



HAL
open science

Topologia, Geometria e Buracos Negros

Fábio Dadam, Yuri Ximenes Martins

► **To cite this version:**

Fábio Dadam, Yuri Ximenes Martins. Topologia, Geometria e Buracos Negros. 2016, 978-3841718242.
hal-02908935

HAL Id: hal-02908935

<https://hal.science/hal-02908935>

Submitted on 29 Jul 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Topologia, Geometria e Buracos Negros

Fábio Dadam e Yuri Ximenes Martins

Prefácio

A interconexão entre física e matemática se tornou mais profícua após as teorias revolucionárias do início do século XX, dentre as quais se destacam a relatividade geral e a mecânica quântica. Com efeito, tais teorias pretendem explicar fenômenos do mundo astronômico e do mundo subatômico, os quais se encontram distantes da experimentação direta e cujo comportamento se revelou espantosamente contra-intuitivo (por exemplo, a simulação das condições necessárias à verificação de previsões das teorias atuais envolve a construção de aceleradores de partículas imensos, como o LHC, e observatórios astronômicos de complicada e dispendiosa tecnologia, como o LIGO). Neste cenário, não há opção senão a de confiar no modelo matemático subjacente.

Deve-se salientar que o fortalecimento dos vínculos entre a física e a matemática só tende a alavancar o avanço de ambas as partes. Com efeito, se sem experimentos a física torna-se cega, neste momento de escuridão, é pelos olhos da matemática que ela se guia. De outro lado, se por vezes a matemática se prende à rigidez e ao pragmatismo de seus métodos, é através dos *insights* e da criatividade utilizada na física que novas teorias (assim como relações entre as teorias e ferramentas já existentes) são criadas. Sobre este último ponto, ressaltamos a construção de invariantes para variedades de dimensão quatro através de métodos inspirados nas teorias quânticas de campos topológicas, os quais renderam as medalhas Fields de Donaldson, Freedman, Jones e Witten.

Ainda que os benefícios de uma relação próxima entre física e matemática sejam bastante claros, deve-se ter em mente que os frutos colhidos em certas ocasiões, como as medalhas Fields anteriormente citadas, não refletem a situação atual entre estas duas disciplinas (tratam-se apenas de exemplos isolados). Acreditamos que a

razão seja simples: *para que física e matemática se aproximem, é necessário, antes de qualquer coisa, que consigam conversar.* Eis que a formação atual sujeitada aos físicos é bastante diferente daquela propiciada aos matemáticos. Sem uma linguagem em comum, não há como se iniciar uma conversa, ainda que exista um objetivo comunitário.

Como contornar o problema? Evidentemente, deve-se convencer físicos de que estudar matemática é importante, ao mesmo tempo que se precisa fazer com que matemáticos vejam que a falta de rigor e de pragmatismo presente no pensamento físico pode ser utilizada como inspiração à criação de diversas ferramentas de trabalho. Assim, precisa-se de materiais de estudo que sejam compatíveis com ambos os tipos de pensamento.

No que diz respeito aos físicos, não se deve esperar que eles voltem aos fundamentos da matemática e que estudem cada etapa da mesma forma que um matemático o fez. Afinal, não se quer que físicos se tornem efetivos matemáticos, mas apenas que consigam conversar com eles. Por exemplo, ao se apresentar um texto de 500 páginas sobre topologia a um físico, dizendo-lhe que o estudo daquela disciplina é deveras importante, não se pode culpá-lo caso rejeite a leitura. Da mesma forma, não adianta lhe apresentar um material seco, com pouquíssimas páginas e que seja recheado de pré-requisitos e afirmações nas entrelinhas. *Precisa-se, portanto, de um material sucinto e intuitivo, mas ao mesmo tempo livre de grandes pré-requisitos.*

No que se refere aos matemáticos, ao lhe entregar um texto escrito por um físico, é natural que ele logo relute em prosseguir com a leitura. Afinal, os conceitos lá desenvolvidos não são precisos o suficiente e, mesmo que o sejam, nem sempre estão presentes com a devida elegância. Além disso, os resultados não são enunciados levando-se em conta as hipóteses utilizadas ao longo da demonstração. Desta forma, para agradar aos matemáticos, *precisa-se de um material que esclareça as estruturas utilizadas, assim como tenha um ar minimamente pragmático.*

A ideia de escrever o presente livro surgiu da percepção dos autores de que há uma carência (especialmente em língua portuguesa) de textos direcionados simultaneamente a físicos e matemáticos que tenham o espírito das condições anteriormente listadas. Assim, pode-se dizer que ao longo de toda a escrita, teve-se em mente os

seguintes pontos:

1. criar um texto sucinto e, ao mesmo tempo, abrangente. Isto levou à escrita de capítulos relativamente curtos, procurando ser o mais intuitivo possível e evidenciando sempre os fatos fundamentais de cada assunto;
2. manter o mínimo de pré-requisitos. Isto fez com que os dois primeiros capítulos fossem escritos. Acreditamos que qualquer pessoa que tenha um conhecimento mínimo de álgebra (como as estruturas algébricas básicas) e de diferenciabilidade em \mathbb{R}^n possui condições de acompanhar a leitura desde o início.
3. evidenciar a relação entre física e matemática. Neste sentido, manteve-se relação direta entre os assuntos matemáticos desenvolvidos e a forma com que eles aparecem na física (especialmente em teoria da gravitação relativística). Em alguns momentos, também se utilizou de *insights* físicos para introduzir novos conceitos matemáticos.

No que diz respeito à escolha dos assuntos desenvolvidos, algumas palavras devem ser ditas. Em primeiro lugar, há uma forte e crescente linha de *geometrização da física*, que remonta aos trabalhos de Einstein. Isto, aliado ao fato de um dos autores ser especialista em buracos negros, fez com que esta direção fosse seguida. Por outro lado, nota-se a existência de uma conexão estreita entre geometria e topologia, especialmente no que diz respeito à construção de invariantes. Juntando tudo, chega-se ao apanhado apresentado: *Topologia, Geometria e Buracos Negros*.

Procurando respeitar essa linha de pensamento, o material foi organizado em três partes: uma para cada assunto. As partes I e II são formadas de tópicos em topologia e geometria e têm como objetivo dar ao leitor uma visão *global* sobre essas disciplinas, permitindo que uma pessoa com pouco conhecimento prévio (como um físico ou alguém de outras áreas da matemática, tomando contato com tais conteúdos pela primeira vez) atinja rapidamente um conhecimento geral sobre o assunto. Por exemplo, estas duas partes constituem 29 seções, as quais podem ser apresentadas numa disciplina de um único semestre, com carga horária semanal de quatro horas.

A parte III, por sua vez, corresponde ao estudo da teoria de buracos negros. Ela tem um enfoque mais *específico* e está voltada para um público diferente: pessoas que já são próximas à área e querem conhecer mais sobre a teoria geral de buracos negros. Por isso, fizemos essa parte do livro independente do resto, embora as partes I e II cubram todos os pré-requisitos para a leitura da parte III.

Esperamos ter construído um texto versátil e convidativo, que chame a atenção de um público alvo maior que o usual, despertando a curiosidade pelo estudo da interface entre a física e a matemática, motivando pessoas a mergulhar na intrincada teia de mistérios do universo.

Fábio Dadam gostaria de agradecer sua mãe, Rumilda Corrêa Dadam, e sua esposa, Andreia Niccioli Figueiredo, pelo companheirismo que sempre demonstraram. O mesmo autor também deseja agradecer Alberto Saa, orientador durante o mestrado, cuja dissertação serviu de base para a escrita da parte III desse livro. Yuri Ximenes Martins gostaria de agradecer o apoio e paciência de sua família e da Lívian, com quem tem dividido não só os momentos de alegria e de felicidade, mas também aqueles de angústia e de desespero. Ele também é especialmente grato ao companheirismo da fiel amiga Pp.

Stanford, Estados Unidos

Belo Horizonte, Brasil

2016

Sumário

Prefácio	1
I Topologia	8
1 Categorias	9
1.1 Estrutura	10
1.2 Functores	13
1.3 Transformações	16
2 Abstração	22
2.1 Limites	23
2.2 Monoides	32
3 Topologia	40
3.1 Estrutura	41
3.2 Classificação	43
4 Homotopia	49
4.1 Aproximação	50
4.2 Modelo	57
4.3 Complexos	62
5 Invariantes	65
5.1 Homotopia	66
5.2 Cohomologia	69

5.3	Homologia	73
6	Fibrados	78
6.1	Estrutura	79
6.2	Levantamento	86
6.3	Invariantes	89
II	Geometria	94
7	Análise	95
7.1	Variedades	96
7.2	Diferenciabilidade	101
7.3	Fibrado	105
8	Seções	110
8.1	Existência	111
8.2	Vetores	115
8.3	Formas	122
9	Geometria	126
9.1	Estruturas	127
9.2	Categoria	132
9.3	Exemplos	135
10	Simetrias	138
10.1	Derivada	139
10.2	Álgebras	141
11	Gauge	147
11.1	Conexão	148
11.2	Curvatura	156

III Buracos Negros	159
12 Gravitação	160
12.1 Equações de Einstein	161
12.2 Descrição Moderna	165
13 Buracos Negros	173
13.1 Soluções	173
13.2 Buracos Negros	181
14 Newman-Penrose	185
14.1 Espinores	186
14.2 Cones de Luz	198
15 Perturbações	200
15.1 Equações de Teukolsky	201
15.2 Perturbações	207
15.3 Modos Normais	215
16 Buracos Negros Carregados	219
16.1 Kerr-Newman	219
16.2 Reissner-Nordström	221
16.3 Considerações	223
17 Modos Quase-Normais	225
17.1 Matemática	226
17.2 Determinação	228
17.3 Discussão	238
18 Atualidade	242
18.1 Ondas Gravitacionais	243
18.2 Buracos Negros?	245
Referências Bibliográficas	247

Parte I

Topologia

Capítulo 1

Categorias

Assim como a física procura uma teoria que sirva para descrever todos os fenômenos da natureza, a matemática busca maneiras de unificar diferentes teorias numa só linguagem. Neste sentido, a teoria das categorias, assunto que desenvolvemos brevemente neste capítulo, se mostra bastante interessante.

Grosso modo, uma categoria é simplesmente um ente composto de objetos, mapeamentos entre objetos e maneiras de compor tais mapeamentos. Assim, ao se dar uma categoria, delimita-se uma área da matemática. Ocorre que existe uma categoria cujos objetos são as próprias categorias! Isto significa que é possível falar de *mapeamentos entre categorias*, os quais são responsáveis por conectar as diferentes áreas da matemática delimitadas por cada uma delas.

Finalmente, fixadas duas categorias, digamos \mathbf{C} e \mathbf{D} , constrói-se uma nova categoria tendo como objetos os funtores que partem de \mathbf{C} e chegam em \mathbf{D} . Portanto, tem-se *mapeamentos entre funtores*, os quais são usualmente denominados *transformações naturais*. Podemos interpretá-las da seguinte maneira: se por um lado funtores conectam diferentes áreas da matemática, então a existência de uma transformação natural entre dois deles indica que a forma com que realizam tais conexões não é independente, mas está sujeita a um *vínculo natural*.

Na primeira seção do capítulo, introduzimos o conceito de *categoria* e o ilustramos por meio de diversos exemplos. Em seguida, na segunda seção, apresentamos os *funtores* e estudamos alguns fenômenos que os envolvem. Por exemplo, ali estudamos as *adjunções*, que abstraem o processo de “construção de objetos livres”

presente na álgebra.

Na terceira e última seção, tratamos das *transformações naturais*, introduzimos uma noção de equivalência entre categorias e justificamos a utilidade destas (assim como dos funtores) no mais importante problema dentro de teoria das categorias: o de *classificação*. Por exemplo, dentro da álgebra, tal problema se resume a decidir quando duas estruturas algébricas dadas são ou não equivalentes.

As referências que mais utilizamos no momento da escrita deste capítulo foram as obras clássicas [59, 69]. Um texto mais moderno e que também foi utilizado é [55].

1.1 Estrutura

Grosso modo, definir uma *categoria* é o mesmo que delimitar uma área de trabalho dentro da matemática. Por exemplo, na álgebra linear lidamos com espaços vetoriais e com as transformações lineares. Isto significa que ali se olha para uma classe de objetos que são particularmente interessantes (que são os espaços vetoriais) e fixa-se uma noção natural de mapeamento entre eles (que são as transformações lineares). Este feitio há de definir uma categoria $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$, a qual delimita o âmbito de estudo da álgebra linear.

Da mesma forma, quando estudamos cálculo em uma variável, estamos interessado nos intervalos da reta (que correspondem aos objetos interessantes) e as funções diferenciáveis (que são mapeamentos entre eles). Mais uma vez, isto define uma categoria \mathbf{Calc} , responsável por delimitar a amplitude do cálculo em uma variável real.

Assim, pode-se dizer que uma categoria \mathbf{C} é uma entidade consistida de três classes de informação: *objetos*, *mapeamentos entre objetos* (usualmente denotados por $f : X \rightarrow Y$) e *maneiras de compor mapeamentos* (em geral representadas por $g \circ f$). Pedese, em particular, que as composições sejam associativas e que a cada objeto corresponda um mapeamento id_X , com a propriedade de ser a identidade da composição de mapas. Isto é, $id_X \circ f = f$ e $g \circ id_X = g$ sempre que tais composições fizerem sentido.

Advertência. Costuma-se utilizar de $\text{Ob}(\mathbf{C})$ para representar o conjunto dos objetos de uma dada categoria \mathbf{C} . Além disso, o conjunto dos morfismos entre dois objetos fixados, digamos X e Y , é usualmente denotado por $\text{Mor}_{\mathbf{C}}(X; Y)$. Ao longo do texto, seguiremos estas práticas.

Vejamos outros exemplos de categorias:

Exemplo 1.1.1. Dentro da álgebra, tem-se as categorias formadas por objetos algébricos de mesma natureza (grupos, anéis, espaços vetoriais, módulos, etc.), com morfismos dados pela respectiva noção de homomorfismo inerente a cada classe de tais objetos. Por exemplo, no que segue guardaremos as notações \mathbf{Grp} e \mathbf{Mod}_R para denotar as categorias dos grupos e dos módulos sobre R . Observamos que, quando R é um corpo \mathbb{K} , saímos do domínio da teoria dos módulos e caímos em $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$, que descreve a álgebra linear.

Exemplo 1.1.2. Uma maneira de obter categorias é tomar como objetos conjuntos dotados de certas estruturas adicionais. Os morfismos são as funções entre os conjuntos subjacentes que preservam cada uma das estruturas adicionais. Finalmente, se tais estruturas forem invariantes pela composição usual de funções, poderemos tomá-la como a composição da categoria que estamos a definir. Uma categoria obtida desta maneira é dita *concreta*. Todos os exemplos discutidos até agora podem ser obtidos desta forma. De fato, uma estrutura algébrica nada mais é que um conjunto dotado de operações, enquanto que um homomorfismo entre duas de tais estruturas é simplesmente uma função que preserve as operações envolvidas. Como veremos ao longo do texto, nem toda categoria, no entanto, é concreta.

Exemplo 1.1.3. Diz-se que \mathbf{D} é uma *subcategoria* de \mathbf{C} (e escreve-se $\mathbf{D} \subset \mathbf{C}$) quando quaisquer objetos e morfismos de \mathbf{D} também fazem parte de \mathbf{C} . Além disso, pede-se que ambas dividam a mesma composição. No caso particular em que todo morfismo de \mathbf{C} também é um morfismo de \mathbf{D} , fala-se que a subcategoria \mathbf{D} é denominada *cheia* (tradução para *full*). Em suma, uma subcategoria cheia é obtida simplesmente reduzindo os objetos de uma categoria dada. Observamos que uma categoria concreta é precisamente uma subcategoria de \mathbf{Set} (formada de conjuntos e funções). Estas nem sempre são cheias: as categorias algébricas constituem bons

exemplos. No que segue, $\mathbf{AbGrp} \subset \mathbf{Grp}$ denotará a subcategoria cheia dos grupos abelianos.

Dentro da álgebra linear, existe uma noção de equivalência entre dois espaços vetoriais X e Y . Com efeito, diz-se que eles são *linearmente isomorfos* quando existem transformações lineares $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ tais que $g \circ f = id_X$ e $f \circ g = id_Y$. O mesmo se aplica ao contexto do cálculo em uma variável real. No entanto, ao invés de ter isomorfismos entre espaços vetoriais, ter-se-ia *difeomorfismos* entre intervalos.

De maneira análoga, pode-se utilizar de tal definição para introduzir uma noção de equivalência entre objetos de qualquer categoria. Assim, dois objetos $X, Y \in \mathbf{C}$ serão *isomorfos* precisamente quando existirem morfismos f e g entre eles, cujas composições $g \circ f$ e $f \circ g$ se igualam a identidades. Evidentemente, os isomorfismos de $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ são os isomorfismos lineares e os isomorfismos de \mathbf{Calc} são os difeomorfismos. Num contexto genérico, se X e Y são isomorfos, escreve-se $X \simeq Y$.

Construções

Existem diversas construções que podem ser feitas com categorias e que nos serão úteis no decorrer do texto. Seguem alguns exemplos.

Exemplo 1.1.4. Associada a toda categoria \mathbf{C} existe uma outra, denotada por \mathbf{C}^{op} e chamada de *oposta* de \mathbf{C} , obtida simplesmente “invertendo os morfismos de \mathbf{C} ”. Mais precisamente, ela se vê caracterizada pelas seguintes propriedades:

1. seus objetos são os próprios objetos de \mathbf{C} ;
2. para quaisquer X e Y , tem-se $\text{Mor}_{\mathbf{C}^{op}}(X; Y) = \text{Mor}_{\mathbf{C}}(Y; X)$. Dado um morfismo f de \mathbf{C} , utilizaremos de f^{op} para representar seu correspondente em \mathbf{C}^{op} ;
3. por definição, $g^{op} \circ f^{op} = (f \circ g)^{op}$.

Exemplo 1.1.5. Partindo de duas categorias \mathbf{C} e \mathbf{D} constrói-se uma terceira: o *produto* entre elas, denotado por $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$. Seus objetos são os pares (X, Y) , com

$X \in \mathbf{C}$ e $Y \in \mathbf{D}$. Seus morfismos são também pares (f, g) , em que f é morfismo de \mathbf{C} e g é morfismo de \mathbf{D} .

Exemplo 1.1.6. Uma vez fixado um objeto $A \in \mathbf{C}$, constrói-se uma categoria \mathbf{C}/A , chamada de *over category by A*, cujos objetos são aqueles $X \in \mathbf{C}$ para os quais há um mapa $f : X \rightarrow A$, e cujos morfismos são os $h : X \rightarrow Y$ tais que, dado f , existe ao menos um $g : Y \rightarrow A$ cumprindo $f = h \circ g$. De maneira análoga define-se A/\mathbf{C} , a qual recebe o nome de *under category by A*.

Exemplo 1.1.7. Seja \mathbf{C} uma categoria e suponha a existência de uma relação de equivalência \sim em cada conjunto $\text{Mor}(X; Y)$, a qual é compatível com a composição: se $f \sim g$ e $f' \sim g'$, então $f \circ f' \sim g \circ g'$. Sob estas condições, tem-se uma categoria $\mathcal{H}\mathbf{C}$, cujos objetos são os mesmos que os de \mathbf{C} , cujos morfismos são as classes de equivalência $[f]$ de morfismos de \mathbf{C} , e cuja composição é dada pela relação $[f] \circ [g] = [f \circ g]$.

1.2 Functores

Um *functor* $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ é um mapeamento entre duas categorias. De maneira mais precisa, trata-se de uma regra de \mathbf{C} em \mathbf{D} que preserva todas as estruturas envolvidas. Assim, F deve levar objetos em objetos, morfismos em morfismos, composições em composições e, finalmente, identidades em identidades.

Observamos que categorias delimitam áreas da matemática, então *functores servem para conectar áreas distintas*. Em verdade, tem-se uma categoria \mathbf{Cat} , cujos objetos são categorias e cujos mapeamentos são functores. Assim, *o processo de delimitar áreas da matemática delimita, por si só, uma área da matemática!* De fato, se estudar $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ significa estudar álgebra linear, então estudar \mathbf{Cat} significa estudar *teoria das categorias*.

No decorrer do texto, trabalharemos com diversos functores. Vejamos alguns deles.

Exemplo 1.2.1. Seja \mathbf{AbMon} a categoria dos monoides abelianos. Isto é, cujos objetos são conjuntos dotados de uma operação associativa, comutativa e com unidade, e cujos morfismos são as funções que preservam tal operação. Assim, pode-se

pensar em tais entidades como sendo simplesmente um “grupo abeliano sem inversas”. Existe um procedimento, chamado de *construção de Grothendieck*, o qual nos permite dar inversas aos monoides abelianos, tornando-os verdadeiros grupos abelianos. Mais precisamente, tem-se um functor $\text{Grt} : \mathbf{AbMon} \rightarrow \mathbf{AbGrp}$.

Exemplo 1.2.2. Existe um functor $(-)^{op} : \mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{Cat}$, que a cada categoria associa sua oposta, e que a cada $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ associa o correspondente functor $F^{op} : \mathbf{C}^{op} \rightarrow \mathbf{D}^{op}$, que é a identidade em objetos e que em morfismos é $F^{op}(f^{op}) = F(f)^{op}$.

Exemplo 1.2.3. Tem-se um functor $\text{Iso} : \mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{Set}$, que a cada categoria \mathbf{C} associa o conjunto das classes de isomorfismo de seus objetos, e que a cada functor $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ faz corresponder a função $\text{Iso}(F)$, tal que $\text{Iso}(F)([X]) = [F(X)]$. Observamos que tal função está bem definida, uma vez que funtores levam equivalências em equivalências.

Um fenômeno bastante interessante dentro de teoria das categorias é o da *adjunção* entre funtores. Com efeito, diz-se que dois funtores $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ e $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ são *adjuntos*, escrevendo-se $F \rightleftarrows G$ para representar este fato, quando, para todos X e Y , tem-se bijeções

$$\text{Mor}_{\mathbf{C}}(G(X); Y) \simeq \text{Mor}_{\mathbf{D}}(X; F(Y)).$$

O exemplo abaixo nos mostra que o fenômeno da adjunção generaliza o processo de construção de objetos livres da álgebra.

Exemplo 1.2.4. Tem-se um functor natural $\iota : \mathbf{Mod}_R \rightarrow \mathbf{Set}$ que esquece todas as estruturas adicionais e olha um módulo simplesmente como um conjunto. O fato de existirem módulos livremente gerados por um conjunto induz um functor $j : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Mod}_R$ o qual afirmamos ser adjunto a ι . Com efeito, tal adjunção significa que, para cada conjunto S e cada grupo módulo M , existem bijeções

$$\text{Mor}_{\mathbf{Set}}(S; \iota(M)) \simeq \text{Mor}_{\mathbf{Mod}_R}(j(S); M).$$

Isto significa que os homomorfismos de $j(S)$ em M estão em bijeção com as funções de S em $\iota(M) = M$. Em outras palavras, $j(S)$ fica caracterizado por ser o módulo tal que cada função $S \rightarrow M$ se estende, de maneira única, a um homomorfismo

$j(S) \rightarrow M$. Ora, esta é justamente a condição que se pede a um módulo livremente gerado, de modo que tal adjunção realmente existe.

Exemplo 1.2.5. A situação anterior se estende a outros casos. Por exemplo, diz-se que uma categoria é um *grupóide* quando todos os seus morfismos são isomorfismos. Seja $\mathbf{Gpd} \subset \mathbf{Cat}$ a subcategoria cheia dos grupóides. A inclusão $\iota : \mathbf{Gpd} \rightarrow \mathbf{Cat}$ admite um adjunto natural $(-)_pd : \mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{Gpd}$, mostrando-nos que \mathbf{Cat} é “livremente gerada” pelos grupóides. Com efeito, basta considerar $(-)_pd$ como sendo a regra que mantém objetos e que a cada conjunto de morfismos associa o subconjunto de isomorfismos (possivelmente vazio) ali contido.

Equivalência

Uma vez que categorias são, por si mesmas, objetos de uma categoria \mathbf{Cat} , tem-se uma noção óbvia de isomorfismo entre elas. De fato, \mathbf{C} e \mathbf{D} serão isomorfas precisamente quando existirem funtores $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ e $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ tais que $G \circ F = id_{\mathbf{C}}$ e $F \circ G = id_{\mathbf{D}}$. Ocorre que, como veremos na próxima seção, \mathbf{Cat} é uma categoria especial. Afinal, além de possuir objetos e mapeamentos, ela possui uma noção de “mapeamentos entre mapeamentos”. Isto significa que, se F e G são funtores, então faz sentido falar de mapeamentos $\xi : F \Rightarrow G$. Em particular, faz sentido falar de *isomorfismos* entre dois funtores.

Tendo observado isto, parece-nos que a condição de igualdade entre dois funtores (e, portanto, de isomorfismo entre categorias) é demasiadamente rígida. Isto nos leva a considerar uma outra noção de equivalência entre categorias. Isto é feito substituindo a exigência de igualdade em $G \circ F = id_{\mathbf{C}}$ e $F \circ G = id_{\mathbf{D}}$ pela existência de isomorfismos $G \circ F \simeq id_{\mathbf{C}}$ e $F \circ G \simeq id_{\mathbf{D}}$. Fala-se, neste caso, que as categorias \mathbf{C} e \mathbf{D} são *fracamente isomorfas* (ou, simplesmente, que elas são *equivalentes*). O functor F é então chamado de *isomorfismo fraco* entre elas, enquanto que G é dito ser sua *inversa fraca*.

Como veremos, para que um functor $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ seja um isomorfismo fraco, é necessário e suficiente que ele seja “fracamente bijetivo” em objetos e bijetivo em morfismos. A primeira condição significa que $F(X) \simeq F(Y)$ implica $X \simeq Y$

(injetividade fraca), ao mesmo tempo que todo $A \in \mathbf{D}$ é isomorfo a algum $F(X)$ (sobrejetividade fraca). A segunda, por sua vez, se traduz na existência de bijeções

$$\text{Mor}_{\mathbf{D}}(F(X); F(Y)) \simeq \text{Mor}_{\mathbf{C}}(X; Y).$$

Com isto em mente, torna-se natural olhar para funtores que sejam fracamente injetivos em objetos e injetivos em morfismos. Tratam-se dos *mergulhos*. Por exemplo, para toda subcategoria $\mathbf{D} \subset \mathbf{C}$, a inclusão $\iota : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ é mergulho óbvio que, em geral, não é isomorfismo fraco. Exemplos menos óbvios de mergulhos são aqueles apresentados abaixo.

Exemplo 1.2.6. Existem duas maneiras de mergulhar a categoria \mathbf{Grp} dos grupos em \mathbf{Grpd} , denotadas por \mathbf{B} e \mathbf{E} . A primeira delas consiste em olhar um grupo como sendo uma categoria que consiste de um único objeto. Mais precisamente, para todo grupo G , $\mathbf{B}G$ é categoria com um só objeto (digamos $*$) e cujo único conjunto de morfismos $\text{Mor}_{\mathbf{B}G}(*; *)$ coincide com G . O segundo mergulho, por sua vez, é construído de maneira oposta: o conjunto dos objetos de $\mathbf{E}G$ coincide com o grupo G , enquanto que cada conjunto de morfismos $\text{Mor}_{\mathbf{E}G}(x, y)$, com $x, y \in G$, é formado de um só ente. A saber, o único elemento $g \in G$ tal que $g * x = y$.

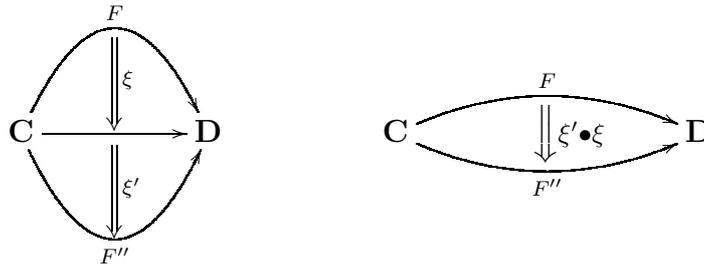
1.3 Transformações

Como comentamos ao final seção anterior, a categoria \mathbf{Cat} conta com uma noção adicional de “morfismos entre morfismos”. Tal noção corresponde ao conceito de *transformação natural* entre dois funtores, o qual passamos a discutir.

Uma *transformação natural* entre $F, F' : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$, ambos definidos e assumindo valores na mesma categoria, consiste de uma regra $\xi : F \Rightarrow F'$ que a cada objeto $X \in \mathbf{C}$ associa um morfismo $\xi_X : F(X) \rightarrow F'(X)$, de tal modo que o primeiro dos diagramas abaixo fica comutativo.

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\ \xi(X) \downarrow & & \downarrow \xi(Y) \\ F'(X) & \xrightarrow{F'(f)} & F'(Y) \end{array}$$

Se cada ξ_X é um isomorfismo, diz-se que ξ é um *isomorfismo natural*. Tal noção é, em verdade, o conceito de isomorfismo de uma certa categoria. Com efeito, fixadas categorias \mathbf{C} e \mathbf{D} , constrói-se uma nova categoria $\text{Func}(\mathbf{C}; \mathbf{D})$ cujos objetos são funtores e cujos morfismos são transformações naturais. A composição é a chamada *composição vertical*, definida como segue: dadas $\xi : F \Rightarrow F'$ e $\xi' : F' \Rightarrow F''$, define-se $\xi' \bullet \xi : F \Rightarrow F''$ pondo $\xi' \bullet \xi(X) = \xi'(X) \circ \xi(X)$, o que pode ser representado pelo seguinte diagrama:



Observamos então que \mathbf{Cat} é composta de objetos (que são categorias), de morfismos (que são funtores) e de “morfismos entre morfismos” (que são as transformações naturais). Além disso, a noção de “morfismo entre morfismo” introduz uma estrutura de categoria em cada conjunto de morfismos de \mathbf{Cat} . Isto nos mostra que \mathbf{Cat} é “mais categórica” que as categorias usuais. De fato, ela faz parte de uma classe de estruturas chamadas de 2-categorias.

O estudo destes entes “mais categóricos” faz parte da *teoria das categorias em altas dimensões*, a qual possui uma estreita conexão com a teoria de homotopia e com a física. Infelizmente não entraremos em detalhes a respeito de tais conexões neste texto. Para desencargo de consciência, sugerimos ao leitor as obras [21, 54, 58].

