m_1} \qquad \text{où } q_1 \text{ est pair} \tag{12}$$

2.1.3 Cas $n_1 = 3q_1 + 2$, $\gamma_1 = 2m_1 - 1$ et q_1 impair

Alors :

$$2^{2m_1 - 1} (3q_1 + 2) = 3^2 q_0 + 1 \tag{13}$$

On en déduit :

$$3q_0 = 2^{2m_1 - 1} q_1 + \frac{2^{2m_1} - 1}{3} \tag{14}$$

L'équation (14) a une solution entière puisque le nombre de Mersenne $2^{2m_1} - 1 = 3Q_{2m_1}$ est divisible par 3. On en déduit :

$$3q_0 = 2^{2m_1} q_1 + Q_{2m_1} \qquad \text{où } q_1 \text{ est impair} \tag{15}$$

2.1.4 Cas $n_1 = 3q_1 + 2$, $\gamma_1 = 2m_1$et q_1 impair

Alors :

$$2^{2m_1} (3q_1 + 2) = 3^2 q_0 + 1 \tag{16}$$

On en déduit :

$$3q_0 = 2^{2m_1} q_1 + \frac{2^{2m_1 + 1} - 1}{3} \tag{17}$$

L'équation (17) n'a pas de solution entière puisque le nombre de Mersenne $2^{2m_1+1} - 1$ n'est pas divisible par 3.

2.2 $n_k = 3q_k + 1$, $\gamma_k = 2m_k$ et q_k pair

Dans ces conditions à l'aide de (2) et (6) nous avons :

$$2^{2m_k} (3q_k + 1) = 3n_{k-1} + 1 \tag{18}$$

Soit :

$$n_{k-1} = \quad \tfrac{2^{2m_k}3q_k+2^{2m_k}-1}{3} \tag{19}$$

En utilisant la propriété des nombres de Mersenne :$M_{2m_k} = 2^{2m_k} - 1 = 3Q_{2m_k}$, alors (19) peut s'écrire :

$$n_{k-1} = \quad 2^{2m_k}q_k + Q_{2m_k} \tag{20}$$

2.3 $n_k = 3q_k + 1$, $\gamma_k = 2m_k - 1$ et q_k pair

Dans ces conditions à l'aide de (2) et (6) nous avons :

$$2^{2m_k-1}(3q_k+1) = 3n_{k-1}+1 \tag{21}$$

Soit :

$$n_{k-1} = \quad \tfrac{2^{2m_k-1}3q_k+2^{2m_k-1}-1}{3} \tag{22}$$

Dans la mesure où $M_{2m_k-1} = 2^{2m_k-1} - 1$, n'est pas divisible par 3, il n'y a pas de solution.

2.4 $n_k = 3q_k + 2$, $\gamma_k = 2m_k$ et q_k impair

Dans ces conditions à l'aide de (2) et (6) nous avons :

$$2^{2m_k}(3q_k+2) = 3n_{k-1}+1 \tag{23}$$

Soit :

$$n_{k-1} = \quad \tfrac{2^{2m_k}3q_k+2^{2m_k+1}-1}{3} \tag{24}$$

Dans la mesure où $M_{2m_k+1} = 2^{2m_k+1} - 1$, n'est pas divisible par 3, il n'y a pas de solution.

2.5 $n_k = 3q_k + 2$, $\gamma_k = 2m_k - 1$ q_k impair

Dans ces conditions à l'aide de (2) et (6) nous avons :

$$2^{2m_k-1}(3q_k+2) = 3n_{k-1}+1 \tag{25}$$

Soit :

$$n_{k-1} = \quad \tfrac{2^{2m_k-1}3q_k+2^{2m_k}-1}{3} \tag{26}$$

En utilisant la propriété des nombres de Mersenne $M_{2m_k} = 2^{2m_k} - 1 = 3Q_{2m_k}$, alors (26) peut s'écrire :

$$n_{k-1} = \quad 2^{2m_k-1}q_k + Q_{2m_k} \tag{27}$$

En conclusion si dans la suite des valeurs n_k toutes impaires :

— $n_0 = 3q_0$: alors n_0 est le début d'une trajectoire dont le terme suivant est de la forme $3q_1 + 1$ ou de la forme $3q_1 + 2$ selon les équations (12) ou (15).
— $n_k = 3q_k + 1$: alors n_{k-1} est donné par (20) et n_k étant impair, q_k est pair et $\gamma_k = 2m_k$.
— $n_k = 3q_k + 2$: alors n_{k-1} est donné par (27) et n_k étant impair, q_k est impair et $\gamma_k = 2m_k - 1$.

