Théorie des nombres et applications physiques (Sn>1 an = −1/12, effet Casimir, cordes bosoniques et autres)

Daniel Parrochia

Théorie des nombres et applications physiques ($\sum_{n>1} a_n = -1/12$, effet Casimir, cordes bosoniques et autres)

Daniel Parrochia

Université de Lyon (France)

Résumé. Nous étudions quelques résultats de théorie des nombres touchant au problème de la régularisation des séries divergentes. Quand les techniques de Grandi, Cesàro ou Abel ne suffisent plus – ce qui est le cas pour la série infinie des entiers – un résultat de Ramanujan, a pu finalement trouver une expression rigoureuse grâce à la fonction zêta de Riemann, anticipée par Euler. On s'aperçoit alors que l'expression résultante (-1/12) trouve des applications en physique, aussi bien dans le calcul de l'énergie et de la force du vide quantique (effet Casimir) que, tout à fait indépendamment, dans la théorie des cordes bosoniques ou, plus généralement, dans la modélisation de certains oscillateurs harmoniques. Il semble que les techniques de régularisation qui, chaque fois, lissent la singularité permettent de faire la transition entre des physiques de type différent ou concernant des niveaux de réalité différents. En tout cas, la physique donne à ces résultats mathématiques surprenants, et parfois paradoxaux, non seulement une illustration, mais une pertinence, tandis que les résultats mathématiques permettent à la physique d'échapper aux infinis .

Mots clés. Théorie des nombres, séries divergentes, fonction zêta, Grandi, Cesaro, Ramanujan, effet Casimir, théorie des cordes bosoniques.

Abstract. We study some results of number theory relating to the problem of the regularization of divergent series. When the techniques of Grandi, Cesàro or Abel are no longer sufficient - which is the case for the infinite series of integers - a result of Ramanujan, was finally able to find a rigorous expression thanks to the Riemann zeta function, anticipated by Euler. We then see that the resulting expression (-1/12) finds applications in physics, as well in the calculation of energy and force of the quantum vacuum (Casimir effect) as, quite independently, in bosonic string theory or, more generally, in the modeling of certain harmonic oscillators. It seems that the techniques of regularization which, each time, smooth the singularity allow to make the transition between physics of different type or concerning different levels of reality. In any case, physics gives these surprising, and sometimes paradoxical, mathematical results not only an illustration, but a relevance, while the mathematical results allow physics to escape the infinites.

Key words. Number theory, divergent series, zeta function, Grandi, Cesaro, Ramanujan, Casimir effect, bosonic string

1 De la série de Grandi à la sommation de Ramanujan

Les séries mathématiques, comme on sait, ont joué un grand rôle en Analyse et en Théorie des nombres à partir du XVIII^{e} siècle. De Leibniz à Euler, de nombreux auteurs s'illustrèrent dans leur découverte. Parmi eux, le mathématicien italien G. L. Grandi.

1.1 La série de Grandi

En analyse mathématique, on appelle «série de Grandi» la série définie par :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + ...$$

Etudiée en 1703 par Grandi [1](see [Grandi 03]), cette série est évidemment divergente,

1. Luigi Guido Grandi (1671-1742), est un mathématicien, ingénieur, philosophe et prêtre italien, né à Crémone et mort à Pise. Il est connu en mathématiques pour son analyse de la série qui porte son nom, et également pour son étude des rosaces, ces courbes qui ont la forme de pétales de fleurs. Il a également contribué à la première édition florentine du travail de Galilée sur le mouvement

ce qui signifie que la suite de ses sommes partielles n'a pas de limite. Avant le XIX^e siècle, on considérait que cette série pouvait prendre, en fonction du parenthésage choisi de ses termes, la valeur 0 ou la valeur 1, et les mathématiciens se disputaient quant à la question de savoir quel résultat était valable (voir [Hardy 49], 6).

1.2 La technique de Cesàro

En 1890 (voir [Ferraro 99]), avec le mathématicien italien Cesàro [2], une troisième valeur – la valeur 1/2 – va s'ajouter aux deux précédentes, ou plutôt, les remplacer, grâce à la notion de «sommation de Cesàro», première méthode rigoureuse de calcul des séries divergentes [3]. L'idée principale est de calculer, pour chaque n, la moyenne σ_n des n premières sommes partielles de la série. La «somme», au sens de Cesàro, est la limite de cette nouvelle suite de sommes.

Pour la série de Grandi, on obtient successivement les moyennes suivantes :

$$1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{6}, \frac{4}{7}, \frac{4}{8}, \ldots$$

soit

$$\sigma_n = \frac{1}{2} \text{ si } n \text{ est pair et } \sigma_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \text{ si } n \text{ est impair.}$$

Quand $n \to \infty$, cette suite converge bien vers 1/2, valeur qu'on appelle «somme de Cesàro de la série de Grandi».

Compte tenu des justifications précédentes, il n'est donc pas totalement absurde de poser :

$$A = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots = 1/2,$$

sachant que cette valeur est la somme de Cesàro de la série.

naturel et a aidé à l'introduction des idées de Gottfried Wilhelm Leibniz sur le calcul infinitésimal en Italie. Il a visité en 1709 l'Angleterre, où il est élu membre de la Royal Society.

2. Ernesto Cesàro (1859-1906), mathématicien important, professeur à l'université de Palerme puis à la Sapienza de Rome, a mené des travaux dans le champ de la géométrie différentielle (il est un précurseur des fractales) et de l'analyse algébrique.

3. D'autres méthodes viendront plus tard avec Abel, Borel, puis Ramanujan.

1.3 Euler et les séries alternées

Considérons maintenant la série alternée :

$$B = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + ...$$

Au XVIII^e siècle, Leonhard Euler proposait déjà la valeur 1/4 pour cette série, mais sans justification rigoureuse. Pour lui (voir [Euler 49]), c'était une conséquence de l'égalité :

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - 6x^5 + ...$$

quand on donne à x la valeur 1.