Exemplo 1.3.1. Tem-se um functor $h^- : \mathbf{C} \rightarrow \text{Func}(\mathbf{C}^{op}; \mathbf{Set})$, que a cada objeto $X \in \mathbf{C}$ associa o functor h^X , definido por

$$h^X(Y) = \text{Mor}_{\mathbf{C}}(X, Y) \quad \text{e} \quad h^X(f)(g) = f \circ g,$$

e que a cada $\alpha : Y \rightarrow X$ devolve uma transformação natural $h^\alpha : h^X \Rightarrow h^Y$, definida de maneira evidente: $h^\alpha_Z(f) = f \circ \alpha$. Um resultado facilmente demonstrado garante-nos que h^- é um mergulho sobrejetivo em morfismos. Este, que é conhecido como *lema de Yoneda*, possui duas grandes utilidades: em primeiro lugar, nos

ensina que qualquer categoria pode ser vista como uma categoria de funtores. Em segundo lugar, existe grande interesse nos funtores isomorfos à h^X para algum X , os quais se denominam *representáveis*. A razão é a seguinte: os h^X possuem diversas propriedades especiais, como a preservação de limites. Ocorre que, para que exista um isomorfismo $h^X \simeq F$ é preciso, antes de qualquer coisa, que exista uma transformação natural entre eles. O fato de h^- ser um mergulho sobrejetivo nos permite concluir que o conjunto de tais transformações está em bijeção com $F(X)$.

Objetos Simpliciais

Certa categoria de funtores se mostrará particularmente útil mais adiante. Aproveitamos o momento para apresentá-la. Seja Δ a categoria cujos objetos são os conjuntos $[n] = \{0, \dots, n\}$ e cujos morfismos são as aplicações $f : [n] \rightarrow [m]$ que preservam ordenamento. Isto é, tais que $f(i) \leq f(j)$ sempre que $i \leq j$. Existem duas subcategorias evidentes Δ_+ e Δ_- , respectivamente compostas dos morfismos injetivos e sobrejetivos de Δ . Estes satisfazem certas relações de compatibilidade, as quais não utilizaremos aqui (veja a quinta seção do capítulo VII de [59]).

Todo morfismo de Δ pode ser decomposto em termos de um morfismo de Δ_+ seguido de outro de Δ_- . Consequentemente, dar um functor $X : \Delta^{op} \rightarrow \mathbf{C}$ é o mesmo que dar uma sequência de objetos $X_n \in \mathbf{C}$ e morfismos $\delta_i : X_n \rightarrow X_{n-1}$ e $\sigma_i : X_n \rightarrow X_{n+1}$, os quais satisfazem relações de compatibilidade. Tais funtores são chamados de *objetos simpliciais* de \mathbf{C} . O termo X_n recebe o nome de *n-símplice*, ao passo que os morfismos δ_i e σ_i chamam-se, respectivamente, *operadores de face* e *operadores de degenerescência*. Há uma categoria $s\mathbf{C}$ formada de objetos simpliciais e de transformações naturais. Isto é, $s\mathbf{C} = \text{Func}(\Delta^{op}; \mathbf{C})$.

Há especial interesse nos objetos simpliciais de \mathbf{Set} , aos quais se dá o nome de *conjuntos simpliciais*. Se X é um deles, fala-se que X_n é seu conjunto de *n-células*. A nomenclatura se deve ao seguinte: pensa-se num conjunto simplicial como sendo uma sequência de objetos de diversas dimensões (vértices, arestas, faces, etc.) que podem ser “realizados geometricamente” e depois “colados”, formando um espaço específico. Assim, a estrutura do espaço como um todo fica determinada pela estrutura de suas partes, transformando um problema global numa questão combinatória. Como

veremos, em topologia, os espaços que podem ser obtidos por tal procedimento chamam-se *complexos celulares*. Exemplos são, evidentemente, os poliedros.

Num conjunto simplicial X , se pensamos em X_0 como coleção de vértices, em X_1 como família de arestas ligando vértices, em X_2 como lista faces completando arestas, e assim sucessivamente, conclui-se que os operadores δ_i e s_i possuem um papel geométrico bastante claro. Com efeito, $\delta_i x$ nada mais é que a célula obtida retirando de x o i -ésimo vértice, ao passo que $s_i x$ é obtido repetindo o i -ésimo vértice. Por exemplo, se x é 2-célula (isto é, face), então $\delta_i x$ é aresta oposta ao i -ésimo vértice. Tendo isto em mente, diz-se que $x \in X$ é *face* ou *degenerescência* de uma outra célula $x' \in X$ quando $x = s_i x'$ ou $x = \delta_i x'$. Se inexistir x' tal que $x = s_i x'$, fala-se que a célula x é *não-degenerada*.

Um dos motivos que remontam o interesse à categoria $s\mathbf{Set}$ é a existência de um mergulho natural $N_s : \mathbf{Cat} \rightarrow s\mathbf{Set}$, que a cada categoria \mathbf{C} associa o seu *nervo simplicial* $N_s \mathbf{C}$, definido como segue: as 0-células de $N_s \mathbf{C}$ são simplesmente os objetos de \mathbf{C} . Por sua vez, o conjunto $(N_s \mathbf{C})_n$ das n -células é formado de todas as seqüências de morfismos de \mathbf{C} com n termos. O operador de face $\delta_i : (N_s \mathbf{C})_n \rightarrow (N_s \mathbf{C})_{n-1}$ é aquele que retira o i -ésimo termo de cada seqüência, enquanto que o operador de degenerescência $s_i : (N_s \mathbf{C})_n \rightarrow (N_s \mathbf{C})_{n+1}$ acrescenta uma identidade depois do i -ésimo termo.

Exemplo 1.3.2. Dado um grupo G , vejamos quem é o nervo simplicial do grupoide \mathbf{BG} . Como a categoria \mathbf{BG} só possui um objeto, uma n -célula de $N_s \mathbf{BG}$ se identifica com uma seqüência de n morfismos $* \rightarrow *$. Ora, tais morfismos são elementos do grupo G . Portanto, $(N_s \mathbf{BG})_n \simeq G^n$. O operador de bordo δ_i é simplesmente o mapa que toma cada lista de n -elementos de G e esquece o i -ésimo. Por sua vez, o operador de degenerescência $s_i : G^n \rightarrow G^{n+1}$ é a inclusão (isto é, o mapa que coloca o elemento neutro na i -ésima entrada).

Classificação

Um dos problemas básicos dentro de uma categoria \mathbf{C} é o de classificar os seus objetos a menos de sua natural noção de equivalência. Em outras palavras,

procura-se determinar a estrutura do conjunto $\text{Iso}(\mathbf{C})$. Em geral, isto é feito através de bijeções $f : \text{Iso}(\mathbf{C}) \rightarrow B$, em que B é algum outro conjunto (diz-se que f é uma *classificação* da categoria \mathbf{C} em termos de B).

Observamos que, se $F : \text{Iso}(\mathbf{C}) \rightarrow \text{Iso}(\mathbf{D})$ cuja imagem por $\text{Iso} : \mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{Set}$ é um mapa injetivo, então a categoria \mathbf{C} pode ser classificada em termos de um subconjunto de $\text{Iso}(\mathbf{D})$. Um functor satisfaz tal condição se, e somente se, é fracamente injetivo em objetos. Assim, *mergulhos nos permitem transferir o problema de classificação de uma categoria para outra*.

Ainda que se conte com esta ferramenta, deve-se dizer que a classificação completa de uma categoria é, em geral, um problema muito difícil. O conceito de propriedade *invariante* assume, portanto, o seu valor. Fala-se que uma propriedade \mathcal{P} é um *invariante de \mathbf{C}* quando sua validade num objeto $X \in \mathbf{C}$ implica na sua validade em todo objeto equivalente a X . Assim, se \mathcal{P} vale em X e encontrarmos um outro objeto Y no qual \mathcal{P} não é válida, então estes não pertencerão à mesma classe de equivalência, o que nos dará alguma informação sobre $\text{Iso}(\mathbf{C})$.

Como obter invariantes? A respeito de tal questão, façamos três observações:

1. todo functor $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ define um invariante de \mathbf{C} . Este consiste da propriedade “*ter, a menos de isomorfismos, uma específica imagem por F em \mathbf{D}* ”;
2. funtores são maneiras de associar *objetos a objetos*. Isto nos permitiu associar um invariante a cada um deles. Por sua vez, transformações naturais associam *morfismos a objetos*. Assim, dados dois funtores F e G , transformações naturais $\xi : F \Rightarrow G$ criam novos invariantes (que agora são morfismos) a partir dos respectivos invariantes associados a F e G . Por outro lado, a existência de tais transformações nos indica que *os invariantes de F e G não são independentes, mas estão vinculados por ξ* ;
3. numa categoria \mathbf{C} , sejam X um objeto e $A \subset X$. Quão diferente A é de X ? Certamente, comparar os invariantes que correspondem a eles traduz informação sobre esta questão. Seja F em \mathbf{C} , o qual supomos preservar inclusões. Desta forma, em algum sentido, o invariante $F(A)$ é menor que $F(X)$. Quer-

se capturar a “diferença” entre eles. Como fazer isso? Esta há de ser uma quantidade dependente não só de X , mas também de A . Assim, a ideia é tentar estender F aos pares (X, A) , de modo que o *invariante relativo* $F(X, A)$ forneça informações a respeito da diferença em questão.

Capítulo 2

Abstração

No presente capítulo, apresentamos construções em teorias das categorias que unificam conceitos inerentes às mais variadas áreas da matemática e que, sob um olhar não muito cuidadoso, pareceriam totalmente desconectados.

Iniciamos na primeira seção, onde introduzimos as concepções duais de *limite* e de *colimite*, as quais se prestam bem à tarefa acima descrita. Com efeito, veremos que estes conceitos englobam as noções de produto cartesiano, de soma direta, de reunião disjunta, de estruturas quocientes e também de estruturas construídas por processos indutivos, de *kernels*, de *cokernels* e de imagem de mapeamentos. Poderíamos prosseguir com esta lista infinitamente. No entanto, acreditamos que os exemplos apresentados já sejam suficientes para deixar o leitor instigado.

A segunda seção é marcada por um problema em certo sentido inverso ao de classificação que apresentamos no capítulo anterior. Trata-se do processo de *categorificação*. Este consiste, essencialmente, em “elevar o grau categórico” de conceitos presentes em teorias dos conjuntos (e, portanto, em toda a matemática clássica). Neste processo, trocam-se elementos por objetos, conjuntos por categorias, funções por funtores e relações entre funções por transformações naturais.

Por exemplo, a categorificação do conceito clássico de monoide (que é um conjunto dotado de uma operação associativa com elemento neutro) nos leva à noção de *categoria monoidal*. Trata-se de uma categoria dotada de um bifunctor associativo e de um objeto que serve de unidade. Assim as categorias monoidais são obtidas *categorificando um conceito algébrico*. Isto implica na possibilidade de desenvol-

ver álgebra em qualquer categoria monoidal. É isto o que fazemos no restante do capítulo.

Exposições detalhadas dos assuntos aqui desenvolvidos podem ser encontradas, por exemplo, nas referências [59, 3].

2.1 Limites

Dizemos que um functor $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ possui *limite* se há um *cone* (X, φ) , onde $X \in \mathbf{D}$ e φ é transformação natural entre o functor constante em X e F , no qual qualquer outro cone é fatorado. Isto significa que, para qualquer (X', φ') é possível obter um único mapa $\mu : X' \rightarrow X$, chamado de *fatoração*, tal que os primeiros diagramas abaixo são sempre comutativos.

Dualmente, diz-se que F possui *colimite* quando admite um *cocone* universal. Isto é, com um par (X, φ) , em que $X \in \mathbf{D}$ e φ é transformação natural entre F e o functor constante em X , o qual fatora em todos os outros (X', φ') , como representado no segundo dos diagramas abaixo.

$$\begin{array}{ccc}
 & & F(Y') \\
 & \nearrow \varphi' & \nearrow \varphi \\
 X' & \overset{u}{\dashrightarrow} X & \\
 & \searrow \varphi' & \searrow \varphi \\
 & & F(Y) \\
 & & \uparrow F(f)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & & F(Y') \\
 & \nwarrow \varphi' & \nwarrow \varphi \\
 X' & \overset{u}{\dashleftarrow} X & \\
 & \swarrow \varphi' & \swarrow \varphi \\
 & & F(Y) \\
 & & \uparrow F(f)
 \end{array}
 \tag{2.1}$$

Toda transformação ξ entre F e F' induz morfismos $\lim \xi$ e $\text{colim} \xi$ entre os correspondentes limites e colimites, os quais são isomorfismos se, e só se, ξ é um isomorfismo natural.

As distintas classes de limites e colimites ficam caracterizadas pela categoria na qual o functor está definido. Por exemplo, como detalharemos em seguida, produtos nada mais são que limites de funtores com domínio em categorias discretas. De outro lado, se F está definido numa categoria dirigida, então seus colimites são, precisamente, limites indutivos.

Produtos

Uma categoria \mathbf{J} é dita *discreta* quando seus únicos morfismos são as identidades. Os objetos de \mathbf{J} chamam-se *índices*. Os funtores $F : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$ se identificam com regras que a cada índice $j \in \mathbf{J}$ associam um objeto $X_j \in \mathbf{C}$. Fala-se que a categoria \mathbf{C} possui *produtos* quando, independente de qual seja a categoria discreta \mathbf{J} , todo $F : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$ possui limite.

Desta forma, \mathbf{C} possuirá produtos quando, dados quaisquer objetos X_j (indexados da maneira como se queira), existam $X \in \mathbf{C}$ e morfismos $\pi_j : X \rightarrow X_j$, de tal forma que, se $\pi'_j : X' \rightarrow X_j$ é outra família de morfismos, então $\pi'_j = \pi_j \circ f$ para um único $f : X' \rightarrow X$. Diz-se que X é o *produto* dos X_j . Os π_j são chamados de *projeções*. Assim, em outras palavras, uma categoria possui produtos quando admite uma maneira universal de projetar.

Dualmente, fala-se que uma categoria \mathbf{C} possui *coprodutos* quando cada functor $F : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$ possui colimites. Isto significa que, dados X_j em \mathbf{C} , existem X e $\iota_j : X_j \rightarrow X$ tais que, para quaisquer $\iota'_j : X_j \rightarrow X'$ há um único morfismo $f : X \rightarrow X'$ através do qual $\iota_j = \iota'_j \circ f$. O objeto X é chamado de *coproduto* dos X_j , ao passo que os ι_j denominam-se *inclusões*. Desta forma, uma categoria haverá de ter coprodutos quando possuir uma maneira universal de incluir.

Exemplo 2.1.1. Tanto **Set** quanto cada categoria algébrica (grupos, anéis, módulos e espaços vetoriais), possuem produtos e coprodutos. Particularmente, quando $\mathbf{Alg} \subset \mathbf{Set}$ é categoria livremente gerada por conjuntos (isto é, quando a inclusão $\iota : \mathbf{Alg} \rightarrow \mathbf{Set}$ possui adjunto j à esquerda), então produtos em **Alg** são levados por ι em produtos de **Set**, ao passo que coprodutos de **Set** são levados nos respectivos coprodutos de **Alg** por j . Assim, em tal caso, dada uma família X_j de objetos em **Alg**, o produto entre eles é simplesmente o produto cartesiano usual dotado (se for o caso) de operações definidas componente a componente. Por sua vez, $\pi_j : X \rightarrow X_j$ nada mais é que a projeção na j -ésima entrada. O coproduto em **Alg** deve ser tal que, quando mandado por j em **Set**, caia na reunião disjunta.

Uma categoria \mathbf{C} com *produtos* (resp. *coprodutos*) *finitos* é aquela na qual o limite (resp. colimite) de cada $F : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$, com \mathbf{J} formada apenas de um número

finito de índices, sempre existe. Ressaltamos que aqui se está incluindo a situação em que \mathbf{J} é a categoria que não possui objetos nem morfismos. O limite (resp. colimite) em tal caso é chamado de *objeto terminal* (resp. *inicial*) de \mathbf{C} . A nomenclatura se deve ao seguinte: como imediatamente se constata, X é objeto terminal (rep. inicial) de \mathbf{C} se, e somente se, para qualquer outro $X' \in \mathbf{C}$ existe um único morfismo $f : X' \rightarrow X$ (resp. $f : X \rightarrow X'$). Um objeto que é simultaneamente inicial e final chama-se *nulo* ou *trivial*.

Exemplo 2.1.2. Se uma categoria \mathbf{C} tem $*$ como objeto terminal, então este é um objeto nulo para sua pontuação \mathbf{C}_* . Por exemplo, em \mathbf{Set} qualquer conjunto formado de um só elemento é objeto terminal, de modo que este serve de objeto nulo para \mathbf{Set}_* . Quando a inclusão $\iota : \mathbf{Alg} \rightarrow \mathbf{Set}$ preserva limites (isto é, quando a categoria algébrica é livremente gerada por conjuntos), então os objetos terminais de \mathbf{Alg} são levados nos objetos terminais de \mathbf{Set} . Assim, todo ente com um único elemento é terminal em \mathbf{Alg} e, portanto, objeto nulo para \mathbf{Alg}_* . Ocorre que, se escolhermos o elemento neutro como ponto base, então todo morfismo o preserva, de modo que $\mathbf{Alg}_* \simeq \mathbf{Alg}$. Portanto, estruturas triviais (com um só elemento) são objetos nulos de \mathbf{Alg} .

Exemplo 2.1.3. Em contrapartida ao exemplo anterior, observamos que nem sempre um objeto terminal é nulo. Com efeito, \mathbf{Set} possui como terminais qualquer objeto formado de um só elemento (digamos $*$). Estes, no entanto, não são objetos iniciais para tais categorias. De fato, inexistem morfismos $* \rightarrow \emptyset$. Consequentemente, o único objeto inicial em \mathbf{Set} ou em qualquer categoria que admita o conjunto vazio como objeto, é o próprio \emptyset .

Façamos algumas observações:

1. por argumentos indutivos, vê-se que uma categoria possui produtos finitos se, e somente se, possui produtos binários (isto é, limites de funtores $F : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$, com \mathbf{J} formada de só dois índices) e um objeto terminal. Dualmente, para que uma categoria tenha coprodutos finitos é necessário e suficiente que ela admita coprodutos binários e um objeto inicial;

2. uma categoria com produtos e coprodutos finitos isomorfos é dita ter *biprodutos*. Assim, \mathbf{C} têm biprodutos se, e só se, admite produtos e coprodutos binários isomorfos e um objeto nulo. Aqui se enquadram \mathbf{AbGrp} , \mathbf{Mod}_R ;
3. numa categoria com produtos binários $X \times Y$, para todo espaço X tem-se um morfismo $\Delta_X : X \rightarrow X \times X$, chamado de *mapa diagonal* de X , tal que $\pi_i \circ \Delta_X = id_X$. Ele é obtido diretamente da universalidade das projeções. Da mesma forma, se uma categoria tem coprodutos $X \oplus Y$, então, por universalidade, existem morfismos $\nabla_X : X \oplus X \rightarrow X$ satisfazendo $\nabla_X \circ \iota_i = id_X$.

Notação. No que segue, produtos serão genericamente denotados por \prod ou \times , ao passo que coprodutos arbitrários serão representados por \bigoplus .

Limites Indutivos

Diz-se que uma categoria não-vazia \mathbf{I} é *dirigida* (ou que está *direcionada*) quando:

1. em seu conjunto de objetos (aqui também chamados de índices) está definida uma relação de ordem parcial \leq ;
2. existe um morfismo $f : i \rightarrow j$ se, e somente se, $i \leq j$.

Um functor covariante (resp. contravariante) $F : \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{C}$ chama-se *sistema dirigido* (resp. *codirigido*) de objetos de \mathbf{C} com coeficientes em \mathbf{I} . Costuma-se escrever X_i (resp. X^i) ao invés de $F(i)$, e f_{ij} (resp. f^{ji}) ao invés de $F(f)$, com $f : i \rightarrow j$. Ao longo do texto, esta prática será adotada. Quando existe, o colimite (resp. limite) de um sistema dirigido (resp. codirigido) é chamado *limite indutivo* (resp. de *colimite indutivo*). Apesar de confusa, tal nomenclatura é canônica.

Exemplo 2.1.4. Para todo conjunto parcialmente ordenado I , a categoria $\text{Pos}(I)$, cujos objetos são elementos de I e para a qual existe um (único) morfismo entre $x, y \in I$ se, e só se, $x \leq y$ é claramente dirigida. Em particular, a categoria definida pelo ordenamento natural de \mathbb{N} é direcionada. Um sistema dirigido em \mathbf{C} com coeficientes naturais é simplesmente uma sequência (no caso codirigido, as setas são invertidas)

$$X_0 \longrightarrow X_1 \rightrightarrows X_2 \rightrightarrows X_3 \longrightarrow \cdots$$

Equalizadores

Seja (\rightrightarrows) a categoria que só possui dois objetos (digamos 1 e 2) e, além das identidades, dois únicos morfismos $\delta, \delta' : 1 \rightarrow 2$. Para qualquer que seja a categoria \mathbf{C} , existe uma bijeção natural entre o conjunto dos funtores $F : (\rightrightarrows) \rightarrow \mathbf{C}$ e o conjunto dos pares de morfismos \mathbf{C} que possuem mesmo domínio e mesmo codomínio. Trata-se da aplicação que toma F e devolve os morfismos $F(\delta)$ e $F(\delta')$, de $F(1)$ em $F(2)$.

Diz-se que dois morfismos $f, g : X \rightarrow X'$ de \mathbf{C} podem ser *equalizados* quando o respectivo functor $F : (\rightrightarrows) \rightarrow \mathbf{C}$, correspondendo ao par (f, g) pela identificação acima descrita, possui limite. Isto acontece se, e só se, existem $E \in \mathbf{C}$ e um morfismo $eq : E \rightarrow X$, com $f \circ eq = g \circ eq$, de tal maneira que, se $eq' : E' \rightarrow X$ é outro morfismo cumprindo $f \circ eq' = g \circ eq'$, então é possível escrever $eq' = eq \circ \iota$ para um único $\iota : E' \rightarrow E$. Na presente situação, o diagrama (2.1) se resume a:

$$E' \begin{array}{c} \xrightarrow{\iota} \\ \xrightarrow{eq'} \end{array} E \xrightarrow{eq} X \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} Y$$

Uma categoria *dotada de equalizadores* é aquela para a qual quaisquer dois morfismos com mesmo domínio e mesmo codomínio podem ser equalizados. Dualmente, define-se de maneira natural o que vem a ser uma categoria *dotada de coequalizadores*.

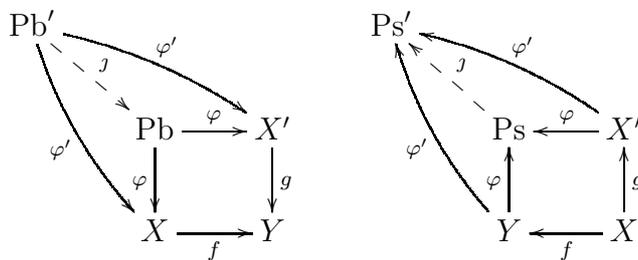
Exemplo 2.1.5. A categoria **Set** possui equalizadores. Com efeito, dados $f, g : X \rightarrow X'$, basta considerar o conjunto E , formado de todo $x \in X$ no qual $f(x) = g(x)$, bem como a inclusão $\iota : E \rightarrow X$. Semelhantemente, as categorias algébricas abelianas também possuem equalizadores. Com efeito, o *kernel* da diferença $f - g$ equaliza os homomorfismos $f, g : X \rightarrow X'$ (daí o nome *difference kernel*, muitas vezes utilizado na literatura como sinônimo de equalizador).

Pullbacks e Pushouts

Seja $(\rightarrow \cdot \leftarrow)$ a categoria que possui somente três objetos (aqui denotados por 1, 2 e *), e além das identidades, dois únicos morfismos $\delta : 1 \rightarrow *$ e $\delta' : 2 \rightarrow *$. Para

qualquer outra categoria \mathbf{C} , o conjunto dos funtores de $(\rightarrow \cdot \leftarrow)$ em \mathbf{C} está em bijeção com a coleção dos pares de morfismos de \mathbf{C} que têm igual codomínio.

Fala-se que dois morfismos $f : X \rightarrow Y$ e $g : X' \rightarrow Y$ possuem *pullback* quando existe o limite do functor associado a (f, g) pela referida identificação. Isto significa que, dados $f : X \rightarrow Y$ e $g : X' \rightarrow Y$, existem um objeto $\text{Pb} \in \mathbf{C}$ e morfismos $\varphi : \text{Pb} \rightarrow X$ e $\varphi' : \text{Pb} \rightarrow X'$, os quais satisfazem a igualdade $g \circ \varphi' = \varphi \circ f$. Além disso, para quaisquer outros morfismos $\varphi'' : \text{Pb}' \rightarrow X$ e $\varphi'' : \text{Pb}' \rightarrow X'$ cumprindo a condição $g \circ \varphi'' = \varphi'' \circ f$, existe um único $j : \text{Pb}' \rightarrow \text{Pb}$ que torna comutativo o primeiro dos diagramas abaixo:



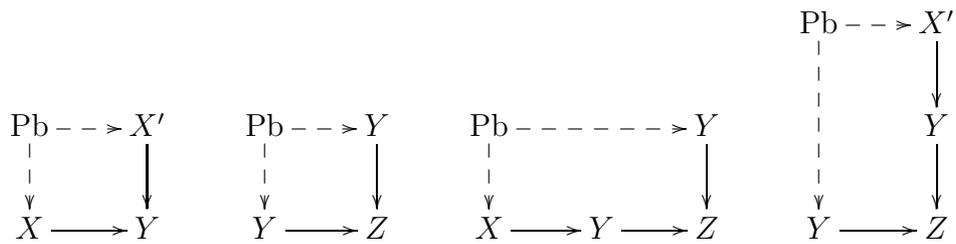
Quando cada par (f, g) de morfismos de \mathbf{C} admite *pullback*, fala-se que a própria categoria tem *pullbacks*. A versão dual do *pullback*, totalmente caracterizada pelo segundo dos diagramas acima, chama-se *pushout*.

Exemplo 2.1.6. Se uma categoria \mathbf{C} possui produtos binários e equalizadores, então ela também possui *pullbacks*: o *pullback* de $f : X \rightarrow Y$ e $g : X' \rightarrow Y$ é o equalizador de $f \circ \pi_1 : X \times X' \rightarrow Y$ e $g \circ \pi_2 : X \times X' \rightarrow Y$, em que π_i são as projeções do produto $X \times X'$. Nestas circunstâncias, é usual escrever $X \times_Y X'$ ao invés de Pb . Assim, dentro de \mathbf{Set} , o *pullback* f, g é o conjunto $X \times_Y X'$ de todo (x, x') tal que $f(x) = g(x')$.

Exemplo 2.1.7. Dualmente, numa categoria com coprodutos binários e coequalizadores, sempre existem *pushouts*: o *pushout* de $f : X \rightarrow Y$ e $g : X \rightarrow Y'$ é o coequalizador dos morfismos $\iota_1 \circ f : X \rightarrow Y \oplus Y'$ e $\iota_2 \circ g : X \rightarrow Y \oplus Y'$, onde ι_i são inclusões de $Y \oplus Y'$. Desta forma, em \mathbf{Set} , o *pushout* de f, g é a reunião disjunta $Y \sqcup Y'$ de seus codomínios, quocientada pela relação que identifica os elementos $f(x)$ e $g(x)$, para todo $x \in X$. Por exemplo, se $\iota : X \rightarrow Y'$ é inclusão, então o *pushout*

de $f : X \rightarrow Y$ com ι é chamado de *colagem* (através de f) do conjunto Y em Y' ao longo de X .

Uma propriedade fundamental dos *pullbacks* é que, quando colados, seja de forma horizontal ou vertical, eles produzem novo *pullback*. De maneira mais precisa, como facilmente se verifica, se os dois primeiros diagramas são *pullbacks*, então o terceiro e o quarto também o são. Resultado análogo é válido para *pushouts*.



De tais propriedades de colagens segue-se que se uma categoria \mathbf{C} possui *pullbacks*, então a regra $\mathbf{C}/ : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Cat}$, dada por $X \mapsto \mathbf{C}/X$, é functorial. Dualmente, se \mathbf{C} possui *pushouts*, então $/\mathbf{C}$ é functorial.

Sequências Exatas

Na álgebra, o *kernel* de $f : X \rightarrow Y$ é o subconjunto $\ker(f) \subset X$ formado de todo $x \in X$ que é mandado no zero. Isto é, tal que $f(x) = 0$. Como vimos há pouco, isto significa que $\ker(f)$ é o equalizador entre f e o mapa trivial $0 \rightarrow Y$. Tal equalizador, por sua vez, é isomorfo ao *pullback* de $(f, 0)$. Semelhantemente, relembramos que o *cokernel* de f é o quociente $Y/\text{im}f$. Ou seja, é o coequalizador entre f e o mapa $X \rightarrow 0$, o qual se vê isomorfo ao *pushout* de $(f, 0)$. Tem-se, também, as identificações

$$\text{im}(f) \simeq \ker(\text{coker}(f)) \quad \text{e} \quad \text{coim}(f) \simeq \text{coker}(\ker(f)).$$

Através delas pode-se, por exemplo, descrever de maneira elegante os teoremas de isomorfismo que aparecem em teoria de grupos, de anéis, na álgebra linear, etc. Com efeito, estes traduzem simplesmente a comutatividade entre *kernels* e *cokernels*.

Motivados por estes fatos, em qualquer categoria com objeto inicial \emptyset (resp. final $*$), o *pullback* (resp. *pushout*) do par (\emptyset, f) (resp. $(*, f)$) é chamado de *kernel*

(resp. *cokernel*) de f . Por sua vez, a *imagem* e a *coimagem* de f serão definidas como sendo $\ker(\text{coker}(f))$ e $\text{coker}(\ker(f))$. Em tais categorias, também faz sentido falar de *sequências exatas* de morfismos: uma sequência f_n diz-se *exata* quando, para qualquer que seja o n , o *kernel* de f_n coincide, a menos de isomorfismos, com a imagem de f_{n-1} . Uma sequência exata é dita *curta* quando possui somente dois termos não-nulos, sendo estes consecutivos.