3 Trajectoires de Collatz

3.1 Construction des trajectoires convergentes

Ce qui précède permet de définir une équivalence entre les deux écritures des nombres impairs et de les relier par l'intermédiaire de la suite de Collatz. Les résultats sont résumés dans le tableau ci-dessous où $Q_{2m} = (2^{2m} - 1)/3$:

$f(n) = 3n + 1$	$\Leftrightarrow$	$n \in \{3q, 3q + 1, 3q + 2\}$
$2^{2m-1}(3q_k + 2)$	$=$	$3(2^{2m-1}q_k + Q_{2m}) + 1$ si $n = 3q + 1$ou $3q + 2$
$2^{2m}(3q_k + 1)$	$=$	$3(2^{2m}q_k + Q_{2m}) + 1$ si $n = 3q + 1$ou $3q + 2$
$2^{2m-1}(3q_k + 2)$	$=$	$3(2^{2m-1}q_k + Q_{2m}) + 1$si $n = 3q \neq Q_{2m}$
$2^{2m}(3q_k + 1)$	$=$	$3(2^{2m}q_k + Q_{2m}) + 1$si $n = 3q \neq Q_{2m}$
$2^{2m}(1)$	$=$	$3Q_{2m} + 1$

Cette correspondance des écritures permet de construire, à partir des valeurs Q_{2m} et en inversant la relation des suites de Collatz, l'ensemble des nombres impairs qui définiront les trajectoires se terminant en Q_{2m} en partant de n'importe quel de ces nombres. Comme ceci permet de parcourir l'ensemble des nombres impairs, on peut en conclure que toute trajectoire se termine de cette manière et conduit donc au dernier terme :

$$2^{2m} \cdot 1 = 3Q_{2m} + 1 \quad = M_{2m} + 1 \tag{28}$$

soit la convergence vers 1.

Nous donnons quelques exemples de construction des termes impairs prédecesseurs des valeurs Q_{2m} vrais pour $m = [1, 2, \cdots, \infty[$:

m	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
M_{2m}	3	15	63	255	1023	4095	$\cdots$
Q_{2m}	1	5	*21*	85	341	*1365*	$\cdots$

Les valeurs de Q_{2m}en italique correspondent à des trajectoires à un seul terme puisqu'elles sont multiples de 3. La première valeur $Q_2 = 1$ correspond au cycle 4 :2 :1 puisque l'on a :

$$2^2 \cdot 1 = 3 \cdot 1 + 1 \tag{29}$$

Prenons les prédécesseurs de $Q_4 = 5$, comme 5 est de la forme $3q + 2 = 3 \cdot 1 + 2$, alors les prédécesseurs immédiats ont la forme donnée par la relation (27) avec $q_k = 1$:

$$n_{k-1} = \quad 2^{2m-1} \cdot 1 + Q_{2m} \tag{30}$$

Soit :

m	1	2	3	$\cdots$
préd(5)	$2 \cdot 1 + 1 =$*3*	$2^3 \cdot 1 + 5 = 13$	$2^5 \cdot 1 + 21 = 53$	$\cdots$

Il y a une infinité de prédécesseurs et pour chaque prédécesseur qui n'est pas multiple de 3 on peut recommencer la procédure. Ainsi avec 13 de la forme $3q+1= 3\cdot 4+1$, alors ses prédécesseurs prennent les formes données par la relation (20) avec $q_k = 4$:

Soit :

m	1	2	3	$\cdots$
préd(13)	$2^2 \cdot 4 + 1 = 17$	$2^4 \cdot 4 + 5 =$*69*	$2^8 \cdot 4 + 21 = 1045$	$\cdots$

On construit progressivement toutes les valeurs qui vont former des trajectoires finissant en 5 c'est à dire convergeront vers 1. Les nombres en italique sont des multiples de 3 et n'ont donc pas de prédécesseurs, pour les autres on peut recommencer éventuellement jusqu'à l'infini.

