



**HAL**  
open science

# Optimisation collaborative et par décomposition d'une sous-station ferroviaire hybride

Stephane Brisset, Maxime Ogier

► **To cite this version:**

Stephane Brisset, Maxime Ogier. Optimisation collaborative et par décomposition d'une sous-station ferroviaire hybride. Symposium de Génie Electrique, Université de Lorraine [UL], Jul 2018, Nancy, France. hal-02981894

**HAL Id: hal-02981894**

**<https://hal.science/hal-02981894>**

Submitted on 28 Oct 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Optimisation collaborative et par décomposition d'une sous-station ferroviaire hybride

Stéphane BRISSET

Univ. Lille, Centrale Lille, Arts et Metiers ParisTech, HEI, EA 2697 - L2EP – Laboratoire d'Electrotechnique et d'Electronique de Puissance, F-59000 Lille, France, E-mail: [stephane.brisset@centralelille.fr](mailto:stephane.brisset@centralelille.fr)

Maxime OGIER

Univ. Lille, CNRS, Centrale Lille, Inria, UMR 9189 – CRISTAL - Centre de Recherche en Informatique Signal et Automatique de Lille, F-59000 Lille, France, E-mail: [maxime.ogier@centralelille.fr](mailto:maxime.ogier@centralelille.fr)

**RESUME** –Trois approches sont proposées pour la conception par optimisation d'une sous-station ferroviaire hybride en considérant sa commande sur un horizon temporel d'une année. La première est basée sur une linéarisation par parties de la fonction coût et une résolution par programmation linéaire. Les deux autres décomposent le problème complet en deux niveaux de moindre dimensionnalité. L'optimisation collaborative le résout par une approche avec deux boucles imbriquées alors que la décomposition de Benders permet une résolution décomposée séquentielle. Cette dernière donne la même solution que la programmation linéaire en environ cinq fois plus de temps mais présente l'avantage de pouvoir être utilisée avec une fonction coût non linéaire.

*Mots-clés*—Sous-station ferroviaire hybride, système multi-sources, stockage d'énergie, optimisation collaborative, décomposition de Benders.

## 1. INTRODUCTION

En raison du développement du réseau ferré, la demande en puissance des sous-stations ferroviaires (SSF) devient de plus en plus importante [1]. L'intégration des énergies renouvelables peut compenser cette demande tout en réduisant la pollution. Néanmoins, l'intermittence de ces énergies rend difficile toute estimation de la puissance produite [2]. En introduisant un système de stockage, une SSF hybride (SSFH) peut assurer une bonne qualité de puissance et réduire le coût total [1]. Le système de stockage peut être utilisé avec précision selon la puissance consommée, la puissance produite et l'évolution des prix fixés par le fournisseur d'énergie [3]. Pour améliorer la conception d'une SSFH, la stratégie de contrôle du système de stockage doit être viable à long terme. Ceci conduit à un très grand nombre de variables de décision (52560 pour une durée d'une année et un changement de consigne toutes les 10 minutes).

Ce travail se place dans une thématique émergente et ambitieuse du génie électrique où le problème majeur est la conception de systèmes complexes pour lesquels les paramètres dimensionnels et de contrôle doivent être optimisés simultanément en raison de leur forte interaction [2]-[5]. Les générateurs d'énergie renouvelable tels que les panneaux

photovoltaïques [2], les éoliennes [3], et les houlomotrices [5] sont typiquement intermittents avec des variations journalières et saisonnières. L'utilisation d'un système de stockage d'énergie peut compenser les variations climatiques mais sa commande sur un horizon temporel large, typiquement une année ou plus, induit un grand nombre de paramètres et conduit à un problème d'optimisation de grande taille.

Trois approches peuvent être utilisées pour la conception par optimisation d'une SSFH. La première consiste à linéariser la fonction coût ce qui permet de modéliser le problème comme un programme linéaire (PL) et ainsi de résoudre ce modèle simplifié de manière efficace. Si la taille du problème est grande et que les fonctions ou contraintes sont non linéaires alors une méthode de décomposition peut être appliquée pour diviser le problème complet en sous-problèmes de moindre dimensionnalité. Dans ce papier, l'optimisation collaborative [6] et la décomposition de Benders [7] sont investiguées pour trouver une solution exacte au problème complet. Toutefois, la difficulté réside dans la coordination des sous-problèmes et leur convergence vers la solution du problème complet.

Dans les deux prochaines sections, le modèle et le problème d'optimisation de la SSFH sont présentés. La quatrième section détaille les hypothèses faites pour linéariser le problème et compare les besoins en mémoire de la PL selon que les inconnues sont les puissances ou les énergies du système de stockage. L'optimisation collaborative et la décomposition de Benders sont ensuite détaillées et appliquées au problème d'optimisation de la SSFH dans les sections 5 et 6. Les trois approches sont comparées en terme de précision et de temps de calcul dans la section 7. Pour finir, des conclusions et perspectives sont proposées.

## 2. MODELE DE LA SOUS-STATION FERROVIAIRE HYBRIDE

La SSFH étudiée est présentée en Fig. 1. Elle est composée de panneaux photovoltaïques, d'éoliennes et d'un système de stockage d'énergie, tous connectés à la caténaire en alternatif. Les productions d'énergie renouvelable sont illustrées par des flèches unidirectionnelles dans la Fig. 1.

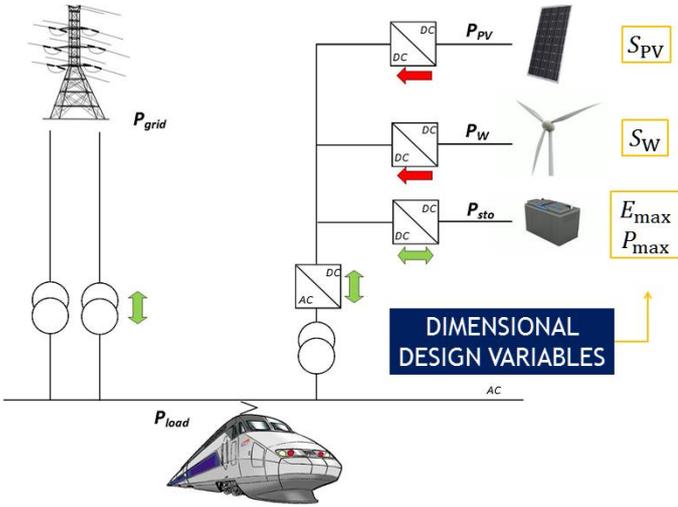


Fig. 1. Puissances échangées dans la SSFH et variables dimensionnelles.