Malheureusement, l'identité n'est effectivement vérifiée et ne prend un sens analytique que pour $|x| < 1$. D'un point de vue moderne, la série n'étant pas définie en $x = 1$, la somme de la série 1 - 2 + 3 - 4 + ... ne peut se déduire en évaluant l'identité ci-dessus en $x = 1$.

Néanmoins, un théorème d'Abel permet de se sortir de ce mauvais pas. Il stipule que, pour une série numérique $a_0 + a_1 + a_2 + ...$, et telle qu'on a pu construire la série entière associée $a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...$, si la série entière converge pour tout $0 < x < 1$ vers une fonction admettant une limite en $x = 1$, alors, cette limite est la somme d'Abel de la série numérique.

Dans le cas considéré, la définition de la somme d'Abel consiste alors à calculer la limite suivante, quand x tend vers 1 :

$$\lim_{x \to 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} n(-x)^{n-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1}{4}.$$

1.4 La notion de «produit de Cauchy»

Une autre façon d'aboutir à ce résultat consiste à utiliser la notion de «produit de Cauchy». Dès 1891, Cesàro assurait être en mesure d'écrire $(1 - 1 + 1 - 1 + \ldots)^2 = 1 - 2 + 3 - 4 + \ldots$ et d'affirmer que les deux membres valent 1/4 (voir [Cesàro 91] ;[Ferraro 99], 130). Pour Cesàro, ce résultat était une conséquence d'un théorème qu'il avait prouvé l'année précédente et qui pouvait être considéré comme le premier résultat sur la sommation des séries divergentes. Il s'agit de considérer la série $1 - 2 + 3 - 4 + \ldots$ comme un produit de Cauchy de la série de Grandi par elle-même.

Le produit de Cauchy de deux séries, même divergentes, peut être défini. Dans cet exemple, en posant $\Sigma a_n = \Sigma b_n = \Sigma(-1)^n$, les termes du produit de Cauchy de la série de Grandi par elle-même sont :

$$\begin{aligned} c_n &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k(-1)^{n-k} \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^n = (-1)^n(n+1). \end{aligned}$$

et la série produit est donc comme attendu :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1) = 1 - 2 + 3 - 4 + \cdots .$$

Ainsi, une méthode de sommation compatible avec le produit de Cauchy et qui somme la série de Grandi à la valeur 1/2 sommera la série 1 - 2 + 3 - 4 + . . . à la valeur 1/4. En combinant cela avec le résultat de la section précédente, on obtient que la série 1 - 2 + 3 - 4 + . . . et la série de Grandi sont simultanément sommables pour toute méthode linéaire, stable et respectant le produit de Cauchy.

La sommation de Cesàro à l'ordre 1 (dite (C, 1)) permet pourtant de sommer la série de Grandi, mais pas la série 1 - 2 + 3 - 4 + . Cependant, celle-ci peut être sommée par une méthode de sommation de Cesàro à l'ordre 2 (dite (C, 2))(voir [Hardy 49], 3 ; [Weidlich], 52-55).

En revanche, la suite définie par :

$$a_n = n = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

ne va pas être sommable en ce sens là.

Soit C la série correspondante :

$$C = \sum_{n \geq 1} a_n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots .$$

La suite des sommes partielles de C est :

$$1, 3, 6, 10, \ldots,$$

ce qui en fait une série divergente. Quant aux termes de la suite de la moyenne des sommes partielles de C, ce sont :

$$\frac{1}{1}, \frac{4}{2}, \frac{10}{3}, \frac{20}{4}, \ldots .$$

Ici, cette suite diverge également : C n'est donc pas sommable au sens de Cesàro, ni d'ailleurs au sens d'Abel.

1.5 Petite histoire de la fonction ζ

L'histoire de la fonction ζ est ancienne, et commence bien avant Riemann – qui lui donne seulement son nom actuel [4].

Au XVII^e siècle, Pietro Mengoli (1626-1686) avait pu montrer que la série harmonique (somme des inverse des entiers) diverge et s'était demandé quelle pourrait être la valeur de la même série si ses termes étaient non des entiers, mais des carrés des entiers. Il avait aussi découvert que la série alternée converge vers ln 2.

Au XVIII^e siècle, dès 1731, Leonhard Euler (1707-1783), généralisant l'idée de «somme» donne les valeurs de $1/2$ pour la série alternée $1-1+1-1+1-1+1\cdots$ et la valeur $1/4$ pour $1-2+3-4+5-6+\cdots$. À partir des années 1730-1740, il introduit ce qu'on appelle aujourd'hui les nombres zêtas et en calcule certains (voir [Euler 40] ; [Euler 44]). John Baez, dans une communication orale, suppose qu'il a pu prouver $\zeta(-1) = -1/12$ (voir [Baez 08]), mais on ne trouve ni ce résultat ni la pseudo-démonstration donnée par Baez dans les œuvres d'Euler. L'article historique informé de Raymond Ayoub (voir [Ayoub 74]) n'en fait d'ailleurs pas mention.

En revanche, dans l'opuscule de 1740 (voir [Euler 40]), Euler introduit ce qu'il appelle des «progressions harmoniques» – en fait, des séries de fractions dont les numérateurs sont égaux et les dénominateurs en progression arithmétique – ayant la forme générale :

$$\frac{c}{a}, \frac{c}{a+b}, \frac{c}{a+2b}, \text{ etc.},$$

ce qui donne, pour $a = b = c = \cdots = 1.$, la série de terme général $1/n$;

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots .$$

et il connaît bien sûr la série réciproque de terme général $a_n = n$:

$$\sum_1^\infty a_n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots ,$$

qu'on identifie aujourd'hui à $\zeta(-1)$. Il n'a cependant, à notre connaissance, jamais tenté de la calculer [5].