Dans l'exemple qui précède, pour construire la trajectoire qui commence en 3, comme 5 succède à 3 et que $5 = Q_4$, on obtient : $3 \to 5 \to 1$. Ce qui est conforme à la suite de Collatz.

De même en partant de 17 prédécesseur de 13,on obtient : $17 \to 13 \to 5 \to 1$. Comme 17 n'est pas multiple de 3, on aurait pu remonter jusqu'à 9, ce qui aurait donné la trajectoire : $9 \to 7 \to 11 \to 17 \to 13 \to 5 \to 1$.

Pour prendre un exemple plus complexe, en partant de 5 on aurait pu remonter par 53 et l'un des chemins tracé serait remonté jusqu'à 27 dont on sait qu'il génère une trajectoire de longueur 111 , nombres pairs compris, en suivant un chemin chaotique. Un autre chemin suivi depuis 5 et 53 se termine en 165. Il se trouve que la trajectoire partant de 27 et celle partant de 165 sont exactement de même longueur, les deux se rejoignant au nombre 31 et suivent le même chemin jusqu'à 5.

Si il est difficile de prédire le comportement en partant d'un nombre impair quelconque, la procédure proposée de construction des trajectoires permet de conclure que ce nombre choisi au hasard appartient nécessairement à une trajectoire qui finira en un nombre Q_{2m} donc en 1.

La figure [1] illustre la construction, les nombres en gras n'ont pas de prédécesseurs.

Avec cette procédure il est possible de définir des ensembles de nombres impairs, notés $E\left(Q_{2m}\right)$ associés à chaque valeur de Q_{2m}. Chaque ensemble contient les valeurs des nombres impairs qui appartiennent à des trajectoires finissant en Q_{2m} c'est à dire en 1. Certains ensembles sont de dimension infinie, d'autres peuvent être de dimension 1, comme par exemple $E\left(Q_6\right) = \{21\}$. Comme il y a correspondance entre les éléments de ces ensembles et l'ensemble des nombres impairs définis modulo 3, tout nombre impair est l'élément d'une trajectoire au sens de la suite de Collatz.

3.2 Parcours des trajectoires dans le sens de l'algorithme de Collatz

On a vu comment créer les trajectoires convergentes à partir des racines Q_{2m}. Maintenant si l'on considère un nombre impair quelconque, avant de l'injecter dans la relation $3n+1$, on va chercher sa représentation sous une des formes $2^{2m-1} \cdot q + Q_{2m}$ ou $2^{2m} \cdot q + Q_{2m}$, pour en déduire son successeur sous la forme $3q+2$ (pour q impair) ou $3q+1$ (pour q pair).

Prenons l'exemple du nombre 113, nombre impair qui se caractérise généralement par l'écriture $2 \cdot 56 + 1$, on peut constater que cette écriture n'est pas conforme au modèle cherché puisque la valeur de q est ici 56 qui est pair et donc la puissance de 2 doit être paire. Il suffit d'utiliser