A aplicabilidade das sequências exatas se deve ao seguinte: uma vez construídos invariantes (isto é, uma vez obtidos funtores que associam a cada espaço uma estrutura), precisa-se *calculá-los*. Neste sentido, as sequências exatas constituem poderosas ferramentas. De maneira mais precisa, procura-se, por exemplo, por funtores que associem a cada sequência exata curta de espaços uma sequência exata longa na categoria dos correspondentes invariantes. Se tal categoria for adequada, então é possível retirar informação dos invariantes de um espaço da sequência a partir dos invariantes dos outros. O estudo das sequências exatas é concernente à *álgebra homológica* (veja, por exemplo, [78, 91], assim como os clássicos [17, 60].

O ambiente mais genérico no qual se pode estudar álgebra homológica são as *categorias abelianas*. Estas são construídas de maneira a abstraírem as propriedades fundamentais da álgebra clássica. Por exemplo, elas consistem no ambiente genérico no qual se tem os teoremas do isomorfismo enquanto caracterizados da maneira acima. Para a teoria em categorias abelianas, veja [36].

Completude

Diz-se que uma categoria é *completa* (resp. *cocompleta*) quando todos os funtores que nela assumem valores possuem limites (resp. colimites). Na subseção anterior, vimos que algumas classes de limites podem ser criados se supomos a existência de outros. Por exemplo, mostramos que se uma categoria admite produtos binários e equalizadores, então ela possui *pullbacks*.

A proposição abaixo nos indica que, se reforçamos a hipótese adicionando a existência de todos os produtos (não só dos binários), ganhamos a existência não só dos *pullbacks*, mas de qualquer limite. Ressaltamos que a prova aqui apresentada foi inteiramente baseada em [59].

Proposição 2.1.1. *Para que uma categoria \mathbf{D} seja completa, é necessário e suficiente que ela possua todos os produtos e todos os equalizadores.*

Demonstração. A necessidade é evidente. Para a suficiência, fornecido $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$, mostraremos que as hipóteses asseguram a existência de um cone (X, φ) para F tal que, se (X', φ') é qualquer outro cone de F , então há uma única fatoraçoão $u : X' \rightarrow X$. Escolhido um morfismo $f : Y \rightarrow Y'$ em \mathbf{C} , escrevamos $Y = \text{dom}f$ e $Y' = \text{cod}f$. Uma vez que \mathbf{D} possui todos os produtos, seja $\prod_f F(\text{cod}f)$ o produto dos objetos de \mathbf{D} indexados pelo contradomínio de morfismos de \mathbf{C} . Da mesma forma, seja $\prod_Y F(Y)$ o produto dos objetos de \mathbf{D} indexados por objetos de \mathbf{C} . Como todo objeto de \mathbf{C} é domínio e contradomínio de ao menos um morfismo (por exemplo de sua respectiva identidade), segue-se que $F(\alpha) \circ \pi_{\text{dom}f}$ e $\text{id} \circ \pi_{\text{cod}f}$ definem outras projeções para $\prod_f F(\text{cod}f)$, de tal modo que, por universalidade, existem as setas paralelas representadas no diagrama abaixo:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & F(\text{dom}f) & \xrightarrow{F(f)} & F(\text{cod}f) \\
 & \nearrow \varphi' & \nearrow \varphi & \uparrow \pi_{\text{dom}f} & \uparrow \pi_f \\
 X' & \xrightarrow{\mu} & E & \xrightarrow{eq} & \prod_Y F(Y) & \xrightarrow{\cong} & \prod_f F(\text{cod}f) \\
 & \searrow \varphi' & \searrow \varphi & \downarrow \pi_{\text{cod}f} & \downarrow \pi_f \\
 & & F(\text{cod}f) & \xrightarrow{\text{id}} & F(\text{cod}f)
 \end{array}$$

O par (X, φ) , em que X é o equalizador das setas paralelas e $\varphi(Y) = \pi_Y \circ eq$, formam um cone para F . Afirmamos que ele é o limite procurado. Com efeito, se (X', φ') é outro cone, a universalidade dos produtos nos garante a existência de um único morfismo $eq' : X' \rightarrow \prod_Y F(Y)$ que preserva as setas paralelas. Desta forma, a universalidade do equalizador fornece um único $u : X' \rightarrow X$, garantindo o afirmado e concluindo a demonstração. \square

Sobre o resultado anterior, duas observações:

1. ele é uma típica situação na qual a diferença entre os conceitos de classe e de conjunto deve ser levada em consideração: durante toda a demonstração, a classe dos objetos de \mathbf{C} foi tratada como sendo um conjunto, algo que, numa abordagem axiomática, pode não ser verdade para uma categoria arbitrária. Mais uma vez, isto ressalta a ingenuidade com a qual temos trabalhado;

2. tem-se uma versão dual, demonstrada de maneira estritamente análoga: *para que uma categoria seja cocompleta, é necessário e suficiente que ela tenha coprodutos e coequalizadores.*

Espaços Pontuados

Nesta subsecção, estudamos os limites e colimites em categorias pontuadas \mathbf{C}_* . A ideia é tentar determiná-los a partir dos limites de \mathbf{C} . De maneira direta, verifica-se que o desapareamento $\mathcal{D} : \mathbf{C}_* \rightarrow \mathbf{C}$ preserva limites, de modo que, para todo functor $F : \mathbf{C}_* \rightarrow \mathbf{D}$, se seu limite existe, então $\mathcal{D}(\lim F) \simeq \lim(\mathcal{D} \circ F)$. Assim, por exemplo, produtos e *pullbacks* em \mathbf{C}_* podem ser diretamente calculados a partir de suas versões em \mathbf{C} , bastando pontuá-los de maneira canônica. O exemplo abaixo nos mostra que a mesma estratégia, no entanto, não se aplica para colimites.

Exemplo 2.1.8. O coproduto de pares (X_i, x_i) em \mathbf{Set}_* é o *produto wedge* $\bigvee_i X_i$, definido da seguinte maneira: toma-se a reunião de todos os produtos $X_i \times x_i$ e passa-se ao quociente pela relação que identifica todos os pontos x_i num único, o qual há de ser o ponto base de $\bigvee_i X_i$.

Observamos que o coproduto de \mathbf{Set}_* foi obtido a partir de colimites em \mathbf{Set} : primeiro tomamos a reunião disjunta (que é o coproduto) e depois passamos ao quociente (que é um *cokernel*). Argumentação análoga funciona para obter coprodutos em qualquer \mathbf{C}_* , desde que \mathbf{C} seja cocompleta.

2.2 Monoides

A matemática clássica é construída sob a linguagem da teoria dos conjuntos. A teoria das categorias, por sua vez, tem a teoria dos conjuntos como um caso particular. Espera-se, portanto, que a teoria das categorias forneça procedimentos que nos permitam abstrair qualquer que seja o conceito usual. Um de tais procedimentos é a *categorificação*, o qual passamos a descrever.

Relembramos que o problema de classificar uma dada categoria \mathbf{C} consiste em obter uma bijeção entre o conjunto das classes de isomorfismo $\text{Iso}(\mathbf{C})$ e algum outro

conjunto S . Dualmente, fornecido um conjunto S , o problema de *categorificá-lo* consiste em obter uma categoria \mathbf{C} cuja classe de isomorfismos esteja em bijeção com S . Em outras palavras, categorificar um conjunto S é buscar por uma categoria \mathbf{C} que pode ser classificada em termos de S . Por este motivo, algumas vezes se fala que classificar é o mesmo que *descategorificar*.

Exemplo 2.2.1. Sabe-se a categoria dos espaços vetoriais de dimensão finita é classificada pelo invariante dimensão (isto é, pelo functor $\dim : \mathbf{FVec}_{\mathbb{K}} \rightarrow \mathbb{N}$). Desta forma, pode-se pensar na categoria $\mathbf{FVec}_{\mathbb{K}}$ como sendo uma categorificação dos naturais.

Observamos que categorias são entidades mais complicadas que conjuntos: em uma categoria tem-se duas classes (a dos objetos e a dos morfismos), ao passo que num conjunto tem-se apenas uma. Posto isso, o problema de categorificação tende a ser mais difícil que o de classificação: para classificar, procura-se um conjunto (entidade simples) que represente uma categoria (entidade complexa) previamente conhecida. Para categorificar, precisa-se determinar uma categoria (entidade complicada) que seja representada por um dado conjunto (entidade simples).

Grosso modo, classificar é estudar o functor $\text{Iso} : \mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{Set}$, ao passo que categorificar é encontrar funtores $\text{Ctgz} : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Cat}$ que são “inversas pontuais” de Iso . Assim, ao se classificar, perde-se “informação categórica”: com o objetivo de entender a categoria, ela é substituída por um ente mais simples. Por sua vez, ao se categorificar, ganha-se tal informação. É exatamente este o espírito da categorificação: partir de uma entidade conhecida e substituí-la por outra mais complexa, ganhando novas ferramentas. Por exemplo, pode-se partir de um invariante simples e, ao final do processo, obter outro mais poderoso. Sobre o assunto, remetemos o leitor a um artigo bastante interessante de John Baez e James Dolan: [5].

Categorias Monoidais

Para categorificar uma estrutura algébrica S , deve-se obter uma categoria \mathbf{C} cujo conjunto das classes de isomorfismo admite uma estrutura isomorfa a S . Assim, por exemplo, se S for um monoide, \mathbf{C} poderá categorificá-lo somente se $\text{Iso}(\mathbf{C})$ também

for um monoide. Portanto, se quisermos saber quais categorias classificam uma determinada estrutura algébrica, deveremos restringir nossa busca às categorias cujo conjunto das classes de isomorfismo possuem correspondente estrutura. Em outras palavras, dada uma subcategoria $\mathbf{Alg} \subset \mathbf{Set}$, devemos procurar por subcategorias $\mathbf{Cat}_{\mathbf{Alg}} \subset \mathbf{Cat}$ restritas as quais o functor Iso assume valores em \mathbf{Alg} .

Um *insight* para determinar $\mathbf{Cat}_{\mathbf{Alg}}$ é o seguinte: estruturas algébricas são conjuntos dotados de elementos distinguidos (elementos neutros) e de operações binárias (que são funções entre conjuntos), as quais satisfazem certas equações. As entidades primárias são os elementos, os quais originam os conjuntos e as funções, as quais se relacionam por meio das equações. Por sua vez, em \mathbf{Cat} as entidades primárias são os objetos e os morfismos, os quais originam as categorias e os funtores, os quais se relacionam por meio das transformações naturais.

Assim, partindo de \mathbf{Alg} , para obter $\mathbf{Cat}_{\mathbf{Alg}}$, a ideia é “elevar em um grau a informação categórica”: elementos distinguidos tornam-se objetos distinguidos, conjuntos tornam-se categorias, operações binárias tornam-se bifuntores e equações são reformuladas por meio de isomorfismos naturais, chamados de *condições de coerência*.

Exemplo 2.2.2. Na álgebra clássica, um monoide é um conjunto X dotado de uma única operação binária $* : X \times X \rightarrow X$, e de um elemento distinguido $1 \in X$, tais que as seguintes equações são satisfeitas para quaisquer $x, y, z \in X$:

$$1 * x = x = x * 1 \quad \text{e} \quad (x * y) * z = x * (y * z). \quad (2.2)$$

Seguindo o *insight* anterior, uma categoria em $\mathbf{Cat}_{\mathbf{Mon}}$ seria aquela \mathbf{C} na qual se encontram definidos um bifunctor $\otimes : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ e um objeto distinguido $1 \in \mathbf{C}$, para os quais se tem os seguintes isomorfismos naturais:

$$1 \otimes X \simeq X \simeq X \otimes 1 \quad \text{e} \quad (X \otimes Y) \otimes Z \simeq X \otimes (Y \otimes Z). \quad (2.3)$$

Se \mathbf{C} cumpre tais relações, então $\text{Iso}(\mathbf{C})$ é realmente um monóide, mostrando-nos que o *insight* cumpriu com o seu papel. Com efeito, basta colocar $[X]*[Y] = [X \otimes Y]$. O elemento neutro haverá de ser $[1]$. Observamos, no entanto, que as relações (2.2) nos permitem retirar os parênteses de qualquer expressão envolvendo um número arbitrário de elementos. Por exemplo,

$$(x * y) * (x' * y') = x * ((y * x) * y') = x * (y * (x' * y')).$$

Em contrapartida, as relações (2.3) não são suficientes para garantir algo análogo para a categoria obtida através do *insight*. São necessárias, pois, mais algumas condições de coerência (veja a segunda seção do capítulo VII de [59]). Uma categoria que cumpre com o *insight* e também com estas condições de coerência adicionais chama-se *monoidal*. Assim, pode-se dizer que *as categorias monoidais são categorificações convenientes do conceito clássico de monoide*.

Exemplo 2.2.3. Se uma categoria \mathbf{C} possui produtos binários $X \times Y$ e um objeto terminal $*$, então o bifunctor $(X, Y) \mapsto X \times Y$ está bem definido e ali introduz uma estrutura monoidal, cujo objeto neutro nada mais é que o próprio $*$. Dualmente, se \mathbf{C} tem coprodutos binários $X \oplus Y$ e um objeto inicial \emptyset , então $(X, Y) \mapsto X \oplus Y$ a faz monoidal, cujo objeto neutro é \emptyset .

Exemplo 2.2.4. Quando \mathbf{C} possui estrutura monoidal \otimes , esta induz uma estrutura monoidal natural em $\text{Func}(\mathbf{D}; \mathbf{C})$, seja qual for a categoria \mathbf{D} . Particularmente, induz estrutura monoidal na categoria $s\mathbf{C}$ dos objetos simpliciais de \mathbf{C} .

Nem sempre a estrutura monoidal provém de produtos e coprodutos. Abaixo ilustramos este fato por meio de um exemplo.

Exemplo 2.2.5. Na categoria \mathbf{Mod}_R , com R comutativo, consideremos a regra \otimes_R que a cada par de módulos (X, Y) associa o produto tensorial $X \otimes_R Y$ entre eles, e que a cada par (f, g) de homomorfismos faz corresponder $f \otimes_R g$. Ela é associativa e possui unidade dada pelo próprio anel R , visto enquanto módulo sobre si mesmo. Assim, \otimes_R torna \mathbf{Mod}_R uma categoria monoidal sem provir de produtos ou coprodutos.

Analogamente poder-se-ia aplicar o *insight* de modo a obter categorificações de outras estruturas algébricas mais complicadas. Por exemplo, a categorificação dos monoides abelianos são as categorias monoidais \mathbf{C} , com produto $\otimes : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$, para as quais existem isomorfismos naturais $X \otimes Y \simeq Y \otimes X$, denominados *braidings*, satisfazendo certas condições de coerência. Tais categorias são ditas *simétricas*.

Exemplo 2.2.6. Estruturas monoidais provenientes de produtos e coprodutos binários são sempre simétricas. Particularmente, a soma direta em \mathbf{Mod}_R possui

inversa $X \oplus (-X) \simeq 0$, em que $-X$ é o conjunto de todo $-x$, com $x \in X$. Desta forma, \mathbf{Mod}_R é categorização de grupo abeliano com \oplus . Por sua vez, sabe-se que o produto tensorial é comutativo a menos de isomorfismos, de modo que a estrutura definida por \otimes_R em \mathbf{Mod}_R também é simétrica. Particularmente, \oplus e \otimes_R são distributivos módulo isomorfismos naturais. Portanto, com tais bifuntores, \mathbf{Mod}_R é categorização de um anel comutativo com unidade.

Monoides

Um *monoide* numa categoria monoidal \mathbf{C} , com produto $\otimes : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$, é a generalização do conceito usual de monoide presente na álgebra clássica. Trata-se, pois, de um objeto $X \in \mathbf{C}$ para o qual existem morfismos $* : X \otimes X \rightarrow X$ e $e : 1 \rightarrow X$, obtidos de tal maneira que os diagramas abaixo se tornam comutativos. O primeiro deles traduz a “associatividade” de $*$, enquanto que o segundo expressa a existência de um “elemento neutro” em X (compare com os diagramas apresentados no início do primeiro capítulo).

$$\begin{array}{ccc}
 X \otimes (X \otimes X) & \longrightarrow & (X \otimes X) \otimes X \xrightarrow{* \otimes id} X \otimes X \\
 id \otimes * \downarrow & & \downarrow * \\
 X \otimes X & \xrightarrow{*} & X
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccccc}
 1 \otimes X & \xrightarrow{e \otimes id} & X \otimes X & \xleftarrow{id \otimes e} & X \otimes 1 \\
 & \searrow & \downarrow * & \swarrow & \\
 & & X & &
 \end{array}$$

Tem-se uma categoria $\text{Mon}(\mathbf{C}, \otimes)$ formada dos monoides de \mathbf{C} segundo \otimes (quando não há risco de confusão quanto ao bifunctor fixado, ele é omitido da notação). Em tal categoria, um morfismo entre $(X, *, e)$ e $(X', *, e')$ é simplesmente um morfismo $f : X \rightarrow X'$ que preserva $*$ e e . Isto é, que satisfaz as igualdades $f \circ e = e'$ e $f \circ * = *' \circ (f \otimes f)$. Um *comonoide* em \mathbf{C} é simplesmente um monoide em \mathbf{C}^{op} . Mais precisamente, estes se tratam dos objetos da categoria $\text{Mon}(\mathbf{C}^{op}, \otimes)^{op}$, denotada por $\text{Comon}(\mathbf{C}; \otimes)$.

Numa categoria monoidal simétrica, diz-se que um monoide é *comutativo* ou *abeliano* quando sua multiplicação comuta com o *braiding* $X \otimes X \simeq X \otimes X$. Invertendo setas obtém-se a correspondente noção de comonoides cocomutativos. Tais entidades definem categorias ${}_c\text{Mon}(\mathbf{C}, \otimes)$ e ${}_c\text{Comon}(\mathbf{C}; \otimes)$.

Exemplo 2.2.7. Na categoria $\times : \mathbf{Set} \times \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$, os monoides coincidem com

os monoides usuais da álgebra clássica. Por sua vez, para qualquer que seja o anel comutativo R , os monoides de \mathbf{Mod}_R são, relativamente ao produto \otimes_R , as álgebras sobre R . Afinal, dar um morfismo $X \otimes_R X \rightarrow X$ é o mesmo que dar uma aplicação bilinear $X \times X \rightarrow X$. Assim, em particular, os monoides de $\mathbf{AbGrp} \simeq \mathbf{Mod}_{\mathbb{Z}}$ são os anéis.

Exemplo 2.2.8. Numa categoria monoidal $\otimes : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ definida por produtos binários, todo objeto X admite uma estrutura única de comonoide, com comultiplicação dada pelo mapa diagonal $\Delta_X : X \rightarrow X \otimes X$. Por sua vez, já que o objeto neutro $1 \in \mathbf{C}$ é terminal, para cada X existe um único morfismo $! : X \rightarrow 1$, o qual haverá de ser a counidade de X . Dualmente, se \otimes provém de coprodutos binários, então todo X possui única estrutura de monoide. Sua multiplicação é o mapa $\nabla_X : X \otimes X \rightarrow X$, ao passo que sua unidade é o morfismo $! : 1 \rightarrow X$, obtido do fato de 1 ser inicial.

Um functor $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}'$ entre categorias monoidais pode não levar monoides em monoides e nem mesmo comonoides em comonoides. Quando ele preserva monoides (resp. comonoides), diz-se que ele é *monoidal* (resp. *comonoidal*). Se este é o caso, então ficam respectivamente induzidos funtores

$$F_* : \mathbf{Mon}(\mathbf{C}, \otimes) \rightarrow \mathbf{Mon}(\mathbf{C}', \otimes') \quad \text{e} \quad F^* : \mathbf{CoMon}(\mathbf{C}, \otimes) \rightarrow \mathbf{CoMon}(\mathbf{C}', \otimes').$$

Observamos que, para F ser monoidal, basta que mapeie produtos em produtos e também objeto neutro em objeto neutro. Isto é, basta existirem um morfismo $f : 1' \rightarrow F(1)$ e transformações $\phi_{xy} : F(X) \otimes' F(Y) \rightarrow F(X \otimes Y)$ satisfazendo certas condições de coerência, as quais são descritas em termos da comutatividade de diagramas semelhantes àqueles satisfeitos por $*$ e e . Um functor monoidal para o qual f e cada ϕ_{xy} são isomorfismos chama-se *fortemente monoidal*.

Da mesma forma, para F ser comonoidal, é suficiente que existam $g : 1' \rightarrow F(1)$ e também transformações $\varphi_{xy} : F(X \otimes Y) \rightarrow F(X) \otimes' F(Y)$ satisfazendo condições de compatibilidade. Quando g e φ_{xy} são isomorfismos, fala-se que F é *fortemente comonoidal*.

Tem-se subcategorias \mathbf{Mnd} , \mathbf{CoMnd} , \mathbf{SMnd} e \mathbf{SCoMnd} de \mathbf{Cat} , cujos objetos

são categorias monoidais, e cujos morfismos são, respectivamente, funtores monoidais, comonoidais, fortemente monoidais e fortemente comonoidais.

Bimonoides

Toda categoria monoidal simétrica \mathbf{C} induz uma estrutura monoidal em $\text{Mon}(\mathbf{C}, \otimes)$. Esta é definida pelo bifunctor

$$\otimes_M : \text{Mon}(\mathbf{C}, \otimes) \times \text{Mon}(\mathbf{C}, \otimes) \rightarrow \text{Mon}(\mathbf{C}, \otimes),$$

que toma dois monoides $(X, *, e)$ e $(X', *, e')$ e devolve o respectivo monoide $X \otimes X'$, tendo $e \otimes e'$ como unidade e cuja multiplicação $\#$ é obtida compondo as setas do diagrama abaixo, em que a primeira delas provém de associatividade de \otimes e de *braiding*s.

$$(X \otimes X') \otimes (X \otimes X') \xrightarrow{\cong} (X \otimes X) \otimes (X' \otimes X') \xrightarrow{*\otimes*'} X \otimes X'$$

O objeto neutro de $\text{Mon}(\mathbf{C}, \otimes)$ é o monoide formado pelo objeto neutro de \mathbf{C} , tendo unidade dada por id_1 e multiplicação fornecida pelo isomorfismo $1 \otimes 1 \simeq 1$. Por dualidade, a estrutura monoidal de \otimes fixa outra em $\text{Mon}(\mathbf{C}^{op}, \otimes)^{op}$. Tem-se equivalências

$$\text{Mon}(\text{Mon}(\mathbf{C}, \otimes), \otimes_M) \simeq {}_c\text{Mon}(\mathbf{C}, \otimes) \quad \text{e} \quad \text{Comon}(\text{Comon}(\mathbf{C}, \otimes), \otimes_M) \simeq {}_c\text{Comon}(\mathbf{C}, \otimes),$$

as quais são usualmente chamadas de *princípio de Eckmann-Hilton* (veja o artigo original [25] ou a seção 1.2.7 de [3]). Por sua vez, dar um comonoide na categoria dos monoides é o mesmo que fornecer um monoide na categoria dos comonoides. Isto reflete a existência de isomorfismos

$$\text{Comon}(\text{Mon}(\mathbf{C}, \otimes), \otimes_M) \simeq \text{Mon}(\text{Comon}(\mathbf{C}, \otimes), \otimes_M).$$

Os objetos de ambas as categorias (aqui indistinguívelmente denotadas por $\text{Bimon}(\mathbf{C}; \otimes)$), são chamados de *bimonoides* de \mathbf{C} . Assim, um bimonide numa categoria monoidal \mathbf{C} é um objeto que possui simultaneamente estruturas de monoide e de comonoide, tais que sua multiplicação e sua unidade são morfismos de comonoides, ao mesmo tempo que sua comultiplicação e counidade são morfismos de monoides.

Grupos

Um *monoide de Hopf* em $\otimes : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ é um bimonóide X , o qual admite “inversos”. Isto se traduz na existência de um morfismo $inv : X \rightarrow X$, chamado de *antípoda* ou *inversão*, tal que o diagrama abaixo é comutativo. Nele, $*$ e $*'$ denotam a multiplicação e a comultiplicação de X , ao passo que e e e' representam a sua unidade e a sua counidade (compare, mais uma vez, com os diagramas da seção inicial do primeiro capítulo).

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{e'} & 1 & \xrightarrow{e} & X \\
 *' \downarrow & & & & \uparrow * \\
 X \otimes X & \xrightarrow{id \otimes inv} & X & \otimes & X
 \end{array}$$

Evidentemente, tem-se uma subcategoria cheia $\text{Hopf}(\mathbf{C}; \otimes) \subset \text{Bimon}(\mathbf{C}; \otimes)$.

Exemplo 2.2.9. Os monóides de Hopf da categoria \mathbf{Mod}_R , com estrutura monoidal fixada pelo produto tensorial, são usualmente chamados de *álgebras de Hopf* sobre R . Como veremos, exemplos são os grupos de homologia singular de um H -espaço e a álgebra de Steenrod.

Observamos que, se a estrutura monoidal de \mathbf{C} provém de produtos binários, então dar um monoide de Hopf em \mathbf{C} é o mesmo que dar um monoide X dotado de uma inversão (afinal, sob tal hipótese, todo monoide é bimonóide). Em outras palavras, em tal situação, um monoide de Hopf é simplesmente um objeto no qual se tem uma multiplicação associativa e possuidora de unidade, ao mesmo tempo que se sabe inverter. Por este motivo, costuma-se dizer que X é *grupo* em \mathbf{C} .

Dualmente, quando $\otimes : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ é definido através de coprodutos, então os monóides de Hopf em \mathbf{C} nada mais são que os comonóides adicionados de um mapa antípoda. Isto nos leva a chamá-los de *cogrupos* em \mathbf{C} .

Exemplo 2.2.10. Os grupos de \mathbf{Set} , com \times , são os grupos usuais da álgebra clássica. Por sua vez, o único cogrupo de tal categoria é o conjunto vazio. Afinal, este é seu único comonóide.

Capítulo 3

Topologia

Neste capítulo estudamos os *espaços topológicos*. Tratam-se dos conjuntos nos quais se tem definida uma noção qualitativa de proximidade entre pontos, obtida por meio do conceito de *vizinhança fundamental*. Os mapeamentos naturais entre esta classe de espaços são as funções que preservam a estrutura adicional de proximidade. Isto nos permite definir uma categoria **Top**, delimitando uma área da matemática conhecida como *topologia*. Construir **Top** e estudar algumas de suas propriedades fundamentais (como a completude e a cocompletude) consiste o principal objetivo da primeira seção.

Na segunda seção, estudamos o problema de classificação em **Top**, evidenciando que ele é extremamente difícil de ser inteiramente solucionado. Iniciamos apresentando invariantes que podem ser obtidos mediante simples imposições sobre as vizinhanças de um espaço. Em seguida, observando que estes são fracos (no sentido de que nem mesmo nos permitem discernir a esfera \mathbb{S}^2 do todo $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$), iniciamos uma busca por outros que sejam mais poderosos. Apresentamos, então, a *topologia algébrica* como sendo a área da topologia que se propõe a realizar tal tarefa via métodos algébricos. Particularmente, apresentamo-la como o estudo dos funtores de **Top** em alguma categoria algébrica.

A literatura sobre topologia é bastante vasta. Textos completos, que cobrem todos os tópicos aqui discutidos, incluem [43, 70].

3.1 Estrutura

A topologia é a parte da matemática que permite discernir o que é *local* daquilo que é *global*. Intuitivamente, uma propriedade é *local* quando vale nas vizinhanças de cada ponto. Por sua vez, ela é *global* quando vale no espaço inteiro. Assim, o conceito fundamental para discernir local do global é o de *vizinhança*.

Um *espaço topológico* é aquele dotado de uma regra que dá vizinhanças a pontos, sendo estas compatíveis num certo sentido. De maneira mais precisa, um espaço topológico é um conjunto X dotado de uma regra τ , denominada *base*, responsável por associar uma família de subconjuntos $\tau(p)$ de X , todos contendo p e sendo tais que

- dados $B_p \in \tau(p)$ e $B_q \in \tau(q)$ não-disjuntos, para todo $a \in B_p \cap B_q$ existe um $B_a \in \tau(a)$ inteiramente contido nesta interseção.

Os elementos de $\tau(p)$ chamam-se *vizinhanças básicas* (ou *fundamentais*) de p segundo τ . Desta forma, a condição anterior implica, em particular, que num espaço topológico cada ponto admite vizinhanças arbitrariamente pequenas.

Um subconjunto $U \subseteq X$ que pode ser escrito em termos de vizinhanças básicas segundo τ recebe o nome de τ -*aberto*. Diz-se que o conjunto dos τ -abertos constitui a *topologia gerada por τ em X* . Como logo se convence, diferentes bases podem gerar a mesma topologia. Isto reforça o fato de que *o conceito de aberto é mais importante que o de vizinhança*.

Exemplo 3.1.1. O \mathbb{R}^n é um espaço topológico enquanto dotado da regra τ , que a cada $p \in \mathbb{R}^n$ faz corresponder o conjunto $\tau(p)$ das *bolas abertas* $B_r(p)$ de centro p e raio r . Estas são formadas de todo q cumprindo $\|q - p\| < r$. Com respeito a esta estrutura, os abertos do \mathbb{R}^n são simplesmente os conjuntos que se escrevem como reunião de bolas abertas.

Exemplo 3.1.2. Toda base num espaço topológico X pode ser restringida a um subconjunto arbitrário $A \subset X$, fazendo deste um outro espaço topológico. Mais precisamente, se τ é base em X , então a regra $\tau|_A$, que a cada $p \in A$ associa o conjunto formado de todas as interseções $B_p \cap A$, com $B_p \in \tau(p)$, é base em A . Enquanto dotado desta estrutura, diz-se que A é um *subespaço topológico* de X .

Exemplo 3.1.3. Exemplos importantes de subespaços do \mathbb{R}^n incluem: o *círculo* \mathbb{S}^{n-1} e o *disco fechado* \mathbb{D}^n , respectivamente formados pelos pontos $p \in \mathbb{R}^n$ tais que $\|p\| = 1$ ou $\|p\| \leq 1$, assim como o *semi-espaço* \mathbb{H}^n , constituído das ênuplas (x_1, \dots, x_n) , com $x_n \geq 0$.

Categoria

Grosso modo, pode-se dizer que um espaço topológico é aquele no qual se sabe dizer *qualitativamente* quando dois pontos estão próximos. Com efeito, eles o estarão se um pertencer a uma vizinhança básica do outro. Assim, de modo ainda mais sucinto, um espaço topológico é um conjunto dotado de uma noção adicional de proximidade.