4. Pour les détails de cette histoire,voir, par exemple, la thèse de Giuseppe Iurato (voir [Iurato 14].

5. Contrairement à ce qu'affirment aussi W. et F. Ellison (voir [Ellison 78], 276), Euler n'a

Cependant, dans trois articles successifs – entre 1731 et 1736 – il s'attaque au calcul de ce qu'on appellerait aujourd'hui $\zeta(2)$. Le premier (voir [Euler 31]) aboutit à lui donner la valeur $\pi^2/6$, le deuxième (voir [Euler 32-3]) à dégager une méthode générale définissant la formule aujourd'hui nommée «formule de Euler-MacLaurin», le dernier (voir [Euler 36]) donnant une preuve véritable de ses calculs. Dans un article ultérieur (voir [Euler 40], 133), Euler récapitule ses résultats et les étend au calcul de $\zeta(2p)$, écrivant ce qu'on désignerait aujourd'hui par les séries suivantes :

$$\zeta(2) = \sum_1^\infty \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

$$\zeta(4) = \sum_1^\infty \frac{1}{n^4} = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90}.$$

---

jamais évalué $\zeta(s)$ pour des entiers négatifs impairs. Comme le montre Ayoub, il a seulement, dans [Euler 49], étudié l'expression (en notation moderne) :

$$\phi(s) = \sum_1^\infty \frac{-1^n}{n^2},$$

puis conjecturé que :

$$\frac{\phi^{(1-s)}}{\phi(s)} = \frac{-\Gamma(s)(2s-1)cos\pi s/2}{(2^{n-1}-1)\pi^s},$$

avec :

$$\Gamma(s) = (n-1)!$$

Et comme :

$$\phi(s) = 1 - 2^{(1-s)}\zeta(s),$$

on peut déduire de ce qui précède la fameuse équation fonctionnelle prouvée par Riemann en 1859 :

$$\zeta(1-s) = \pi^{-s}2^{(1-s)}\Gamma(s)\,\cos\frac{\pi s}{2}\zeta(s).$$

Mais, Euler n'a jamais utilisé $\zeta(s)$ en tant que telle, et puisque :

$$\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=1}^\infty \frac{n^k}{x^n}$$

n'existe pas pour $k = 0, 1, 2, \cdots$, il n'a jamais pu attacher de sens à l'expression :

$$\sum_{n=1}^\infty n^{-(1-s)},$$

pour $s = 2, 3, \cdots$. Sur tout ceci, voir [Ayoub 74], 1082-3.

$$\zeta(6)=\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\frac{1}{5^6}+\cdots=\frac{\pi^6}{945}.$$

Dans ce même travail, Euler donne encore les valeurs explicites de $\zeta(8)$, $\zeta(10)$ et $\zeta(12)$, autrement dit, des nombres que nous exprimerions aujourd'hui (voir [Knopp 90], 240) par la série de terme général :

$$\zeta(2p)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2p}}=\frac{-1^{p+1}2^{p-1}B_{2p}}{(2p)!}\pi^{2p}.$$

1.6 L'audace de Ramanujan

Il faut attendre le début du XX^e siècle, et le célèbre mathématicien indien autodidacte Srinivasa Aiyangar Ramanujan (voir [Hardy 37] ; [Parrochia 20]) pour voir explicitement apparaître, dans un de ses carnets (voir[Ramanujan 85], I, chap. 8, 3) ; [Berndt 39]) une sommation de la série $\zeta(-1)$, aboutissant à l'incroyable résultat de -1/12. Pour comprendre son raisonnement, en fait peu rigoureux, écrivons l'une sous l'autre les deux séries que nous avons nommées plus haut B et C, en prenant désormais -B au lieu de B. Nous avons :

$$-B=-1+2-3+4-5+6-7+8\cdots.$$

$$C=\quad 1+2+3+4+5+6+7+8\cdots.$$

Additionnons-les maintenant membre à membre, comme le fait Ramanujan. Nous obtenons :

$$C-B=4+8+12+16+\cdots=4(1+2+3+4+\cdots)=4C.$$

D'où :

$$B=3C \quad \text{ou encore :} \quad C=B/3.$$

Et comme $B=\frac{1}{4}$, on aboutit au résultat présenté par Ramanujan dans ses carnets :

$$C\ (\mathcal{R})=-\frac{1}{12}. \tag{1}$$

Évidemment, il ne s'agit d'imaginer que la «sommation» C est une somme au sens ordinaire et que le résultat de cette somme – au sens ordinaire – d'une infinité d'entiers est $-1/12$. C'est pourquoi, reprenant une notation introduite par Hardy (voir [Hardy 49], 327) [6], nous écrivons ($\mathcal{R}$) à la droite de C, pour bien signifier qu'il s'agit d'une sommation au sens de Ramanujan [7].

Sinon, ce résultat serait choquant à plus d'un titre :

1. La somme d'une série infinie d'entiers positifs croissants ne peut pas converger vers une valeur négative ;

2. Une telle somme ne peut pas non plus converger vers une valeur fractionnaire ;

3. Elle ne peut pas du tout, en fait, converger vers une valeur finie.

4. Admettre cette somme comme une somme ordinaire conduirait, en plus, à des résultats instables et des contradictions dévastatrices du type : $0 = 1$.

Dès lors, comment comprendre le résultat de -1/12 ? Et surtout, comment comprendre que la substitution de cette valeur à celle d'une somme infinie d'entiers puisse avoir un sens en physique, ce qui est effectivement le cas ?

2 Prolongement analytique et fonction ζ

Pour comprendre l'incroyable paradoxe introduit plus haut, il faut se souvenir que, d'une façon générale, les séries infinies peuvent être considérées, en mathématiques, comme des «représentations» de certaines fonctions correspondantes. Or, lorsqu'on prend en compte, par exemple, cette classe de fonctions au comportement suffisamment régulier qu'on appelle des fonctions analytiques, on trouve souvent, pour une fonction donnée, une représentation de celle-ci qui n'est valable que sur un domaine limité.

Par exemple, on peut démontrer facilement que, pour $|x| < 1$:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + ... + x^n = \frac{1}{1-x} = T$$

6. Dans *Divergent Series*, l'ouvrage classique de Hardy, les considérations sur $\zeta(-1)$ apparaissent en 13.10.11 (p. 333) et en 13.17 (p. 346), avec des recommandations de précaution d'usage, étant donné l'étroitesse du champ de validité de ce genre d'expression et des «sommes de Ramanujan» en général.

