Analyse discursive de l'enseignement des fonctions trigonométriques dans la transition lycée/université

Faten Khalloufi-Mouha

Analyse discursive de l'enseignement des fonctions trigonométriques dans la transition lycée/université

Faten Khalloufi-Mouha

Université de Carthage. Faculté des sciences de Bizerte. Faten.khalloufi@fsb.u-carthage.tn

Abstract: Utilisant le cadre théorique de l'approche commognitive, ce travail explore l'évolution au niveau des attentes et des exigences relatives à l'enseignement de la notion de fonction trigonométrique lors de la transition lycée/université, à travers l'étude des caractéristiques des routines visées. Les résultats des analyses des organisations proposées pour l'enseignement de cette notion, fait apparaitre une fausse continuité au niveau de ces routines visées qui se traduit par une continuité apparente au niveau des tâches et un changement important au niveau des procédures.

Keywords: enseignement apprentissage d'une notion spécifique au niveau universitaire, transition lycée/université, approche commognitive, routine, fonctions trigonométriques et leurs réciproques.

INTRODUCTION ET PROBLÉMATIQUE

Les fonctions trigonométriques sont les premières fonctions périodiques et transcendantes que les élèves rencontrent au niveau de l'enseignement secondaire. Ces fonctions qui se situent au carrefour de plusieurs cadres mathématiques (la géométrie, l'algèbre et l'analyse) sont connectées aux différents concepts mathématiques appartenant à ces cadres (angles, arc, fonctions, équations, …) et mettent en relations différents registres sémiotiques et différents types de représentation (Khalloufi-Mouha, 2014). Dans nos travaux antérieurs (Khalloufi-Mouha, 2018, 2014, Khalloufi-Mouha & Smida, 2012) nous avons identifié l'importance des difficultés relatives à la construction d'une signification mathématique de la notion de fonction trigonométrique qui soit cohérente avec les connaissances antérieures du cadre géométrique de la trigonométrie chez des élèves de 2$^{\text{ème}}$ année de l'enseignement secondaire tunisien (16/17 ans). Au niveau de l'enseignement supérieur, les fonctions trigonométriques jouent un rôle très important dans l'introduction et l'apprentissage de l'Analyse, notamment dans leurs relations avec les notions d'intégrales, de séries numériques, de séries de Fourier …. Par conséquence, cette notion est considérée comme très importante dans les études universitaires pour la plupart des disciplines scientifiques utilisant les mathématiques. Les recherches ayant abordé l'enseignement et l'apprentissage de la notion de fonction trigonométrique au niveau de l'enseignement universitaire ont souligné que les étudiants continuent à rencontrer des difficultés importantes (Gueudet & Quéré, 2018, Mesa & Goldstein, 2017, Weber, 2005).