La puissance des productions d'énergies renouvelables varie avec le temps et dépend de la surface des panneaux photovoltaïques  $S_{PV}$  et de la surface balayée par les pales des turbines des éoliennes  $S_W$  :

$$P_{PV}(t) = S_{PV} P_{irr}(t) \quad \forall t \in [0, T] \quad (1)$$

$$P_W(t) = k_p S_W v_{adj}^3(t) \quad \forall t \in [0, T] \quad (2)$$

$$\text{avec } v_{adj}(t) = \begin{cases} v_W(t) & 0 \leq v_W(t) < v_{rated} \\ v_{rated} & v_{rated} \leq v_W(t) \leq v_{off} \\ 0 & v_{off} < v_W(t) \end{cases}$$

où  $T$  est le temps final de l'horizon temporel,  $v_W(t)$  est la vitesse du vent en m/s,  $P_{irr}(t)$  est l'éclairement énergétique ou irradiance solaire en  $W/m^2$ ,  $v_{off}$  est la vitesse du vent en m/s pour laquelle on bloque la rotation des pales de la turbine,  $v_{rated}$  est la vitesse du vent nominale de la turbine en m/s, et  $k_p = \rho_{air} C_p / 2$  avec  $\rho_{air}$  la densité de l'air et  $C_p$  le coefficient de puissance de la turbine, supposé constant.

Toutes les puissances du système multi-sources doivent vérifier le bilan des puissances :

$$P_{load}(t) - P_{sto}(t) - P_{PV}(t) - P_W(t) - P_{grid}(t) = 0 \quad \forall t \in [0, T] \quad (3)$$

où  $P_{grid}(t)$  est la puissance provenant du réseau,  $P_{sto}(t)$  est la puissance provenant du système de stockage, et  $P_{load}(t)$  est la consommation des trains. De par les limitations en énergie et en puissance du système de stockage, il y a des bornes hautes et basses pour  $P_{sto}(t)$  et  $E_{sto}(t)$  comme exprimé dans (4) et (5) :

$$-P_{max} \leq P_{sto}(t) \leq P_{max} \quad \forall t \in [0, T] \quad (4)$$

$$0 \leq E_{sto}(t) \leq E_{max} \quad \forall t \in [0, T] \quad (5)$$

où les valeurs maximales de la puissance échangée  $P_{max}$  en W et de l'énergie stockée  $E_{max}$  en J définissent la capacité du stockage. A l'instant  $T$  de fin de l'horizon temporel, on souhaite que l'état de charge du stockage retourne à sa valeur initiale  $E_{ini}$  pour obtenir un fonctionnement périodique :

$$E_{sto}(T) = E_{ini} \quad (6)$$

La puissance  $P_{sto}(t)$  et l'énergie  $E_{sto}(t)$  peuvent toutes les deux exprimer les fluctuations temporelles du système de stockage. L'énergie stockée est calculée à partir de l'historique de  $P_{sto}(t)$  et de la valeur initiale de l'énergie dans le système de stockage  $E_{ini}$  en négligeant les pertes lors de la charge et de la décharge :

$$E_{sto}(t) = E_{ini} - \int_{\tau=0}^t P_{sto}(\tau) d\tau \quad \forall t \in [0, T] \quad (7)$$

Réciproquement, la puissance  $P_{sto}(t)$  peut être calculée par la dérivée de l'énergie stockée  $E_{sto}(t)$  :

$$P_{sto}(t) = -dE_{sto}(t)/dt \quad \forall t \in [0, T] \quad (8)$$

### 3. PROBLÈME D'OPTIMISATION DE LA SSFH

Dans les équations (1) à (8), les valeurs de la vitesse du vent  $v_W(t)$ , de l'irradiance solaire  $P_{irr}(t)$ , de la vitesse du vent pour laquelle on bloque la rotation des pales de la turbine  $v_{off}$ , de la vitesse du vent nominale de la turbine  $v_{rated}$ , et de la consommation des trains  $P_{load}(t)$  sont connues.

Pour résoudre le problème d'optimisation, le temps est discrétisé avec un pas  $\Delta t$  conduisant à  $n_t = T/\Delta t$  pas de temps. La mesure de la puissance moyenne consommée par les trains est faite toutes les 10 minutes par le compteur utilisé pour la facturation. Ainsi le pas de temps est pris égal à  $\Delta t = 600$  secondes. La vitesse du vent et l'irradiance solaire sont mesurées toutes les heures et des interpolations sont faites pour obtenir les valeurs toutes les 600 secondes. L'horizon temporel est réduit à une année car la variation la plus lente est celle de l'irradiance solaire, ce qui conduit à  $n_t = 52560$  pas de temps.

Il est maintenant possible d'écrire les formes discrétisées des équations (7) et (8),  $\forall i \in \llbracket 1, n_t \rrbracket$  :

$$E_{sto}(t = i \Delta t) = E_{sto,i} = E_{ini} - \Delta t \sum_{j=1}^i P_{sto,j} \quad (7d)$$

$$P_{sto}(t = i \Delta t) = P_{sto,i} = [E_{sto,i-1} - E_{sto,i}]/\Delta t \quad (8d)$$

avec  $E_{sto,0} = E_{ini}$

La fonction objectif est exprimée en (9) sur une période de fonctionnement de  $n_y = 20$  années, ce qui correspond à la durée de vie des équipements. On considère un coût d'investissement  $C_{inv}$  pour l'ensemble des équipements et un coût non linéaire de l'énergie pour l'achat et la vente d'électricité. Les caractères gras sont utilisés pour les vecteurs.

$$\text{OF}(S_{PV}, S_W, P_{max}, E_{max}, \mathbf{P}_{grid}) = C_{inv}(S_{PV}, S_W, P_{max}, E_{max}) + n_y \sum_{i=1}^{n_t} \text{cost}(P_{grid,i}) \quad (9)$$

Les variables de décision sont la surface des panneaux photovoltaïques  $S_{PV}$ , l'aire balayée par les pales des turbines des éoliennes  $S_W$ , la valeur maximale de la puissance stockée  $P_{max}$ , l'énergie maximale dans le système de stockage  $E_{max}$ , la valeur initiale de l'énergie stockée  $E_{ini}$ , et une variable de décision de grande dimension pour le contrôle du système de stockage qui peut être la puissance  $\mathbf{P}_{sto}$  ou l'énergie  $\mathbf{E}_{sto}$ . En conséquence, deux problèmes d'optimisation peuvent être formulés.