7. Sur la notion de «sommation» chez Ramanujan, voir [Candelpergher 97].

Dans cet exemple, c'est au départ pour $|x| < 1$ que la somme S prend la forme mathématique très simple $T = \frac{1}{1-x}$. Néanmoins, cette dernière fonction T est bien définie pour toutes les valeurs de x, excepté $x = 1$.

Si on part au contraire de cette fonction T, valide pour tout $x \neg 1$, on peut donc dire, à l'inverse, qu'on a trouvé, avec S, une représentation de T valable sur un domaine plus limité, le domaine des $x < 1$.

L'argument s'applique aux séries géométriques dont l'argument est complexe, c'est-à-dire que, si on remplace x par $z = x + iy$, avec $i = \sqrt{-1}$, on aura :

$$S' = \sum_{N=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + ... + z^n = \frac{1}{1-z} = T',$$

qui converge pour $|z| < 1$, alors que T' est définie pour tout $z \neq 1$.

Pour faire maintenant le lien avec la série $C = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots$, considérons la série D, dite «série de Dirichlet», et définie comme suit :

$$D(z) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \frac{1}{4^z} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}.$$

On peut montrer, cette fois-ci, que cette série converge pour toutes les valeurs de $z = x + iy$ telles que $x > 1$.

Cela signifie que la série ne converge pas pour la valeur $z = -1$, qui correspond à :

$$D(-1) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots .$$

Cependant, la série de Dirichlet peut être prolongée analytiquement (prolongement «méromorphe» à l'ensemble $\mathbb{C}$ des complexes tout entier) en une fonction qui se comporte bien pour toutes les valeurs de z, sauf $z = 1$. C'est cette fonction qui est connue sous le nom de fonction zêta de Riemann et notée $\zeta(z)$.

Pour $z = -1$, cette fonction zêta peut être calculée et on a :

$$\zeta(-1) = -\frac{1}{12}.$$

Voilà qui explique le résultat surprenant (1) présenté sans précaution ni démonstration dans les carnets de Ramanujan. La série de Dirichlet elle-même ne converge

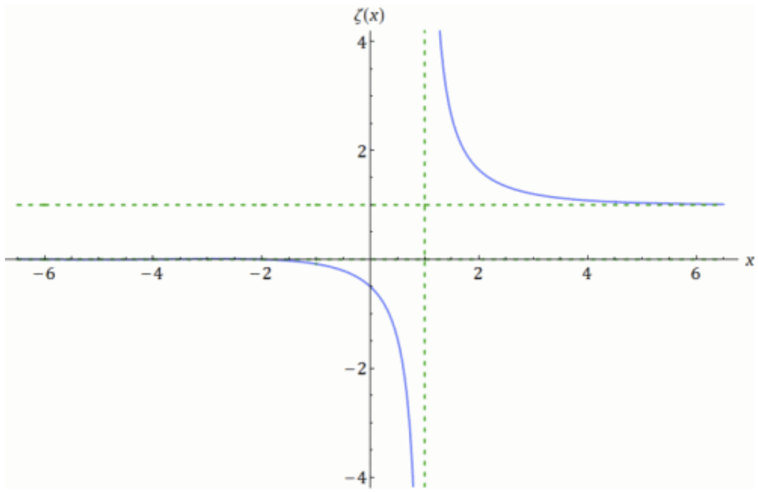

FIGURE 1 – Graphe de la fonction zêta

vers aucune valeur pour $z = -1$. En revanche, sa suite analytique, la fonction zêta, est définie en ce point. D'un point de vue strictement mathématique, l'équation $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots = -1/12$ est incorrecte et suppose en fait une confusion entre la série de Dirichlet et la fonction zêta [8].

8. La fonction zêta, comme on sait, est intéressante en elle-même. Elle est intimement lié aux nombres premiers, et on peut montrer qu'elle peut aussi s'écrire sous la forme :

$$\prod_{p}^{\infty} \frac{1}{1 - p^{s}},$$

le symbole $\prod$ indiquant un produit infini, et p s'étendant sur tous les nombres premiers. Sur les propriétés mathématiques de la fonction zêta, voir, parmi beaucoup d'autres ouvrages : [Edwards 74] ou encore [Aleksandar 85]. Un des grands problèmes non résolus des mathématiques est lié à la distribution des zéros de la fonction zêta ; elle est connue sous le nom d'*hypothèse de Riemann*, et sa résolution aurait un impact énorme sur la théorie des nombres et notre compréhension des nombres premiers. Leonhard Euler avait défini la fonction $\zeta = \sum_1^\infty \frac{1}{n^s}$ pour les valeurs entières positives de s, et plus tard Chebyshev avait étendu cette définition à tous les réels $s > 1$ avant que Riemann n'en fasse une fonction de variables complexe. C'est en fait à Godfrey H Hardy et John E Littlewood, qu'on doit l'utilisation de la fonction zêta dans l'étude de la distribution des nombres premiers (voir [Hardy 16]).

3 Une première application physique : l'effet Casimir et l'énergie du vide

Lors d'un colloque organisé par l'Académie royale des sciences des Pays-Bas le 29 mai 1948, le physicien néerlandais Hendrik Brugt Gerhard Casimir (1909-2000) présenta une communication extraordinaire, résumée dans un article de deux pages et demi prédisant l'existence d'une énergie du vide quantique et calculant la force que celui-ci exerce sur deux plaques parallèles situées à une certaine distance l'une de l'autre.

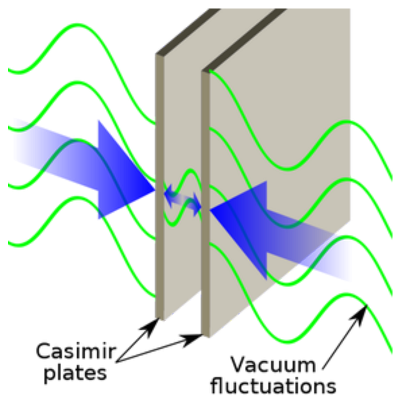

FIGURE 2 – L'effet Casimir

Le vide quantique, chacun le sait, n'est pas «rien» (voir [Parrochia 98]). Cet avatar de l'ancien éther est bien plutôt rempli d'une énergie qui engendre de nombreux effets. La raison en est l'existence des inégalités de Heisenberg qui, sous l'une de leurs formes, s'écrit :

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar/2,$$

où $\hbar$ est la constante de Planck réduite. Cette inéquation implique que le produit de la variation de l'énergie par une certaine durée (à vrai dire, très courte) est obligatoirement supérieure à une valeur non nulle. Ce mécanisme est à l'origine de ce qu'on appelle les «fluctuations du vide».