Dans son article, Weber (2005) a analysé l'apprentissage du concept de fonction trigonométrique par deux groupes d'étudiants universitaires. Le premier groupe a été enseigné par un professeur utilisant un cours magistral classique, tandis que le second a été enseigné selon un paradigme d’enseignement expérimental basé sur la notion de procept de Gray et Tall (1994) et les théories cognitives qui conceptualisent l’apprentissage à travers les notions de processus-objets. L’analyse d’interviews et d’un test papier-crayon ont mis en évidence que les étudiants ayant suivi le cours magistral ont développé une compréhension de type procédurale qui n’est pas liée à une signification mathématique. Cependant, les étudiants qui ont reçu un enseignement expérimental ont développé une compréhension plus approfondie. Les étudiants interrogés ont pu opérationnaliser leurs connaissances sur le processus de calcul du sinus d’un réel pour justifier les propriétés de la fonction sinus. De plus, les réponses des étudiants interrogés ont indiqué qu’ils considéraient les expressions trigonométriques comme des procepts. Mesa et Goldstein (2017) ont identifié l’existence de différentes significations relatives aux notions d’angles, de fonction trigonométrique et de fonctions trigonométriques inverses à travers l’étude des organisations proposées dans les manuels scolaires relatives au niveau collégial (post-secondaire) pour l’enseignement de la trigonométrie. Ils supposent que cela pourra engendrer des difficultés chez les étudiants lors de la résolution de situations problèmes surtout que l’enseignement proposé dans ces manuels ne prend pas en charge les connexions nécessaires entre les cadres et les registres mis en jeu dans cet enseignement. La problématique de l’articulation entre les différents cadres et registres lors de l’enseignement des fonctions trigonométrique a été également l’objet de l’étude de Gueudet et Quéré (2018). L’étude a porté sur l'enseignement du thème de la trigonométrie dans les ressources en lignes proposées aux futurs ingénieurs (ingénierie électrique) en France et cela en comparant l’utilisation de la trigonométrie en tant qu’outil, dans un cours d’ingénierie électrique et le contenu des cours en lignes de mathématiques proposé au ingénieurs relatif au chapitre trigonométrie. Dans ce travail, les auteurs ont identifié l’écart entre les besoins relatifs aux notions de trigonométrie dans le cours d’électricité et les cours de mathématiques. Les résultats des travaux précédents, attestent que les difficultés des étudiants relèvent essentiellement d’un manque au niveau de l’habilité à faire des connexions entre les différents cadres, registres et concepts mis en jeu (Gueudet & Quéré, 2018), afin d’identifier les plus pertinents lors de la résolution d’une situation problème (Mesa et Goldstein (2017). Les connaissances des étudiants restent ainsi à un niveau procédural (Webr, 2005) ne permettant pas une appréhension plus profonde articulant les cadres, registres et concepts relatifs à la notion de fonction trigonométrique.

En nous appuyant sur les résultats des travaux précédents, ainsi que sur nos travaux antérieurs sur l’introduction des fonctions trigonométriques au niveau de l’enseignement secondaire (Khalloufi, 2018, 2014, 2009, Khalloufi & Smida, 2012), nous avons choisi d’explorer, dans le contexte Tunisien, en utilisant une approche discursive, l’enseignement des fonctions trigonométriques dans la transition lycée/université. Le but étant d’étudier les changements au niveau des exigences et des attentes auprès des étudiants lors de leur entrée en première année de l’enseignement universitaire entamant des études en sciences de l’informatique. Le travail est guidé par les deux questions de recherches suivantes :

Q1 : Quels sont les changements au niveau des exigences et des attentes auprès des étudiants, autour de la notion de fonction trigonométrique, lors de la transition lycée/université ?

Q2 : Quels sont les changements au niveau des caractéristiques des routines visées par l'enseignement des fonctions trigonométriques au niveau de la première année universitaire ?