Dans la première formulation, la variable de décision pour le contrôle du système de stockage est la puissance  $P_{sto}(t)$  et (7d) est utilisée pour réécrire la forme discrétisée des équations (4) à (6) :

$$-P_{\max} \leq P_{\text{sto},i} \leq P_{\max} \quad \forall i \in \llbracket 1, n_t \rrbracket \quad (4d)$$

$$0 \leq E_{\text{ini}} - \Delta t \sum_{j=1}^i P_{\text{sto},j} \leq E_{\max} \quad \forall i \in \llbracket 1, n_t \rrbracket \quad (10)$$

$$\sum_{j=1}^{n_t} P_{\text{sto},j} = 0 \quad (11)$$

Les équations (1) à (3) sont regroupées pour exprimer la puissance provenant du réseau :

$$P_{\text{grid},i} = P_{\text{load},i} - P_{\text{sto},i} - S_{\text{PV}} P_{\text{irr},i} - k_p S_W v_{\text{adj},i}^3 \quad \forall i \in \llbracket 1, n_t \rrbracket \quad (12)$$

Ainsi, le problème d'optimisation avec la formulation en puissance est synthétisé par :

$$\min_{S_{\text{PV}}, S_W, P_{\max}, E_{\max}, E_{\text{ini}}, P_{\text{sto}}} \text{OF} \left( \begin{array}{l} S_{\text{PV}}, S_W, P_{\max}, E_{\max}, \\ P_{\text{load}} - P_{\text{sto}} - S_{\text{PV}} P_{\text{irr}} \\ -k_p S_W v_{\text{adj}}^3 \end{array} \right) \quad (13)$$

s. c. (4d), (10), (11)

$$S_{\text{PV}} \in R^+, S_W \in R^+, P_{\max} \in R^+ \\ E_{\max} \in R^+, E_{\text{ini}} \in R^+, P_{\text{sto}} \in R^{n_t}$$

Dans la seconde formulation, la variable de décision pour le contrôle du système de stockage est l'énergie et (8) est utilisée pour réécrire les équations (4) à (6) et (12) :

$$0 \leq E_{\text{sto},i} \leq E_{\max} \quad \forall i \in \llbracket 1, n_t \rrbracket \quad (5d)$$

$$E_{\text{sto},n_t} = E_{\text{ini}} \quad (6d)$$

$$-P_{\max} \Delta t \leq E_{\text{sto},i-1} - E_{\text{sto},i} \leq P_{\max} \Delta t \quad \forall i \in \llbracket 1, n_t \rrbracket \quad \text{avec} \quad E_{\text{sto},0} = E_{\text{ini}} \quad (14)$$

$$P_{\text{grid},i} = P_{\text{load},i} - \Delta E_{\text{sto},i} / \Delta t - S_{\text{PV}} P_{\text{irr},i} - k_p S_W v_{\text{adj},i}^3 \quad \forall i \in \llbracket 1, n_t \rrbracket \quad \text{avec} \quad \Delta E_{\text{sto},i} = E_{\text{sto},i-1} - E_{\text{sto},i} \quad (15)$$

Ainsi, le problème d'optimisation avec la formulation en énergie est synthétisé par :

$$\min_{S_{\text{PV}}, S_W, P_{\max}, E_{\max}, E_{\text{ini}}, E_{\text{sto}}} \text{OF} \left( \begin{array}{l} S_{\text{PV}}, S_W, P_{\max}, E_{\max}, \\ P_{\text{load}} - \Delta E_{\text{sto}} / \Delta t \\ -S_{\text{PV}} P_{\text{irr}} - k_p S_W v_{\text{adj}}^3 \end{array} \right) \quad (16)$$

s. c. (5d), (6d), (14)

$$S_{\text{PV}} \in R^+, S_W \in R^+, P_{\max} \in R^+ \\ E_{\max} \in R^+, E_{\text{ini}} \in R^+, E_{\text{sto}} \in R^{+n_t}$$

Pour résumer, les problèmes d'optimisation pour les deux formulations comportent  $n_t + 5 = 52565$  variables de décision, une fonction objectif non linéaire, et  $4 n_t = 210240$  contraintes inégalités linéaires. Notons que l'inégalité de gauche, i.e.  $0 \leq E_{\text{sto},i}$  dans (5d) pour le problème d'optimisation avec la formulation en énergie peut être retirée car la borne inférieure de l'énergie stockée est zéro. Ceci élimine  $n_t = 52560$  contraintes inégalités.

#### 4. LINÉARISATION DES COÛTS

Il existe différents tarifs sur le marché de l'électricité. Par exemple, le coût d'achat peut varier selon l'heure et le mois alors que le prix de vente des énergies renouvelables est souvent constant. Dans ce cas, le coût de l'énergie est une fonction

linéaire par parties de la puissance consommée ou produite selon l'heure, la date et la direction du flux d'énergie. D'autre part, le coût d'acheminement de l'électricité est une fonction non linéaire qui n'est pas investiguée dans ce papier mais constitue une perspective ambitieuse.

La puissance provenant du réseau  $P_{\text{grid}}$  est décomposée en deux parties, la puissance reçue  $P_{\text{grid}}^+$  et la puissance renvoyée  $P_{\text{grid}}^-$  en supposant qu'au moins une des parties est nulle :

$$P_{\text{grid},i} = P_{\text{grid},i}^+ + P_{\text{grid},i}^- \quad \forall i \in \llbracket 1, n_t \rrbracket \quad (17)$$

Ceci permet de changer la fonction coût non linéaire en une fonction linéaire par partie :

$$\text{cost}(P_{\text{grid},i}) = \Delta t [C_{\text{grid},i}^+ P_{\text{grid},i}^+ + C_{\text{grid},i}^- P_{\text{grid},i}^-] \quad \forall i \in \llbracket 1, n_t \rrbracket \quad (18)$$

où  $C_{\text{grid}}^+$  et  $C_{\text{grid}}^-$  sont respectivement les coût d'achat et de vente de l'électricité. Ils changent selon l'heure et la saison.

De plus, le coût d'investissement est supposé être une fonction linéaire :

$$C_{\text{inv}}(S_{\text{PV}}, S_W, P_{\max}, E_{\max}) = C_{\text{sto}}^E E_{\max} + C_{\text{sto}}^P P_{\max} + C_{\text{PV}} S_{\text{PV}} + C_W S_W \quad (19)$$

Comme un degré de liberté est introduit,  $P_{\text{grid}}^+$  et  $P_{\text{grid}}^-$  ne peuvent être déduits des autres puissances comme précédemment et le bilan des puissances exprimé dans (1) à (3) doit être réintroduit dans les formulations en puissance et en énergie respectivement par :

$$P_{\text{load},i} - P_{\text{sto},i} - S_{\text{PV}} P_{\text{irr},i} - k_p S_W v_{\text{adj},i}^3 - P_{\text{grid},i}^+ + P_{\text{grid},i}^- = 0 \quad \forall i \in \llbracket 1, n_t \rrbracket \quad (20)$$

$$P_{\text{load},i} - [E_{\text{sto},i-1} - E_{\text{sto},i}] / \Delta t - S_{\text{PV}} P_{\text{irr},i} - k_p S_W v_{\text{adj},i}^3 - P_{\text{grid},i}^+ + P_{\text{grid},i}^- = 0 \quad \forall i \in \llbracket 1, n_t \rrbracket \quad (21)$$