Le vide contenant une certaine énergie, il est à l'origine de la création de particules massiques. Ces particules sont dites «virtuelles» car, la durée des fluctuations étant trop brève pour qu'elles puissent être détectées par un appareil macroscopique, elles ne peuvent être repérées qu'à travers leurs interactions avec des particules réelles. Il n'empêche que cette énergie du vide et la force qu'il exerce peuvent être mises en évidence. C'est proprement l'effet mathématiquement décrit par Hendrik Casimir en 1948, et vérifié ensuite à différentes reprises, bien que dans des conditions souvent difficiles à réaliser et généralement différentes de celles posées par Casimir (voir [Lambrecht 02] ; [Lambrecht 04]).

Dans le protocole proposé par Casimir, il s'agit donc de calculer l'énergie du vide quantique entre deux plaques métalliques parallèles en tenant compte uniquement des photons (y compris virtuels) dont les longueurs d'onde λ divisent très exactement la distance entre les plaques : autrement dit, plus les plaques sont proches, moins il y a de photons. La force étant une dérivée de l'énergie par rapport à la distance x, elle est donc attractive.

Un champ quantique se décrivant en tout point comme un oscillateur harmonique simple dont les excitations sont des particules, le champ du vide a toutes les propriétés qu'une particule peut avoir : spin, polarisation dans le cas de la lumière, énergie, etc. Mais toutes ces grandeurs ont ici des valeurs moyennes nulles, puisqu'il n'y a rien dans le vide, à part de l'énergie. La quantification d'un oscillateur harmonique simple montre que son énergie minimale, encore appelée énergie du point zéro n'est pas nulle, mais, du fait du principe de Heisenberg, vaut :

$$E = \frac{1}{2}\hbar\omega_0.$$

Pour calculer l'énergie totale contenue dans l'espace compris entre les plaques, il faudrait donc, en principe calculer :

$$\sum_1^\infty \frac{1}{2}\hbar(n\omega_0).$$

ce qui est impossible, puisque cette somme est infinie. Pour faire disparaître cet infini, Casimir, dans son article de 1948, propose donc de comparer la situation dans laquelle une plaque se trouve à une petite distance a du plan et celle où elle se trouve à une grande distance, par exemple $x/2$. On a à ce moment-là deux sommes $\frac{1}{2}\sum \hbar\omega_{0\ I}$ et $\frac{1}{2}\sum \hbar\omega_{0\ II}$. Dans les deux cas, les sommes sont, bien évidemment, divergentes, mais Casimir montre que la différence entre ces sommes, toutes deux infinies, va pouvoir prendre, elle, une valeur finie (voir [Casimir 48], 794). Il aboutit au résultat au terme d'un calcul compliqué, faisant intervenir, pour régulariser l'expression de l'énergie, la formule d'Euler-MacLaurin.

Grâce à la formule de Ramanujan, ou plutôt, grâce à la fonction ζ, il est possible d'aller beaucoup plus vite :

La formule de l'énergie s'écrit en effet comme suit :

$$\sum_1^\infty \frac{1}{2}\hbar(n\omega_0) = \frac{1}{2}\hbar\omega_0\left(\sum_1^\infty n\right) = \frac{1}{2}\frac{\hbar c\pi}{x}\left(\sum_1^\infty n\right)$$

Et, en posant :

$$\sum_1^\infty n\ (\mathcal{R}) = \zeta(1) = -\frac{1}{12},$$

où $(\mathcal{R})$ indique qu'il s'agit d'une sommation au sens de Ramanujan (et non d'une somme ordinaire), on obtient finalement le résultat :

$$E(x) = -\frac{\pi\hbar c}{24x}$$

D'où, en dérivant par rapport à x, l'expression de la force d'attraction des plaques (voir [Bressi 02]) :

$$F(x) = \frac{\pi\hbar c}{24x^2}.$$

Cette présentation simplifiée [9], différente de l'approche historique de Casimir, correspond aux faits bruts. Mais quand l'effet Casimir est intégré à une théorie quantique plus vaste (voir [Zeidler 07]), il faut raffiner l'utilisation de la fonction Zêta, qui n'est plus, alors, exactement la fonction Zêta de Riemann, mais la fonction Zêta d'Epstein ou celle de Barnes.

4 Autres applications physiques et considérations épistémologiques et historiques

Nous venons de voir que différentes méthodes de régularisation (sommation de Ramanujan, fonction ζ, méthode d'Euler-MacLaurin...) permettent d'assigner la valeur $\frac{-1}{12}$ à la série divergente $S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots$. Ces méthodes sont fiables. La théorie taubérienne (voir[Tauber 97] ; [Korevaar 2004]), du reste, donne des moyens de comparer les méthodes de sommation par leurs résultats à partir d'opérations portant sur la même série divergente.

9. Pour une présentation physique moderne rigoureuse, voir, par exemple, [Blau 09].

Mais ces méthodes au départ purement mathématiques ont trouvé désormais leur utilité en physique contemporaine (see [Elizalde 94] ; [Elizalde 12a]) bien au-delà de l'effet Casimir. Dans de nombreuses théories physiques de la matière-énergie (principalement les théories quantiques des champs), à la fois discrètes et continues, il existe des quantités qui divergent à l'infini – qui correspondent à ce qu'on appelle des «singularités». Les mathématiques sous-jacentes à ces théories nécessitent de régulariser ou de «normaliser» les singularités en question.