CADRE THÉORIQUE

La théorie commognitive (TCM) (Sfard, 2008) est une approche discursive qui définit les mathématiques comme une activité de communication (Sfard, 2012) et l'apprentissage des mathématiques comme un développement du discours. Selon cette approche, le discours mathématique sur la notion de fonction trigonométrique émerge lorsque les apprenants sont engagés dans une communication avec les autres ou avec eux-mêmes à propos de cette notion. Comme tout discours mathématique, le discours sur les fonctions trigonométriques, se distingue par quatre caractéristiques. Le vocabulaire spécifique, qui constitue la première caractéristique, correspond à l'utilisation de la terminologie mathématique et les termes techniques. L'utilisation de ce vocabulaire obéit à des définitions explicites (fonction sinus, cosinus et tangente, les fonctions réciproque des fonctions trigonométriques…). La deuxième caractéristique correspond aux médiateurs visuels. Nous distinguons les médiateurs visuels graphiques (le cercle trigonométrique et les représentations graphiques des fonctions trigonométriques et leurs réciproques) et les médiateurs visuels symboliques tels que les expressions *sin(x), cos(x), tan(x), arccos(x), arcsin(x)* ou *arctan(x)*. La troisième caractéristique correspond aux récits approuvés qui comportent les textes écrits ou oraux décrivant les objets, les processus et les relations entre eux et qui sont soumis à la validation, à la modification ou au rejet selon des règles définies par la communauté (définitions, théorèmes et preuves). La dernière caractéristique est la notion de routine. Les routines comprennent les pratiques régulièrement utilisées et bien définies par la communauté (telles que la définition, la conjecture, la preuve, l'estimation, la généralisation et l'abstraction). Dans les travaux récents (Lavie, Steiner & Sfard, 2019 et Lavie & Sfard, 2019) la notion de routine gagne en opérationnalité dans sa nouvelle définition et devient une unité d'analyse pour étudier l'apprentissage. Pour définir la notion de routine, Lavie et al. (2019) introduisent le concept de *task situation* (la situation dans laquelle une personne ressent le besoin d'agir) et le concept d'*espace de recherche précédent (precedent-search-space)* qui comprend les événements passés considérés comme suffisamment similaires à la tâche actuelle pour justifier la répétition de la même procédure. En utilisant ces notions, Lavie et al (2019) définissent la routine comme étant le couple tâche-procédure. Dans cette perspective, Lavie et ses collègues considèrent l'apprentissage comme un processus de routinisation progressive et l'étude de l'apprentissage revient à l'étude du processus d'émergence et de développement des routines. Dans cette partie de notre travail, relative à l'étude des changements au niveau des exigences et des attentes auprès des étudiants, autour de la notion de fonction trigonométrique, lors de la transition lycée/université, nous avons désigné par « routines visées » l'ensemble des routines proposées dans un objectif d'enseignement d'une notion mathématique spécifique. Ces routines sont évoquées à partir de leurs tâches sans référence à une task situation particulière ou à une personne spécifique. Ce sont les routines telles qu'elles sont susceptibles d'être interprétées et réalisées par un expert en utilisant les connaissances relatives au niveau scolaire en question. Les procédures sont décrites soit à l'aide d'algorithmes qui déterminent la façon d'agir, soit à partir des règles qui guident l'action de l'apprenant comme exemple les règles utilisées pour prouver des théorèmes ou définir de nouveaux termes mathématiques (Morgan & Sfard, 2016, p.101). Nous admettons dans notre travail l'hypothèse que les exigences de l'enseignement se traduisent dans les organisations mathématiques proposées pour l'apprentissage des notions en jeu, à travers la mise en place de routines visées, auxquelles les apprenants sont amenés à s'engager lors de la résolution de problèmes. Ainsi, approcher nos questions de recherche en termes de routines, nos amène à identifier les changements au niveau des routines relatives à l'enseignement des fonctions trigonométriques que les auteurs des manuels, au niveau du lycée, et que l'enseignant du cours de mathématique, au niveau de la première année universitaire, cherchent à installer.

ANALYSE DE L'ÉVOLUTION DES ROUTINES

Méthodologie

Dans ce travail nous analysons le manuel de 3ème (17/18 ans) l'année où les fonctions trigonométriques commencent à être un objet d'enseignement ainsi que le manuel de 4ème année (18/19 ans). Nous rappelons que dans le contexte Tunisien, à chaque niveau scolaire correspond un manuel officiel unique, utilisé comme une ressource pour les enseignants et comme un outil de travail pour les élèves. L'analyse du manuel de 3ème porte sur les parties « cours » et « exercices et problèmes » du 8ème chapitre « Fonctions trigonométriques ». Pour le manuel de 4ème année (Tome 1), nous avons examiné les chapitres où les fonctions trigonométriques sont utilisées dans l'apprentissage de nouvelles notions mathématiques. Au niveau de l'enseignement supérieur, nous avons analysé dans les notes de cours de l'enseignant responsable du module mathématique du premier semestre, la partie du chapitre « Fonctions numériques » relative aux fonctions trigonométriques et leurs réciproques ainsi que la série d'exercices associées à cette partie.

Pour l'identification et l'analyse des routines et en adaptant les indicateurs des routines explicités dans le schème analytique Morgan et Sfard (2016), nous identifions les routines visées pour l'apprentissage des fonctions trigonométriques à travers l'identification des tâches proposées et des procédures susceptibles d'être utilisées pour accomplir ces tâches. L'analyse des routines est guidée par les questions suivantes :

Composantes des routines visées	**Questions guidant l'analyse**
Catégorisation des tâches relatives aux fonctions trigonométriques, auxquelles	• Quels sont les cadres mathématiques mis en jeu ?