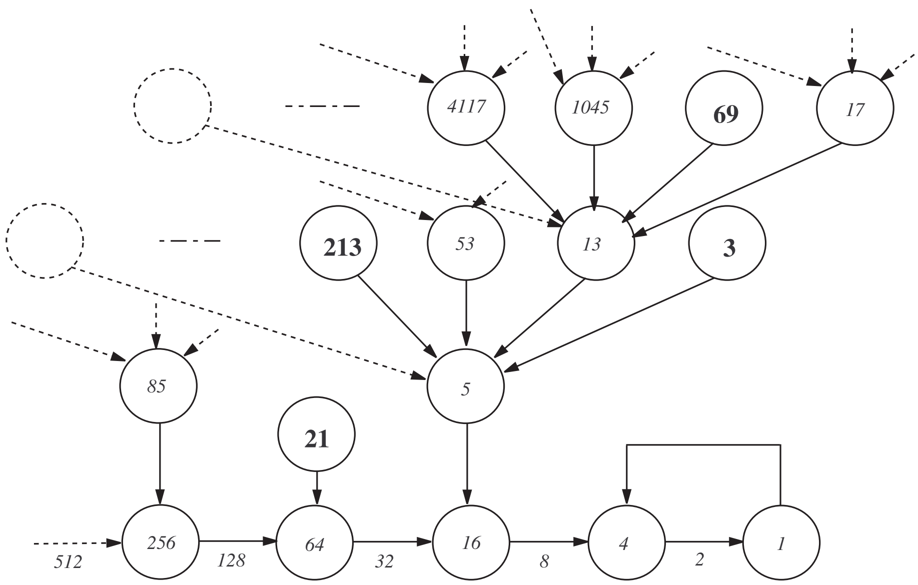

FIG. 1: Trajectoires

la relation $3n+1$, $3 \cdot 113 + 1 = 340$, et $340 = 2^2 \cdot 85 = 2^2(3 \cdot 28 + 1)$. Autrement dit le successeur de 113 est 85 de la forme $3q+1$ avec $q = 28$ indique que son prédécesseur est de la forme $2^2 \cdot 28 + Q_2 = 2^2 \cdot 28 + 1 = 113$ et comme $85 = Q_8$ l'itération suivante donnera $3 \cdot 85 + 1 = 2^8 \to 1$.

Pour les nombres impairs multiples de 3 on a vu à la section 2 qu'ils obéissaient à la même procédure pour le calcul de leur successeur, sachant qu'ils n'ont pas de prédécesseurs impairs. Si on prend l'exemple du nombre 213, la même démarche permet d'obtenir la bonne expression $213 = 2^7 \cdot 1 + 85$, on en déduit le successeur de la forme $3q + 2 = 3 \cdot 1 + 2 = 5$.

3.3 Existe-t-il d'autres trajectoires ?

De ce qui a été vu précédemment on peut déduire de manière simple que tout le processus de l'algorithme de Collatz tient dans les propriétés des nombres de Mersenne $M_{2m} = 2^{2m} - 1$, pour lesquels on a vu que :

$$2^{2m} = 3 \cdot Q_{2m} + 1 \tag{31}$$

Cette relation permet de définir les derniers termes impairs Q_{2m}des trajectoires convergentes, mais à partir de cette relation on peut déterminer l'ensemble des nombres impairs qui peuvent être mis en relation de manière équivalente à l'algorithme $3n+1$ de Collatz.

Nous disposons pour cela de deux interprétations équivalentes de l'algorithmes de Collatz. Nous avons vu que dans la relation $3n+1$, avec n impair, la valeur de n pouvait être un nombre impair quelconque et être distinguée par le fait d'être congru à $0, 1$ ou 2 modulo 3. Par contre le nombre pair qui en découle ne peut prendre que des valeurs de la forme $2^{2m}(3q+1)$ ou $2^{2m-1}(3q+2)$. Et donc la relation : $n_k = 3n_{k-1} + 1$ se traduit par la première équivalence suivante :

$$\left\{ \begin{array}{c} 2^{2m}(3q_k+1) \\ 2^{2m-1}(3q_k+2) \end{array} \right\} \equiv 3 \cdot \left\{ \begin{array}{c} 3q_{k-1} \\ (3q_{k-1}+1) \\ (3q_{k-1}+2) \end{array} \right\} + 1 \tag{32}$$

Dans (32) les valeurs de q_k et q_{k-1} ont la bonne parité pour que toutes les valeurs considérées soient impaires.

De même les relations (12), (15), (20) et (27) permettent de donner une seconde équivalence à l'algorithme de Collatz :

$$\begin{array}{c} 2^{2m}(3 \cdot q_k + 1) = 3(2^{2m} \cdot q_k + Q_{2m}) + 1 \\ 2^{2m-1}(3 \cdot q_k + 2) = 3(2^{2m-1} \cdot q_k + Q_{2m}) + 1 \end{array} \tag{33}$$