Ainsi, les problèmes d'optimisation linéaire avec les formulations en puissance et en énergie sont respectivement synthétisés par :

$$\min_{S_{\text{PV}}, S_W, P_{\max}, E_{\max}, E_{\text{ini}}, P_{\text{sto}}, P_{\text{grid}}^+, P_{\text{grid}}^-} \left\{ \begin{array}{l} C_{\text{sto}}^E E_{\max} + C_{\text{sto}}^P P_{\max} \\ + C_{\text{PV}} S_{\text{PV}} + C_W S_W \\ + n_y \Delta t \sum_{i=1}^{n_t} (C_{\text{grid},i}^+ P_{\text{grid},i}^+ \\ + C_{\text{grid},i}^- P_{\text{grid},i}^-) \end{array} \right\} \quad (22)$$

s. c. (4d), (10), (11), (20)

$$S_{\text{PV}} \in R^+, S_W \in R^+, P_{\max} \in R^+, E_{\max} \in R^+, \\ E_{\text{ini}} \in R^+, P_{\text{sto}} \in R^{n_t}, P_{\text{grid}}^+ \in R^{+n_t}, P_{\text{grid}}^- \in R^{-n_t}$$

$$\min_{S_{\text{PV}}, S_W, P_{\max}, E_{\max}, E_{\text{ini}}, E_{\text{sto}}, P_{\text{grid}}^+, P_{\text{grid}}^-} \left\{ \begin{array}{l} C_{\text{sto}}^E E_{\max} + C_{\text{sto}}^P P_{\max} \\ + C_{\text{PV}} S_{\text{PV}} + C_W S_W \\ + n_y \Delta t \sum_{i=1}^{n_t} (C_{\text{grid},i}^+ P_{\text{grid},i}^+ \\ + C_{\text{grid},i}^- P_{\text{grid},i}^-) \end{array} \right\} \quad (23)$$

s. c. (5d), (6d), (14), (21)

$$S_{\text{PV}} \in R^+, S_W \in R^+, P_{\max} \in R^+, E_{\max} \in R^+, \\ E_{\text{ini}} \in R^+, E_{\text{sto}} \in R^{+n_t}, P_{\text{grid}}^+ \in R^{+n_t}, P_{\text{grid}}^- \in R^{-n_t}$$

Tableau 1. Description des deux formulations pour le problème d'optimisation linéaire

Formulation		Puissance	Energie
Variables	Communes	$S_{PV}, S_W, E_{max}, P_{max}, E_{ini}, P_{grid}^+, P_{grid}^-$	
	Spécifiques	$P_{sto}$	$E_{sto}$
Contraintes	Limites en énergie	$0 \leq E_{ini} - \Delta t \sum_{j=1}^i P_{sto,j} \leq E_{max}$	$0 \leq E_{sto,i} \leq E_{max}$
	Limites en puissance	$-P_{max} \leq P_{sto,i} \leq P_{max}$	$-P_{max} \Delta t \leq E_{sto,i-1} - E_{sto,i} \leq P_{max} \Delta t$
	Périodicité	$\sum_{i=1}^{n_t} P_{sto,i} = 0$	$E_{sto,n_t} = E_{ini}$

Tableau 2. Comparaison des besoins en mémoire pour les deux formulations ( $n_t = 52560$ )

Formulation	Puissance		Energie	
	Expression	Mémoire	Expression	Mémoire
Taille des matrices	$(5 n_t + 1)(3 n_t + 5)$	309 Go (pleine)	$(4 n_t + 1)(3 n_t + 5)$	247 Go (pleine)
Nombre de termes non-nuls	$14 n_t + n_t^2$	62 Go (creuse)	$14 n_t + 4$	17 Mo (creuse)

Pour les deux formulations, les problèmes d'optimisation linéaire comportent  $3 n_t + 5 = 157685$  variables de décision, une fonction objectif,  $n_t + 1 = 52561$  contraintes égalités, et  $4 n_t = 210240$  contraintes inégalités. Le tableau 1 résume les variables de décision et les contraintes pour les deux formulations.

La programmation linéaire (LP) est utilisée pour résoudre le problème d'optimisation pour les deux formulations. Dans Matlab, des matrices spécifiques sont utilisées pour exprimer les contraintes égalités et inégalités. Pour un pas de temps de 10 minutes, chaque variable temporelle conduit à 52560 inconnues pour un horizon temporel d'une année ainsi des matrices creuses sont utilisées pour réduire la mémoire nécessaire. Dans le tableau 2, les deux formulations sont comparées en précisant la taille des matrices nécessaires pour exprimer les contraintes égalités et inégalités ainsi que la quantité de mémoire requise pour les stocker en utilisant des matrices pleines et creuses.

Les figures 2a et 2b présentent les termes non-nuls dans les matrices utilisées pour exprimer les contraintes égalités et inégalités respectivement pour les formulations en puissance et en énergie pour un horizon temporel d'une journée, i.e. 144 pas de temps. Chaque colonne est pour une variable et chaque ligne pour une contrainte. Sur la figure 2a, on remarque que la formulation en puissance conduit à un plus grand nombre de termes non-nuls, ce qui rend difficile le stockage des matrices pour un grand nombre de variables de décision.

En utilisant la formulation en énergie, la mémoire nécessaire est grandement réduite et l'optimisation de la SSFH est terminée en environ une minute sur un ordinateur portable pour un horizon temporel d'une année. L'implémentation est faite avec Matlab 2015b et l'algorithme dual-simplexe dans la fonction linprog de Optimization toolbox. La tolérance a été réduite à  $10^{-9}$  pour atteindre une bonne précision sur une année complète. Les autres options prennent les valeurs par défaut.

La linéarisation des coûts apparait comme une bonne façon d'obtenir une solution approchée du problème d'optimisation d'une SSFH mais la perspective est d'optimiser avec les coûts

réels qui s'expriment dans une fonction non linéaire. Ainsi, de nouvelles stratégies sont nécessaires pour une optimisation non linéaire avec un grand nombre de variables de décision.

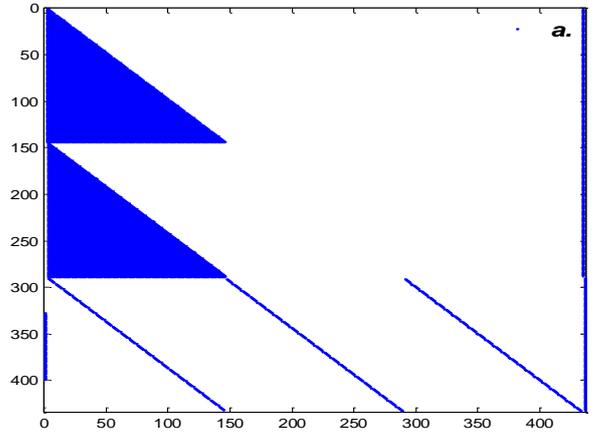


Fig. 2a. Matrices pour une journée avec la formulation en puissance.