Posto isto, seguindo a máxima apresentada ao final da primeira seção do capítulo anterior, os mapeamentos entre espaços topológicos haverão de ser as funções (ditas *contínuas*) que preservam proximidade. Isto é, que levam pontos próximos em pontos próximos. De maneira mais precisa, $f : X \rightarrow Y$ é dita *contínua* quando, para quaisquer $p, q \in X$, para fazer $f(q)$ *arbitrariamente próximo* de $f(p)$, basta tomar q *suficientemente próximo* de p . Em outras palavras, para que $f(q) \in B_{f(p)}$, basta que $q \in B_p$.

Como logo se convence, a identidade id_X é sempre contínua, ao passo que a continuidade é preservada por composições (isto é, se f e g são contínuas, então $g \circ f$ também o é). Portanto, está bem definida uma categoria concreta **Top**, cujos objetos são espaços topológicos e cujos morfismos são precisamente as funções contínuas. É ela quem delimita o domínio da topologia dentro da matemática.

Completude

Observamos que na topologia se tem *maneiras universais de projetar e de incluir*. Mais precisamente, **Top** possui produtos e coprodutos. Com efeito, dados espaços X e Y , digamos com bases τ e τ' , então o produto $X \times Y$ admite uma base natural $\tau \times \tau'$, que a cada par (p, q) faz corresponder o conjunto de todos os produtos $B_p \times B'_q$, com $B_p \in \tau(p)$ e $B'_q \in \tau'(q)$. Além disso, as projeções $pr_1 : X \times Y \rightarrow X$ e

$pr_2 : X \times Y \rightarrow Y$ são contínuas, ao mesmo tempo que cumprem com propriedades universais no seguinte sentido: para quaisquer espaço X' e quaisquer f e g contínuas, existe uma única h , também contínua, que deixa o primeiro dos diagramas abaixo comutativo.

$$\begin{array}{ccc}
 & & X \\
 & \nearrow f & \\
 X' & \overset{h}{\dashrightarrow} X \times Y & \xrightarrow{\pi_1} X \\
 & \searrow g & \\
 & & Y
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & & X \\
 & \nearrow f & \\
 X' & \overset{h}{\dashrightarrow} X \sqcup Y & \xrightarrow{\iota_1} X \\
 & \searrow g & \\
 & & Y
 \end{array}
 \tag{3.1}$$

Dualmente, fornecidos X e Y , a reunião disjunta $X \sqcup Y$ também possui estrutura natural de espaço topológico segundo a qual as inclusões $\iota_1 : X \rightarrow X \sqcup Y$ e $\iota_2 : Y \rightarrow X \sqcup Y$ são contínuas e universais no sentido do segundo dos diagramas acima. Com efeito, dadas bases τ em X e τ' em Y , a regra $\tau \sqcup \tau'$, que a cada a em $X \sqcup Y$ associa $\tau(a)$ ou $\tau'(a)$ conforme $a \in X$ ou $a \in Y$, serve de base.

Na verdade, a categoria **Top** é completa e cocompleta. Para ver isso, uma vez que temos produtos e coprodutos, pelo teorema de existência de limites e colimites, basta construirmos equalizadores e coequalizadores. Para equalizadores, dados mapas $f, g : X \rightarrow Y$, tome o equalizador em **Set** (que é o subconjunto de X no qual f e g coincidem) e considere-o com a topologia do subespaço. Para coequalizadores, mais uma vez calcule-o em **Set**, resultando no quociente de Y pela relação que identifica $f(x) \sim g(x)$, e então considere uma “topologia universal”. Neste caso, a topologia em questão é a chamada *topologia quociente*.

3.2 Classificação

Consideramos aqui o problema de *classificar* a categoria **Top**. Em outras palavras, buscamos determinar se dois espaços topológicos X e Y são ou não *homeomorfos* (isto é, isomorfos em **Top**). Eles o serão quando existirem funções contínuas $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ cujas composições produzem identidades. Mais precisamente, quando valem as condições $g \circ f = id_X$ e $f \circ g = id_Y$.

Intuitivamente, dois espaços serão homeomorfos se, e somente se, um puder ser

continuamente deformado no outro sem que se tenha que rasgar, furar ou colapsar dimensões. Assim, por exemplo, espera-se que quaisquer duas bolas abertas sejam homeomorfas. Com efeito, para sair de uma e chegar na outra, basta transladar/esticar, que são operações contínuas. Em contrapartida, por menor que seja a bola, não se deve esperar que ela seja homeomorfa a um só ponto (pois aqui se teria que colapsar dimensões). Da mesma forma, tais bolas não deverão de ser homeomorfas ao conjunto obtido retirando-se delas um ponto. Afinal, este processo consiste exatamente em furar a bola, o que é proibido para os homeomorfismos.

Vejamos outro exemplo: espera-se que o cilindro infinito $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ seja homeomorfo ao cilindro finito $\mathbb{S}^1 \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, seja qual for o $\varepsilon > 0$. Entretanto, por menor que se escolha o ε , nunca se obterá um espaço homeomorfo ao círculo. De fato, para que isto acontecesse seria necessário colapsar a “dimensão altura”.

Como comentamos, a topologia se diferencia da análise pela existência de maneiras universais de projetar e incluir. Gostaríamos de evidenciar um fato crucial que também diferencia esta disciplina da álgebra.

Iniciamos relembando que duas estruturas algébricas X e Y são isomorfas quando existem mapas $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$, os quais preservam as operações envolvidas e cujas composições $g \circ f$ e $f \circ g$ coincidem com as respectivas identidades. O fato fundamental que permeia a álgebra é o seguinte: *para que um morfismo f seja isomorfismo, basta ser bijetivo*. Pois, neste caso, sua inversa (em **Set**) é obrigatoriamente linear. Em suma, na álgebra, os isomorfismos são precisamente as funções inversíveis e lineares.

Esta mesma condição não é satisfeita em **Top**. De fato, existem funções que são contínuas, bijetivas, mas cuja inversa é descontínua. Este é o caso da aplicação $\exp : (0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{S}^1$, definida por $\exp(t) = (\cos t, \sin t) = e^{it}$.

Invariantes

Como já comentamos, problemas de classificação são, em geral, muito difíceis de se resolver. Neste sentido, a busca por invariantes se torna de suma importância: *para cada invariante obtido tem-se uma condição necessária para que dois objetos sejam isomorfos*.

Em topologia, pode-se construir diversos invariantes olhando-se simplesmente para propriedades adicionais satisfeitas pelos abertos de um espaço. Exemplos interessantes são a *compacidade* e a *propriedade de Hausdorff*. Elas são restrições sobre a quantidade de abertos que um espaço possui.

Com efeito, um espaço *compacto* é aquele que, de toda cobertura por abertos, pode-se encontrar um número finito de abertos que ainda cobrem o espaço todo. Por sua vez, um espaço de Hausdorff é aquele no qual quaisquer dois pontos possuem vizinhanças básicas disjuntas.

Exemplo 3.2.1. O \mathbb{R}^n é um espaço de Hausdorff: dados $p, q \in \mathbb{R}^n$, escolhendo $r, s > 0$ suficientemente pequenos, as bolas $B_r(p)$ e $B_s(q)$ tornam-se disjuntas. Todo subespaço de um espaço Hausdorff também admite tal propriedade. Isto significa que o “invariante Hausdorff” é preservado por restrições. O mesmo não se passa com a compacidade. Com efeito, pode-se mostrar que um subespaço do \mathbb{R}^n é compacto se, e somente se, ele cabe dentro de alguma bola, ao mesmo tempo que seu complementar é aberto. Disto segue que o \mathbb{R}^n inteiro não é compacto, mas a esfera \mathbb{S}^n e o disco \mathbb{D}^n o são. O semi-espaço \mathbb{H}^n também não é compacto.

Outros tipos de invariantes estão relacionados com a quantidade de “pedaços” que um espaço possui e com a maneira de contar esta quantidade. Os mais simples são *conexidade* e *conexidade por caminhos*. Um espaço *conexo* é aquele que não admite cobertura formada por abertos, sendo todos eles disjuntos. Se admitisse, então os abertos da cobertura seriam as *componentes conexas* do espaço e se refeririam aos “pedaços” que constituem o espaço.

De outro lado, diz-se que X é *conexo por caminhos* quando existe um caminho contínuo ligando quaisquer dois de seus pontos. Isto é, quando para cada $p, q \in X$ existe ao menos um $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$, o qual é contínuo e tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$. Todo espaço conexo por caminhos é também conexo, como logo se convence.

Vejamos agora que, assim como conexidade, o invariante “conexidade por caminhos” também está relacionado com uma medida do número de pedaços que um espaço possui. Para tanto, observamos que a relação que identifica pontos que podem ser ligados por um caminho é de equivalência.

A reflexividade é evidente: para cada ponto, basta tomar o caminho nele constante. Para a simetria, dado γ ligando p em q , note que $-\gamma$, tal que $(-\gamma)(t) = \gamma(t-1)$, liga q em p . Finalmente, se γ e γ' são respectivos caminhos ligando p em a e a em q , então a *concatenação* abaixo é caminho ligando p em q :

$$\gamma * \gamma'(t) = \begin{cases} \gamma(2t), & 0 \leq t \leq 1/2 \\ \gamma'(1-2t), & 1/2 < t \leq 1. \end{cases}$$

Posto isto, X se escreve como a reunião disjunta das classes de equivalência segundo tal relação (chamadas de *componentes conexas por caminhos*), indicando-nos que um espaço que não é conexo por caminhos admite certa decomposição em partes disjuntas não triviais.

Exemplo 3.2.2. O \mathbb{R}^n é conexo por caminhos (e, portanto, também é conexo). Com efeito, quaisquer dois de seus pontos podem ser ligados por um reta. Conexidade por caminhos (e nem mesmo conexidade) são preservadas por restrições. Com efeito, dados $p, q \in \mathbb{R}^n$, sejam U_p e U_q vizinhanças abertas de p e q , as quais supomos disjuntas (estas existem, pois já vimos que \mathbb{R}^n é de Hausdorff). O subespaço obtido reunindo-se U_p e U_q é evidentemente desconexo.

Exemplo 3.2.3. A esfera \mathbb{S}^n é conexa por caminhos. Com efeito, dados dois pontos p e q , se eles não são antípodas, então, para ligar p em q , basta tomar o arco de círculo $\gamma(t)/\|\gamma(t)\|$, em que $r : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ é a reta que os conecta. Isto é, $\gamma(t) = tp + (1-t)q$. Por outro lado, se p e q são antípodas (ou seja, se $q = \pm p$), então para obter caminho ligando-os, escolhe-se um ponto auxiliar $a \in \mathbb{S}^n$ e considera-se a concatenação entre os arcos de círculo ligando p em a e a em q .

Topologia Algébrica

Retornando ao problema de classificação em **Top**, observemos que os invariantes construídos na subseção anterior não são muito poderosos. Por exemplo, eles nem mesmo nos permitem concluir algo extremamente intuitivo: *a esfera \mathbb{S}^2 não é homeomorfa ao toro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$* . Afinal, tanto a esfera quanto o toro gozam de todos estes invariantes. De fato, ambos espaços são compactos, conexos por caminhos e de Hausdorff.

Diante disso, busquemos, pois, por invariantes mais poderosos. Por onde começar? Como vimos, a topologia se diferencia da álgebra pelo fato de que nesta última tem-se uma caracterização mais simples para os isomorfismos. Isto nos dá a máxima de que *classificar estruturas algébricas é mais simples que classificar espaços topológicos*.

Com isto em mente, a ideia seria transferir o problema de classificação em **Top** para o problema de classificação em alguma categoria algébrica **Alg**. Como fazer isso? Ora, vimos que os funtores nada mais são que os mapeamentos entre categorias, os quais preservam composições e identidades, e que, portanto, transferem informação classificatória de uma para a outra. Conseqüentemente, a ideia é procurar por funtores $F : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Alg}$.

E os invariantes, onde apareceriam? Neste ponto, relembramos que a cada functor faz-se corresponder um invariante da categoria na qual ele está definido. Portanto, *a busca por funtores de Top em categorias algébricas nos permite construir invariantes topológicos, além de transferir o problema classificatório para um ambiente mais conveniente de ser analisado*.

Exemplo 3.2.4. Tem-se um functor $\text{Aut} : \mathbf{Top}_{pd} \rightarrow \mathbf{Grp}$, que a cada espaço X associa o grupo de seus automorfismos (isto é, dos homeomorfismos de X nele mesmo). Assim, para que dois espaços topológicos sejam homeomorfos, é necessário que seus grupos de automorfismos sejam isomorfos. Observamos que *esta não é uma informação muito útil*. Afinal, o grupo dos automorfismos de um espaço topológico é bastante grande, o que dificulta sua identificação. Assim, como utilizar do invariante que correspondente a Aut se em geral nem mesmo conseguimos determinar $\text{Aut}(X)$? Isto nos dá uma importante lição: *não basta obter funtores; deve-se, também, saber calcular o invariante a ele associado*.

A área da topologia que tem como objetivo fundamental construir funtores $F : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Alg}$ e encontrar ferramentas que nos permitam calcular os correspondentes invariantes é usualmente chamada de *topologia algébrica*.

As estratégias de cálculo mais utilizadas são a preservação de limites/colimites e a busca por seqüências exatas. De fato, quanto mais limites/colimites F preservar, mais poderemos “dividir o cálculo em menores partes”, o que tende a torná-lo mais

simples. Por sua vez, as sequências exatas nos permitem relacionar invariantes de espaços diferentes. Assim, se soubermos calcular os invariantes de um espaço e estes estiverem dentro de uma sequência exata envolvendo outros termos que não conhecemos, então poderemos tentar utilizar dos primeiros para calcular e tirar informações sobre os outros.

Relembramos que a área da matemática que lida com a construção de sequências exatas é a álgebra homológica. Desta forma, tem-se um especial interesse por invariantes que sejam obtidos via métodos de tal disciplina.

Capítulo 4

Homotopia

Neste capítulo, estudamos o problema de classificação dos espaços topológicos sob a perspectiva da *teoria da homotopia*. Isto significa que admitimos a dificuldade do problema em questão e, ao invés de atacá-lo em \mathbf{Top} , buscamos por categoriais $\mathcal{H}\mathbf{Top}$ que descrevam \mathbf{Top} aproximadamente, ao mesmo tempo que, em tese, sejam mais simples de classificar.

Ora, *classificar* consiste em garantir existência de *isomorfismos*, ao passo que isomorfismos se baseiam na *igualdade* entre mapeamentos. Assim, uma ideia de *classificar aproximadamente* seria bucar por *isomorfismos fracos*, os quais corresponderiam na substituição da exigência de igualdade entre mapeamentos por alguma outra relação de equivalência mais branda. Isto nos sugere que $\mathcal{H}\mathbf{Top}$ deve ser construída via quociente.

Na primeira seção, mostramos que \mathbf{Top} admite duas construções quocientes naturais. Estas, no entanto, não são geralmente equivalentes. Afim de ganhar unicidade, nos focamos numa subcategoria $\mathcal{C} \subset \mathbf{Top}$ formada de “espaços topológicos bem comportados”, mas suficientemente abrangentes.

O problema da estratégia anterior é que, ao se passar ao quociente, não se enfraquece somente o problema de classificação, mas também outras propriedades de \mathbf{Top} . Por exemplo, perde-se a completude e cocompletude. Com efeito, ao invés de limites e colimites, em $\mathcal{H}\mathbf{Top}$ conta-se com versões enfraquecidas, chamadas de *limites e colimites homotópicos*. Em princípio não se tem uma maneira natural de calculá-los. No entanto, mostramos que em \mathcal{C} existem classes adicionais e comple-

mentares de mapeamentos, chamados de *fibrações e cofibrações*, através das quais tais cálculos (e muitas outras coisas) podem ser efetivados. Tudo isto é feito na segunda seção.

Finalmente, na terceira seção damos destaque aos espaços que podem ser construídos por um processo ao mesmo tempo indutivo e homotópico. Tratam-se dos *CW-complexos*, os quais constituem os objetos perfeitos para o cálculo de invariantes que sejam minimamente bem comportados. Exemplos de tais espaços são as esferas e o toro.

Durante a escrita fomos especialmente influenciados pelas obras [63, 85, 93, 7].

4.1 Aproximação

Como comentamos, o problema de classificar **Top** é difícil. Posto isto, apresentamos uma das estratégias de ataque, que consiste simplesmente em buscar invariantes. Outra, que passamos a discutir, está focada na construção de uma nova categoria $\mathcal{H}\mathbf{Top}$, a qual descreve **Top** aproximadamente, ao mesmo tempo que é mais simples de ser classificada. Em suma, a posição é a seguinte: *se classificar é difícil, tentemos classificar aproximadamente*.

Ora, para classificar uma categoria, deve-se determinar quem são seus objetos a menos de isomorfismos, de modo que quem dita quão difícil será o problema de classificação é justamente a noção de isomorfismo lá empregada. Assim, a ideia é *construir $\mathcal{H}\mathbf{Top}$ enfraquecendo a noção de isomorfismo de **Top*** (isto é, de homeomorfismo).

Por sua vez, relembramos que dois espaços X e Y são homeomorfos quando existem funções contínuas f e g entre eles, tais que $g \circ f = id_X$ e $f \circ g = id_Y$. Assim, uma maneira de enfraquecer a noção de homeomorfismo é substituir a igualdade por uma outra relação de equivalência que seja mais branda. Em suma, trata-se de pedir que ao invés de $g \circ f = id_X$ se tenha $g \circ f \simeq id_X$ para alguma relação menos rígida \simeq .

Seguindo este ponto de vista, a ideia mais natural é construir $\mathcal{H}\mathbf{Top}$ como uma categoria quociente. Mais precisamente, busca-se por regras que associem a

cada conjunto de morfismos de **Top** uma relação \simeq e, sendo estas compatíveis com composições, toma-se **Top**/ \simeq , conforme apresentado no esquema abaixo.

$$\begin{array}{ccccccc} \text{classificar} & \Longrightarrow & \text{classificar} & \Longrightarrow & \text{enfraquecer} & \Longrightarrow & \text{categoria} \\ \text{é difícil} & & \text{aproxim.} & & \text{isomorfismos} & & \text{quociente} \end{array}$$

Existem ao menos duas classes de categorias em que tais regras podem ser construídas de maneira simples e canônica. Nas próximas subseções, apresentamo-las e mostramos que **Top** está incluída em cada uma delas. Para detalhes, sugerimos ao leitor o primeiro capítulo de [7] e também os capítulos 5-8 de [63].

Cilindros

Um *cilindro natural* numa categoria **C** consiste de um functor $C : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$, em conjunto com transformações naturais $\iota^0, \iota^1 : id_{\mathbf{C}} \rightarrow C$, as quais possuem uma inversa à esquerda $\pi : C \rightarrow id_{\mathbf{C}}$ em comum e estão vinculadas por outra transformação $\tau : C \rightarrow C$, chamada de *inversão*. Isto significa que, para qualquer que seja o X , os diagramas abaixo são comutativos.

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \pi_X \nearrow & \uparrow id & \nwarrow \pi_X \\ CX & \longleftarrow X & \longrightarrow CX \\ & \iota_X^0 \longleftarrow & \longrightarrow \iota_X^1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\iota_X^0} & CX \\ \iota_X^1 \downarrow & & \nearrow \tau_X \\ CX & & \end{array}$$

Vejamos que, se uma categoria possui cilindro natural C , então lá está definida uma regra canônica que associa uma relação de equivalência \simeq_C a cada conjunto de morfismos. Com efeito, dados $f, g : X \rightarrow Y$, diz-se que eles são *C-homotópicos* (e escreve-se $f \simeq_C g$) quando existe algum morfismo $H : CX \rightarrow Y$, usualmente chamado de *C-homotopia* entre f e g , tal que

$$H \circ \iota_X^0 = f \quad \text{e} \quad H \circ \iota_X^1 = g.$$

Afirmamos que a relação \simeq_C é realmente de equivalência. Para a reflexividade, dado um morfismo f qualquer, tome $H = f \circ \pi_X$. Para a simetria, observe que, se H é *C-homotopia* entre f e g , então $H \circ \tau_X$ é *C-homotopia* entre g e f . A transitividade é evidente, concluindo o que havíamos afirmado.

Nota-se que a relação \simeq_C é compatível com composições, donde o quociente \mathbf{C}/\simeq_C , que aqui será denotado por $\mathcal{H}_C\mathbf{C}$, estar bem definido. Os isomorfismos lá presentes são usualmente chamados de *C-equivalências homotópicas*.

Vamos concluir mostrando que a categoria **Top** se enquadra na classe daquelas com cilindros naturais, de modo a haver uma maneira canônica de aproximá-la. De fato, como facilmente se verifica, um cilindro pode ser obtido do functor C , tal que $C(X) = X \times I$ e $C(f) = f \times id$, aliado às transformações $\iota_X^0(p, t) = (p, 0)$ e $\iota_X^1(p, t) = (p, 1)$, cuja inversa em comum é a projeção na primeira entrada, estando vinculadas pela inversão $\tau_X(p, t) = (p, 1 - t)$.

Por exemplo, com esta estrutura, uma C -homotopia entre duas funções contínuas f e g nada mais é do que outra função contínua $H : X \times I \rightarrow Y$ que nos pares $(p, 0)$ vale $f(p)$ e nos pares $(p, 1)$ se iguala a g .

Espaço de Caminhos

A versão dual dos cilindros naturais são os *espaços de caminhos naturais*. Assim, estes são funtores $P : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$, dotados de transformações naturais $\pi^0, \pi^1 : P \rightarrow id_{\mathbf{C}}$, as quais possuem uma inversa à direita em comum $\iota : id_{\mathbf{C}} \rightarrow P$ e estão vinculadas por uma certa inversão $\tau : P \rightarrow P$. Mais precisamente, os diagramas abaixo são comutativos sejam qual for o objeto X .

$$\begin{array}{ccc}
 PX & \xrightarrow{\pi_X^0} & X & \xleftarrow{\pi_X^1} & PX \\
 & \swarrow \iota_X & \uparrow id & \searrow \iota_X & \\
 & & X & &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & & X & \xleftarrow{\pi_X^0} & PX \\
 \pi_X^1 \uparrow & & & \swarrow \tau_X & \\
 & & PX & &
 \end{array}$$

Observamos que a presença de espaços de caminhos naturais também nos fornece maneiras canônicas de associar relações de equivalência a conjuntos de morfismos. Com efeito, diz-se que dois mapas $f, g : X \rightarrow Y$ são *P-homotópicos* (e escreve-se $f \simeq^P g$) quando existe uma *P-homotopia* entre eles. Isto é, quando existe $H : X \rightarrow PY$, tal que

$$\pi_Y^0 \circ H = f \quad \text{e} \quad \pi_Y^1 \circ H = g.$$

De maneira análoga ao que vimos valer para cilindros naturais, verifica-se facilmente que relação de P -homotopia é de equivalência e compatível com composições.

Assim, para cada P fica bem definida a categoria quociente \mathbf{C}/\simeq^P , representada por $\mathcal{H}^P\mathbf{C}$. Os isomorfismos ali presentes chamam-se *P-equivalências homotópicas*.

Para terminar, mostremos que, além de cilindros naturais, a categoria \mathbf{Top} também possui espaços de caminhos naturais, permitindo-nos aproximá-la de uma outra forma. Com efeito, ali se tem o functor P , que a cada espaço X associa o conjunto dos caminhos $\gamma : I \rightarrow X$, enquanto dotado da topologia compacto-aberta (sobre tal topologia, veja, por exemplo, [57]). Também se tem as transformações π_X^0 e π_X^1 , que a cada caminho associam, respectivamente, seu ponto inicial e seu ponto final. Elas estão ligadas pela inversão τ_X , que toma γ e devolve outro caminho $\tau_X(\gamma)$, que em cada instante vale $\gamma(1 - t)$.

Nesta estrutura, uma P -homotopia entre funções contínuas f e g consiste de uma outra função contínua H , que a cada ponto $p \in X$ associa um caminho $H(p) : I \rightarrow X$, o qual parte de $f(p)$ e chega em $g(p)$.

Categoria Homotópica

Como vimos, \mathbf{Top} tem tantos cilindros naturais quanto espaços de caminhos naturais. Assim, existem diversas maneiras canônicas de aproximá-la por uma outra categoria que, em princípio, é mais simples de ser classificada.

Gostaríamos que ambas as construções (via cilindros e via espaço de caminhos) produzissem maneiras de aproximar equivalentes. Em outras palavras, gostaríamos que as categorias $\mathcal{H}_C\mathbf{Top}$ e $\mathcal{H}^P\mathbf{Top}$ fossem equivalentes. Uma vez que o que as diferencia são seus morfismos (que correspondem às classes de equivalência de morfismos de \mathbf{Top}), isto ocorrerá se, e somente se, duas funções f e g forem C -homotópicas exatamente quando forem P -homotópicas. Ou seja, se, e só se, houver uma bijeção entre C -homotopias e P -homotopias, o que equivale a pedir uma adjunção entre os funtores C e P .

Em termos mais explícitos, para quaisquer que sejam os espaços X e Y , devem haver bijeções

$$\text{Mor}_{\mathbf{Top}}(X \times I; Y) \simeq \text{Mor}(X; Y^I),$$

em que Y^I representa o espaço de caminhos em Y com a topologia compacto-aberta.

Assim, como \times é produto em **Top**, para que exista uma adjunção entre C e P (e, portanto, para que as maneiras de aproximar por eles induzidas sejam equivalentes) é preciso que **Top** seja cartesianamente fechada. Esta exigência, no entanto, não é satisfeita (para discussão e um contraexemplo, veja a seção 1.7 de [64]).

Uma maneira de contornar o problema é trabalhar com subcategorias de **Top** que sejam pequenas a ponto de serem suficientemente comportadas, mas grandes a ponto de englobarem situações corriqueiras e importantes. Em geral se concentra na subcategoria \mathcal{C} , formada dos *espaços Hausdorff e compactamente gerados*. Esta última condição significa que seus abertos são precisamente os conjuntos que se mantêm abertos ao intersectarem compactos. Aqui se enquadram, por exemplo, os espaços métricos e os espaços localmente compactos (como as variedades, que serão nossos objetos de estudo em grande parte do texto).

Advertência. No que segue, trabalharemos sempre na subcategoria \mathcal{C} . No entanto, como o leitor notará, não utilizaremos explicitamente o fato de seus objetos serem de Hausdorff e compactamente gerados, mas apenas as consequências que tais propriedades acarretam. Por exemplo, ao serem restritos a \mathcal{C} , os funtores C e P tornam-se adjuntos e, portanto, as categorias $\mathcal{H}_C\mathcal{C}$ e $\mathcal{H}^P\mathcal{C}$ mostram-se equivalentes. Neste caso, escreve-se apenas $\mathcal{H}\mathcal{C}$ para representar qualquer uma delas e diz-se ser esta a *categoria homotópica* de \mathcal{C} . Ao invés de C -homotopias ou P -homotopias, fala-se em *homotopias*. Da mesma forma, os isomorfismos de $\mathcal{H}\mathcal{C}$ são chamados de *equivalências homotópicas*. Também se tem o costume de escrever $[X, Y]$ para denotar o conjunto dos morfismos entre $X, Y \in \mathcal{H}\mathcal{C}$.

Intuição

Intuitivamente, o papel das homotopias $H : f \Rightarrow g$ é deformar f continuamente, até que se torne g . Assim, um espaço X terá o mesmo tipo de homotopia que outro espaço Y quando nele pode ser continuamente deformado.

Exemplo 4.1.1. Os espaços que podem ser continuamente deformados (via homotopia) a pontos são ditos *contráteis*. Eles possuem todos os invariantes homotópicos (isto é, obtidos de funtores definidos em $\mathcal{H}\mathcal{C}$) triviais. Exemplos evidentes de es-

paços contráteis incluem os subespaços convexos de \mathbb{R}^n (e, em particular, o próprio \mathbb{R}^n). Exemplos um pouco mais elaborados, os quais nos serão fundamentalmente importantes, consistem dos EG , seja qual for o grupo topológico G .

Observamos haver uma diferença entre a deformação efetivada por um homeomorfismo e aquela proporcionada por uma equivalência homotópica: enquanto a primeira “preserva dimensões”, a segunda não se submete a tal restrição. Em outras palavras, equivalências homotópicas têm a permissão para “colapsar dimensões”. O exemplo abaixo ilustra este fato:

Exemplo 4.1.2. Os subespaços $\mathbb{R}^n - 0$ e \mathbb{S}^{n-1} do \mathbb{R}^n não são homeomorfos: a esfera é compacta, algo não satisfeito se retiramos um ponto do \mathbb{R}^n . Em contrapartida, a aplicação $x \mapsto x/\|x\|$, de $\mathbb{R}^n - 0$ em \mathbb{S}^{n-1} , é equivalência homotópica. Particularmente, ainda que o cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ não seja homeomorfo ao círculo \mathbb{S}^1 , eles possuem a mesma homotopia.

Homotopias admitem, ainda, uma outra interpretação. Com efeito, lembrando que a categoria \mathcal{C} é simétrica e cartesianamente completa, temos

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}}(X \times I; Y) \simeq \text{Mor}_{\mathcal{C}}(I \times X; Y) \simeq \text{Mor}_{\mathcal{C}}(I; \text{Mor}(X; Y)),$$

de modo que uma homotopia entre $f, g; X \rightarrow Y$ se identifica como um caminho em $\text{Mor}(X; Y)$ que parte de f e chega em g . Assim, duas aplicações são homotópicas se, e somente se, estão na mesma componente conexa por caminhos do espaço $\text{Mor}(X; Y)$.

Limites Homotópicos

Há um problema com a categoria \mathcal{HC} : ela possui poucos limites e colimites. Por exemplo, abaixo mostramos que ela não possui *pushouts* e nem *pullbacks*. Ainda assim, pode-se mostrar que ali existem produtos e coprodutos. Estes são simplesmente passagens ao quociente segundo o functor $\pi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{HC}$.