les élèves sont amenés à s'engager et qui sont proposées dans les manuels et dans les notes du cours et la série d'exercices proposées aux étudiants de 1ère année sciences de l'informatique.	• Quels sont les différentes réalisations associées à la notion de fonctions trigonométriques (les différentes façons de définir et de représenter ces fonctions) ? • Quels sont les médiateurs visuels évoqués ? • Quels sont les objets et les concepts mathématiques mis en relation avec les fonctions trigonométriques ?
Les caractéristiques des procédures routinières que les élèves doivent être capables de mobiliser pour accomplir ces types de tâches.	• Les procédures sont-elles algorithmiques ou heuristiques ? • Quel est le degré de complexité associé à ces procédures ? • Les procédures sont-elles implicites (à identifier par les élèves) ou explicites dans l'énoncé de la tâche ?

Table 1 : méthodologie de l'identification et l'analyse des routines visées.

Analyse des manuels scolaires

L'analyse de l'organisation proposée dans les manuels pour l'introduction et l'étude de la notion de fonction trigonométrique, fait appel à différentes réalisations[1] de cet objet, qui font appel à différents types de médiateurs visuels (symbolique, tableau, graphique, …). Les activités proposées utilisent ces différentes réalisations afin d'étudier les propriétés des fonctions trigonométriques et leurs relations avec les différents objets mathématiques. L'analyse en termes de routines visées, a permis d'identifier trois catégories de routines selon la nature de la propriété mobilisée des fonctions trigonométriques : la première catégorie est celle mobilisant l'une des propriétés globale, locale ou ponctuelle des fonctions trigonométriques (Vandebrouck, 2011). La seconde catégorie est relative aux routines articulant entre deux de ces propriétés et la troisième catégorie est relative à celles articulant les trois aspects, global, local et ponctuel.

Catégorie 1 : dans cette catégorie nous distinguons entre les routines ayant un aspect ponctuel, local ou global. *Les routines ponctuelles* sont les routines essentiellement associées à des tâches de calcul des images de certains réels par une fonction trigonométrique et les routines de résolution algébrique ou graphique des équations trigonométriques où le travail est localisé en des points d'intersection. Le second type, *les routines locales*, ce sont les routines de détermination de la continuité et de la

[1] Sfard (2008) définit les réalisations comme « perceptually accessible objects that may be operated upon in the attempt to produce or substantiate narratives" about a signifier (p. 154)

dérivabilité, en un point donné, des fonctions trigonométriques simples ou composées avec des fonctions algébriques. Les procédures associées sont essentiellement de type algébrique. Elles mettent en jeu la notion de voisinages et sont mobilisables lors du calcul de limites. Selon les procédures de calcul des limites on distingue deux sous-routines. L'une émerge lorsqu'il s'agit d'une application directe d'une limite usuelle et la seconde, lorsqu'il s'agit de procéder à une modification de l'expression de la fonction afin de faire apparaitre une limite usuelle à travers des minorations, majorations et encadrement avec des fonctions usuelles. Le troisième type, désigné par *routines globales*, comporte les routines de détermination de l'ensemble de définition, l'étude de la continuité et la dérivabilité sur un intervalle ainsi que l'étude des variations. Ces études, vu la propriété de périodicité des fonctions trigonométriques, sont généralement réduites à un intervalle, déterminé à partir de l'étude de la parité et la périodicité de ces fonctions. L'analyse des différents problèmes proposés, fait apparaitre qu'en général, l'intervalle d'étude est proposé dans l'énoncé et sa détermination n'est pas à la charge des élèves notamment au niveau des tâches de l'étude de l'existence d'une fonction réciproque où la procédure proposée consiste à appliquer le théorème de la fonction réciproque dans un intervalle imposé par l'énoncé (fig1).

Catégorie 2 : la seconde catégorie est relative aux routines articulant deux types des routines précédentes. Elles comportent les routines de construction des représentations graphiques qui articulent entre le ponctuel (construction des points) et le global (la forme de la courbe). Il y a également les routines de détermination et de représentation des tangentes ou des asymptotes à la représentation graphique des fonctions trigonométriques. Ce type de routines articule entre le ponctuel et le local.