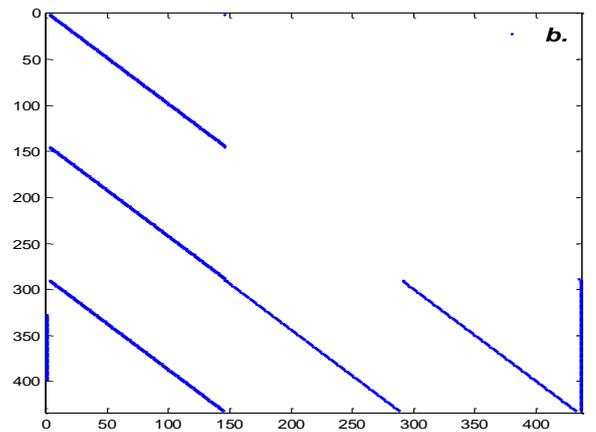


Fig. 2b. Matrices pour une journée avec la formulation en énergie.

## 5. OPTIMISATION COLLABORATIVE

Le principe de l'optimisation collaborative est de décomposer le problème complet en plusieurs sous-problèmes avec un moindre nombre de variables de décision [6]. La programmation quadratique séquentielle (SQP) fait partie des algorithmes capables de résoudre des problèmes d'optimisation non linéaire avec de nombreuses contraintes actives à l'optimum et un nombre réduit d'évaluations. La méthode du point intérieur (IPM) permet de traiter davantage de variables de décision mais la précision de la solution peut se dégrader en raison de la méthode des barrières utilisée pour les contraintes.

Des tentatives pour résoudre les problèmes (13) et (16) en utilisant SQP et IPM ont été menées avec un nombre croissant de pas de temps (Fig. 3). Il apparaît que la convergence n'est pas atteinte en un temps raisonnable pour SQP au-delà de 432 pas de temps (3 jours) alors que la limite de IPM est 1296 (9 jours). Pour un nombre croissant de pas de temps, IPM donne de meilleurs résultats en un temps moindre comparé à SQP. Toutefois, seule la solution trouvée par SQP pour une journée est aussi bonne que LP.

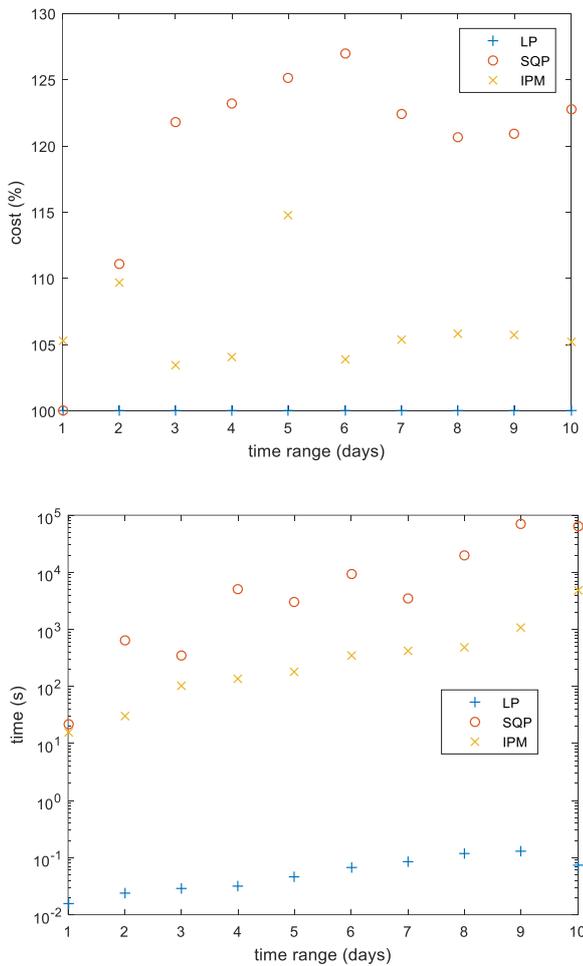


Fig. 3. Comparaison des algorithmes pour résoudre le problème complet de la SSFH. Le coût est normalisé par rapport à LP.

Par conséquent, la décomposition du problème de la SSFH est guidée par le nombre de variables dans chaque sous-problème. Il est proposé de décomposer en deux niveaux : année et jour. Au niveau de l'année, les variables décisionnelles sont les 4 paramètres dimensionnels qui ne dépendent pas du temps. Au niveau des jours, l'année complète est décomposée en  $n_d = 365$  jours avec des optimisations en parallèle. C'est rendu possible en ajoutant des variables de liaison au niveau année qui

sont les énergies dans le système de stockage au début et à la fin de chaque journée. Le nombre de variables de décision pour une journée est  $n_t/n_d = 144$ , qui correspond également au nombre de pas de temps pour une journée, i.e. 24 heures multipliées par 6 pas de temps par heure. Au niveau année, le nombre de variables de décision est  $n_d + 4 = 369$  correspondant à  $n_d = 365$  variables de liaison et 4 paramètres dimensionnels.

Les minimums des coûts d'énergie (24) au niveau jour pour des valeurs données des variables dimensionnelles et de liaison sont trouvés par  $n_d$  optimisation en parallèle et ajoutés dans le second terme de la fonction objectif (25) au niveau année.

$$C_{ener,d} = \min_{E_{sto}} \sum_{i=1+(d-1)n_t/n_d}^{d n_t/n_d} cost(P_{load,i} - P_{PV,i} - P_{W,i} - [E_{sto,i-1} - E_{sto,i}]/\Delta t) \quad (24)$$

$$s. c. \begin{cases} E_{sto,(d-1)n_t/n_d} = E_{ini,d} \\ E_{sto,d n_t/n_d} = E_{ini,d+1} \\ E_{sto} \in R^{+n_t/n_d}, (5d), (14) \end{cases}$$

$$OF(S_{PV}, S_W, P_{max}, E_{max}, \mathbf{E}_{ini}) = C_{inv}(S_{PV}, S_W, P_{max}, E_{max}) + n_y \sum_{d=1}^{n_d} C_{ener,d} \quad (25)$$

Comme la fonction objectif au niveau année inclut les résultats des optimisations au niveau jour, ces dernières sont intégrées dans le modèle au niveau année (Fig. 4). Ceci conduit à une approche double boucle avec un grand temps de calcul et une convergence lente. Deux cas sont considérés pour la boucle intérieure. Dans le premier cas (CO 1st case), le coût de l'énergie est une fonction non linéaire et les problèmes (24) sont résolus avec la programmation non linéaire (NLP) en calcul distribué. Dans le second cas (CO 2nd case), le coût de l'énergie est une fonction linéaire par partie et les problèmes (24) sont résolus par LP.