Au plan épistémologique, la régularisation (et la renormalisation ultérieure) dans une théorie physique sont certainement le signe que cette théorie est inadéquate pour décrire la physique du phénomène à l'étude, du fait que certains de ses aspects relèvent, soit d'une échelle inférieure, soit d'une échelle supérieure (par exemple, parce qu'ils dépassent un certain niveau d'énergie maximum qui est une limite de la théorie). On peut donc estimer que ces processus témoignent surtout d'une impuissance de la théorie à rendre compte du réel.

En même temps, la théorie régularisée peut servir à connecter ensemble la physique existant au-dessous (ou au-dessus) du niveau problématique avec la physique adéquate pour décrire le phénomène hors la singularité. Une alternative à la méthodologie de régularisation-renormalisation (et donc de compensation des insuffisances de la théorie à une échelle donnée) est celle de la prolifération dimensionnelle, c'est-à-dire l'ajout au modèle descriptif de dimensions physiques nouvelles afin de s'adapter à l'espace topologique plus vaste ou plus restreint correspondant au nouveau phénomène à décrire (voir [Aoki 05]).

Autrement dit, alors que l'existence brute d'une singularité indique que notre compréhension actuelle du phénomène physique s'arrête en ce point, les techniques précédentes autorisent à aller un peu plus loin en permettant de relier les descriptions actuelles à une éventuelle théorie future plus puissante et qui permettra de rectifier les descriptions actuelles, à condition bien sûr qu'elle soit expérimentalement vérifiée.

Nous sommes donc là en présence d'une extension de théorie, qui peut avoir seulement la valeur d'une transition, mais permet surtout d'amorcer le passage à une théorie nouvelle, plus englobante que la précédente [10].

10. Depuis environ une dizaine d'années, de nombreux ouvrages explorent ces frontières.Voir, parmi d'autres : [Cartier 11] ; [Odintsov 11] ;[Kirsten 10]. Voir aussi le magnifique site internet extrêmement informé : «Number theory and physics archive», http ://empslocal.ex.ac.uk/people/staff/mrwatkin/zeta/physics.htm.

4.1 Un exemple : -1/12 et la théorie des cordes bosoniques

Ainsi la théorie des cordes bosoniques, première théorie des cordes née en 1960, fut modifiée en 1971 quand Claude Lovelace (voir [Lovelace 71]) s'aperçut qu'elle ne pouvait être physiquement consistante que si elle était formulée dans un espace-temps à 26 dimensions, dont 25 d'espace et une de temps. Cette théorie, dans laquelle toutes les vibrations des cordes donnent des bosons, n'est pas vraiment réaliste, puisque, d'une part, elle n'engendre pas les fermions, et que, d'autre part, elle est supposée contenir dans son spectre des particules supra-lumineuses – les tachyons – dont la probabilité d'existence est faible.

On constatera cependant que, dans ce «toy-model», utile pour passer de la représentation quantique classique à la nouvelle théorie des supercordes, on rencontre précisément ces procédures de régularisation signalées plus haut.

Par exemple, l'état fondamental d'une corde, dans cette théorie bosonique est :

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} k = -\frac{1}{24}$$

ce qu'on obtient généralement par une régularisation de type Eulerienne-Abélienne (mais qui pourrait s'obtenir aussi bien par l'une ou l'autre des régularisations précédentes), l'important étant que le résultat puisse se vérifier expérimentalement, ce qui est le cas. La fonction de partition de l'énergie d'une corde se propageant dans une direction donnée est :

$$Z = e^{-\frac{it}{2}\sum_{k=1}^{\infty} k}\Pi_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-e^{-int}} = e^{-\frac{it}{24}}\Pi_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-e^{-int}}.$$

ce qui s'obtient, là encore, par régularisation (voir [Polchinski 98]) et peut faire appel, là encore, à la fonction zêta.

On notera que la fonction précédente est l'équivalent d'une fonction de partition de l'énergie de 24 cordes se propageant chacune dans une direction. Comme la vibration d'une corde correspond à une surface, et donc nécessite déjà l'existence de 2 dimensions, la théorie globale des cordes bosoniques ne peut pas contenir moins de : 24+2 = 26 dimensions.

4.2 Brève histoire des applications physiques de la fonction zêta

On présentera ici l'évolution des connaissances touchant les applications physiques de la fonction zêta dans un ordre plus historique, en s'inspirant du résumé proposé par Elizalde (voir[Elizalde 12b])

Après les travaux théoriques de Hardy et Littlewood du début du XX^e siècle – dont on a déjà parlé – c'est le mathématicien suédois Torsten Carleman qui, en 1935, dans un article consacré aux «Propriétés asymptotiques des fonctions fondamentales des membranes vibrantes»(voir [Carleman 35]), a, pour la première fois utilisé la fonction zêta pour coder les valeurs propres du Laplacien d'une variété riemannienne compacte dans une région compacte du plan. C'était un premier pas dans la démarche d'extension du concept de fonction zêta qui permet de l'associer aujourd'hui au spectre d'un opérateur différentiel. Les résultats de Carleman furent ensuite étendus par Subbaramiah Minakshisundaram and Åke Pleijel en 1949, dans un article où ils montrent que, si A est le Laplacien d'une variété Riemannienne compacte, alors la fonction zêta correspondante $\zeta_A(s)$ converge et a un prolongement analytique à tout le plan complexe sous la forme d'une fonction méromorphe – un résultat tout à fait remarquable.

Un autre jalon de ce développement a été l'œuvre fondatrice de Robert Seeley, publiée en 1967, et concernant les puissances complexes d'un opérateur elliptique (voir [Seeley 66]). Dans cet article, Seeley a, à son tour, étendu le traitement exposé ci-dessus aux opérateurs pseudo-différentiels elliptiques généraux sur des variétés riemanniennes compactes. Il a notamment prouvé que, pour tous ces opérateurs, on peut définir rigoureusement un déterminant en utilisant la régularisation des fonctions zêta.