Les relations (32) et (33), qui sont valables pour tous les nombres impairs, permettent de déduire une notation particulière de ces nombres puisqu'on peut vérifier simplement que :

$$\left\{ \begin{array}{c} 3q_{k-1} \\ 3q_{k-1}+1 \end{array} \right\} \equiv \ 2^{2m} \cdot q_k + Q_{2m} \tag{34}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} 3q_{k-1} \\ 3q_{k-1}+2 \end{array} \right\} \equiv \ 2^{2m-1} \cdot q_k + Q_{2m} \tag{35}$$

Les équivalences définies par (34) et (35) indiquent que quelquesoit le choix d'un nombre impair non multiple de 3, il possède une infinité de prédécesseurs calculables en faisant varier m de 1 à l'infini. Si un prédécesseur est multiple de 3, la trajectoire inverse correspondante s'arrête et ce nombre représente le début d'une des trajectoires passant par le nombre choisi initialement. Ainsi tout nombre impair, non multiple de 3, peut être considéré comme le point de convergence de toutes les trajectoires qui y conduisent.

Si maintenant on calcule le successeur de ce nombre à l'aide de la relation $3n+1$, alors ce successeur, nécessairement non multiple de 3, devient le nouveau point de convergence de toutes les trajectoires calculables qui y conduisent. Si donc une trajectoire pouvait diverger vers l'infini il y aurait une infinité de trajectoires possédant cette propriété et de toute façon le point calculé aurait toujours une infinité de points qui lui seraient supérieurs en valeur.

En effet dans tous les cas, sauf un, les prédécesseurs d'un nombre impair lui sont supérieurs en valeur. L'exception est donnée par :

$$2(3q_k + 2) = 3 \cdot (2q_k + 1) + 1 \tag{36}$$

La relation (36) représente le seul cas dans lequel le successeur $(3q_k + 2)$ est supérieur au prédécesseur $(2q_k + 1)$.

La divergence vers l'infini ne concerne alors pas directement la valeur des éléments des trajectoires, car la relation (31) est valide lorsque $m \to \infty$ et montre que des trajectoires convergentes peuvent venir de l'infini, mais signifie que l'indice k, de l'instant de calcul, tend vers l'infini (i.e. la trajectoire ne s'arrête pas). Or chaque fois que l'on avance d'un pas, le nombre de trajectoires passant par le nouveau point calculé est en augmentation puisqu'une infinité de prédécesseurs peut être à nouveau calculée (à l'instant $k+1$) et s'ajoute à l'infinité de prédécesseurs correspondant au point précédent (à l'instant k).

Si une telle situation existait ($k \to \infty$) alors elle mettrrait en jeu tous les nombres impairs par construction (cf (33), (34) et (35)), ce qui conduirait à la conclusion qu'aucune trajectoire ne converge.

On peut aussi constater, en développant les relations données par (33), qu'à chaque itération il y a implicitement une relation faisant apparaître un nombre de Mersenne et que l'algorithme ainsi interprété ressemble à une recherche par essai-erreur d'un point de convergence. Ici on cherche le bonne valeur pour le terme Q_{2m}.

$$\begin{array}{c} 2^{2m} \cdot 3 \cdot q_k + \left[2^{2m}\right] = 3 \cdot 2^{2m} \cdot q_k + [3 \cdot Q_{2m} + 1] \\ 2^{2m-1} \cdot 3 \cdot q_k + \left[2^{2m}\right] = 3 \cdot 2^{2m-1} \cdot q_k + [3 \cdot Q_{2m} + 1] \end{array} \tag{37}$$

Il reste à montrer qu' il n'y a pas d'autres cycles que le cycle final connu sous la dénomination cycle $4 \to 2 \to 1$ et que donc toute trajectoire converge vers 1.

4 Application à l'étude des cycles possibles.

Si la suite $n_k$converge vers 1, la valeur suivante n_{k+1} est donnée par (cf(2)) $2^{\gamma_k} n_{k+1} = 4$, dont la solution est $\gamma_k = 2$ et $n_{k+1} = 1$. C'est le cycle connu $4 \to 2 \to 1$ que nous considérons comme cycle $1 \to 1$ dans notre système de notation qui ne prend en compte que les nombres impairs : $2^2 \cdot 1 = 3 \cdot 1 + 1$.