Exemplo 4.1.3. Se tomamos o disco \mathbb{D}^n e identificamos seu bordo num único ponto, obtemos a esfera \mathbb{S}^n , a qual não é contrátil, pois tem o mesmo tipo de homotopia que

$\mathbb{R}^n - 0$ (primeiro dos diagramas abaixo). Por sua vez, sabemos que \mathbb{D}^n é contrátil e, portanto, homotópico a um ponto. No entanto, o segundo dos *pushouts* abaixo resulta no próprio \mathbb{D}^n . Assim, ainda que troquemos objetos de um diagrama por outros com o mesmo tipo de homotopia, os correspondentes limites podem não possuir a mesma homotopia.

$$\begin{array}{ccc} \text{Ps} & \longleftarrow & \mathbb{D}^n \\ \uparrow & & \uparrow \wr \\ * & \longleftarrow & \mathbb{S}^{n-1} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \text{Ps}' & \longleftarrow & * \\ \uparrow & & \uparrow \wr \\ * & \longleftarrow & \mathbb{S}^{n-1} \end{array}$$

Exemplo 4.1.4. E se ao invés de considerarmos diagramas com objetos homotópicos passarmos a olhar para diagramas com morfismos homotópicos? Ainda assim, os correspondentes limites podem não ter a mesma homotopia. Com efeito, o primeiro dos *pullbacks* abaixo resulta no produto $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^{n-1}$. Como \mathbb{D}^n é contrátil, sua identidade é homotópica a uma (e, portanto, qualquer) aplicação constante. Seja c tal aplicação. Colocando-a no lugar da identidade, vê-se que o *pullback* resultante ou é formado de um só ponto (se $c(x) \in \mathbb{S}^{n-1}$), ou então é vazio.

$$\begin{array}{ccc} \text{Pb} & \longrightarrow & \mathbb{D}^n \\ \downarrow & & \downarrow \text{id} \\ \mathbb{S}^{n-1} & \xrightarrow{\wr} & \mathbb{D}^n \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \text{Pb}' & \longrightarrow & \mathbb{D}^n \\ \downarrow & & \downarrow c \\ \mathbb{S}^{n-1} & \xrightarrow{\wr} & \mathbb{D}^n \end{array}$$

Os exemplos anteriores nos sugerem que, ao invés de limites e colimites em $\mathcal{H}\mathcal{C}$, torna-se mais coerente considerar *limites e colimites homotópicos*. Grosso modo, estes são obtidos substituindo-se a exigência de comutatividade e de universalidade de diagramas por “comutatividade e universalidade a menos de homotopia”. Estes, diferente dos limites e colimites, sempre existem em $\mathcal{H}\mathcal{C}$.

Com o intuito de exemplificar a diferença entre limites e limites homotópicos, observamos que a composição de *kernels* e *cokernels* usuais sempre é trivial. De fato, relembramos que o *kernel* e o *cokernel* de um dado $f : X \rightarrow Y$ correspondem, respectivamente, aos limites abaixo.

$$\begin{array}{ccc} \ker(f) & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow f \\ * & \longrightarrow & Y \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \text{coker}(f) & \longleftarrow & Y \\ \uparrow & & \uparrow f \\ * & \longleftarrow & X \end{array}$$

Então, pela lei de colagem de *pullbacks* e *pushouts*, a composição sucessiva de *kernels* e *cokernels* pode ser computada pelos limites dos quadrados externos abaixo expostos, os quais são evidentemente triviais.

$$\begin{array}{ccc}
 \ker(\ker(f)) & \longrightarrow & \ker(f) & \longrightarrow & * \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 * & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f} & Y
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \text{coker}(\text{coker}(f)) & \longleftarrow & \text{coker}(f) & \longleftarrow & * \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 * & \longleftarrow & Y & \xleftarrow{f} & X
 \end{array}$$

Por sua vez, se olhamos para a colagem de *kernels* e *cokernels* homotópicos, então, em geral, o resultado não é contrátil, mas corresponde, exatamente, ao que se chama de *loop* e de *suspensão* de X . Em suma, diferentemente do caso usual, os limites homotópicos abaixo não são necessariamente triviais.

$$\begin{array}{ccc}
 \Omega X & \longrightarrow & * \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 * & \longrightarrow & X
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \Sigma X & \longleftarrow & * \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 * & \longleftarrow & X
 \end{array}$$

No que diz respeito aos limites homotópicos, o problema agora é: *como construí-los* e, uma vez construídos, *como calculá-los*? Com tais questões em mente, na próxima seção veremos que eles são simplesmente os “limites usuais bem comportados”.

Mais precisamente, veremos que é sempre possível trocar os objetos e os morfismos de $\mathcal{H}\mathcal{C}$ por outros que tenham melhores propriedades. E, uma vez feito isto num certo limite homotópico em $\mathcal{H}\mathcal{C}$, pode-se calculá-lo como um limite usual em \mathcal{C} . Por conseguinte, também mostraremos que todo limite usual de \mathcal{C} cujos objetos e morfismos tenham boas propriedades é homotópico quando visto em $\mathcal{H}\mathcal{C}$.

4.2 Modelo

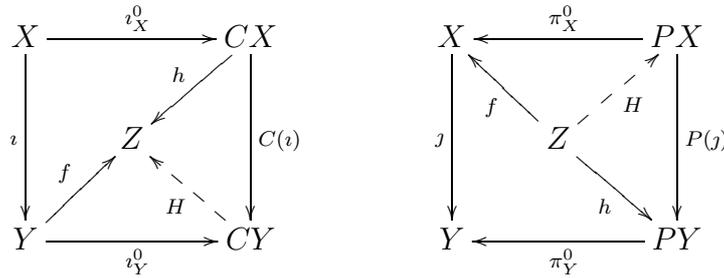
Exploramos aqui algumas consequências trazidas pela existência de adjunções entre cilindros naturais e espaços de caminhos naturais. A ideia é a seguinte: uma vez aproximada uma categoria \mathbf{C} por outra $\mathcal{H}\mathbf{C}$, queremos ferramentas que permitam realizar cálculos em $\mathcal{H}\mathbf{C}$ em termos de entes de \mathbf{C} .

Por exemplo, como veremos nesta subseção, se \mathbf{C} possui cilindros naturais, então ela admite uma certa classe distinguida de morfismos, ao passo que se \mathbf{C} tem espaços

de caminhos naturais, então admite uma classe dual. Acontece que, se cilindros e espaços de caminhos coexistem e são adjuntos, então as correspondentes classes distinguidas por eles definidas são complementares, permitindo-nos, através delas, descrever qualquer que seja o morfismo de \mathbf{C} . E mais: como a construção de \mathcal{HC} faz uso apenas de homotopias (e não destas novas classes distinguidas), então o uso de tais classes não afeta a estrutura de \mathcal{HC} , sendo um bom instrumento de cálculo!

As classes às quais temos nos referido chamam-se *fibrações* e *cofibrações*. As cofibrações estão definidas em categorias \mathbf{C} com cilindros naturais C , sendo constituídas simplesmente dos morfismos com a *propriedade de levantamento de C -homotopias*.

Mais precisamente, são os mapas $\iota : X \rightarrow Y$ tais que, para todo morfismo $f : Y \rightarrow Z$ e toda C -homotopia h partindo de ι (isto é, satisfazendo $H \circ \iota_X^0 = \iota$), é possível obter uma outra C -homotopia $H : CY \rightarrow Z$, esta partindo de f , a qual pode ser escolhida de modo que coincida com h quando restrita a CX . Em suma, tratam-se dos mapas para os quais o primeiro dos diagramas abaixo é comutativo.



Dualmente, as fibrações estão presentes nas categorias \mathbf{C} com espaços de caminhos naturais, sendo caracterizadas por terem a propriedade de extensão de P -homotopias, como representado no segundo dos diagramas acima.

No caso especial em que C e P coexistem e são adjuntos, as noções de C -homotopias e de P -homotopias estão em correspondência biunívoca, de modo que C -cofibrações e P -fibrações (agora chamadas simplesmente de *cofibrações* e de *fibrações*) admitem novas caracterizações.

Com efeito, uma mapa $\iota : X \rightarrow Y$ será uma cofibração se, e somente se, para todo $f : Y \rightarrow Z$ e toda P -homotopia h partindo de f existe uma outra P -homotopia H , agora partindo de ι , que ao ser restrita a PX coincide com h (veja o primeiro dos diagramas abaixo). Em outras palavras, um mapa é uma cofibração se, e só se,

possui a propriedade de extensão relativa a π_Z^0 .

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & PZ \\ \downarrow \iota & \nearrow H & \downarrow \pi_Z^0 \\ Y & \xrightarrow{f} & Z \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow \iota_Z^0 & \nearrow H & \downarrow j \\ CZ & \xrightarrow{h} & Y \end{array}$$

De maneira análoga, a adjunção entre P e C nos permite caracterizar as fibrações como sendo os morfismos que têm a propriedade de levantamento com respeito a ι_Z^0 , conforme o segundo dos diagramas acima.

Exemplo 4.2.1. Como veremos ao longo do texto, as fibrações mais importantes em \mathcal{C} são as projeções de fibrados localmente triviais. Por sua vez, a mais importante cofibração é a simples inclusão $\iota : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{D}^n$ da esfera no disco.

Decomposição

A nova caracterização dada às fibrações e às cofibrações não só simplifica as suas definições como também nos permitem substituir, dentro da categoria quociente \mathcal{HC} , qualquer morfismo por uma versão mais simples. Mais precisamente, mostraremos que, a menos de equivalências homotópicas, qualquer mapa pode ser substituído por uma fibração assim como por uma cofibração.

Dado um mapa f , definimos seu *mapping path space* (também chamado de *mapping cocylinder*) e seu *mapping cylinder* como sendo, respectivamente, o *pullback* e o *pushout* abaixo apresentados. Observamos existirem morfismos $s : X \rightarrow \text{ccyl}(f)$ e $r : X \rightarrow \text{cyl}(f)$ tais que ambas as composições $\pi \circ s$ e $r \circ \iota$ coincidem com id_X . Isto significa que podemos decompor f tanto na forma $r \circ (\beta \circ \iota^0)$ quanto na forma $(\pi^0 \circ \alpha) \circ s$.

$$\begin{array}{ccc} \text{ccyl}(f) & \xrightarrow{\alpha} & PY \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi_Y^0 \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \text{cyl}(f) & \xleftarrow{\beta} & CX \\ \iota \uparrow & & \uparrow \iota_X^0 \\ Y & \xleftarrow{f} & X \end{array}$$

Afirmamos que o $\beta \circ \iota^0$ é uma fibração, enquanto que $\pi^0 \circ \alpha$ é uma cofibração. Além disso, r e s são equivalências homotópicas. Como consequência, dentro de \mathcal{HC} podemos realmente substituir qualquer mapa por uma fibração ou por uma cofibração. A prova de tais afirmações segue da nova caracterização dada para as

fibrações e cofibrações. Com efeito, através delas fica fácil mostrar que fibrações e cofibrações são respectivamente invariantes por *pullbacks* e por *pushouts*, sendo ambas invariantes por composições.

Também fica fácil mostrar que π^0 é fibração, enquanto que ι^0 é cofibração. Posto isto, pela invariância por *pullbacks*, π é fibração e ι é cofibração. De posse destes fatos, constrói-se homotopias $H : s \circ \pi \Rightarrow id$ e $H : \iota \circ r \Rightarrow id$, de modo que r e s são realmente equivalências homotópicas. Finalmente, utilizando de tais homotopias, sendo π^0 fibração e ι^0 cofibração, mostra-se que β e α também satisfazem respectivas propriedades. Pela invariância de tais classes por composições, segue-se, então, o afirmado.

Para detalhes, sugerimos ao leitor os capítulos 6 e 7 de [63].

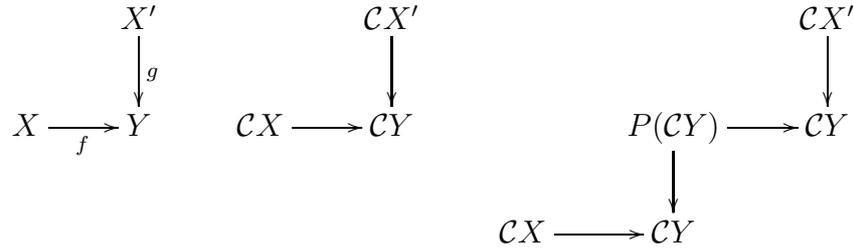
Limites Homotópicos

Uma consequência da escolha de um modelo em \mathcal{C} é a existência de uma estratégia de identificação e de cálculo para limites e colimites homotópicos. Não entraremos em detalhes aqui, mas, em boas situações, numa categoria modelo, todo limite cujos objetos são fibrantes e cujos morfismos são fibrações é homotópico. Dualmente, todo colimite formado de cofibrações entre objetos cofibrantes é homotópico.

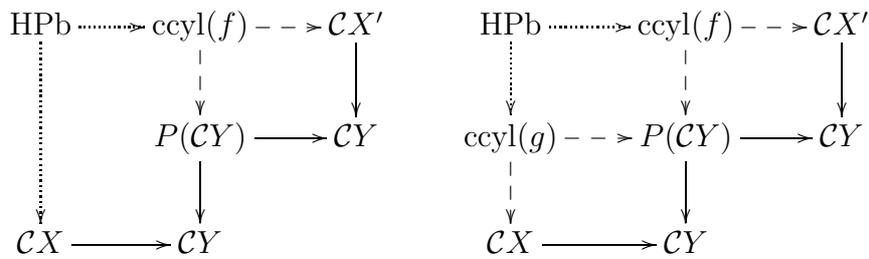
Por sua vez, se um limite é homotópico, então pode-se calculá-lo seguindo a seguinte receita: substitui-se os objetos por resoluções fibrantes e os morfismos por seus *mapping path spaces* (que são fibrações). Então, o limite do diagrama resultante é um modelo para o limite homotópico do diagrama inicial. Situação dual se aplica aos colimites homotópicos.

Para *pullbacks* ou *pushouts* homotópicos, a situação é ainda mais simples: para calculá-los não se precisa trocar os dois morfismos (que constituem o limite a ser efetuado) por seus *mapping path spaces* ou *mapping cylinders*, mas apenas um deles. Para detalhes a respeito destes fatos, remetemos o leitor à seção A.2.4 de [58] e à

seção 13.3 de [38]. Veja também o sexto e o sétimo capítulos de [85].

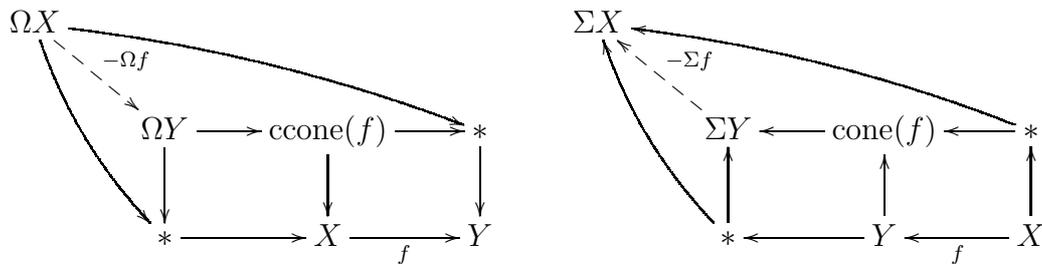


Acima ilustramos os passos concernentes à substituição dos objetos e de um dos morfismos por suas versões fibrantes (não há diferença em substituir f ou g , como logo se convence). É possível realizar o cálculo do diagrama final de duas maneiras, apresentadas abaixo. Na primeira delas, efetua-se dois *pullbacks*. Na segunda, efetua-se três.



Sequências Longas

Como consequência da discussão anterior, *kernels* e *cokernels* homotópicos, assim como suspensões e *loops*, podem todos ser comutados através de *pullbacks* e *pushouts* usuais. Por universalidade, existem então os mapas $-\Omega f$ e $-\Sigma f$ abaixo apresentados. Ali, $\text{ccone}(f)$ e $\text{cone}(f)$ representam, respectivamente, o *kernel* e o *cokernel* homotópicos de f , os quais são também chamados de *mapping cocone* e de *mapping cone*.



Iterando o primeiro diagrama, conclui-se que qualquer morfismo $f : X \rightarrow Y$, definido na pontuação \mathbf{C}_* de uma categoria modelo \mathbf{C} , a qual supomos ser formada

somente por objetos fibrantes, origina a seguinte sequência:

$$\dots \longrightarrow \Omega \text{ccone}(f) \longrightarrow \Omega X \xrightarrow{-\Omega f} \Omega Y \longrightarrow \text{ccone}(f) \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y$$

A ela se dá o nome de *sequência de fibrações* f . De maneira análoga, agora supondo que a categoria em questão é formada de objetos cofibrantes, ao se iterar o *pushout* representado no segundo dos diagramas acima, encontra-se a *sequência de cofibrações* de f :

$$X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow \text{cone}(f) \longrightarrow \Sigma X \xrightarrow{-\Sigma f} \Sigma Y \longrightarrow \Sigma \text{cone}(f) \longrightarrow \dots$$

Como todos os objetos de \mathcal{C} são tanto fibrantes quanto cofibrantes, ambas as sequências ali existem. Observamos que, para qualquer que seja o objeto $Z \in \mathcal{H}\mathcal{C}_*$, aplicando $[Z; -]$ na sequência de fibrações de um morfismo $f : X \rightarrow Y$, obtém-se uma sequência exata em **Set**. Dualmente, se aplicamos $[-; Z]$ na sequência de cofibrações, também obtemos uma sequência exata de conjuntos. Para detalhes, veja a seção 6.5 de [39]. Veja também o capítulo 5 de [85].

4.3 Complexos

Por diversas vezes no texto, comentamos que classificar a categoria **Top** é um problema muito difícil. Posto isto, elencamos duas estratégias básicas de ataque: buscar por invariantes topológicos e olhar para uma aproximação de **Top** que seja mais simples de ser classificada, o que nos levou à introdução da categoria homotópica $\mathcal{H}\mathcal{C}$.

No próximo capítulo, misturaremos ambas as estratégias. Mais precisamente, construiremos *invariantes homotópicos*, os quais se verão associados a funtores $\mathcal{H}\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ab}$. Em particular, buscaremos por invariantes que sejam simples de calcular. Ora, comentamos que quanto mais limites e colimites são preservados por um dado functor, mais simples se torna calcular o invariante a ele associado. Ocorre que em $\mathcal{H}\mathcal{C}$ não existem muitos limites (ao invés deles, tem-se suas versões homotópicas). Assim, no próximo capítulo focaremos em funtores que preservem certos tipos de limites homotópicos.

Por exemplo, se olhamos para os espaços que podem ser construídos por um processo indutivo homotópico, então, enquanto restritos a esta classe de espaços, os invariantes associados a funtores que preservam processos indutivos serão facilmente calculados. Relembramos que, para calcular um colimite homotópico, substituímos mapas usuais por cofibrações (isto é, os trocamos por seus *mapping cylinders*). Assim, há especial interesse nos espaços que são obtidos por limites indutivos de cofibrações.

As cofibrações mais simples são as inclusões $\iota : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{D}^n$. Além disso, cofibrações são invariantes por *pushouts*, de modo que, do ponto de vista calculacional, uma boa classe de espaços são aqueles obtidos por meio de limites indutivos de cofibrações resultantes de *pushouts* de ι . Tais espaços chamam-se *complexos celulares*.

$$\begin{array}{ccc} X & \longleftarrow & \mathbb{D}^n \\ \uparrow & & \uparrow \iota \\ Y & \xleftarrow{f} & \mathbb{S}^{n-1} \end{array}$$

Quando um espaço é resultado do *pushout* acima, fala-se que ele foi obtido de Y colando-se uma célula de dimensão n (também chamada de *n-célula*) ao longo de f . Desta forma, pode-se dizer que um complexo celular é um espaço obtido por um processo indutivo de *colagem de células*. Os mais importantes complexos são aqueles (denominados *CW-complexos*) que correspondem a um processo indutivo regular (ou “organizado”), no qual se colam células de dimensão n somente na n -ésima etapa do processo indutivo.

Assim, um CW-complexo é simplesmente um espaço construído da seguinte forma: parte-se de um conjunto discreto X_0 , no qual se colam células de dimensão 1, fornecendo X_1 . Neste, então, colam-se células de dimensão dois, dando-nos X_2 . Indutivamente, passa-se de X_{n-1} para X_n por colagem de células de dimensão n . Finalmente, toma-se o colimite do sistema dirigido abaixo, onde os mapas f_i (que são cofibrações) foram obtidos por universalidade.

$$X_0 \xrightarrow{f_0} X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} X_3 \longrightarrow \dots$$

Um *morfismo* entre dois CW-complexos é uma função contínua entre os espaços subjacentes que comuta com o limite indutivo. Assim, para que dois CW-complexos

sejam isomorfos, é preciso que eles possuam mesma quantidade de células em cada dimensão. Tem-se uma evidente subcategoria $\mathbf{CW} \subset \mathcal{C}$, formada dos CW-complexos e dos morfismos assim definidos. O exemplo abaixo nos mostra que um mesmo espaço pode admitir duas estruturas celulares distintas. Isto significa, em particular, que a inclusão $\iota : \mathbf{CW} \rightarrow \mathcal{C}$ não é fracamente injetiva.

Exemplo 4.3.1. Toda esfera \mathbb{S}^n admite uma estrutura celular formada de duas únicas células: uma em dimensão zero e outra em dimensão n . Por sua vez, a esfera \mathbb{S}^n admite também estrutura celular formada de seis células, a qual pode ser obtida assim: parte-se de um conjunto X_0 com dois pontos distintos (digamos $*_0$ e $*_1$). Cola-se, então, duas células de dimensão 1 entre eles, originando X_1 . Finalmente, cola-se duas células de dimensão 2, obtendo $X_2 \simeq \mathbb{S}^2$.

Finalizamos comentando (sem grandes detalhes) haver uma maneira natural de construir CW-complexos partindo-se de qualquer conjunto simplicial. Tal procedimento é conhecido como *realização geométrica* e define um functor $|\cdot| : s\mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{CW}$. Enquanto visto sobre \mathcal{C} , tal functor é fortemente monoidal. Isto significa que, para quaisquer objetos simpliciais X_* e Y_* , o espaço $|X_* \times Y_*|$ é homeomorfo ao produto entre os espaços $|X_*|$ e $|Y_*|$. A realização geométrica e suas propriedades podem ser estudadas, por exemplo, no capítulo 16 de [63] ou no quinto capítulo de [3].

Exemplo 4.3.2. Como exemplo, segue-se que toda categoria define um CW-complexo: trata-se da realização geométrica de seu nervo simplicial. Particularmente, todo grupo G fornece dois diferentes CW-complexos, sendo dados pelas realizações dos nervos de \mathbf{BG} e \mathbf{EG} . No que segue, eles serão respectivamente denotados por BG e EG .

Capítulo 5

Invariantes

O presente capítulo se ocupa essencialmente da construção de invariantes *homotópicos* por métodos *algébricos*. Em suma, o que fazemos é mesclar as duas estratégias anteriormente utilizadas na tentativa de classificar **Top**: buscar invariantes e olhar para aproximações providenciadas pela teoria da homotopia.

Na primeira seção construímos os *grupos de homotopia* $\pi_i(X)$. Estes são os invariantes homotópicos e algébricos mais fáceis de serem construídos. Mostramos ser possível falar de “homotopia relativa” de um par (X, A) e que esta se relaciona com os invariantes de X e A por meio de uma sequência exata. No entanto, discutimos como tal sequência está longe de ser suficiente para que consigamos realizar bons cálculos com os π_i . Com efeito, estes preservam poucos limites e colimites homotópicos.

Exemplos de limites e colimites preservados pelos π_i incluem os produtos e os processos indutivos. Por este último fato, caso se comportassem bem com cofibrações, os π_i seriam facilmente calculados para CW-complexos, mas este não é o caso. Ao invés disso, tais invariantes tem melhor comportamento com respeito a fibrações.

Este fato nos leva à busca de invariantes H^i que tenham comportamento determinado ao longo de cofibrações. Como os grupos de homotopia são bons para fibrações, a ideia é *construir os H^i via dualização dos π_i* . Na segunda seção mostramos que isto pode ser feito, fornecendo-nos o conceito de *teorias de cohomologia*.

Observamos que, durante o processo de dualização, a covariância dos π_i é levada na contravariância dos H^i . Assim, tem-se invariantes *covariantes* que conservam

fibrações e invariantes *contravariantes* que conservam *cofibrações*. Existirão invariantes *covariantes* que se comportam bem com *cofibrações*? Surpreendentemente, tais invariantes existem e correspondem às chamadas *teorias de homologia*, as quais estudamos na terceira seção.

Sobre detalhes dos assuntos aqui discutidos, sugerimos ao leitor as obras [63, 93, 85, 82].

5.1 Homotopia

Introduzimos aqui nossos primeiros invariantes topológicos por métodos estritamente algébricos. Tratam-se, pois, daqueles conhecidos como *grupos de homotopia*. Em verdade, como veremos, tais invariantes são homotópicos e estão definidos para espaços pontuados.

Dado um espaço pontuado $X \in \mathcal{H}\mathcal{C}_*$, iniciamos considerando a sua *suspensão*. Relembrando tratar-se do *pushout* homotópico abaixo, denotado por ΣX . Em outras palavras, é o *cokernel* homotópico do mapa $pt : X \rightarrow *$.

$$\begin{array}{ccc} \Sigma X & \longleftarrow & * \\ \uparrow & & \uparrow \\ * & \longleftarrow & X \end{array}$$

Para calculá-lo, devemos proceder da maneira padrão: substituindo tal mapa por seu *mapping cylinder* e então efetuando o limite. Existem duas maneiras de efetuá-lo, as quais correspondem aos outros diagramas. A primeira modela ΣX como sendo o espaço obtido do cilindro $X \times I$ identificando-se os pontos $X \times 0$ (cujo resultado é o *mapping cylinder*) e em seguida identificando $X \times 1$. A segunda, por sua vez, modela a suspensão em termos do espaço obtido colocando dois *mapping cylinders* (que, como dito, são cilindros com uma das tampas colapsadas) ao longo

da outra tampa.

$$\begin{array}{ccc}
 \Sigma X & \xleftarrow{\quad} & \text{cyl}(pt) \leftarrow - - * \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 X \times I & \xleftarrow{\quad} & X \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 * & \xleftarrow{\quad} & X
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \Sigma X & \xrightarrow{\quad} & \text{cyl}(pt) - - \triangleright * \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 \text{cyl}(pt) & \leftarrow - - & X \times I \xleftarrow{\quad} X \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 * & \xleftarrow{\quad} & X
 \end{array}$$

Relembramos que produtos e coprodutos existem em \mathcal{HC}_* , sendo modelados pelos próprios produtos e coprodutos de \mathcal{C}_* , os quais coincidem com os produtos e coprodutos em \mathbf{Top}_* . Assim, há duas estruturas monoidais simétricas naturais em \mathcal{HC}_* . Com respeito à estrutura herdada por coprodutos, \mathcal{HC}_* possui grupos não triviais (estes são comumente chamados de *H-cospaces* na literatura). De fato, para todo X , sua suspensão ΣX é um cogruppo. Assim, $\Sigma(\Sigma X) = \Sigma^2 X$ é um cogruppo na categoria dos cogruppos, sendo um cogruppo abeliano pelo argumento de Eckmann-Hilton.

Relembramos que, em qualquer que seja a categoria monoidal \mathbf{C} , um objeto X é um grupo se, e somente se, cada $\text{Mor}_{\mathbf{C}}(X; Y)$ admite estrutura de grupo natural. Assim, para todo $X \in \mathcal{HC}_*$, o functor $[\Sigma^n X, -]$, denotado por π_n^X , assume valores na categoria dos grupos e, em particular, se $n \geq 2$, na categoria dos grupos abelianos. Portanto, *eles definem invariantes algébricos e homotópicos em \mathcal{C}_* .*

Uma vez que a suspensão é descrita por um limite homotópico, dois espaços X e Y que tenham o mesmo tipo de homotopia terão suspensões homotópicas e, portanto, definirão invariantes π_n^X e π_n^Y isomorfos. Isto retira o interesse dos invariantes π_n^X quando X é contrátil, pois $\Sigma * \simeq *$, de modo que $\pi_n^*(Y) \simeq 0$ para todo Y . O espaço com tipo de homotopia mais rudimentar depois de um ponto é \mathbb{S}^0 , levando-nos a lançar os olhos sobre os invariantes $\pi_n^{\mathbb{S}^0}$, denotados simplesmente por π_n . Eles são chamados de *grupos de homotopia*. Rapidamente se convence de que $\Sigma \mathbb{S}^n \simeq \mathbb{S}^{n+1}$, de modo que $\pi_n \simeq [\mathbb{S}^n, -]$.

Homotopia Relativa

Nesta subseção, mostraremos que os funtores π_n se estendem à categoria dos pares (X, A) de \mathcal{HC}_* , definindo invariantes relativos. Estes haverão de relacionar

os grupos de homotopia do subespaço A com os de X através de uma sequência exata.

Relembramos haver uma sequência longa de fibrações associada à inclusão $\iota : A \rightarrow X$. Como cada um dos π_n é representável, eles a preservam, induzindo, em particular, uma sequência exata longa em conjuntos

$$\cdots \longrightarrow \pi_0(\Omega \text{ccone}(\iota)) \longrightarrow \pi_0(\Omega A) \longrightarrow \pi_0(\Omega X) \longrightarrow \pi_0(\text{ccone}(\iota)) \longrightarrow \pi_0(A) \longrightarrow \pi_0(X)$$

Como a suspensão e o *loop* são obtidos de limites duais, então os funtores que os correspondem são adjuntos. Consequentemente, $\pi_n(\Omega X) \simeq \pi_{n+1}(X)$. Assim, a sequência anterior assume o seguinte formato

$$\cdots \longrightarrow \pi_{i+1}(A) \longrightarrow \pi_{i+1}(X) \longrightarrow \pi_i(\text{ccone}(\iota)) \longrightarrow \pi_i(A) \longrightarrow \pi_i(X) \longrightarrow \cdots ,$$

mostrando-nos que é o grupo de homotopia do *mapping cocone* da inclusão ι o responsável por conectar os correspondentes grupos de homotopia de X e de A . Isto nos sugere definir o grupo de homotopia relativa $\pi_i(X, A)$ como sendo simplesmente $\pi_i(\text{ccone}(\iota))$.

Observamos, no entanto, que no caso em que $A = X$, tal definição nos levaria a identificar o grupo $\pi_i(X, X)$ com $\pi_{i+1}(X)$, contradizendo o desejo de que um invariante relativo recaia no absoluto neste tipo de limite. Este inconveniente pode ser facilmente contornado redefinindo $\pi_i(X, A)$ por $\pi_{i-1}(\text{ccone}(\iota))$. Ao se fazer isto, estende-se π_i aos pares (X, A) e faz-se com que as propriedades desejadas para um invariante relativo sejam satisfeitas.