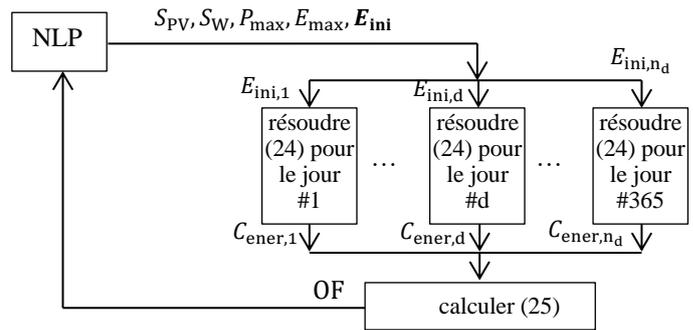


Fig. 4. Structure de l'optimisation collaborative à deux boucles imbriquées.

Dans les deux cas, la boucle externe qui minimise (25) nécessite une NLP car le coût de l'énergie pour chaque journée  $C_{ener,d}$  est une fonction implicite. Les dérivées de  $C_{ener,d}$  par rapport aux variables  $S_{PV}, S_W, P_{max}, E_{max}, \mathbf{E}_{ini}$  sont calculées par différence finie. Il n'y a aucune garantie de convergence de la boucle externe du fait que  $C_{ener,d}$  peut ne pas être convexe. Toutefois, toutes les contraintes sont linéaires et ainsi l'espace de recherche est convexe.

Cette approche double boucle a un temps de calcul trop long même pour un horizon temporel réduit dans le premier cas alors que la même solution que LP est trouvée dans le second cas avec un temps de calcul raisonnable pour quelques jours (Fig. 5). L'optimisation collaborative avec la LP en boucle interne sera investiguée en partie 7 pour une année complète.

## 6. OPTIMISATION PAR DÉCOMPOSITION

L'avantage de l'optimisation par décomposition est d'éviter l'optimisation intégrées au modèle au niveau système (année) en utilisant une approche où les optimisations à chaque niveau sont résolues séquentiellement. Au niveau année, l'optimisation est résolue en utilisant des modèles de substitution  $\tilde{C}_{ener,d}$  des résultats des optimisations au niveau jour  $C_{ener,d}$  pour chaque journée.

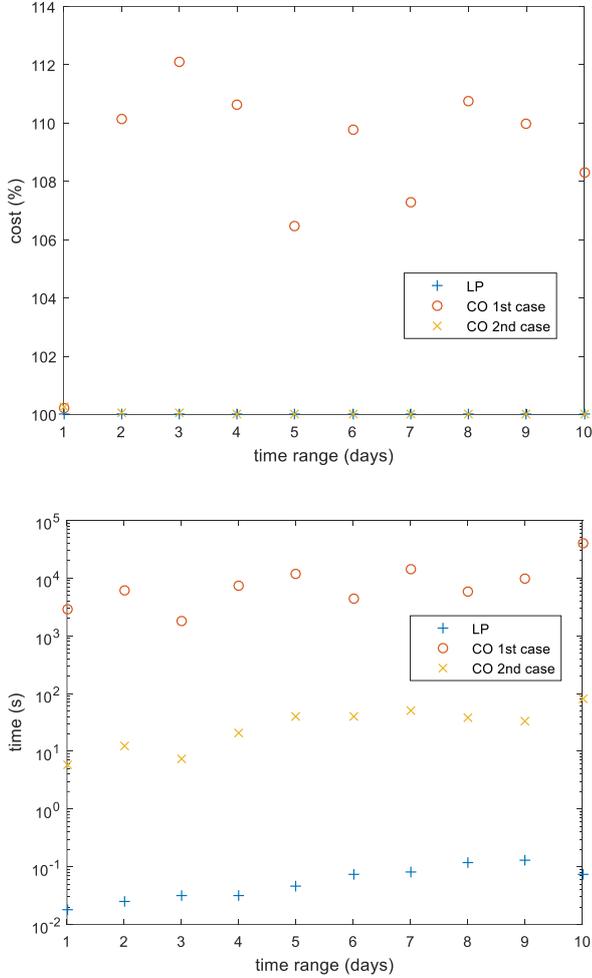


Fig. 5. Comparaison des algorithmes pour résoudre le problème de la SSFH avec une approche double boucle. Le coût est normalisé par rapport à LP.

Ainsi, les optimisations coûteuses au niveau jour sont remplacées par des évaluations rapides de fonction au niveau année. Ensuite, des optimisations sont faites au niveau jour et les modèles de substitution sont affinés. La boucle entre les niveaux se termine lorsque l'écart entre les modèles de substitution et les coûts minimums de l'énergie sont négligeables. La figure 6 donne l'organigramme de cette approche dont les étapes sont détaillées ci-dessous.

Puisque la fonction objectif  $C_{ener,d} = f(E_{sto,1+(d-1)n_t/n_d}, \dots, E_{sto,d n_t/n_d})$  exprimée dans (24) est une fonction explicite des variables de décision au niveau jour, la difficulté est de construire un modèle de substitution  $\tilde{C}_{ener,d} = s_d(E_{max}, P_{max}, S_{PV}, S_W, E_{ini,d}, E_{ini,d+1})$  qui soit une fonction explicite des variables de décision au niveau année.

Basée sur la théorie de la dualité, la décomposition de Benders [7]-[8] tire avantage des informations sur les multiplicateurs de Lagrange pour définir une borne inférieure pour la fonction objectif des sous-problèmes. Lorsque la

fonction objectif et les contraintes des sous-problèmes (au niveau jour) sont linéaires, et que la fonction objectif et les contraintes du problème maître (au niveau année) sont continues alors la décomposition de Benders converge en un nombre fini d'itérations [8]. Si le problème complet a une solution optimale de valeur finie, la décomposition de Benders converge vers la solution optimale. Par conséquent, l'utilisation de la décomposition de Benders sur les problèmes (22) ou (23) donne une solution optimale. Si la fonction objectif ou les contraintes des sous-problèmes ne sont plus linéaires, le problème complet peut être résolu en utilisant la décomposition de Benders généralisée [9]. La convergence de cette méthode est prouvée lorsque les sous-problèmes consistent à minimiser une fonction convexe soumis à un ensemble de contraintes convexes [9].