Nous avons pour information que les cycles possibles ne contiennent pas de valeurs multiples de 3 car ces valeurs n'ont pas de prédécesseurs. Nous devons donc nous intéresser aux cycles constitués de valeurs impaires de la forme $n_k = 3q_k + 1$ ou $n_k = 3q_k + 2$ en faisant référence aux équations (20) et (27).

Supposons l'existence d'un cycle de longueur p, il s'écrit :

$$\begin{array}{c} 2^{\gamma_1} n_1 = 3n_0 + 1 \\ 2^{\gamma_2} n_2 = 3n_1 + 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 2^{\gamma_{p-1}} n_{p-1} = 3n_{p-2} + 1 \\ 2^{\gamma_0} n_0 = 3n_{p-1} + 1 \end{array} \tag{38}$$

Compte-tenu de ce qui précède, que $\gamma_k$soit égal à $2m_k$ ou à $2m_k - 1$, les valeurs des n_k peuvent s'exprimer sous la forme :

$$\begin{array}{c} n_0 = 2^{\gamma_1} q_1 + Q_{2m_1} \\ n_1 = 2^{\gamma_2} q_2 + Q_{2m_2} \\ \vdots \\ n_{k-1} = 2^{\gamma_k} q_k + Q_{2m_k} \\ \vdots \\ n_{p-2} = 2^{\gamma_{p-1}} q_{p-1} + Q_{2m_{p-1}} \\ n_{p-1} = 2^{\gamma_0} q_0 + Q_{2m_0} \end{array} \tag{39}$$

En multipliant la première ligne de (38) par 2^{γ_0}on obtient : $2^{\gamma_0+\gamma_1} n_1 = 3 \cdot 2^{\gamma_0} n_0 + 2^{\gamma_0}$ et en substituant $2^{\gamma_0} n_0$ par la dernière ligne de (38) on obtient :

$$2^{\gamma_0+\gamma_1} n_1 = 3(3n_{p-1} + 1) + 2^{\gamma_0} \tag{40}$$

Remplaçons n_{p-1} par son équivalent donné par la dernière ligne de (39) :

$$2^{\gamma_0+\gamma_1} n_1 = 3^2 2^{\gamma_0} q_0 + 3Q_{2m_0} + 1 + 2^{\gamma_0} \tag{41}$$

La propriété des nombres de Mersenne nous permet d'écrire $3Q_{2m_0} + 1 = 2^{2m_0}$, d'où :

$$\begin{aligned} 2^{\gamma_0+\gamma_1} n_1 &= 3^2 2^{\gamma_0} q_0 + 2^{2m_0} + 2^{\gamma_0} \\ 2^{\gamma_1} n_1 &= 3^2 q_0 + 1 + 2^{2m_0-\gamma_0} \end{aligned} \tag{42}$$

Il reste à vérifier que la relation (42) est cohérente sachant que $n_0$et n_1 ne peuvent prendre que les formes $3q + 1$ ou $3q + 2$ et $2^{\gamma_1} n_1 = 3n_0 + 1$.

4.1 Cas $n_1 = 3q_1 + 1$

Dans ce cas nous savons (20) que $\gamma_1 = 2m_1$

4.1.1 Cas $n_0 = 3q_0 + 1$

Dans ce cas nous savons (20) que $\gamma_0 = 2m_0$, alors (42) s'écrit :

$$2^{2m_1} n_1 = 3^2 q_0 + 2 = 3n_0 - 1 \tag{43}$$

ce qui est contradictoire.

4.1.2 Cas $n_0 = 3q_0 + 2$

Dans ce cas nous savons (27) que $\gamma_0 = 2m_0 - 1$, alors (42) s'écrit :

$$2^{2m_1} n_1 = 3^2 q_0 + 3 = 3(n_0 - 1) \tag{44}$$

ce qui est contradictoire.

4.2 Cas $n_1 = 3q_1 + 2$

Dans ce cas nous savons (27) que $\gamma_1 = 2m_1 - 1$

4.2.1 Cas $n_0 = 3q_0 + 1$

Dans ce cas nous savons (20) que $\gamma_0 = 2m_0$, alors (42) s'écrit :

$$2^{2m_1-1} n_1 = 3^2 q_0 + 2 = 3n_0 - 1 \tag{45}$$

ce qui est contradictoire.