Comportamento

Questionemos a cerca da computabilidade de π_i . Em primeiro lugar, observamos que tais funtores são representáveis de modo que comutam com todos os limites existentes em \mathcal{HC}_* . Ocorre que tais limites existem em pouca quantidade. Ainda assim, tal categoria possui produtos, levando-nos a isomorfismos do tipo $\pi_i(X \times Y) \simeq \pi_i(X) \times \pi_i(Y)$. Poderíamos pensar em olhar para limites homotópicos. No entanto, estes não são geralmente preservados. Para contraexemplos, confira [28].

No que diz respeito à preservação de colimites, tem-se problemas mais sérios. Por exemplo, os π_i nem mesmo preservam coprodutos. De fato, pode-se mostrar que, para $i \geq 2$, computa-se

$$\pi_i(X \vee Y) \simeq \pi_i(X) \oplus \pi_i(Y) \oplus \pi_{i+1}(X \times Y, X \vee Y).$$

Uma exceção à regra diz respeito aos limites indutivos. Vê-se que estes são preservados pelos grupos de homotopia através de um argumento bastante simples de compacidade das esferas (confira seção 9.4 de [63]). Assim, se os π_i fossem bem comportados relativamente a cofibrações, então seriam bons invariantes para se trabalhar com CW-complexos. Infelizmente, não se tem uma regra que nos ensine a calcular os π_i quando fornecida uma cofibração genérica.

Em contrapartida, os grupos de homotopia são razoavelmente comportados com respeito a fibrações. De fato, pode-se mostrar que associada a toda fibração $\pi : E \rightarrow X$ existe uma sequência exata que relaciona a homotopia da fibra $F_p = \pi^{-1}(p)$ com a homotopia da base X e do espaço total E . Trata-se, pois, de uma sequência na forma abaixo apresentada. Tal sequência é simples de ser obtida, mas, ainda assim, preferimos omitir os detalhes. Ao leitor que se interesse, sugerimos, por exemplo, a seção 9.3 de [63].

$$\cdots \longrightarrow \pi_{i+1}(F_p) \longrightarrow \pi_{i+1}(E) \longrightarrow \pi_{i+1}(X) \longrightarrow \pi_i(F_p) \longrightarrow \pi_i(E) \longrightarrow \cdots$$

Como exemplificação do uso de tal sequência, observamos que o mapa canônico $EG \rightarrow BG$ é fibração com fibra isomorfa a G . Além disso, como EG é contrátil, todos os seus grupos de homotopia são triviais, de modo que cada faixa

$$0 \xrightarrow{\simeq} \pi_{i+1}(EG) \longrightarrow \pi_{i+1}(BG) \longrightarrow \pi_i(G) \longrightarrow \pi_i(EG) \xrightarrow{\simeq} 0$$

é exata e, portanto, a seta do meio é um isomorfismo.

5.2 Cohomologia

Na seção anterior, construímos nossos primeiros invariantes homotópicos por meio de métodos algébricos: os grupos de homotopia. Estes foram relativamente

simples de serem definidos. Em contrapartida, são bastante difíceis de serem computados. Isto se deve à falta de propriedades satisfeitas por eles.

Por exemplo, como vimos, CW-complexos são limites indutivos de cofibrações. Os π_n preservam limites indutivos, mas não se comportam de maneira clara para com cofibrações. Se o fizessem, então seria simples calcular os grupos de homotopia desta classe de espaços.

Posto isto, busquemos por invariantes homotópicos que possuam bom comportamento relativamente a cofibrações. Como os π_n são bem comportados com respeito a *fibrações*, a ideia é buscar por entes que, em certo sentido, sejam duais aos $\pi_n = [\mathbb{S}^n, -]$. A tentativa imediata é considerar os $[-, \mathbb{S}^n]$. Estes são evidentemente invariantes por homotopias e, por serem representáveis, levam sequências de cofibrações em sequências exatas. Ocorre que, em geral, $[X, \mathbb{S}^n]$ não possui estrutura algébrica, de modo que os invariantes obtidos são fracos.

Onde está o problema? Relembramos que $\Sigma\mathbb{S}^n \simeq \mathbb{S}^{n+1}$, de modo que a sequência dos π_n fica representada por correspondente sequência de espaços X_n , os quais estão vinculados pela condição $\Sigma E_n \simeq E_{n+1}$. O dual completo de tal construção há de ser uma sequência de funtores H^n , representada por uma sequência de espaços E^n , vinculados por $\Omega E^{n+1} \simeq E^n$. Tal sequência de espaços é dita ser um Ω -pré-espectro, enquanto que os correspondentes invariantes dizem-se constituintes da *cohomologia* associada a ela.

Observamos que a cohomologia de um Ω -pré-espectro cumprirá com todos os requisitos, especialmente no que tange ao fato de serem algébricos. Com efeito,

$$[X, S^n] \simeq [X, \Omega S^{n+1}] \simeq [\Sigma X, S^{n+1}] \simeq [\Sigma^2 X, S^{n+2}],$$

de modo que cada H^n assumirá valores na categoria dos grupos abelianos. Uma vez que $\Omega\mathbb{S}^{n+1}$ nem sempre é homotópico a \mathbb{S}^n , *os $[-, \mathbb{S}^n]$ não são a dualização completa dos π^n* , daí o problema com eles.

Posto isto, a questão é: *existirão tais dualizações completas?* A resposta é afirmativa. Damos exemplos. Para tanto, lembramos que a todo grupo topológico G , associa-se um espaço BG . Ocorre que, se G é abeliano, então BG também é um grupo topológico, de modo que podemos iterar o processo. Afirmamos que a

sequência dos $B^n G$ é um Ω -pré-espectro. Como cada termo da sequência é um CW-complexo, pelo teorema de Whitehead basta que $\Omega B^{n+1} G$ e $B^n G$ possuam grupos de homotopia isomorfos. Isto de fato ocorre. Afinal, através da sequência de fibrações associada a $EG \rightarrow BG$, vimos que $\pi_{k+1}(BG) \simeq \pi_k(G)$, donde $\pi_{k+1}(BG) \simeq \pi_{k+1}(\Omega G)$.

Conclusão. Existem invariantes que são contravariantes, homotópicos, abelianos e que se comportam bem com respeito a cofibrações. Eles são designados, genericamente, de *invariantes de cohomologia*.

Questionemos: será toda sequência de invariantes satisfazendo tais condições proveniente de algum Ω -pré-espectro? Em outras palavras, *será toda cohomologia a cohomologia de um Ω -pré-espectro?*

Algumas condições são certamente necessárias. De fato, se os funtores advirem de um Ω -pré-espectro, então serão representáveis de modo que deverão levar colimites de $\mathcal{H}\mathcal{C}_*$ em limites de **AbGrp**. Tais colimites existem em pequena quantidade. Coprodutos, no entanto, são exemplos. Assim, em particular, para que uma sequência H^n seja definida por um Ω -pré-espectro, é preciso que cada H^n seja *aditivo*, no sentido de levar coprodutos de espaços pontuados no produto direto dos correspondentes grupos.

Deve-se observar ainda que os invariantes definidos por um Ω -pré-espectro E^n são sempre *estáveis*. Isto é, tem-se isomorfismos naturais $H^n \circ \Sigma \simeq H^{n+1}$. Com efeito, para todo espaço X ,

$$H^n(\Sigma X) = [\Sigma X, E^n] \simeq [X, \Omega E^n] \simeq [X, E^{n+1}] = H^{n+1}(X),$$

de modo que *estabilidade* é também uma condição necessária para que uma cohomologia provenha de Ω -pré-espectros. O fato surpreendente é que, em conjunto com aditividade, tal condição não só é necessária como também suficiente! Mais precisamente, tem-se o seguinte resultado, usualmente conhecido como *teorema da representabilidade de Brown*:

- se uma cohomologia é aditiva e estável, então ela provém de um Ω -pré-espectro.
- Ou ainda, em outros termos: os únicos invariantes homotópicos, abelianos,

estáveis, aditivos e que se comportam bem com respeito a cofibrações são aqueles provenientes de um Ω -pré-espectro.

Finalizamos com a seguinte observação:

Observação. Vimos que, se G é abeliano, então $[-, BG]$ define uma teoria de cohomologia. *O que acontece com tal functor no caso em que G não é abeliano?* Lembramos que a comutatividade foi crucial para que as iteradas $B^n G$ estivessem bem definidas, levando-nos à prova de que tal sequência define um Ω -pré-espectro. Portanto, não se deve esperar que no caso não-abeliano o functor $[-, BG]$ continue a definir uma teoria de cohomologia no sentido aqui empregado. Ainda assim, ele define uma cohomologia num sentido mais amplo. Em tal contexto, ela é chamada de *cohomologia não-abeliana*. Como exemplo de sua aplicabilidade, veremos no próximo capítulo que a primeira cohomologia não-abeliana de um espaço X (isto é, o conjunto $[X, BG]$, que neste caso continua a ser um grupo) classifica os fibrados principais que tem X como base. Em ordem superior, os conjuntos $[X, B^n G]$ podem não admitir mais estruturas de grupo, mas continuam a ser úteis na tarefa de classificar “fibrados mais categóricos”.

Cocadeias

Há uma boa estratégia para se obter teorias de cohomologia. Com efeito, ao invés de se buscar por uma sequência de funtores $H^n : \mathcal{H}\mathcal{C}_*^{op} \rightarrow \mathbf{AbGrp}$, procura-se apenas um: C , definido em \mathcal{C} e assumindo valores numa determinada categoria $d\mathbf{Ab}$, cujos objetos são sequências de grupos abelianos.

Esta categoria deve ser tal que objeto $X^* \in d\mathbf{Ab}$ induza uma correspondente sequência de funtores $F^n : d\mathbf{Ab}^{op} \rightarrow \mathbf{Ab}$. Posto isto, considera-se $H^n = F^n \circ C$ e olha-se para C , cujas propriedades haverão de refletir as propriedades que se quer para H^n (como ser homotópico, preservar produtos, etc.).

Costumeiramente define-se $d\mathbf{Ab}$ por ser a categoria dos *complexos de cocadeia*. Isto é, das sequências crescentes de homomorfismos de grupos abelianos $d^n : X^n \rightarrow X^{n+1}$, chamados de *operadores de cobordo*, cuja composição consecutiva é sempre nula: $d^{n+1} \circ d^n = 0$ seja qual for o natural n . Os morfismos de tal categoria são as

aplicações de cocadeia. Tratam-se, pois, das sequências de homomorfismos de grupo que comutam com os operadores de cobordo. A condição $d \circ d = 0$ faz com que os funtores

$$H^n : d\mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Ab}, \quad \text{tais que} \quad H^n(X^*) = \ker(d^{n+1})/\text{img}(d^n)$$

estejam todos bem definidos, concluindo a construção.

Diversas teorias de cohomologia podem realmente ser construídas seguindo tal estratégia. Com efeito, como veremos na próxima seção, para todo grupo G , a cohomologia $[-, B^k G]$ admite uma construção nesta perspectiva. Outro exemplo com o qual nos depararemos é a *cohomologia de De Rham*, a qual surge de maneira natural no contexto das variedades diferenciáveis.

5.3 Homologia

Uma *teoria de homologia* é uma sequência de invariantes H_n que satisfazem todas as boas propriedades das cohomologias, mas que ao invés de serem contravariantes, são covariantes como os grupos de homotopia. De maneira mais precisa, tratam-se dos invariantes $H_n : \mathcal{HC}_* \rightarrow \mathbf{AbGrp}$ que são aditivos (preservam produtos), estáveis (no sentido de existirem isomorfismos naturais $H_{n+1} \circ \Sigma \simeq H_n$) e que preservam a exatidão de sequências de cofibrações.

Observamos que os invariantes de homologia são bem menos naturais que os invariantes de cohomologia. De fato, pede-se que um ente *covariante* preserve *cofibrções* ao invés de fibrações. Assim, espera-se que eles tenham menos propriedades e que sejam mais difíceis de serem encontrados. Por exemplo, como veremos adiante, a cohomologia em geral possui uma estrutura adicional de anel, enquanto que a homologia define apenas grupos abelianos.

Apesar de tudo, tais invariantes existem. A ideia é a seguinte: pensamos em homologia como sendo “homotopia adicionada das boas propriedades da cohomologia”. Com isto em mente, partindo dos π_n tenta-se modificá-los de modo a incluir propriedades. Eles já são aditivos e homotópicos, então neste quesitos não precisamos mexer (apenas devemos cuidar para que as mudanças a serem realizadas não os invalidem).

Para introduzir estabilidade, observemos o seguinte: dado um espaço X nem sempre é verdade que $\Sigma X \simeq X$. Em contrapartida, se tomamos o limite $\lim \Sigma^k X$, então o espaço resultante há de cumprir tal condição. Isto nos leva a definir

$$H_n(X) = \lim \pi_{n+k}(\Sigma^k X).$$

Assim, a estabilidade dos H_n provém da estabilidade assintótica dos grupos de homotopia, garantida por um resultado conhecido como *teorema da suspensão de Freudenthal* (veja, por exemplo, a seção 11.2 de [63] ou então a seção 17.4 de [85]). Certamente as mudanças realizadas para sair de π_n e chegar em H_n preservam homotopias e produtos, de modo que os H_n não só são estáveis, como também homotópicos e aditivos. Além disso, são claramente abelianos.

Tais invariantes são chamados de *grupos de homotopia estável* e constituem um exemplo (não muito amigável) de teoria de homologia. Por exemplo, determiná-los para as esferas constitui um dos grandes problemas em aberto da topologia algébrica. Isto reforça *quão difícil é calcular os π_n* : mesmo depois de agregar propriedades a eles (tornando-os estáveis e bons relativamente a cofibrações), eles ainda fornecem resistência ao cálculo.

Cadeias

Assim como vimos valer para cohomologias, tem-se uma boa estratégia para obter teorias de homologia. Com efeito, ao invés de buscar por uma sequência de funtores $H_n : \mathcal{H}\mathcal{C}_* \rightarrow \mathbf{AbGrp}$, procura-se por um só functor C , definido em \mathcal{C} e assumindo valores numa determinada categoria $\partial\mathbf{Ab}$, cujos objetos são sequências de grupos abelianos.

Esta categoria deve ser tal que cada parte da sequência de um dado $X_* \in \partial\mathbf{Ab}$ defina um correspondente $F_n : \partial\mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Ab}$. A ideia é então colocar H_n como sendo a composição $F_n \circ C$ e traduzir as propriedades desejadas em termos de condições sobre C .

Assim, o procedimento é análogo àquele aplicado para as cohomologias, a não ser pelo fato de que o functor resultante H_n deve ser *covariante* e não mais *contravariante*. Ambos os funtores F_n e C precisam então ser covariantes. Construiremos

os F_n de forma idêntica aos F^n . A ideia é simples: se os F^n eram *contravariantes* e estavam definidos numa categoria de seqüências *crecientes*, invertamos a direção das setas e obtemos um functor F_n *covariante* e definido numa categoria de seqüências *decrecentes*.

De maneira mais precisa, definimos $\partial\mathbf{Ab}$ por ser a categoria dos *complexos de cadeia* – isto é, das seqüências X_* de homomorfismos de grupos abelianos (chamados de operadores de bordo e denotados por $\partial_n : X_n \rightarrow X_{n-1}$), cuja composição consecutiva é nula (isto é, $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ para todo n). Os morfismos de tal categoria são as seqüências de mapas $h_n : X_n \rightarrow X'_n$ que comutam com os correspondentes operadores de bordo ∂_n e ∂'_n . Sob tais colocações, fica evidentemente estabelecida uma seqüência de funtores covariantes

$$F_n : \partial\mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Ab}, \quad \text{tais que} \quad F_n(X_*) = \ker(\partial_n) / \text{img}(\partial_{n+1}).$$

Assim, como vimos ocorrer em $d\mathbf{Ab}$, tem-se uma noção de *homotopia algébrica* entre morfismos de $\partial\mathbf{Ab}$, de modo que, para $H_n = F_n \circ C$ ser homotópico, basta que C leve mapas homotópicos em morfismos de cadeia algebricamente homotópicos.

Dold-Kan

No que diz respeito à construção de teorias de homologias via complexos de cadeia, o processo pode ser ainda mais fragmentado, tornando-o versátil. Vejamos como isto acontece.

Iniciamos lembrando que um objeto simplicial numa categoria \mathbf{C} é simplesmente um functor contravariante $\Delta^{op} \rightarrow \mathbf{C}$, o qual se identifica com uma seqüência de objetos $X_n \in \mathbf{C}$, os quais estão ligados por operadores de face $\delta_i : X_n \rightarrow X_{n-1}$ e por operadores de degenerescência $\sigma_i : X_n \rightarrow X_{n+1}$, com $i = 0, \dots, n$, satisfazendo certas identidades simpliciais.

Seja $s\mathbf{Ab}$ a categoria dos grupos abelianos simpliciais. O fato fundamental que gostaríamos de destacar aqui é a existência de uma equivalência entre $s\mathbf{Ab}$ e $\partial\mathbf{Ab}$. Ela é introduzida por meio de uma adjunção $N \rightleftharpoons \Gamma$, em que $N : s\mathbf{Ab} \rightarrow \partial\mathbf{Ab}$ é o functor que a cada grupo simplicial abeliano X associa o complexo NX , chamado de *complexo de Moore* de X , cujo n -ésimo termo da cadeia consiste da interseção

dos núcleos dos $\delta_i : X_n \rightarrow X_{n-1}$, com $i = 0, \dots, n - 1$, e cujo operador de bordo $\partial_n : (NX)_n \rightarrow (NX)_{n-1}$ é simplesmente a restrição de $(-1)\delta_n$ a tal interseção. Para detalhes, veja, por exemplo, a seção 8.4 de [91] e as seções 5-8 do capítulo VIII do clássico [60].

De posse deste fato, segue-se que dar funtores de \mathcal{C} em \mathbf{Ab} , a partir dos quais obtemos possíveis teorias de homologia, consiste no mesmo que dar funtores de \mathcal{C} em $s\mathbf{Ab}$. Ora, tem-se um functor natural $\text{Sing} : \mathcal{C} \rightarrow s\mathbf{Ab}$, que a cada espaço X associa o objeto simplicial $\text{Sing}X$, cujas n -células são as funções contínuas $f : \Delta^n \rightarrow X$. Questionemos: *que teoria de homologia ele define?* A fim de responder tal questão, observamos que Sing é adjunto da realização geométrica, de modo que $|\cdot| \circ \Gamma$ é adjunto a $N \circ \text{Sing}$ (este passa ao quociente e fica definido em \mathcal{HC}).

Observemos ainda que para todo natural k há um functor

$$(-)[k] : \mathbf{AbGrp} \rightarrow \partial\mathbf{Ab},$$

responsável por associar a cada grupo abeliano G o seu complexo de cadeias concentrado em ordem k (isto é, todos os termos da cadeia são triviais, senão o de ordem k , que coincide com o grupo G). Finalmente, notamos que as adjunções anteriores induzem adjunções entre

$$\pi_k \circ N \circ \text{Sing} \quad \text{e} \quad |\cdot| \circ \Gamma \circ (-)[k] \simeq B^k,$$

em que $\pi_k : \partial\mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Ab}$ é o functor que projeta o k -ésimo termo. Portanto, para todo X e todo grupo abeliano G , tem-se

$$[X; B^k G] \simeq \text{Hom}(\text{Sing}_k X; G) \simeq H^k(\text{Sing}X, G).$$

Ora, o lado esquerdo é a cohomologia definida por G , enquanto que o lado direito é a cohomologia definida pelo complexo $N \circ \text{Sing}$ com coeficientes no grupo G . Assim, *a homologia definida por Sing é precisamente aquela cuja correspondente cohomologia com coeficientes em G coincide com a cohomologia de G* . Isto nos mostra, em particular, que *a cohomologia gerada por um grupo abeliano provém de uma homologia*.

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{C} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{Sing}} \\ \xleftarrow{|\cdot|} \end{array} & s\mathbf{Ab} & \begin{array}{c} \xrightarrow{N} \\ \xleftarrow{\Gamma} \end{array} & \partial\mathbf{Ab} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\pi_k} \\ \xleftarrow{(-)[k]} \end{array} & \mathbf{AbGrp} \end{array}$$

Produtos

Mostramos aqui que as teorias de cohomologia possuem uma estrutura de anel que, em geral, não está presente nas teorias de homologia. Isto ressalta o fato de que os invariantes de cohomologia são mais naturais que aqueles definidos via homologia.

Fixado espaço $X \in \mathcal{HC}$, olhemos, pois, para o diagrama abaixo. Nele, Γ é o adjunto do functor de Moore N na correspondência de Dold-Kan, ι é a inclusão da categoria dos grupos abelianos simpliciais na categoria dos grupos simpliciais, ao mesmo tempo que $|\cdot|$ é a realização geométrica e K é a composição indicada.

$$\begin{array}{ccccccc} \partial\mathbf{Ab} & \xrightarrow{\Gamma} & s\mathbf{Ab} & \xrightarrow{\iota} & s\mathbf{Set} & \xrightarrow{|\cdot|} & \mathcal{C} & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{HC} & \xrightarrow{[X, -]} & \mathbf{Set} \\ & & & & & & & & & & \searrow & \\ & & & & & & & & & & & K \end{array}$$

Se em $\partial\mathbf{Ab}$ consideramos a estrutura monoidal definida pelo produto tensorial de complexos, em $s\mathbf{Ab}$ a estrutura monoidal herdada de \mathbf{Ab} , em $s\mathbf{Set}$ a herdada de \mathbf{Set} e, finalmente, em \mathcal{C} e em \mathbf{Set} aquelas vindas de produtos, então cada um de tais funtores torna-se monoidal. Desta forma, toda aplicação de cadeia $h : G_* \otimes G'_* \rightarrow G''_*$ induz uma correspondente função

$$\cup_h : [X, K(G_*)] \times [X, K(G'_*)] \rightarrow [X, K(G''_*)].$$

Observamos que, para qualquer que seja o grupo abeliano G , na notação da subseção anterior, tem-se $G[k+l] \simeq G[k] \otimes G[l]$. Daí, para h igual a tal identificação, obtém-se mapas em cohomologia

$$\cup : H^k(X; G) \times H^l(X; G) \rightarrow H^{k+l}(X; G),$$

usualmente chamados de *produto cup*, os quais introduzem a estrutura de anel graduado que havíamos comentado.

Advertência. No caso em que G fizer parte de um anel R , escreveremos $H_R^* : \mathcal{HC}_* \rightarrow \mathbf{Rng}$ para denotar o functor de cohomologia por ele definido.

Capítulo 6

Fibrados

Se, por um lado, CW-complexos são espaços importantes pois teorias de homologia e cohomologia podem ser mais facilmente calculadas enquanto a eles restritas, por outro, os *fibrados* (espaços estudados nesse capítulo) são importantes pois a partir de cada um deles se sabe construir novos invariantes, chamados de *classes características*.

Grosso modo, um fibrado é um mapa sobrejetivo $\pi : E \rightarrow X$. Isto significa que seu domínio admite uma decomposição em termos de conjuntos não-vazios E_p associados a cada ponto do contradomínio X . Estes são chamados de *fibras* de E e correspondem simplesmente às imagens inversas $\pi^{-1}(p)$. Neste contexto de generalidade, fibrados não são muito úteis. No entanto, é na medida em que se adicionam propriedades a eles (como, por exemplo, estruturas algébricas às fibras, ações de grupos, etc.) que tal utilidade se evidencia.

Na primeira seção do capítulo, introduzimos propriedades pouco a pouco, de modo a definir as diferentes classes de fibrados nas quais se tem interesse. Num certo ponto, mostramos, por exemplo, que tais propriedades são suficientes para que consigamos classificar certos fibrados, chamados de *G-fibrados principais*. O invariante que realiza a classificação é exatamente a cohomologia não-abeliana associada ao grupo G .

Na segunda seção damos um enfoque especial aos *fibrados vetoriais*. Estes possuem a propriedade adicional de terem fibras dotadas de estruturas de espaço vetorial. Ali mostramos que toda operação “contínua” realizada nas fibras de um fibrado

vetorial pode ser estendida ao ente inteiro. Mais precisamente, provamos um teorema que nos permite levantar todo functor contínuo da categoria $\mathbf{Vec}_{\mathbb{R}}$ para a categoria dos fibrados vetoriais. Isso significa, por exemplo, que faz sentido falar da soma direta ou do produto tensorial de fibrados vetoriais.

A terceira seção é marcada pela introdução das *classes características*, que são os invariantes associados aos fibrados. Estas consistem de regras que a cada classe de isomorfismo de fibrados associa uma classe de cohomologia no espaço base do fibrado em questão. Ali discutimos como a teoria para fibrados vetoriais é mais interessante. Por exemplo, mostramos que, neste contexto, as classes características associadas à cohomologia com coeficientes em \mathbb{Z}_2 podem ser totalmente classificadas.

As referências clássicas sobre a teoria de fibrados, as quais consistiram nas principais fontes de consulta no momento da escrita deste capítulo, são os textos [83, 40]. Informação adicional também pode ser encontrada nos últimos capítulos de [63, 85].

6.1 Estrutura

Em muitas ocasiões sabe-se associar, de maneira contínua e disjunta, um conjunto X_p a cada ponto de um espaço X . Fala-se que X_p é uma *fibra em p* de X . A reunião das fibras chama-se *fibrado* em X e é uma entidade que nos permite descrever simultaneamente o comportamento nas vizinhanças de pontos de X e das fibras a eles associados.

Para todo fibrado $E = \cup_p X_p$ em X , tem-se uma função contínua e sobrejetiva $\pi : E \rightarrow X$, chamada de *projeção canônica*, que toma um elemento x na reunião $\cup_p X_p$ das fibras e devolve o ponto p que corresponde à fibra na qual x se encontra.

Observação: Costuma-se identificar X_p com $p \times X_p$. Não há perda de generalidade em se fazer isso, pois as fibras são supostas disjuntas. Por outro lado, isto facilita descobrir em que fibra um determinado elemento da reunião $\cup_p X_p$ está. Por exemplo, nesta identificação, o mapa π fica caracterizado por $\pi(p, x) = p$. No que segue, adotaremos esta convenção.

Reciprocamente, vejamos que toda função contínua e sobrejetiva $\pi : E \rightarrow X$ determina um fibrado em X . Isto se resume à observação de que cada uma desta

funções determina uma decomposição do espaço E em termos de conjuntos parametrizados por X . Mais precisamente, cada f decompõe E como a reunião das imagens inversas $f^{-1}(p)$. Sob tal decomposição, f se torna a projeção canônica de um fibrado em X cujas fibras são as referidas imagens inversas.

Três observações:

1. ao se olhar para um fibrado enquanto função contínua $f : E \rightarrow X$, fala-se que E é o *espaço total*, enquanto que X é chamado de *espaço base*;
2. tem-se uma subcategoria cheia $\mathcal{B} \subset \text{Arr}(\mathcal{C})$, formada dos fibrados e tendo quadrados comutativos como morfismos. Estes últimos assumem aqui uma interpretação bastante natural. Com efeito, se f e g são fibrados e (h, h') é um morfismo entre eles, a comutatividade $h' \circ \pi = \pi' \circ h$ nos diz simplesmente que elementos da fibra em p são levados por h em elementos da fibra em $h'(p)$;
3. uma vez fixado um espaço X , é também possível falar da categoria \mathcal{B}_X dos fibrados com base em X . Esta é simplesmente a subcategoria de \mathcal{B} formada dos fibrados que possuem X como espaço base e dos morfismos do tipo (h, id_X) . Pela observação anterior, estes últimos se identificam com os mapas que preservam fibras de um mesmo ponto. Em outras palavras, se $\mathcal{B} \subset \text{Arr}(\mathcal{C})$ é subcategoria cheia dos mapas sobrejetivos, então \mathcal{B}_X é a correspondente subcategoria cheia de \mathcal{C}/X . De maneira análoga define-se $\mathcal{B}^X \subset X/\mathcal{C}$.

Existem diversas classes de fibrados. Uns se caracterizam por terem fibras dotadas de estruturas adicionais, enquanto que outros são, em certo sentido, modelados por um fibrado mais simples. Existem ainda aqueles que, além de gozarem das duas condições anteriores, estão sujeitos à ação de um grupo em suas fibras. No restante da seção, apresentaremos algumas de tais classes.

Trivializações

Os mais simples de todos os fibrados num espaço X são os *fibrados triviais padrões*. Estes nada mais são que as projeções $pr_1 : X \times F \rightarrow X$ na primeira entrada. Neles, F recebe o nome de *fibra típica*. Isto porque a fibra em cada ponto

$p \in X$ coincide com $p \times F$, que se identifica com F . Assim, o fibrado trivial padrão com base num espaço X é construído associando a todos pontos de X um mesmo conjunto: a fibra típica.

Um *fibrado trivial* é aquele isomorfo a algum fibrado trivial padrão. A menos de conjugações, estes também são simplesmente projeções na primeira entrada. Por sua vez, um *fibrado localmente trivial* com base em X é aquele modelado (em \mathcal{B}_X) por algum fibrado trivial padrão de X .

Mais precisamente, diz-se que $\pi : E \rightarrow X$ é *localmente trivial* quando cada $p \in X$ admite uma vizinhança aberta U , restrita a qual π é trivial. Isto significa que existe um espaço F_p , chamado de *fibra típica em p* , tal que $\pi|_U$ é conjugado à projeção $pr_1 : U \times F_p \rightarrow U$. Os homeomorfismos apresentados no diagrama abaixo são chamados de *trivializações locais*.

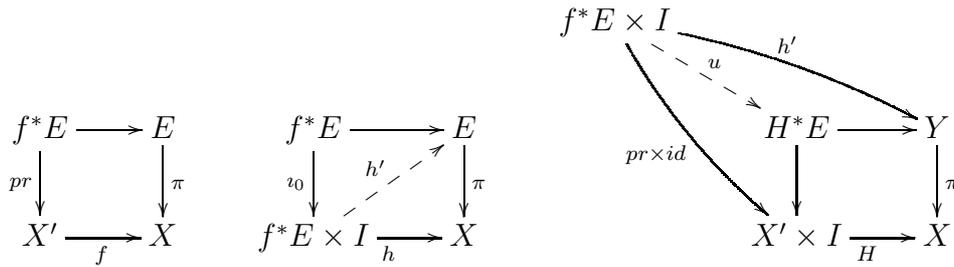
$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\cong} & U \times F_p \\ & \searrow \pi & \swarrow pr_1 \\ & U & \end{array}$$

Quando F_p é o mesmo para cada p (o que acontece, por exemplo, quando X é conexo), fala-se que ele é a *fibra típica* de π . Assim, pode-se dizer que um fibrado localmente trivial com fibra típica F é um fibrado localmente isomorfo ao trivial que tem F como fibra típica. Tem-se uma subcategoria cheia $\mathcal{LB} \subset \mathcal{B}$ dos fibrados localmente triviais que possuem alguma fibra típica (não fixada). Por sua vez, também se tem subcategoria $\mathcal{LB}_X \subset \mathcal{B}_X$, formada dos fibrados com fibra típica não fixada, mas com base em X .