En 1971, Daniel B.Ray et Isadore M. Singer ont utilisé la théorie de Seeley dans leur célèbre article intitulé «R-torsion and the Laplacian on Riemannian manifolds» (voir [Ray 71]) pour définir le déterminant d'un opérateur auto-adjoint positif, A. Un tel opérateur est, dans leur explicite applications, le laplacien d'une variété riemannienne. Si on désigne ses valeurs propres par $a_1, a_2, ...$, alors sa fonction zêta est formellement donnée par la trace :

$$\zeta_A(s) = Tr(A^{-s}).$$

La méthode définit également le produit infini (éventuellement divergent) comme :

$$\Pi_{n=1}^{\infty} a_n = exp[-\zeta_{A'}(0)].$$

On en arrive alors à la contribution très importante de Stuart Dowker et Raymond Critchley. Dans leur travail fondateur, publié en 1976, «Effective Lagrangian and Energy-Momentum tensor in de Sitter space» (voir [Dowker 76], ces auteurs sont allés nettement plus loin dans l'application des procédures ci-dessus à la physique : ils ont en fait proposé, pour la première fois, une méthode générale de régularisation de la fonction zêta pour les systèmes physiques quantiques. Elle donne le lagrangien effectif renormalisé comme dérivé de la fonction zêta sur l'espace courbe. Cette méthode s'avère pratiquement identique à une méthode de régularisation dimensionnelle applicable à tout espace de Riemann.

Il est possible que les vastes possibilités d'utilisation de la procédure n'aient pas été, dans cet article, pleinement exploitées ni même anticipées. C'est sans doute la raison pour laquelle l'article de Stephen Hawking de 1977 (voir [Hawking 77]) est bien plus connu et même considéré par beaucoup comme la véritable référence séminale où la méthode de régularisation de la fonction zêta a été définie avec toute sa puissance de calcul, ses éventuelles applications physiques étant, cette fois-ci, clairement identifiées.

Depuis, la recherche s'est encore développée dans plusieurs directions et de nombreux résultats ont été publiés sur ces sujets au cours des 35 dernières années, menant sans doute à de futures nouvelles extensions. La plupart des applications récentes de la fonction zêta en physique tournent encore autour d'oscillateurs harmoniques ou différentiels et du calcul de certaines anomalies (voir [Elizalde 21]. Mais certaines sont, aujourd'hui, plus directement liées à la cosmologie (voir [Aref'eva 07]) et, pour une présentation pédagogique (voir [Elizalde 21]).

5 Conclusion

L'expression $\sum_{n>1} a_n = -1/12$, interprétée correctement au moyen de la fonction ζ, peut prendre un sens rigoureux. Il est alors possible de l'utiliser, sous certaines conditions mathématiques bien définies, dans les processus de régularisation ou de renormalisation nécessités par l'apparition d'infinis sous forme de sommes divergentes dans certains secteurs de la physique. L'expression de la somme des entiers, qui échappait aux procédés de régularisation de Cesaro ou d'Abel, mais qui, via la sommation particulière de Ramanujan, peut se récrire sous forme des fonctions zêta de Riemann, Epstein ou Barnes, trouve alors nombre d'applications physiques, notamment en physique quantique où elle ne se contente pas de permettre l'obtension de résultats finis, mais peut servir de transition entre des physiques de niveau différent ou des états (passé et futur) d'une seule et même physique.

Références

[Aleksandar 85] Aleksandar, I., *The Riemann Zeta-Function : Theory and Applications*, Reprint of *The Riemann Zeta-Function : The Theory of the Riemann Zeta-Function with Applications*, John Wiley & Sons, New York, 1985.

[Aoki 05] Aoki, T., Kanemitsu, S., Nakahara, M., *Zeta Function,Topology and Quantum Physics*, Springer, Boston (US), 2005.

[Aref'eva 07] Aref'eva I., Ya. and I.V. Volovich, I. V., «Quantization of the Riemann Zeta-Function and Cosmology», https ://arxiv.org/abs/hep-th/0701284v2.

[Ayoub 74] Ayoub, R., «Euler and the Zeta Function», *The American Mathematical Monthly*, Vol. 81, No. 10,1067-1086, 1974.

[Baez 08] Baez, J., «My Favorite numbers : 24», The Rankin Lectures, University of Glasgow, 2008.

[Berndt 39] Berndt, B. C., *Ramanujan's Notebooks*, Ramanujan's Theory of Divergent Series, Chapter 6, Springer-Verlag, Berlin, 1939) pp. 133-149.

[Blau 09] Steven K. Blau, S. K., Visser, M., Wipf, A., «Zeta Functions and the Casimir Energy», https ://arxiv.org/abs/0906.2817v1.

[Bressi 02] Bressi, Giacomo, et al. « Measurement of the Casimir force between parallel metallic surfaces. » *Physical review letters* 88, 4, 2002.

[Candelpergher 97] , Candelpergher, B., Coppo, M. A., Delabaere E., «La sommation de Ramanujan», *L'Enseignement Math ?ematique*, 43, 1997, 93-132.

[Carleman 35] Carleman, T., «Propriétés asymptotiques des fonctions fondamentales des membranes vibrantes», *Skand. Mat.-Kongr.*, 8, 34, 1935).

[Cartier 11] Cartier,P. *Frontiers in Number Theory, physics, and geometry I*, Springer, Berlin, Londres, 2011.

[Casimir 48] Casimir, H., «On the attraction between two perfectly conducting plates», (reprint from *Proceedings 51*, 1948, 793-795), in : *Gems from a century of science 1898-1997*, Centenary issue of the Proceedings of the Royal Netherlands Academy of Arts and Sciences, Schoonhoven, L.M. (eds), Amsterdam, 1997, 61-63.

[Cesàro 91] Cesàro, E., « Considerazioni sul concetto di probabilità », *Periodico di Matematica*, No 6, ? 1891, 1-26.

[Dowker 76] Dowker, J. S. and Critchley, R., «Effective Lagrangian and Energy-Momentum tensor in de Sitter space», *Phys. Rev.* D13, 3224, 1976.

[Edwards 74] Edwards, H. M., *Riemann's Zeta Function*, Reprint of the Academic Press, Inc., San Diego, 1974.

[Elizalde 94] , Elizalde, E., Odintsov S. D., Romeo, A., Bytsenko, A. A., Zerbini, S., *Zeta Regularization Techniques with Applications*, World Scientific, Singapour, 1994.