Catégorie 3 : c'est la catégorie des routines articulant les trois aspects, ponctuel, local et global. Elle comporte à titre d'exemple, les routines de réalisation de tableau de variation des fonctions trigonométriques simples ou composées avec des fonctions algébriques. Les procédures relatives à ces routines comportent la détermination des valeurs de la fonction en des points, l'étude des variations sur le domaine d'étude ainsi que le calcul des limites.

À travers nos analyses des caractéristiques des routines identifiées, nous avons repéré que dans la plupart de ces routines, les procédures sont imposées dans les énoncés à travers des questions intermédiaires qui guident entièrement le travail des élèves en indiquant la procédure visée. Cela permet de fournir des modèles unifiés des routines visées. Nous avons également noté que les routines relatives à la parité et la périodicité ne font pas l'objet de beaucoup de travail au niveau des exercices proposés. Dans ces exercices l'énoncé impose l'intervalle d'étude de la fonction trigonométrique donnée. Nous illustrons par l'exercice suivant, extrait du manuel de 4$^{\text{ème}}$ année (Tome 1, exercice 26, p93)

26 A/ Soit la fonction f définie sur $[0, 1]$ par $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

1. a. Montrer que f réalise une bijection de $[0, 1]$ sur $[0, 1]$.

On notera f^{-1}, la fonction réciproque de f.

b. Calculer $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ et $f^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

2. a. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $[0, 1[$.

b. Calculer $(f^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right)$.

c. Montrer que pour tout x de $[0, 1[$,

$(f^{-1})'(x)=\frac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}}$.

3. Tracer dans un repère orthonormé C_f et $C_{f^{-1}}$.

L’exercice est extrait de la partie « Exercices et problèmes » du chapitre « Fonctions réciproques ». L’objectif de l’exercice est la définition, l’étude de la dérivabilité et la représentation graphique de la fonction réciproque de *f*. Les questions 1.a, 2.a et 3 renvoient à des routines globales de détermination du domaine de continuité et de dérivabilité. L’énoncé fait également apparaitre une importante utilisation des routines ponctuelles de détermination de l’image d’un réel par la fonction réciproque et par sa dérivée. La procédure de cette routine visée, consiste à appliquer la relation entre une fonction et sa réciproque ainsi que l’utilisation des angles remarquables pour la résolution d’équations trigonométriques simples. Nous supposons que l’utilisation de ces routines ponctuelles vise une justification de l’existence de la fonction réciproque de *f* qui ne peut pas être explicitée à travers une expression spécifique comme le cas des fonctions précédemment étudiées. De même, la représentation graphique de cette fonction qui est une autre réalisation de la fonction réciproque vise également la justification de son existence. Nous considérons que à ce niveau, les fonctions réciproques des fonctions trigonométriques restent au niveau procédural et son approchées à travers un algorithme qui se caractérise par l’application directe du théorème de la fonction réciproque ainsi que la relation entre une fonction et sa réciproque. Dans l’énoncé de cet exercice, nous avons également noté que le domaine de définition est imposé et que l’intervalle image par *f* et le domaine de dérivabilité de sa réciproque son donnés. La tâche de l’élève revient à justifier ces intervalles à travers l’application du théorème du cours. Les procédures des routines visées par cet exercice son imposées par l’énoncé et l’élève est guidé à travers les questions intermédiaires qui visent l’exécution de routines précises.

Analyse des notes de cours et de la série de TD proposés aux étudiants

Le module de mathématiques du premier semestre des sciences de l’informatique a pour objectif d’introduire et de reprendre des notions de base. La notion de fonction trigonométrique est revisitée dans ce module au niveau du 2$^{\text{ème}}$ chapitre qui s’intitule « Fonctions numériques ». Ce chapitre consiste d'abord à reprendre succinctement des résultats rencontrés durant les deux dernières années du lycée relatives à l’étude de fonctions numériques et leurs représentations graphiques. Il reprend également des éléments de base sur le calcul des limites, l'étude de la continuité, la dérivabilité, la parité et les éléments de symétrie, en plus des théorèmes fondamentaux comme le théorème des valeurs intermédiaires et celui des accroissements finis. Par la suite il y a un passage à l'étude des propriétés de la réciprocité d'une fonction, et les conséquences qui en découlent sur les représentations graphiques, l'explicitation de la fonction réciproque et de sa dérivée. En fin de chapitre, sont introduites les fonctions réciproques des fonctions trigonométriques et des fonctions hyperboliques, comme un nouveau champ d'application de tout ce qui précède. L'étude des fonctions trigonométriques et hyperboliques réciproques s'étale sur deux séances de cours (3heures) et deux séances de travaux dirigés (3heures).