A propriedade mais importante dos fibrados localmente triviais é que sua projeção é uma fibração. Ilustramos a relevância deste fato mostrando que o *pullback* de tais fibrados por mapas homotópicos produz resultados isomorfos. Feito isto, o functor $[-] : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$, que a cada espaço X associa o conjunto das classes de isomorfismo dos fibrados que o tem como base, e que a cada mapa $f : X \rightarrow X'$ faz corresponder a regra $f^* : [X'] \rightarrow [X]$, que toma um fibrado $\pi : E \rightarrow X'$ e devolve seu *pullback* f^*Y , passará ao quociente e ficará definido em \mathcal{HC} .

Pois bem, provemos que, se $\pi : E \rightarrow X$ é localmente trivial e $f, g : X' \rightarrow X$ são funções contínuas homotópicas, então os correspondentes *pullbacks* de π por

elas são isomorfos. Dada homotopia H entre f e g , consideremos o mapa h , obtido compondo $pr \times id$ com H (veja o primeiro dos diagramas). Sendo π fibração, ela tem a propriedade de levantamento de homotopias, de modo que existe o mapa h' do segundo diagrama. Por universalidade obtém-se o u do terceiro diagrama, que é isomorfismo. Daí, fazendo o mesmo para o mapa g e utilizando de transversalidade, conclui-se o desejado.



Grupo Estrutural

Intuitivamente, um fibrado $\pi : E \rightarrow X$ é *estruturado* por um grupo topológico G quando este age, de maneira contínua e compatível, na fibra típica F de π . De maneira mais precisa, quando as transições entre trivializações locais são totalmente determinadas pela ação de G em F .

Com isto queremos dizer que existe uma ação contínua $(g, v) \mapsto g \cdot v$ tal que, para quaisquer trivializações locais φ_i e φ_j , estabelecidas em vizinhanças suficientemente pequenas U_i e U_j de um mesmo $p \in X$, tem-se

$$(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(p, v) = (p, u_{ij}(p) \cdot v)$$

para certas funções contínuas $u_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$, usualmente chamadas de *coordenadas* de π nas trivializações φ_i e φ_j . Quando a ação é efetiva, tais funções satisfazem as *condições de cociclo*: $u_{ii} = 1$, onde 1 é a identidade de G , e

$$u_{ij} \cdot u_{jk} = u_{ik} \quad \text{em} \quad U_i \cap U_j \cap U_k. \quad (6.1)$$

Assim como fibrados localmente triviais possuem a propriedade especial de terem uma fibração como projeção, os fibrados com grupos estruturais admitem uma particularidade: *podem ser reconstruídos por meio de suas coordenadas*.

Sejamos mais precisos. Dada uma ação efetiva de um grupo G num espaço F , assim como uma cobertura de um espaço X por abertos U_i , nos quais estão definidas

funções $u_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$ satisfazendo as condições anteriores, afirmamos existir um fibrado $\pi : E \rightarrow X$, estruturado pelo grupo G , tendo fibra típica F e cujas coordenadas são as u_{ij} . A ideia é simples: consideramos o coproduto dos $U_i \times F$ e então o quocientamos pela relação que identifica cada um dos pares (p_j, q) de $U_i \cap U_j \times F$ com o correspondente $(p_i, u_{ij}(p_j) \cdot q)$. O espaço resultante será E e a aplicação quociente será a projeção $\pi : E \rightarrow X$.

Vale mais: pode-se mostrar que, se mantemos o espaço base, a cobertura por abertos, a fibra típica, o grupo estrutural e a ação, mas trocamos as funções u_{ij} por outras u'_{ij} que também satisfazem as condições de cociclo, então o fibrado E' por ela definido será isomorfo a E se, e somente se, existirem funções $u_i : U_i \rightarrow G$ tais que $u'_{ij} = u_i \cdot u_{ij} \cdot u_j^{-1}$. Em particular, isto significa que se *dois fibrados localmente triviais que possuam mesma base, mesma fibra típica, mesmas coordenadas e que estejam estruturados sobre o mesmo grupo que age de igual maneira em ambos, então estes são necessariamente isomorfos*.

Em suma, tem-se a equação abaixo. Para detalhes sobre o assunto, remetemos o leitor aos textos clássicos [40, 83].

$$\begin{aligned} & \text{fibrado} \\ & \text{localmente trivial} = \text{base} + \text{fibra} + \text{grupo} + \text{ação} + \text{coordenadas} \end{aligned}$$

Classificação

Um caso particularmente interessante de fibrados com grupo estrutural são os *fibrados principais*. Estes consistem simplesmente de fibrados localmente triviais $\pi : P \rightarrow X$, cuja fibra típica é um grupo topológico G que age em si mesmo por translação. Tem-se respectivas categorias \mathcal{P}^G e \mathcal{P}_X^G , formadas dos fibrados principais estruturados por G e daqueles que tem X como espaço base.

O interesse neste tipo de objeto é devido a dois motivos. Em primeiro lugar, eles fazem jus ao nome. Mais precisamente, pelo procedimento de reconstrução através de coordenadas, a todo fibrado com grupo estrutural G faz-se corresponder um G -fibrado principal. Reciprocamente, a partir de qualquer G -fibrado principal e de qualquer ação de G num espaço F , constrói-se um fibrado com fibra típica F e

estruturado por G .

Em segundo lugar, como veremos agora, eles admitem uma classificação completa. Mais precisamente, mostraremos que o functor $[-]_G$, que a cada espaço X associa a classe de isomorfismo de G -fibrados que o tem como base é representável.

A ideia é a seguinte: todo G -fibrado $\pi : P \rightarrow X$ define uma transformação $\xi : [-, X] \rightarrow [-]_G$, dada por $\xi_P(f) = f^*P$. Ela está bem definida, o que se deve ao fato da parcela “ f ” no *pullback* abaixo ser homotópica. A regra ξ será um isomorfismo precisamente quando a parcela que corresponde a “ π ” (e, portanto, o *pullback* como um todo) também for homotópica. Neste caso, como a π já é fibração, o *pullback* poderá ser calculado tanto como um *pullback* ordinário quanto via substituição fibrante de f . Portanto, o fibrado classificado por f será precisamente o seu *mapping path space*.

Observemos que, como todo objeto em \mathcal{C} é cofibrante, uma condição suficiente para que o *pullback* em questão seja homotópico é a contratibilidade do espaço total P (para um argumento mais concreto, veja, por exemplo, [83]). Assim, para classificar os fibrados principais, basta construirmos um tendo espaço total contrátil.

$$\begin{array}{ccc} & & P \\ & & \downarrow \pi \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Para tanto, relembramos existirem duas maneiras de mergulhar \mathbf{Grp} em \mathbf{Grp} , dadas pelos funtores \mathbf{E} e \mathbf{B} . Estas estão ligadas por uma transformação natural, de modo que há um mapa canônico $\mathbf{E}G \rightarrow \mathbf{B}G$. Passando ao nervo simplicial e depois tomando a realização geométrica, obtém-se exatamente um G -fibrado principal $EG \rightarrow BG$, cujo espaço total já comentamos ser contrátil. Consequentemente, $[-, BG] \simeq [-]_G$.

Conclusão. Primeira cohomologia não-abeliana é invariante e sozinha classifica todos os fibrados principais.

Em algumas situações, é fácil exibir modelos para BG . Por exemplo, no que tange os grupos ortogonais, as inclusões $\iota : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$ definem um sistema dirigido nas grassmanianas $G_n(\mathbb{R}^k) \rightarrow G_n(\mathbb{R}^{k+1})$, cujo colimite, usualmente denotado por

$G_n(\mathbb{R}^\infty)$, modela $BO(n)$. No caso particular em que $n = 1$, escreve-se $\mathbb{R}P^\infty$, já que $G_1(\mathbb{R}^k)$ coincide com o espaço projetivo $\mathbb{R}P^{k-1}$.

Adjunção

Um *fibrado vetorial* é um fibrado localmente trivial que possui fibras e fibra típica dotadas de estruturas de espaço vetorial, ao mesmo tempo que é estruturado pelo grupo linear geral. Se a fibra típica é o \mathbb{R}^n , costuma-se dizer que o fibrado é *n-plano*. Também é comum pedir que os morfismos entre fibrados vetoriais preservem a estrutura linear das fibras.

De forma mais precisa, tem-se o costume de definir uma subcategoria $\mathbf{Vec} \subset \mathcal{B}$, formada dos fibrados vetoriais e dos morfismos (h, h') entre $\pi : E \rightarrow X$ e $\pi' : E' \rightarrow X'$, tais que $h|_{E_p}$ é mapa linear de E_p em $E'_{h'(p)}$. Escreve-se \mathbf{Vec}^n ou \mathbf{Vec}_X no caso de se restringir aos fibrados *n*-planos ou àqueles com base em X .

Existem diversas razões para se estudar fibrados vetoriais. Por exemplo, como veremos na próxima seção, veremos que operações nas fibras de um fibrado vetorial podem ser estendidas ao fibrado todo. Na última seção, por sua vez, mostraremos que existem novos invariantes que podem ser construídos para esta classe de entidades, realçando ainda mais sua importância.

Na presente subseção apenas aguçamos o interesse por eles mostrando que, assim como os fibrados principais, estes admitem uma classificação homotópica completa. Iniciamos lembrando a equação que descreve a estrutura de um fibrado localmente trivial:

$$\begin{aligned} & \mathbf{fibrado} \\ \mathbf{localmente} &= \mathbf{base} + \mathbf{fibra} + \mathbf{grupo} + \mathbf{ação} + \mathbf{coordenadas} \\ & \mathbf{trivial} \end{aligned}$$

Dela, observamos que, se temos um fibrado *n*-plano $\pi : E \rightarrow X$ em mãos, a ele podemos associar um $GL(n)$ -fibrado principal. Isto é feito mantendo o espaço base X e o grupo $GL(n)$, trocando a fibra \mathbb{R}^n pelo próprio grupo $GL(n)$, o qual passará a agir por translação. As coordenadas são modificadas de maneira evidente.

Por outro lado, se tomamos em mãos um $GL(n)$ -fibrado principal $\pi : P \rightarrow X$,

podemos construir um fibrado n -plano como segue: mantemos o espaço base e o grupo estrutural, trocamos a fibra para \mathbb{R}^n , a qual estará sob a ação natural do grupo linear.

Assim para passar de fibrados n -planos para $GL(n)$ -fibrados principais E e (vice-versa), não é preciso mexer na base e no grupo estrutural. Isto nos fornece uma adjunção $\mathbf{Vec}_X^n \rightleftarrows \mathcal{P}_X^{GL(n)}$. Como consequência, fibrados n -planos podem ser classificados pelos fibrados principais a eles associados. Mais precisamente, tal adjunção induz um isomorfismo natural entre os funtores $[-]_n : \mathcal{HC} \rightarrow \mathbf{Set}$, que a cada X associa o conjunto das classes de isomorfismo (em \mathbf{Vec}^n) dos fibrados que o tem como base, e $[-]_{GL(n)}$. Assim, $[-]_n \simeq [-, BGL(n)]$.

Observação. Como veremos adiante, os fibrados principais associados aos fibrados verticiais sempre admitem uma redução a $O(n)$, de modo que a adjunção anterior pode ser melhorada, dando-nos $[-]_n \simeq [-, BO(n)]$. O fibrado que corresponde a $EO(n) \rightarrow BO(n)$ pela adjunção em questão é chamado de *fibrado n -plano canônico*, sendo denotado por γ^n .

6.2 Levantamento

Nesta seção, mostraremos que os fibrados vetoriais possuem uma propriedade particularmente interessante: *todo functor contínuo na categoria $\mathbf{Vec}_{\mathbb{R}}$ pode ser levantado a \mathbf{Vec}_X , seja qual for o espaço base X fixado*. Isto significa, essencialmente, que qualquer operação contínua realizada nas fibras de um fibrado vetorial se estende ao fibrado como um todo.

Mais precisamente, mostraremos que certa classe de funtores F em $\mathbf{Vec}_{\mathbb{R}}$, os quais denominaremos *contínuos*, induzem outros funtores em \mathbf{Vec}_X , denotados por \mathcal{F} , tais que

$$\mathcal{F}(E)_p = F(E_p) \quad \text{e} \quad \mathcal{F}(h)|_{\mathcal{F}(E)_p} = F(h|_{E_p}). \quad (6.2)$$

Ou ainda, de maneira precisa e sucinta, demonstraremos que, se F for contínuo, então o digrama abaixo pode ser completado com a seta pontilhada para qualquer $p \in X$. Nele, ι_p é o functor que a cada fibrado associa sua fibra em p e que a cada morfismo faz corresponder sua restrição à fibra em p . Assim, provaremos que, para

todo functor contínuo e todo p , a composição $F_p = F \circ \iota_p$ possui a propriedade de levantamento (em **Cat**) segundo a ι_p .

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{Vec}_X & \dashrightarrow & \mathbf{Vec}_X \\
 \downarrow \iota_p & & \downarrow \iota_p \\
 \mathbf{Vec}_{\mathbb{R}} & \xrightarrow{F} & \mathbf{Vec}_{\mathbb{R}}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & & \mathbf{Vec}_X \\
 & \nearrow & \downarrow \iota_p \\
 \mathbf{Vec}_{\mathbb{R}} & \xrightarrow{F_p} & \mathbf{Vec}_X
 \end{array}$$

Uma vez feito isto, poderemos falar dos *fibrados descendentes* de um dado fibrado vetorial $\pi : E \rightarrow X$. Estes serão todos aqueles que podem ser obtidos de E via levantamentos canônicos de funtores contínuos. Assim, por exemplo, como consequência da functoriedade da construção, todo fibrado que descender de um trivial também será trivial.

Resultado

Diremos que um functor $F : \mathbf{Vec}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbf{Vec}_{\mathbb{R}}$ é *contínuo* se, para toda função contínua f , definida num aberto U do \mathbb{R}^n e assumindo valores em $\text{Iso}(X) \simeq GL(n)$ para algum espaço vetorial X , a correspondente função $p \mapsto F(f(p))$ também é contínua.

De maneira estritamente análoga fala-se de funtores contravariantes contínuos, de bifuntores contínuos, e assim por diante. Exemplos de bifuntores contínuos incluem os produtos e coprodutos binários \times e \oplus , assim como o produto tensorial \otimes . Um exemplo de functor contravariante contínuo é aquele que a cada espaço X associa o seu dual X^* e que a cada $f : X \rightarrow Y$ faz corresponder $f^* : Y^* \rightarrow X^*$, tal que $f^*(g) = g \circ f$. Por sua vez, a tomada do bidual (e, portanto, a identidade) define um functor contínuo.

Abaixo apresentamos uma versão do resultado prometido para *funtores contínuos*. Observamos, no entanto, que demonstração análoga se aplica a funtores contravariantes, bifuntores, assim como para outras classes de mapas em **Cat**.

Proposição 6.2.1. *Se um functor F é contínuo, então F_p possui a propriedade de levantamento com respeito a ι_p , sejam quais forem o espaço X e o ponto p .*

Demonstração. Provaremos que a continuidade de F faz com que a regra $\mathcal{F} : \mathbf{Vec}_X \rightarrow \mathcal{B}$, responsável por associar a cada fibrado π sobre X a reunião (co-

produto em **Top**) dos espaços vetoriais $F(E_p)$ e a cada morfismo h o coproduto das funções $F(h|_{E_p})$, assuma valores em \mathbf{Vec}_X . Neste caso, as condições (6.2) estarão, por construção, imediatamente satisfeitas. Começamos verificando que, se um fibrado vetorial π tem E como fibra típica, então $\mathcal{F}(\pi)$ é localmente trivial e possui $F(E)$ como fibra típica. A ideia é mostrar que \mathcal{F} preserva trivializações locais. A prova deste fato segue das duas seguintes observações. Primeiramente, como \mathcal{F} é functorial, ele leva fibrados isomorfos em fibrados isomorfos. Assim, se $\pi|_U$ é conjugado a $pr_1 : U \times E \rightarrow U$ por φ , então $\mathcal{F}(\pi|_U)$ é conjugado a $\mathcal{F}(pr_1)$ por $\mathcal{F}(\varphi)$. Em segundo lugar, diretamente da definição de \mathcal{F} , vê-se que $\mathcal{F}(pr_1)$ é a projeção do produto $U \times F(E)$ em U . O diagrama abaixo esclarece a situação.

$$\begin{array}{ccc}
 \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \times E \\
 \searrow \pi & & \swarrow pr_1 \\
 & U & \\
 \end{array}
 \xrightarrow{\mathcal{F}}
 \begin{array}{ccc}
 \mathcal{F}(\pi)^{-1}(U) & \xrightarrow{\mathcal{F}(\varphi)} & U \times F(E) \\
 \searrow \mathcal{F}(\pi) & & \swarrow \mathcal{F}(pr_1) \\
 & U & \\
 \end{array}$$

Por fim, mostremos que $\mathcal{F}(\pi)$ é estruturado pelo grupo linear geral. Com efeito, se u_{ij} são as coordenadas de π em trivializações locais φ_i e φ_j , então

$$(\mathcal{F}(\varphi_j) \circ \mathcal{F}(\varphi_i^{-1}))(p, v) = \mathcal{F}(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(p, v) = F(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}|_{E_p})(v) = F(u_{ij}(p))(v),$$

de modo que as funções $F \circ u_{ij}$ são contínuas (pela continuidade de F) e servem de coordenadas para $\mathcal{F}(\pi)$ nas correspondentes trivializações locais. Como consequência, \mathcal{F} realmente assume valores em \mathbf{Vec}_X , o que é suficiente para o que havíamos proposto. \square

Teoria K

Como consequência do resultado anterior observamos que, *se um bifunctor contínuo \otimes define estrutura monoidal em $\mathbf{Vec}_{\mathbb{R}}$, então seu levantamento induz estrutura monoidal em \mathbf{Vec}_X , seja qual for X* . Por exemplo, se $1 \in \mathbf{Vec}_{\mathbb{R}}$ é unidade para o produto \otimes , então a correspondente unidade para seu levantamento há de ser o fibrado trivial canônico com fibra típica $F \simeq 1$.

Ora, existem diversas estruturas monoidais naturais em $\mathbf{Vec}_{\mathbb{R}}$: tem aquelas definidas por produtos e por coprodutos, assim como aquela definida pelo produto

tensorial. Uma vez que $\mathbf{Vec}_{\mathbb{R}}$ possui biprodutos, segue-se que as estruturais monoideais definidas por produtos e por coprodutos são isomorfas, de modo que precisamos olhar somente para uma delas. Escolheremos a induzida por coprodutos.

Da observação anterior, obtém-se duas estruturas monoidais em \mathbf{Vec}_X : uma proveniente do levantamento da soma direta \oplus e outra associada ao levantamento do produto tensorial \otimes . Costuma-se dizer que tais levantamentos são a *soma e o produto de Whitney*. Em particular, como \oplus e \otimes são compatíveis em $\mathbf{Vec}_{\mathbb{R}}$, também o são em \mathbf{Vec}_X , fazendo de tal categoria uma categorificação dos semi-anéis.

Conseqüentemente, o functor $[-] : \mathcal{HC} \rightarrow \mathbf{Set}$, que a cada espaço X associa o conjunto das classes de isomorfismo de fibrados com base em X , em verdade assume valores na categoria dos semi-anéis. Compondo-o com a construção de Grothendieck (veja o exemplo do capítulo um), obtém-se um functor $K : \mathcal{HC} \rightarrow \mathbf{Rng}$, o qual nos fornece um novo invariante algébrico e homotópico. Na verdade, ele define uma teoria de cohomologia conhecida como *teoria K*. Para detalhes, veja, por exemplo, o capítulo 24 de [63] e a segunda parte do livro [40].

6.3 Invariantes

Relembramos haver um functor Iso , responsável por associar a cada categoria o conjunto das classes de isomorfismo de seus objetos. Se $\iota : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Cat}$ é um mergulho, então a composição $\text{Iso} \circ \iota$, denotada por Iso_ι , é functor de \mathbf{C} em \mathbf{Set} , o qual se vê covariante ou contravariante na medida em que tais condições são satisfeitas pelo mergulho ι . Fornecido um functor $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}$, uma *classe característica de ι com valores em F* é simplesmente uma transformação natural de Iso_ι em F . Assim, a partir de um invariante, classes características nos fornecem outros.

No que diz respeito ao poderio e à calculabilidade destes novos invariantes, duas situações tornam-se particularmente interessantes:

1. quando cada $\iota(X)$ possui estrutura monoidal ou alguma outra estrutura algébrica interna a \mathbf{Cat} . Neste caso, Iso_ι assume valores não só em \mathbf{Set} , mas na categoria dos monoides ou mesmo em outra categoria algébrica;
2. quando o functor Iso_ι é representável, pois assim o lema de Yoneda nos diz

exatamente quantas classes características com valores num dado F existem: se C é o objeto classificatório, então estas estão em bijeção com $F(C)$.

Procuremos por mergulhos que se enquadrem nas situações anteriores. Iniciamos observando que, se uma categoria \mathbf{C} possui *pullbacks* ou *pushouts*, então existem maneiras naturais de mergulhá-la em \mathbf{Cat} : tratam-se, pois, dos funtores $\mathbf{C}/$ e $/\mathbf{C}$. Em particular, para \mathbf{Top} tem-se as regras $X \mapsto \mathcal{B}_X$ e $X \mapsto \mathcal{B}^X$, as quais denotamos por $\mathcal{B}/$ e $/\mathcal{B}$. Desta forma, para um dado X , as respectivas categorias \mathcal{B}/X e X/\mathcal{B} são aquelas formadas dos fibrados que o tem como espaço base ou como espaço total. Por sua vez, se $f : X' \rightarrow X$ é uma função contínua, então \mathcal{B}/f é o functor que a cada fibrado $\pi : Y \rightarrow X$ sobre X associa seu *pullback* $f^*Y \rightarrow X'$ por f , ao passo que f/\mathcal{B} é caracterizado por condição dual.

Em seguida, notamos que, como as diversas classes de fibrados são invariantes por *pullbacks*, podemos olhar o functor $\mathcal{B}/$ enquanto assume valores em cada uma delas, de modo a trabalhar com mergulhos de \mathbf{Top} em \mathbf{Cat} que possuam maiores propriedades e, em particular, que satisfaçam as condições requeridas.

Por exemplo, como mapas homotópicos induzem *pullbacks* isomorfos de fibrados localmente triviais, o mergulho $\mathcal{L}\mathcal{B}/$, obtido restringindo-se a tal classe de fibrados, passa ao quociente e fica definido em $\mathcal{H}\mathbf{Top}$. Por sua vez, se olhamos para os G -fibrados principais, então $\text{Iso}_{\mathcal{P}G}$ é exatamente $[-]_G$, de modo que, pelo teorema de classificação, é representável.

Finalmente, se nos restringimos aos fibrados vetoriais, então a composição $\text{Iso}_{\mathbf{Vec}^n}$ corresponde a $[-]_n$ e, portanto, também é representável. Além disso, a soma de Whitney e o produto tensorial introduzem estruturas monoidais compatíveis em \mathbf{Vec}_X , fazendo com que $[-]$ assumam valores na categoria dos semi-anéis. Assim, a categoria dos fibrados vetoriais parece ser o ambiente natural para se estudar classes características.

Posto isto, observamos que as classes características legitimam-se na construção de novos invariantes a partir de um outro previamente fixado. Qual escolher? Como $[-]_n$ está definido em $\mathcal{H}\mathbf{Top}$, o invariante escolhido deve ser homotópico, o que nos leva a pensar nos funtores de homotopia ou homologia. Por sua vez, sendo $[-]_n$ contravariante, há um direcionamento natural às cohomologias. Por fim, como

$[-]$ assume valores em **Rng** e o produto *cup* introduz estrutura de anél graduado nos grupos de cohomologia, é bastante razoável estudar as classes características associadas aos funtores H_R^* . Ao longo de todo o capítulo, seguiremos esta estratégia.

Propriedades

Nos propomos a estudar as transformações naturais $\xi : [-] \rightarrow H_R^*$. Quais propriedades se deve esperar de tais entidades? Notamos, em primeiro lugar, que elas associam homomorfismos de anéis ξ_X a cada X . Ora, a estrutura de semianel de $[X]$ é dada pelas classes de isomorfismo da soma de Whitney e do produto tensorial, enquanto que a estrutura de $H_R^*(X)$ é obtida da soma direta e do produto *cup*. Assim, para fibrados π e π' sobre X , deve-se ter

$$\xi_X(\pi \oplus \pi') \simeq \xi_X(\pi) \oplus \xi_X(\pi') \quad \text{e} \quad \xi_X(\pi \otimes \pi') \simeq \xi_X(\pi) \cup \xi_X(\pi').$$

Além disso, tal aplicação deve estar bem definida: se dois fibrados π e π' são isomorfos, então as correspondentes classes $\xi_X(\pi)$ e $\xi_X(\pi')$ devem ser iguais. Isto ressalta o uso de classes características como fontes de invariantes para fibrados vetoriais.

Das condições anteriores seguem ainda outras propriedades importantes. Por exemplo, como é homomorfismo de semianéis, ξ_X deve preservar unidades aditivas e multiplicativas. Observamos que, como a unidade da soma direta e do produto tensorial são, respectivamente, 0 e \mathbb{R} , segue-se que a unidade da soma e do produto de Whitney são o fibrado 0 -plano trivial e o fibrado 1 -plano trivial. Portanto, ao passar ao quociente, como todo espaço vetorial é contrátil, qualquer fibrado trivial ε com base em X serve de modelo para a classe aditiva de $[X]$. Por sua vez, na classe multiplicativa tem-se o fibrado canônico γ^1 , o qual nos parece um bom modelo. Assim, toda classe característica há de satisfazer

$$\xi_X(\varepsilon) = 0 \quad \text{e} \quad \xi_X(\gamma^1) \neq 0.$$

Stiefel-Whitney

Como o functor $[-]_n$ é representável, a determinação das classes características com valores em H_R^* se resume, pelo lema de Yoneda, ao conhecendo do anel

$H_R^*(BO(n))$. O caso não-trivial mais simples se dá quando $R = \mathbb{Z}_2$. Nesta subseção, determinaremos o anel $H^*(BO(n); \mathbb{Z}_2)$, para qualquer n . Mais precisamente, *mostraremos ser ele um anel de polinômios em certas variáveis w_1, \dots, w_n , com coeficientes no corpo \mathbb{Z}_2 .*

Iniciamos observando que a regra $G \mapsto BG$, que a cada grupo topológico associa o espaço classificatório a ele associado, preserva produtos a menos de homotopia. De fato, como cada parcela preserva produtos, o functor obtido da composição abaixo também os preserva.

$$\mathbf{TGrp} \xrightarrow{\iota} \mathbf{Grp} \xrightarrow{\mathbf{B}} \mathbf{Gpd} \xrightarrow{N_s} \mathbf{sSet} \xrightarrow{|\cdot|} \mathbf{Top} \longrightarrow \mathcal{H}\mathbf{Top}$$

$\xrightarrow{\quad B \quad}$

Há um mergulho natural de $\mathbb{Z}_2 \simeq O(1)^n$ em $O(n)$, o qual associa a cada lista de n números pares uma matriz diagonal formada por eles. Desta forma, aplicando B , como ele preserva produtos, obtém-se um mapa de n cópias de $BO(1)$ em $BO(n)$. Via fórmula de Künnet (lembre-se de que \mathbb{Z}_2 é um corpo), chega-se a um homomorfismo injetivo de anéis

$$H^*(BO(n); \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H^*((BO(1))^n; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\simeq} \bigotimes_n H^*(BO(1); \mathbb{Z}_2), \quad (6.3)$$

o qual nos permite identificar as classes características com valores em $H_{\mathbb{Z}_2}^*$ simplesmente calculando o anel de cohomologia de $BO(1)$.

Para fazer isto, lembramos que o espaço classificatório $BO(n)$ é modelado pelo limite indutivo das grassmannianas $G_n(\mathbb{R}^k)$. Pode-se introduzir uma estrutura de CW-complexo finito em cada uma delas, de modo que a correspondente $G_n(\mathbb{R}^{k+1})$ tenha $G_n(\mathbb{R}^k)$ como subcomplexo (veja a sexta seção de [67]). Desta forma, o limite indutivo que computa $BO(n)$ é homotópico e, portanto, comuta com $H_{\mathbb{Z}_2}^*$, o que nos dá um isomorfismo

$$H^*(BO(1); \mathbb{Z}_2) \simeq \lim_k H^*(G_1(\mathbb{R}^k); \mathbb{Z}_2) \simeq \lim_k H^*(\mathbb{R}\mathbb{P}^{k-1}; \mathbb{Z}_2). \quad (6.4)$$

Ora, o anel de cohomologia dos espaços projetivos já nos é conhecido: trata-se de um anel polinomial em uma variável α , dotado de um truncamento. Isto é, cada $\alpha_* \in H_{\mathbb{Z}_2}^*(\mathbb{R}\mathbb{P}^n)$ corresponde a uma soma do tipo

$$\alpha_* = 1 + a_1 \cdot \alpha + a_2 \cdot \alpha^2 + \dots + a_n \cdot \alpha^n, \quad \text{com } \alpha^i = \alpha \cup \dots \cup \alpha \text{ e } a_i \in \mathbb{Z}_2,$$

mostrando-nos que a tomada de limite em (6.4) simplesmente retira o truncamento. Assim, o anel $H_{\mathbb{Z}_2}^*(BO(1))$ é polinomial em uma variável α , enquanto que o produto tensorial de n cópias é polinomial nas n variáveis $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Retornando à construção, vê-se a existência de um mergulho

$$j : H^*(BO(n); \mathbb{Z}_2) \longrightarrow \mathbb{Z}_2[\alpha_1, \dots, \alpha_n],$$

permitido-nos realmente colocar as *classes características com valores em $H_{\mathbb{Z}_2}^*$* em correspondência biunívoca com uma subálgebra de $\mathbb{Z}_2[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$.