4.2.2 Cas $n_0 = 3q_0 + 2$

Dans ce cas nous savons (27) que $\gamma_0 = 2m_0 - 1$, alors (42) s'écrit :

$$2^{2m_1-1}n_1 = 3^2q_0 + 3 = 3(n_0 - 1) \tag{46}$$

ce qui est contradictoire.
On en conclut qu'il n'existe pas de cycle de longueur $p \neq 1$.

5 Quelques résultats

5.1 Trajectoires montantes

Pour qu'une trajectoire soit montante, il faut que dans la récurrence le successeur soit supérieur au prédécesseur. Ce qui réduit les relations à :

$$2n_k = 3n_{k-1} + 1 \tag{47}$$

Si l'on tient compte des relations entre prédécesseurs et successeurs cela ne peut se produire qu'avec une relation de type (cf (36)) :

$$2^{2m-1}(3q_k + 2) = 3(2^{2m-1}q_k + Q_{2m}) + 1 \tag{48}$$

avec $m = 1$.
On peut vérifier que des trajectoires montantes sont obtenues en partant des nombres de Mersenne $M_{2m} = 2^{2m} - 1$ qui, en tant que multiples de 3, sont des débuts de trajectoires. Les trajectoires ainsi obtenues, dont on sait qu'elles se termineront en 1, commencent toutes par monter pendant $2m$ valeurs. Cela se vérifie simplement :

$n_0 = 2^{2m} - 1$		
$2n_1 = 3(2^{2m} - 1) + 1$	$= 2(3 \cdot 2^{2m-1} - 1)$	$n_1 = (3 \cdot 2^{2m-1} - 1)$
$2n_2 = 3(3 \cdot 2^{2m-1} - 1) + 1$	$= 2(3^2 \cdot 2^{2m-2} - 1)$	$n_2 = (3^2 \cdot 2^{2m-2} - 1)$
$\vdots$	$\vdots$	
$2n_k = 3(3^{k-1} \cdot 2^{2m-k+1} - 1) + 1$	$= 2(3^k \cdot 2^{2m-k} - 1)$	$n_k = (3^k \cdot 2^{2m-k} - 1)$
$\vdots$	$\vdots$	
$2n_{2m-1} = 3(3^{2m-2} \cdot 2^2 - 1) + 1$	$= 2(3^{2m-1} \cdot 2 - 1)$	$n_{2m-1} = (3^{2m-1} \cdot 2 - 1)$
$2l_{2m} = 3(3^{2m-1} \cdot 2 - 1) + 1$	$= 2(3^{2m} - 1)$	$l_{2m} = (3^{2m} - 1)$

Dans la dernière relation, le terme $l_{2m} = 3^{2m} - 1$ n'est pas un terme de la suite de Collatz des nombres impairs (2) car il est pair. Par contre ce terme est divisible au moins par $3^2 - 1 = 2^3$. Il est assez curieux de constater que, à l'aide de la suite de Collatz, les nombres de Mersenne $2^{2m} - 1$ sont situés à $2m$ itérations des nombres $3^{2m} - 1$. Le terme n_{2m} cherché sera donc obtenu en divisant l_{2m} par au moins 2^4 donc inférieur à n_{2m-1}.
Sans entrer dans de longs calculs, cela peut se vérifier sur quelques exemples.

5.1.1 Trajectoire partant de $n_0 = M_4 = 2^4 - 1$

Nous obtenons une trajectoire montante de longueur 4, suivi de la convergence vers 1 :

n_0=	15=	$2^4 - 1$
n_1=	23 =	$3 \cdot 2^3 - 1$
n_2=	35 =	$3^2 \cdot 2^2 - 1$
n_3=	53 =	$3^3 \cdot 2 - 1$
$2l_4$=	$3 \cdot 53 + 1 =$	$2\left(3^4 - 1\right)$
n_4=	5=	$\left(3^4 - 1\right)/(2^4)$

5.1.2 Trajectoire partant de $n_0 = M_6 = 2^6 - 1$

On pourra vérifier que l'on obtient une trajectoire montante sur 6 termes avant d'arriver à $2(3^6 - 1)$.
$(2^6 - 1) = 63 \to 95 \to 143 \to 215 \to 323 \to 485 \to 91 \to \cdots \to 1$