L'analyse des notes de cours de l'enseignant et de la série d'exercices associée à ce chapitre a permis d'identifier l'émergence de nouveaux types de routines associées aux fonctions trigonométriques réciproques. Ces routines coexistent avec les routines déjà rencontrées au niveau du secondaire. Cependant, nous avons noté une augmentation remarquable au niveau du degrés de complexité des fonctions proposées ainsi que l'émergence de nouvelles fonctions transcendantes (la composée de fonctions trigonométriques avec des fonctions algébriques ou transcendantes, la composée de fonctions trigonométriques avec des fonctions trigonométriques réciproques). Nous illustrons par l'exercice suivant extrait de la série de TD

Exercice 7

Soit $f(x) = \arcsin(\frac{2x}{x^2+1})$.
1) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2) Vérifier que f est impaire et que pour $x \neq 0$, $f(\frac{1}{x}) = f(x)$.
3) Déterminer le domaine de dérivabilité de f.
4) Calculer $f'(x)$.
5)Simplifier f.

L'objet de l'exercice est l'utilisation des propriétés de la fonction arcsinus pour l'étude de la composée de la fonction arcsinus avec une fonction rationnelle. L'énoncé de l'exercice fait apparaitre l'importance du degré de complexité au niveau de la fonction étudiée et des procédures algébriques à utiliser pour déterminer le domaine de définition, le domaine de dérivabilité ainsi que pour le calcul de la dérivée.

L'analyse des notes de cours et des exercices proposés dans la série a permis de relever une importance du nombre de routines relatives à la troisième catégorie puisque les tâches proposées articulent généralement entre les différents aspects ponctuel, local et global des fonctions. Les routines de représentation graphique de fonction trigonométrique et/ou de sa réciproque apparaissent uniquement dans la partie cours lors de l'introduction et la caractérisation des fonctions *arcsinus*, *arccosinus* et *arctangente* ce qui atteste une régression au niveau de l'importance accordée aux médiateurs visuels graphiques par rapport à l'enseignement secondaire. L'analyse a également mis en évidence l'émergence de routines reliant une fonction trigonométrique et sa réciproque ou entre une fonction trigonométrique et la réciproque d'une autre fonction trigonométrique. Ces routines permettent la mobilisation des propriétés de parité et de périodicité des fonctions trigonométriques. Ces routines sont de type global dans le cas de la détermination du domaine de définition des fonctions étudiés. Cependant nous avons également identifié la mobilisation de ces propriétés dans le cas de nouvelles routines ponctuelles visant la détermination des images de certaines valeurs par ces fonctions composées. Nous donnons à titre d'exemple la détermination de $Arcsin[sin(\frac{15\pi}{7})]$.

Nos analyses font apparaitre une fausse continuité au niveau des routines relatives aux fonctions trigonométriques qui sont susceptibles de cohabiter avec les nouvelles routines relatives aux fonctions trigonométriques réciproques introduites en première année universitaire. En fait, le changement des contextes des tâches routinières au niveau de l'université, la complexité des fonctions étudiées et l'introduction des fonctions trigonométriques réciproques nécessite une modification au niveau du domaine d'applicabilité des routines. Cela est susceptible d'engendrer certaines difficultés à individualiser les routines visées par l'enseignant vu la nécessité de développer de nouvelles procédures plus complexes que celles au niveau du secondaire. L'analyse fait apparaitre également qu'au niveau de l'université, les étudiants ont plus d'autonomie pour l'élaboration des tâches proposées ce qui engendre une diversité des routines susceptibles d'être effectués et par conséquence, l'existence de plusieurs routines associées à une même tâche.