[Elizalde 00] Elizalde, E., «Zeta functions : formulas and applications», *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 118, 125-142, 2000.

[Elizalde 12a] , Elizalde, E., *Ten Physical Applications of Spectral Zeta Functions*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2012.

[Elizalde 12b] Elizalde, E., «Zeta function regularization in Casimir Effect calculations and J. S. Dowker's contribution», *International Journal of Modern Physics : Conference Series*, World Scientific Publishing Company - arXiv :1205.7032v1 - [math-ph] 31 May 2012.

[Elizalde 21] Elizald, E, «Zeta functions and the cosmos - A basic brief review», *Universe* 2021, 7, 5. https ://doi.org/10.3390/universe7010005.

[Ellison 78] Ellison, W, Ellison F., «Théorie des nombres», in J. Dieudonné (et al.), *Abrégé d'histoire des mathématiques 1700-1900*, 185-334, Hermann, Paris, 1978.

[Euler 40] Euler, L., «De summis serierum reciprocarum», *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, Volume 7, 123-134, 1740.

[Euler 44] Euler,L., «Variae observationes circa series infinitas», *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, Volume 9, 160-188, 1744.

[Euler 49] Euler, L., «Remarques sur un beau rapport entre les séries des puissances tant directes que réciproques«, *Mémoires de l'académie des sciences de Berlin*, Volume 17, pp. 83-106, 1768.

[Euler 31] Euler, L., «De summatione innumerabilium progressionum», *Euler Archive*, https ://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/20.

[Euler 32-3] Euler, L., «Methodus generalis summandi progressiones», *Euler Archive*, https ://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/25

[Euler 36] Euler, Leonhard, "Inventio summae cuiusque seriei ex dato termino generali". *Euler Archive*, https ://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/47.

[Ferraro 99] Ferraro, G., «The First Modern Definition of the Sum of a Divergent Series : An Aspect of the Rise of 20th Century Mathematics», *Archive for History of Exact Sciences*, 54 (2), 101-135.

[Grandi 03] Grandi, G. L., *Quadratura Circuli et Hyperbolae*, Typographia Franscisci Bindi, Impress. Archepisc, Superiorum Permissu, Pisis, 1703.

[Hardy 16] Hardy, G. H., Littlewood, J. E., «Contributions à la théorie de la fonction Zeta de Riemann et à la théorie de la distribution des primes», *Acta Math* 41, 119, 1916.

[Hardy 37] Hardy G. H., The Indian Mathematician Ramanujan, *Amer. Math. Monthly* 44 (1937), 137-155 ; reprinted in *Ramanujan/Twelve Lectures*, Cambridge University Press, 1940, pp. 1-21.

[Hardy 49] Hardy, G. H., *Divergent Series*, Clarendon Press, Oxford, 1949.

[Hawking 77] Hawking, S. W., «Effective Lagrangian and energy-momentum tensor in de Sitter space», *Commun. Math. Phys.* 55, 133, 1977.

[Iurato 14] Iurato, G., *On some historical aspects of the theory of Riemann zeta functions*, Université de Palerme, 2014.

[Kirsten 10] Kirsten, K., Williams, F.L., *A window into zeta and modular physics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[Knopp 90] Knopp, K., *Theory and Application of Infinite Series*, Dover Publications, New York, 1990.

[Korevaar 2004] , Korevaar, J., *Tauberian theory. A century of developments*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Springer Verlag, Berlin, 2004..

[Lambrecht 02] Lambrecht A. et Reynaud S., «Recent experiments on the Casimir effect : description and analysis», *séminaire Poincaré*, Paris, 9 mars 2002.

[Lambrecht 04] Lambrecht A., «La force qui vient du vide», *La Recherche*, 376, 48, 2004.

[Lovelace 71] Lovelace, C., «Pomeron form factors and dual Regge cuts», *Physics Letters*, B34 (6) : 500-506, 1971.

[Minakshisundaram 49] Minakshisundaram S. and Pleijel, A., «Some properties of the eigen- functions of the Laplace-operator on Riemannian manifolds», *Canad. J. Math.* 1, 242, 1949.

[Odintsov 11] Odintsov, S.D., Sáez-Gómez, D., Xambó-Descamps, *Cosmology, Quantum Vacuum and zeta functions*, Springer, Berlin, New-York, 2011.

[Parrochia 98] Parrochia, D., «Le vide quantique est-il un nouvel éther ?» dans E. Gunzig, S. Diner, *Le vide, univers du tout et du rien*, Bruxelles, Editions Complexe, 1998, p. 94-104.

[Parrochia 20] Parrochia, D., «Sur quelques formules de Ramanujan», https ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02615049.

[Polchinski 98] Polchinski, J., *String theory*, Vol. 1 : An introduction to the bosonic string, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge (USA), 1998.

[Ramanujan 85] , Ramanujan's Notebooks, Part 1 (Anglais), ed. B. C. Berndt, Springer Verlag, New Yok, Berlin, Heidelberg, 1985.

[Ray 71] Ray, D. B. and Singer, I. M. «R-torsion and the Laplacian on Riemannian manifolds», *Advances in Math.* 7, 145, 1971.

[Seeley 66] Seeley, R. T., «Pouvoirs complexes d'un opérateur elliptique», *Proc. Sympos. Pure Math.*, 288-307, Chicago, Ill., 1966), Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1967.

[Tauber 97] Tauber, A., «Ein Satz aus der Theorie der unendlichen Reihen (A theorem from the theory of infinite series)», *Monatsh. F. Math.* (in German), 8, 273-277, 1897.

[Weidlich] Weidlich, J. E., *Summability methods for divergent series*, Stanford M.S. theses, juin 1950.

[Zeidler 07] Zeidler (de), E. *Quantum Field Theory I : Basics in Mathematics and Physics : A Bridge between Mathematicians and Physicists*, Springer, Berlin, 2007.

Site Internet : «Number theory and physics archive», http ://empslocal.ex.ac.uk/people/staff/mrwatkin/zeta/physics.htm