5.2 Trajectoires de longueur 1

On appelle trajectoire de longueur 1 une trajectoire qui commence et se termine en un diviseur de $2^{2m} - 1$ qui est lui-même multiple de 3. Le premier exemple est donné par $M_6 = 2^6 - 1 = 3 \cdot Q_6$ et $Q_6 = 21 = 3 \cdot 7$. On vérifie facilement que si on démarre une suite de Collatz en 21, on obtient immédiatement :

$$2^6 \cdot 1 = 3 \cdot 21 + 1 \tag{49}$$

La question est de savoir si le nombre de trajectoires de longueur 1 est fini ou non. Pour obtenir une réponse on peut utiliser une récurrence élémentaire sur les diviseurs de M_{2m}.

En effet :

$$Q_{2m} = \frac{2^{2m} - 1}{3} = \sum_{k=0}^{m-1} 2^{2k} \tag{50}$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} 2^{2k} = 1 + 2^2 \sum_{k=0}^{m-2} 2^{2k} \tag{51}$$

On déduit de ce qui précède que :

$$Q_{2m} = 2^2 Q_{2m-2} + 1 \tag{52}$$

En itérant la relation (52) on obtient :

$Q_{2m} = 2^2 Q_{2m-2} + 1$		
$Q_{2m+2} = 2^2 Q_{2m} + 1$	$= 2^4 Q_{2m-2} + 5$	
$Q_{2m+4} = 2^2 Q_{2m+2} + 1$	$= 2^6 Q_{2m-2} + 21$	

Ainsi, si Q_{2m-2} est multiple de 3 alors, après 3 itérations, Q_{2m+4} est aussi multiple de 3. En partant de $Q_6 = 3 \cdot 7$ on obtient tous les Q_{2m} qui sont multiples de 3 en considérant tous les Q_{6m}, $m = [1, 2, \cdots, \infty[$. Le nombre de trajectoires à un seul élément impair différent de 1 est donc infini, et les débuts de ces trajectoires sont les nombres Q_6, Q_{12}, $Q_{18}, \cdots$, c'est à dire 21, 1365, $87381, \cdots$.

6 Conclusion

— De ce qui précède on peut conclure que toute trajectoire de nombres impairs au sens de la suite de Collatz commence par un multiple de 3, qui peut prendre une valeur aussi grande que l'on veut, et se termine sur un diviseur des nombres de Mersenne de puissance paire c'est à dire indirectement par 1. Ce qui se traduit par $2^{2m} \cdot 1 = 3 \cdot Q_{2m} + 1$.

— Même si le multiple de 3 initial est très grand, la trajectoire associée peut être très courte si ce multiple de 3 est lui même un diviseur d'un nombre de Mersenne. Autrement dit les nombres de Mersenne multiple de 9 sont associés à des trajectoires à 1 élémént impair différent de 1, le premier représentant est $Q_6 = 21$ qui donne la trajectoire $21 \rightarrow 1$. Il y en a une infinité défini par Q_{6m}.

— La valeur initiale ne présageant en rien de la longueur de la trajectoire, il reste à explorer les caractéristiques de trajectoires particulières si elles existent ?

— La nouvelle notation utilisée pour coder un nombre impair peut-elle servir dans d'autres domaines ?

De nombreuses questions peuvent encore se poser, mais la difficulté d'exprimer la convergence vers 1, qui est liée au désordre apparent généré par l'expression de la suite donnée par les relations (1), semble trouver une explication dans le fait que l'on puisse écrire un nombre impair $(3q, 3q + 1$ou $3q + 2)$ de manière unique sous la forme $2^{\lambda}q + Q_{2m}$ où λ dépend de la parité de q. Ce qui précède montre que la conjecture de Collatz s'avère exacte.

7 Référence

On trouvera dans la référence ci-dessous un état suffisamment exhaustif des travaux concernant les études sur la suite de Collatz (Syracuse).

Luc-Olivier Pochon, Alain Favre. La suite de Syracuse, un monde de conjectures.
https ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01593181v2