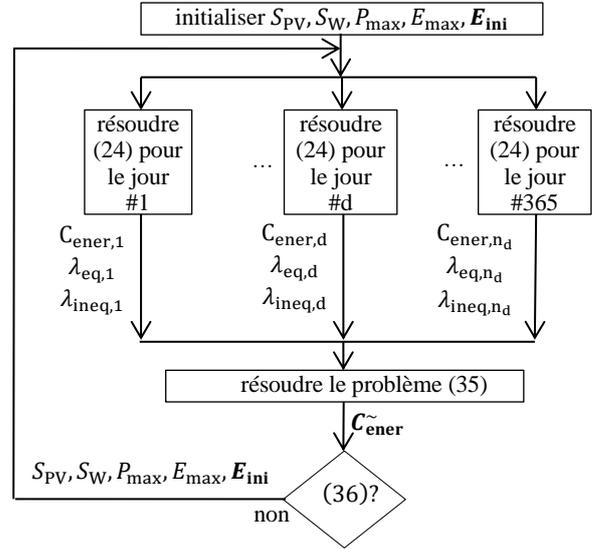


Fig. 6. Structure séquentielle de l'optimisation multiniveau.

Pour le problème d'optimisation de la SSFH, la fonction objectif des sous-problèmes est le coût de l'énergie pour chaque jour. Lors de la résolution des sous-problèmes, les variables de décision  $E_{max}, P_{max}, S_{PV}, S_W, E_{ini}$  au niveau année sont constantes. Les contraintes (5d), (6d), (14) et (15) sont réécrites de telle sorte que ces variables apparaissent dans le terme de droite :

$$E_{sto,i} \leq E_{max} \quad \forall i \in \llbracket 1 + (d-1)n_t/n_d, d n_t/n_d \rrbracket \quad (26)$$

$$-E_{sto,1+(d-1)n_t/n_d} \leq P_{max} \Delta t - E_{ini,d} \quad (27)$$

$$E_{sto,i-1} - E_{sto,i} \leq P_{max} \Delta t \quad \forall i \in \llbracket 2 + (d-1)n_t/n_d, d n_t/n_d \rrbracket \quad (28)$$

$$E_{sto,1+(d-1)n_t/n_d} \leq P_{max} \Delta t + E_{ini,d} \quad (29)$$

$$E_{sto,i} - E_{sto,i-1} \leq P_{max} \Delta t \quad \forall i \in \llbracket 2 + (d-1)n_t/n_d, d n_t/n_d \rrbracket \quad (30)$$

$$-E_{sto,1+(d-1)n_t/n_d} + P_{grid,1+(d-1)n_t/n_d} \Delta t = P_{load,1+(d-1)n_t/n_d} \Delta t - S_{PV} P_{irr,1+(d-1)n_t/n_d} \Delta t - k_p S_W v_{adj,1+(d-1)n_t/n_d}^3 \Delta t - E_{ini,d} \quad (31)$$

$$E_{sto,i-1} - E_{sto,i} + P_{grid,i} \Delta t = [P_{load,i} - S_{PV} P_{irr,i} - k_p S_W v_{adj,i}^3] \Delta t \quad \forall i \in \llbracket 2 + (d-1)n_t/n_d, d n_t/n_d \rrbracket \quad (32)$$

$$E_{sto,n_t/n_d} = E_{ini,d+1} \quad (33)$$

L'algorithme débute avec des valeurs initiales pour les variables de décision au niveau année. Après la résolution des sous-problèmes, les multiplicateurs de Lagrange sont disponibles pour toutes les contraintes des sous-problèmes :

(26),  $(\lambda_{ineq1,i})_{1+(d-1)n_t/n_d \leq i \leq d n_t/n_d}$  pour les contraintes inégalités (27),  $\lambda_{ineq2,1+(d-1)n_t/n_d}$  pour (28),  $(\lambda_{ineq2,i})_{2+(d-1)n_t/n_d \leq i \leq d n_t/n_d}$  pour (29),  $(\lambda_{ineq3,i})_{2+(d-1)n_t/n_d \leq i \leq d n_t/n_d}$  pour (30),  $\lambda_{eq1,1+(d-1)n_t/n_d}$  pour les contraintes égalités (31),  $(\lambda_{eq1,i})_{2+(d-1)n_t/n_d \leq i \leq d n_t/n_d}$  pour (32), et  $\lambda_{eq2}$  pour (33).

Le multiplicateur est une mesure de la décroissance attendue du coût de l'énergie pour un accroissement du terme de droite des contraintes du sous-problème. Comme tous les termes de droite sont des expressions explicites des variables au niveau année sous forme de fonctions linéaires, les bornes inférieures pour tous les coûts de l'énergie  $\tilde{C}_{ener}$  sont déduits et introduits comme contraintes additionnelles (34) dans le problème d'optimisation au niveau année :

$$\begin{aligned} & -\tilde{C}_{ener,d} - \sum_{i=1+(d-1)n_t/n_d}^{d n_t/n_d} \lambda_{ineq1,i} E_{max} \\ & - \sum_{i=1+(d-1)n_t/n_d}^{d n_t/n_d} (\lambda_{ineq2,i} + \lambda_{ineq3,i}) P_{max} \Delta t \\ & (\lambda_{ineq2,1+(d-1)n_t/n_d} - \lambda_{ineq3,1+(d-1)n_t/n_d} \\ & + \lambda_{eq1,1+(d-1)n_t/n_d}) E_{ini,d} - \lambda_{eq2} E_{ini,d+1} \\ & + \Delta t [\lambda_{eq1,1+(d-1)n_t/n_d} \quad \dots \quad \lambda_{eq1,d n_t/n_d}] \cdot \\ & \left\{ \begin{array}{l} P_{irr,1+(d-1)n_t/n_d} \\ \vdots \\ P_{irr,d n_t/n_d} \end{array} \right\} S_{PV} + k_p \left\{ \begin{array}{l} v_{adj,1+(d-1)n_t/n_d}^3 \\ \vdots \\ v_{adj,d n_t/n_d}^3 \end{array} \right\} S_W \quad (34) \\ & \leq [\lambda_{eq1,1+(d-1)n_t/n_d} \quad \dots \quad \lambda_{eq1,d n_t/n_d}] \cdot \\ & \left[ \begin{array}{l} P_{load,1+(d-1)n_t/n_d} \\ \vdots \\ P_{load,d n_t/n_d} \end{array} \right] \Delta t \end{aligned}$$

Le problème maître (35) au niveau année est ensuite résolu en ajoutant ces contraintes additionnelles, une pour chaque jour, et de nouvelles valeurs pour les variables de décision au niveau année sont déduites tout comme les valeurs attendues du coût de l'énergie pour chaque jour,  $\tilde{C}_{ener,d}$ . A chaque itération,  $n_d$  nouvelles contraintes sur les coûts de l'énergie sont ajoutées.

$$\begin{aligned} & \min_{S_{PV}, S_W, P_{max}} C_{inv}(S_{PV}, S_W, P_{max}, E_{max}) \\ & + n_y \sum_{d=1}^{n_d} \tilde{C}_{ener,d} \\ & \text{s. c. (34)} \quad \forall d \in \llbracket 1, n_d \rrbracket \\ & S_{PV} \in R^+, S_W \in R^+, P_{max} \in R^+ \\ & E_{max} \in R^+, E_{ini} \in R^{n_d}, \tilde{C}_{ener} \in R^{n_d} \end{aligned} \quad (35)$$

L'algorithme s'arrête si l'écart entre la somme des coûts de l'énergie à chaque niveau est suffisamment petit :

$$\left| \sum_{d=1}^{n_d} \tilde{C}_{ener,d} - \sum_{d=1}^{n_d} C_{ener,d} \right| \leq \varepsilon \quad (36)$$

où  $\varepsilon$  est la précision choisie égale à 1€ ce qui représente une précision relative sur la valeur de la fonction objectif d'environ  $10^{-7}$ .