CONCLUSION

Dans ce travail nous avons exploré les exigences et les attentes relatives à l'enseignement de la notion de fonction trigonométrique, à travers l'identification de l'évolution des routines visées et l'analyse de leurs caractéristiques en utilisant le concept de routine de l'approche commognitive. Les résultats nous ont permis d'identifier trois catégories de routines selon la nature de la propriété de fonction trigonométrique visée par cette routine. L'analyse de l'évolution des caractéristiques de ces routines a fait apparaitre une fausse continuité qui se traduit par une continuité apparente au niveau des tâches et un changement important au niveau des procédures. Ces procédures relèvent d'une application directe des théorèmes et définitions du cours au niveau de l'enseignement secondaire et sont entièrement imposées aux élèves qui sont guidés par des questions intermédiaires. Au niveau universitaire, la complexité des fonctions étudiées et l'introduction des fonctions trigonométriques réciproques nécessite le développement de nouvelles procédures plus complexes.

Dans ce travail, nous avons focalisé sur les routines spécifiques à la notion de fonction trigonométriques. Cependant, plusieurs autres routines peuvent entrer en jeu et influencer l'apprentissage de cette notion. Parmi ces routines il y a les routines d'instanciation. En fait, l'importance du niveau de rigueur associé à l'utilisation d'un ensemble de règles formelles bien définies au niveau de l'enseignement supérieur rend le discours mathématique universitaire loin de ce qu'un nouveau bachelier connait de l'enseignement secondaire.

REFERENCES

Gueudet, G. & Quéré, P-V. (2018). "Making connections" in the mathematics courses for engineers: the example of online resources for trigonometry. INDRUM 2018, INDRUM Network, University of Agder, Apr 2018, Kristiansand, Norway. ffhal-01849973f

Gray, E.M., & Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A proceptual view of elementary arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 114-141.

Khalloufi-Mouha, F. (2018) Constructing mathematical meaning of the cosine function using covariation between variables in a modeling situation in Cabri. *CERME 10*, Feb 2017, Dublin, Ireland. ⟨hal-01937154⟩

Khalloufi-Mouha, F. (2014). Etude de l'évolution des signes langagiers lors d'une séquence d'enseignement intégrant un artifact technologique -in *Spirale : Revue de recherches en éducation*, n°54, 2014. Langage, apprentissage et enseignement des mathématiques. pp. 49-63; doi : https://doi.org/10.3406/spira.2014.1036 https://www.persee.fr/doc/spira_0994-3722_2014_num_54_1_1036

Khalloufi-Mouha F. & Smida H. (2012) « Constructing mathematical meaning of a trigonometric function through the use of an artifact » – in *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education* XVI, (207-224). Pages 207-224 | Published online: 20 Aug 2013. https://doi.org/10.1080/10288457.2012.10740740

Lavie, I. & Sfard, A. (2019): How Children Individualize Numerical Routines: Elements of a Discursive Theory in Making*, Journal of the Learning Sciences,* DOI: 10.1080/10508406.2019.1646650

Lavie, I., Steiner, A., & Sfard, A. (2019). Routines we live by: From ritual to exploration. *Educational Studies in Mathematics*, 101(2), 153–176. doi:10.1007/s10649-018-9817-4

Mesa, V. & Goldstein, B. (2017). Conception of Angles, trigonometric functions, and inverses trigonometric functions in college textbooks. International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education 3 (2), 338-354

Morgan, C., & Sfard, A. (2016). Investigating changes in highstakes mathematics examinations: A discursive approach. *Research in Mathematics Education*, 18(2), 92–119. https ://doi. org/10.1080/14794 802.2016.11765 96.

Sfard, A. (2008) *Thinking as communicating: Human development, development of discourses, and mathematizing*. New York, NY: Cambridge University Press.

Sfard, A. (2012) Introduction: Developing mathematical discourse—Some insights from communicational research. *International Journal of Educational Research* Volumes 51–52, 2012, Pages 1-9.

Vandebrouck, F. Perspectives et domaines de travail pour l'étude des fonctions. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de Paris (IREM), 2011, 16, pp.149-185. ffhal-00654184f

Weber, K. (2005). Students' understanding of trigonometric functions. *Mathematics Education Research Journal, 17*(3), 91–112.