## 7. RÉSULTATS ET COMPARAISON

Dans le but de comparer les résultats de l'optimisation collaborative et de la décomposition de Benders avec la programmation linéaire, le coût de l'énergie est supposé linéaire par partie. Comme attendu, la LP donne le coût total le plus faible dans le temps de calcul le plus court et fait office de référence pour la comparaison.

La figure 7 montre la valeur du coût total et du temps de calcul pour les trois approches lorsque que le nombre de jours considérés dans le problème augmente. LP désigne la programmation linéaire, CO l'optimisation collaborative, et BD la décomposition de Benders. Le coût est normalisé par rapport à la valeur obtenue avec LP. On observe que BD donne la même solution que LP avec un temps de calcul environ 5 fois supérieur mais ce rapport diminue quand le nombre de jours considérés augmente. CO échoue pour un horizon temporel supérieur à 120 jours et son temps de calcul est environ mille fois celui de LP.

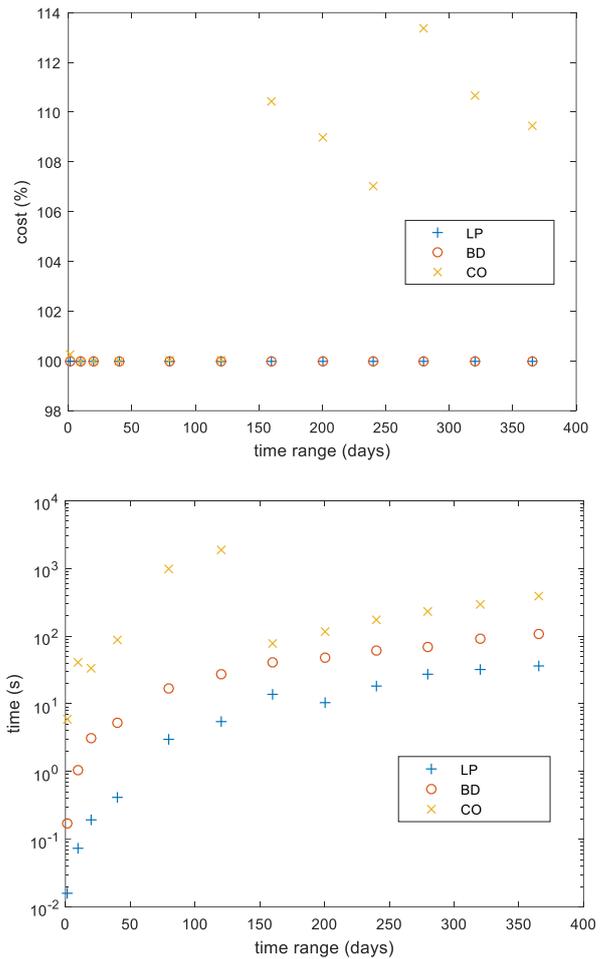


Fig. 7. Comparaison des approches pour optimiser la SSFH.

## 8. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

La décomposition de Benders apparaît comme très efficace pour l'optimisation d'une SSFH incluant la commande du système de stockage sur un horizon temporel très large.

Pour une fonction du coût de l'énergie linéaire par partie, la conception de la SSFH par optimisation sur une année complète est faite en quelques minutes sur un ordinateur portable. La solution trouvée est la même que celle trouvée par la programmation linéaire avec un temps de calcul environ 5 fois supérieur, ce qui est acceptable. L'optimisation collaborative

n'est pas parvenue à trouver la même solution et son temps de calcul est au moins cent fois supérieur.

Parmi les perspectives intéressantes pour l'application de la décomposition de Benders, on peut envisager que la fonction coût soit non linéaire dans les sous-problèmes et imaginer d'avoir des variables de décision entières dans le problème maître pour modéliser plus finement la SSFH.

## 9. REFERENCES

- [1] M. Aeberhard, C. Courtois, and P. Ladoux, "Railway traction power supply from the state of the art to future trends", International Symposium on Power Electronics Electrical Drives Automation and Motion (SPEEDAM), pp. 1350–1355, 2010.
- [2] C. Clastres, T. Ha Pham, F. Wurtz, and S. Bacha, "Ancillary services and optimal household energy management with photovoltaic production", Energy, vol. 35, no. 1, pp. 55–64, 2010.
- [3] R. Rigo-Mariani, B. Sareni, and X. Roboam, "Optimal sizing integrating power management for a microgrid with storage", Optimization and Inverse Problems in Electromagnetic, Delft, Holland, 2014.
- [4] H.K. Fathy, J.A. Reyer, P.Y. Papalambros and A.G. Ulsoy, "On the coupling between the plant and controller optimization problems", Proceedings of the American Control Conference, Arlington, VA, June 25-27, 2001.
- [5] J. Aubry, H. Ben Ahmed, and B. Multon, "Sizing optimization methodology of a surface permanent magnet machine-converter system over a torque-speed operating profile : Application to wave energy converter", IEEE Trans. Industrial Electronics, vol. 59, no. 5, pp. 2116-2125, 2012.
- [6] P.M. Zadeh, V.V. Toropov, and A.S. Wood. "Metamodel-based collaborative optimization framework", Structural and Multidisciplinary Optimization, vol. 38, no. 2, pp. 103-115, 2009.
- [7] A.M. Costa, "A survey on Benders decomposition applied to fixed-charge network design problems", Computers & Operations Research, vol. 32, no. 6, pp. 1429-1450, 2005.
- [8] J.F. Benders, "Partitioning Procedures for Solving Mixed-Variables Programming Problems", Numerische Mathematik, vol. 4, no. 1, pp. 238-252, 1962.
- [9] A.M. Geoffrion, "Generalized benders decomposition", Journal of optimization theory and applications, vol. 10, no. 4, pp. 237-260, 1972.