Pode-se mostrar que os polinômios associados a tal mergulho são simétricos em todas as suas variáveis e, portanto, são gerados por outras variáveis s_1, \dots, s_n algebricamente independentes (veja, por exemplo, [51]). Posto isto, dar uma classe característica $\xi_X : [-]_n \rightarrow H_{\mathbb{Z}_2}^*$ torna-se o mesmo que dar uma regra que a cada fibrado π associa um polinômio $w^*(\pi)$ em n variáveis $w_1(\pi), \dots, w_n(\pi) \in H^*(X; \mathbb{Z}_2)$ algebricamente independentes. As classes fundamentais $w_i(\pi)$ são chamadas de *classes de Stiefel-Whitney* do fibrado π .

Parte II

Geometria

Capítulo 7

Análise

No presente capítulo, ainda com o problema de classificação em mente, olharemos para classes bastante restritas de espaços topológicos. A ideia será a seguinte: focaremos nos espaços com estrutura local previamente determinada (isto é, nos espaços localmente classificados). Então, tentaremos *utilizar do conhecimento local (onde a estrutura é supostamente simples) para determinar resultados globais (onde a estrutura é complicada)*. Em outras palavras, utilizaremos um espaço fixado para modelar outro.

Observamos, desde já, que esta ideia também pode ser utilizada para estender o domínio de validade de conceitos. Com efeito, se estes fizerem sentido num objeto X , então, em princípio, também o farão em qualquer espaço modelado sobre X .

Também chamamos a atenção para a importância da escolha do ente que servirá de modelo. Afinal, diferentes escolhas de modelos haverão de produzir diferentes classes de espaços, as quais podem ser mais amplas ou mais restritas, assim como podem ter mais ou menos propriedades interessantes.

Na primeira seção do capítulo, definimos variedades como sendo espaços modelados pelo \mathbb{R}^n e, reforçando a observação acima, mostramos que a classe de objetos abrangidos por tal construção é pequena. Substituímos, então, \mathbb{R}^n pelo semi-espaço \mathbb{H}^n . Este fato nos leva à definição de variedade com bordo que generaliza as variedades usuais, mas ainda produz uma categoria com poucas propriedades.

Como espaços euclidianos são o ambiente natural para se falar de diferenciabilidade, espera-se poder estender o conceito de diferenciabilidade ao domínio das

variedades. Isto é feito na segunda seção, onde estudamos as chamadas *variedades diferenciáveis*. Ali construímos um functor $T : \mathbf{Diff}_* \rightarrow \mathbf{Vec}_{\mathbb{R}}$, que a cada ponto $p \in M$ associa seu *espaço tangente* TM_p e que a cada função f faz corresponder uma transformação linear Df_p , a qual interpretamos como sendo a *derivada de f em p* .

Finalmente, na última seção estudamos as propriedades inerentes ao fibrado vetorial TM , obtido reunindo-se todos os espaços tangentes, assim como as propriedades inerentes ao seu $GL(n)$ -fibrado principal associado. Damos uma interpretação interessante para este último, a qual nos fornece um *insight* sobre o funcionamento da geometria.

Textos clássicos sobre o assunto incluem [52, 37].

7.1 Variedades

Uma *variedade de dimensão n* é um espaço topológico M modelado pelo \mathbb{R}^n . Isto significa que cada $p \in M$ admite um aberto U no qual está definida uma aplicação $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, chamada de *sistema de coordenadas* (ou *carta local*) *em p* , tal que $x(U)$ é aberto e a função $x : U \rightarrow x(U)$ é um homeomorfismo. Assim, a escolha de uma carta em p nos permite identificar tal ponto como uma lista (x_1, \dots, x_n) de números reais, chamados de *coordenadas de p* .

Numa variedade, os sistemas de coordenadas assumem o mesmo papel que as bases dos espaços vetoriais possuem no contexto da álgebra linear: para demonstrar um teorema, escolhe-se o sistema de coordenadas que lhe parece mais conveniente, resolve-se o problema fazendo uso explícito dele e, ao final, verifica-se que o resultado obtido é independente de tal escolha. Por sua vez, quando se consegue demonstrar um teorema (ou mesmo definir um conceito) sem fazer uso de cartas locais, diz-se que ele é *intrínseco*.

Observamos que, se $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $y : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ são cartas locais nas vizinhanças de um mesmo ponto p , então as coordenadas (x_1, \dots, x_n) e (y_1, \dots, y_n) estão relacionadas pela *função de transição* $y \circ x^{-1}$, a qual mapeia homeomorficamente o aberto $x(U \cap V)$ em $y(U \cap V)$. Assim, enquanto sistemas de coordenadas possuem papel semelhante

às bases de um espaço vetorial, funções de transição são análogas às matrizes de mudança de base. Em outras palavras, tem-se o pareamento apresentado abaixo. Logo mais vamos levá-lo adiante e veremos que, em certo sentido, ele é mais que uma simples analogia.

$$\begin{aligned} \text{cartas locais} &\implies \text{bases} \\ \text{funções transição} &\implies \text{matriz mudança base.} \end{aligned}$$

A ideia é essencialmente a seguinte: o lado esquerdo descreve o comportamento de variedades nas vizinhanças de pontos, enquanto que o direito é parte da álgebra linear. A passagem de uma área para outra é feita através de funtores. Assim, o que faremos é obter um functor T , que a cada par (M, p) associa um espaço vetorial $T(M, p)$, usualmente denotado por TM_p e chamado de *espaço tangente a M em p* , de modo que para cada carta local em p faz-se corresponder uma base de TM_p . Ao mesmo tempo, T mapeará funções de transição $y \circ x^{-1}$ nas respectivas matrizes de mudança entre as bases que correspondem a x e y .

Redefinindo

Realçamos que, da maneira como apresentada, a noção de variedade não engloba alguns espaços naturais, nos quais intuitivamente o conceito de diferenciabilidade também deveria fazer sentido. Por exemplo, esperar-se-ia ser possível falar de diferenciabilidade no disco $\mathbb{D}^n \subset \mathbb{R}^n$. Afirmamos, no entanto, que ele *não* é uma variedade.

Iniciamos observando que o disco se decompõe como reunião disjunta da esfera \mathbb{S}^{n-1} com a bola aberta $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ de centro na origem e raio unitário. Assim, seus abertos se dividem em duas classes: aqueles que estão inteiramente contidos em $B_1(0)$ (e que, portanto, também são abertos do \mathbb{R}^n), e aqueles que intersectam \mathbb{S}^{n-1} (e que não são abertos do \mathbb{R}^n).

Pois bem, se o disco fosse uma variedade, então cada um de seus pontos admitiria uma carta em suas vizinhanças. Tais pontos estão na bola ou na esfera. Se $x \in \mathbb{D}^n$ está na bola, então a identidade $id : B_1(0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ é carta local. No entanto, se tal ponto está sobre a esfera \mathbb{S}^{n-1} , para que admitisse um sistema de coordenadas,

deveria existir aberto $U \subset \mathbb{D}^n$, contendo x e homeomorfo a um aberto do \mathbb{R}^n . Ocorre que este não existe.

Com efeito, por conter x , ele intersectaria \mathbb{S}^{n-1} e, portanto, não seria aberto do \mathbb{R}^n . Por outro lado, como consequência do *teorema da invariância do domínio* (veja [82]), sendo homeomorfo a um aberto do \mathbb{R}^n , tal conjunto também deveria ser um aberto de tal espaço, o que é uma contradição.

Conclusão: O disco não é modelado pelo \mathbb{R}^n . Afinal, \mathbb{D}^n possui duas classes de abertos, enquanto que os espaços euclidianos possuem apenas uma.

A fim de contornar esta inconveniência, o que geralmente se faz é ampliar a definição de variedade, de modo que exemplos como o disco sejam incluídos. Assim, a ideia é defini-la não como um espaço modelado por \mathbb{R}^n , mas modelada por outros espaços (geralmente não compactos) que possuam mais de uma classe de abertos.

Exemplo de entidade não compacta possuindo exatamente duas classes de abertos é o semi-espaço $\mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}^n$. Com efeito, ou um aberto de \mathbb{H}^n é formado somente de pontos com $x_n > 0$, ou intersecta a reta $x_n = 0$. No primeiro caso, ele também é um aberto do \mathbb{R}^n , algo que não acontece no segundo.

Assim, poderíamos definir uma *variedade de dimensão n* como sendo um espaço topológico modelado por \mathbb{H}^n . Neste caso, da mesma forma que \mathbb{D}^n , tal conjunto se decomporia em duas partes disjuntas. A primeira seria $\text{int}M$, chamada de *interior* de M e formada dos pontos que admitem uma carta tendo como imagem um verdadeiro aberto do \mathbb{R}^n . A segunda seria ∂M , chamada de *bordo* de M , e constituída dos pontos nas vizinhanças dos quais estão definidas cartas que assumem valores em abertos de \mathbb{H}^n , mas que não são abertos de \mathbb{R}^n .

Observamos que, com esta definição, tanto o interior quanto o bordo seriam variedades no sentido inicialmente apresentado, de respectivas dimensões n e $n - 1$. Em suma, o estudo de uma “variedade com duas classes de abertos” se resume ao estudo de duas “variedades com uma única classe de abertos”.

Advertência: No que segue, adotaremos a seguinte convenção: chamaremos de *variedade com bordo* às entidades modeladas pelo \mathbb{H}^n cujo bordo não é vazio. As restantes (com bordo vazio) serão chamadas de *variedades sem bordo* ou simplesmente de *variedades*. Assim, por exemplo, o \mathbb{R}^n e as esferas são variedades (sem

bordo), enquanto que o disco e os semi-espacos são variedades com bordo.

Exemplos

Variedades aparecem bastante na física. Vejamos exemplos:

Exemplo 7.1.1. No eletromagnetismo, correntes circulam no bordo de *superfícies abertas* (tratam-se, pois, de variedades compactas com bordo), enquanto que densidades de carga se distribuem ao longo de *superfícies fechadas* (variedades compactas sem bordo).

Exemplo 7.1.2. Na mecânica clássica, um sistema sujeito a vínculos tem seu movimento restrito a uma variedade de dimensão igual ao número de graus de liberdade do sistema em questão. Em outras palavras, de um modo geral, o espaço de configurações (conjunto de todas as posições permitidas) de um sistema mecânico é uma variedade S . Por exemplo, o espaço de configurações do pêndulo duplo é o toro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ (um círculo para cada parte do pêndulo), enquanto que o do pêndulo esférico nada mais é que a esfera \mathbb{S}^2 .

Exemplo 7.1.3. O espaço de fase de um sistema mecânico (conjunto de todas as posições e velocidades permitidas) corresponde a uma construção que se chama *fibrado tangente* de S (e que discutiremos mais adiante), sendo denotado por TS .

Exemplo 7.1.4. Nas teorias relativísticas de gravitação (assunto futuro neste livro), os sistemas são geralmente modelados por variedades de dimensão quatro (três para espaço e uma para tempo), dotadas de uma *métrica Lorentziana*. Isto é, de uma regra que permite associar, de maneira diferenciável, formas bilineares e simétricas a cada ponto, as quais satisfazem certas propriedades.

Limites

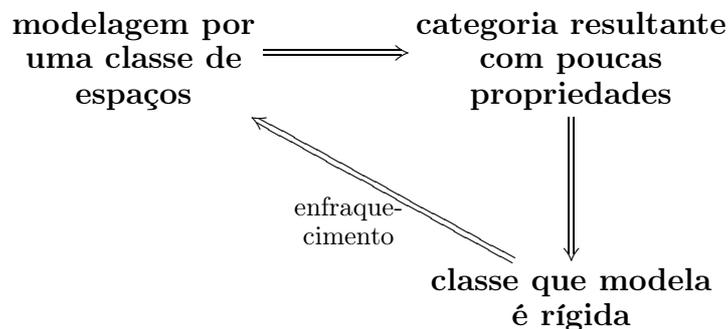
Se de um lado as variedades são entidade bastante intuitivas e geométricas, algo que fica enfatizado por sua presença nas mais diversas áreas da física, de outro a subcategoria cheia $\mathbf{Man} \subset \mathcal{C}$ é bastante pobre de propriedades. Com efeito, ainda

que possua limites e colimites (dados pelos produtos e coprodutos em \mathcal{C} adicionados de atlas naturais), ela não é completa e cocompleta.

Por exemplo, se realizamos a colagem (isto é, o *pushout*) de duas retas (que são variedades) ao longo de um ponto em comum, o resultado *não é uma variedade*. Tal *pushout* foi feito em \mathcal{C} (e não em **Man**). No entanto, pode-se mostrar que, se *pushouts* existissem em **Man**, então deveriam ser obtidos de *pushouts* de \mathcal{C} adicionados de um atlas adequado, da mesma forma como acontece com coprodutos. Portanto, segue deste fato que **Man** realmente não possui *pushouts*. Argumento análogo serve para mostrar que, em geral, a categoria das variedades não possui *pullbacks*.

Como contornar o problema? Isto é, como aliar a intuição das variedades com a existência de limites e colimites? Uma maneira de fazer isso é *redefinir* o que se entende por variedades, enfraquecendo as exigências sobre o espaço modelo, conforme ilustrado abaixo.

Por exemplo, começamos o capítulo definindo variedades como sendo entes modelados pelo espaço euclidiano. Vimos, no entanto, que isto não engloba situações corriqueiras. Então, redefinimos de modo que passa-se a incluí-las. Observemos que a colagem de duas retas ao longo de um ponto pode ser descrito como a órbita da ação de um grupo topológico. Assim, para incluir tal limite no contexto das variedade, basta que as consideremos como entes modelados por ações de grupos. Ao fazer isto, chegaríamos no conceito de *orbifolds*, e assim sucessivamente.



Advertência. Ainda que **Man** não possua muitos limites/colimites, continuaremos a trabalhar com ela. Isto por diversos motivos. Em primeiro lugar, tal classe de espaços nos permite abstrair o conceito de diferenciabilidade, como será feito na

próxima seção. Além disso, no que diz respeito ao problema de classificação, ela é suficientemente restrita a ponto de (já no contexto de diferenciabilidade) poder ser classificada. Finalmente, deve-se dizer que existem teorias de cohomologia naturais a ela associadas. Para um estudo mais geral de espaços modelados, incluindo *orbifolds* e *diffeological spaces* (que são abstrações completas e cocompletas das variedades), sugerimos o texto [95].

7.2 Diferenciabilidade

As variedades M são espaços modelados por algum espaço euclidiano (ou, mais geralmente, por semi-espaços destes). Posto isto, espera-se que nelas o conceito de diferenciabilidade faça sentido. A ideia é a seguinte: cada ponto de M admite uma vizinhança equivalente a um aberto do \mathbb{R}^n . Nele, sabe-se falar de diferenciabilidade. Por meio da equivalência, tal conceito pode ser estendido à referida vizinhança. Em suma: *cada carta local num ponto p induz uma noção de diferenciabilidade nas vizinhanças de p .*

Ocorre que um mesmo ponto pode admitir diferentes cartas, as quais, em tese, podem induzir distintas noções de diferenciabilidade. Neste espírito, uma *variedade diferenciável* seria aquela na qual diferentes cartas induzem noções de diferenciabilidade compatíveis. Ora, a passagem de uma carta para outra é feita através das funções de transição. Assim, a compatibilidade de sistemas de coordenadas há de se traduzir na diferenciabilidade das funções que fazem a transição entre eles. Isto é, uma *variedade diferenciável* há de ser aquela na qual as funções de transição são diferenciáveis. Da mesma forma, uma variedade C^k seria aquela cujas mudanças de coordenadas possuem tal regularidade.

Numa variedade M dada, pode ser que *nem todas* as funções de transição sejam diferenciáveis, mas existam uma *quantidade suficiente* de cartas, capazes de cobrir todo o espaço subjacente, para as quais as mudanças de coordenadas tenham certa regularidade. Diz-se que tal conjunto de cartas define uma *estrutura diferenciável* (ou um *atlas diferenciável*) em M .

Observação: Suponha obtida uma estrutura diferenciável \mathcal{A} . Em tese, podem

existir outras cartas cujas mudanças de coordenadas entre elas e elementos de \mathcal{A} sejam diferenciáveis. Neste caso, adota-se a prática de redefinir \mathcal{A} incluindo-as. Isto significa, em termos mais precisos, que sempre se toma o *atlas maximal* (segundo o ordenamento parcial gerado pela relação de continência) associado a um atlas diferenciável dado.

Segundo as colocações anteriores, pode-se pensar numa variedade diferenciável como sendo um espaço topológico dotado de uma estrutura adicional, a qual nos permite falar de diferenciabilidade. Neste espírito, os mapeamentos entre variedades diferenciáveis haverão de ser as *funções diferenciáveis*. Isto é, correspondências entre os espaços subjacentes que preservam tal estrutura adicional (ou seja, que preservam o conceito de diferenciabilidade).

De maneira mais precisa, um mapa $f : M \rightarrow N$ é dito *diferenciável* quando, escolhido $p \in M$ ao acaso, existem cartas x e y , respectivamente definidas nas vizinhanças de p e de $f(p)$, tais que a aplicação $y \circ f \circ x^{-1}$, chamada de *expressão* de f em tais cartas, é diferenciável. Definição análoga no que diz respeito a funções com maior regularidade.

Duas observações:

1. *o conceito de regularidade de funções entre variedades não é intrínseco* (pois faz-se uso explícito de cartas locais em sua definição), *mas está bem definido*. Isto significa que, se a expressão de f tem certa regularidade com respeito a certas cartas definidas nas vizinhanças de p e de $f(p)$, então também a terá relativamente a quaisquer outras cartas nas proximidades destes mesmos pontos;
2. *os sistemas de coordenadas tem regularidade máxima*. Mais precisamente, se uma variedade possui classe C^k , então todas as suas cartas locais também são de classe C^k . Isto faz com que a classe de diferenciabilidade de um mapa qualquer $f : M \rightarrow N$ nunca exceda a menor entre as classes de M e de N .

Juntando variedades diferenciáveis com os correspondentes mapeamentos entre elas, obtém-se uma categoria **Diff**, a qual delimita uma parte da análise. Nela, dois objetos são isomorfos (também ditos *difeomorfos*) quando existem funções diferen-

ciáveis f e g entre eles, chamadas de *difeomorfismos*, cujas composições $g \circ f$ e $f \circ g$ coincidem com identidades. Por exemplo, as cartas locais $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ são sempre difeomorfismos entre U e $x(U)$, como rapidamente se constata.

Com estas definições em mente, questões naturais são as seguintes:

1. **existência:** admitirá, toda variedade, uma estrutura de classe C^k ? Em outras palavras, admitirá a inclusão $\iota : \mathbf{Diff} \rightarrow \mathbf{Man}$ um adjunto? A resposta é *negativa*. Veja [45, 66]. Em contrapartida, por um resultado devido a Whitney, se uma variedade admite estrutura C^1 , então também admite estrutura C^∞ (confira o segundo capítulo de [37], ou mesmo [2]);
2. **unicidade:** se uma mesma variedade admite duas estruturas diferenciáveis maximais distintas, serão elas difeomorfas? A resposta também é negativa. Um contraexemplo, obtido por Milnor em [66], se refere à existência de *esferas exóticas*. Estas são espaços homeomorfos a \mathbb{S}^n , mas que admitem estruturas diferenciáveis não difeomorfas a \mathbb{S}^n com sua estrutura usual. Sabe-se que o espaço obtido colando-se dois discos \mathbb{D}^n ao longo de seus bordos é homeomorfo à esfera \mathbb{S}^n . O que Milnor fez foi mostrar que, para $n = 7$, tal espaço é uma esfera exótica.

Derivada

Tem-se uma maneira natural de aproximar uma função diferenciável $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ nas vizinhanças de $p \in U$ por uma transformação mais simples: basta tomar sua *derivada*. No âmbito das variedades, isto também pode ser feito: escolhidos sistemas de coordenadas, basta tomar a derivada da expressão $y \circ f \circ x^{-1}$.

Ainda que este processo esteja bem definido (no sentido de independência da escolha das cartas), ele não é intrínseco. Nesta seção, obteremos *uma maneira intrínseca de aproximar uma função diferenciável $f : M \rightarrow N$ nas vizinhanças de um dado $p \in M$ por uma transformação linear, a qual coincide com a derivada de $y \circ f \circ x^{-1}$ quando tomadas cartas locais*.

Mais precisamente, construiremos um functor $T : \mathbf{Diff} \rightarrow \mathbf{Vec}_{\mathbb{R}}$, que a cada par (M, p) associa aquilo que chamaremos de *espaço tangente a M em p* e denotaremos

por TM_p , e que a cada par (f, p) faz corresponder uma transformação linear entre TM_p e $TN_{f(p)}$, a qual representará a *derivada de f em p* e será denotada por Df_p . Observamos que a functoriedade de T se traduzirá nas condições

$$D(id_M)_p = id_{TM_p} \quad \text{e} \quad D(g \circ f)_p = Dg_{f(p)} \circ Df_p,$$

as quais abstraem a regra da cadeia e o fato da derivada levar identidade em identidade.

Existem diversos caminhos que podem ser tomados no sentido de realizar tal construção, sendo todos eles equivalentes. No que segue, utilizaremos daquele que futuramente nos fornecerá praticidade.

Construamos, primeiro, os espaços TM_p . Iniciamos observando que o conjunto $\mathcal{D}(M)$ das aplicações diferenciáveis reais $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma álgebra associativa enquanto dotado das operações usuais de soma de funções, de multiplicação de funções por escalares e de produto de funções.

Como trabalharemos localmente, só nos interessará o comportamento local das funções que compõem $\mathcal{D}(M)$. Para cada p , isto nos leva a considerar o quociente $\mathcal{D}_p(M)$, obtido de $\mathcal{D}(M)$ identificando-se as aplicações que coincidem numa vizinhança de p . Tal conjunto, usualmente chamado de *germe em p* de $\mathcal{D}(M)$, herda a estrutura de álgebra.

Finalmente, definimos TM_p como sendo simplesmente o *espaço das derivações pontuais em p* de $\mathcal{D}_p(M)$, dotado das operações usuais. Isto é, como sendo o espaço de todos os funcionais lineares $v : \mathcal{D}_p(M) \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfazem a regra de Leibnitz no ponto p :

$$v(g \cdot f) = f(p) \cdot v(g) + v(f) \cdot g(p).$$

Concluindo a construção de $T : \mathbf{Diff} \rightarrow \mathbf{Vec}_{\mathbb{R}}$, fornecida uma função diferenciável $f : M \rightarrow N$ e um ponto $p \in M$, definimos a *derivada de f em p* como sendo a transformação Df_p , tal que $[Df_p(v)](g) = v(g \circ f)$. Como facilmente se constata, a regra T assim construída é realmente functorial. Por exemplo,

$$[D(id_M)_p(v)](g) = v(g \circ id) = v(g) = [id_{TM_p}(v)](g),$$

de modo que T realmente preserva identidades. A verificação de que T preserva composições é feita de forma similar.

Exemplo 7.2.1. Se $U \subset M$ é aberto, então, para todo $p \in U$, os germes $\mathcal{D}_x(U)$ e $\mathcal{D}_x(M)$ coincidem, de modo que se tem $TU_x = TM_x$. Assim, o espaço tangente a um aberto se identifica com o espaço tangente ao espaço todo. Além disso, para todo ponto p , $T\mathbb{R}_p^n$ é naturalmente isomorfo ao \mathbb{R}^n : um isomorfismo é aquele que toma cada $a \in \mathbb{R}^n$ e associa a derivada direcional v_a na direção de a , caracterizada por $v_a(f) = Df_p(a)$.

No começo do capítulo, fizemos um paralelo entre sistemas de coordenadas e bases de um espaço vetorial. Agora podemos mostrar que tal pareamento vai além de uma mera analogia. Com efeito, como toda carta é difeomorfismo, da functoriedade de T segue-se que cada $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ induz um isomorfismo

$$Dx_p : TM_p \rightarrow T\mathbb{R}_{x(p)}^n, \quad c/ \quad Dx_p(v)(g) = v(g \circ x).$$

Utilizando-se de $T\mathbb{R}_{x(p)}^n \simeq \mathbb{R}^n$, vê-se que a escolha de x induz isomorfismo entre TM_p e \mathbb{R}^n . Assim, cada carta define uma base em TM_p , obtida da base canônica do \mathbb{R}^n pelo isomorfismo anterior, sendo formada dos vetores v_i , tais que

$$Dx_p(v_i)(g) = v_i(g \circ x) = \frac{\partial g \circ x}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n).$$

Observação: Na literatura, os vetores v_i são usualmente denotados por $\frac{\partial}{\partial x_i}|_p$, o que fica justificado pela expressão anterior. Ao longo do restante do texto, adotaremos esta mesma prática.

7.3 Fibrado

Como vimos, a cada ponto p de uma variedade diferenciável M , sabe-se fazer corresponder um espaço vetorial: o espaço tangente a M em p . Assim, tem-se um fibrado TM , chamado de *fibrado tangente* de M , obtido reunindo-se todos estes espaços. Como veremos, ele é uma das peças fundamentais no estudo da geometria.

Nesta subseção, mostraremos que o fibrado TM é fibrado n -plano. A ideia é simples: *os sistemas de coordenadas induzem as trivializações locais e $GL(n)$ age em \mathbb{R}^n da maneira usual.*

Iniciamos observando que o functor $T : \mathbf{Diff} \rightarrow \mathbf{Vec}_{\mathbb{R}}$, induz um novo functor $* : \mathbf{Diff} \rightarrow \mathbf{Vec}$, chamado de *pushforward*, que a cada variedade associa seu fibrado

tangente, e que a cada mapa diferenciável $f : M \rightarrow N$ devolve o morfismo $f_* : TM \rightarrow TN$, definido da seguinte maneira:

$$f_*(p, v) = (f(p), Df_p(v)).$$

Agora, cada sistema de coordenadas $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é difeomorfismo, de modo que seu *pushforward* é um isomorfismo entre os fibrados TU e $T\mathbb{R}^n \simeq U \times \mathbb{R}^n$. Isto significa que x_* é trivialização local para TM , garantindo que tal fibrado é realmente localmente trivial, tendo o espaço \mathbb{R}^n como fibra típica.

Finalmente, para mostrar que TM é estruturado por $GL(n; \mathbb{R})$, tomemos quaisquer trivializações locais $\varphi_i = x_{i*}$ e $\varphi_j = x_{j*}$, em que x_i e x_j são cartas definidas em vizinhanças U_i e U_j de um ponto p . Neste caso, tem-se

$$(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(p, v) = (x_{j*} \circ x_{i*}^{-1})(p, v) = (x_j \circ x_i^{-1})_*(p, v) = (p, D(x_j \circ x_i^{-1})_p(v)),$$

permitindo-nos identificar $u_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow GL(n)$ com a regra que a cada p associa a derivada de $x_j \circ x_i^{-1}$ em tal ponto, e a ação como sendo a usual: $g \cdot v = g(v)$. Tal ação é C^∞ e, como M possui classe C^k , as u_{ij} são C^{k-1} . Portanto, o fibrado tangente é realmente estruturado pelo grupo linear geral.

Como consequência das colocações da última subseção segue-se que, se M tem dimensão n e é de classe C^k , então TM também é uma variedade, mas de dimensão $2n$ e tendo classe C^{k-1} .

Invariantes

O fato de se ter um fibrado vetorial natural associado a uma variedade nos permite construir diversos invariantes em **Diff**. Com efeito, da functoriedade de tal associação segue-se que, se duas variedades são difeomorfas, então seus fibrados tangentes são isomorfos e, portanto, dividem as mesmas classes características. Isto significa que *as classes de TM são, na verdade, invariantes da variedade M .*

Por exemplo, tem-se as *classes de Stiefel-Whitney* $w_1(M), \dots, w_n(M)$ de M , as quais, como veremos, constituem importantes obstruções à introdução de estruturas geométricas em M . Além disso, tais invariantes classificam M por meio de uma relação de equivalência, conhecida como *cobordismo*, a qual é ligeiramente mais

fraca que a propiciada pelos difeomorfismos. Assim, *as classes $w_i(M)$ se mostram importantes links entre geometria, análise e topologia algébrica.*

Infelizmente não entraremos em detalhes, mas o fato de variedades serem espaços localmente homeomorfos ao \mathbb{R}^n permite simplificar bastante a análise dos $w_i(M)$, assim como de outras classes características de TM , dando a elas uma roupagem mais geométrica e intuitiva. A respeito destes fatos, sugerimos ao leitor o capítulo 17 de [40], assim como o sexto capítulo de [82], o capítulo 11 de [67] e a obra [11].

Referenciais

Relembramos que todo espaço M induz uma adjunção $\mathbf{Vec}_M^n \rightleftarrows \mathcal{P}_M^{GL(n)}$. Assim, além de existir um fibrado vetorial canônico associado a cada variedade, também existe um $GL(n)$ -fibrado principal $\pi : P \rightarrow M$. Este é obtido de TM mantendo-se a base e o grupo estrutural, mas trocando-se a fibra típica pelo próprio grupo estrutural, o qual passa a agir por translação à esquerda (ou, no nosso presente caso, por composição).

A adjunção identifica cada fibra $\pi^{-1}(p)$ como sendo o conjunto formado de todos os isomorfismos $\mathbb{R}^n \rightarrow TM_p$, os quais, por sua vez, estão em correspondência biunívoca com as bases (neste contexto chamadas de *referenciais*) de TM_p . Vendo desta forma, a ação de $GL(n)$ em cada fibra traduz simplesmente mudanças de bases (denominadas *troca de referenciais*). Fala-se, por este motivo, que π é o *fibrado dos referenciais* de M e escreve-se $\text{fr}(M)$ para denotá-lo.

Geometria

Pode-se dizer que *a geometria se resume ao estudo das reduções de $\text{fr}(M)$* . A ideia é a seguinte: se existe uma estrutura geométrica na variedade M , então esta define uma classe particular de referenciais (isto é, de bases). A redução é obtida olhando-se para as mudanças de base que deixam tal classe invariante.

Por exemplo, como comentamos anteriormente, a adjunção entre fibrados vetoriais e fibrados principais pode ser melhorada, de modo a associar um $O(n)$ -fibrado (ao invés de um $GL(n)$ -fibrado) principal a cada fibrado vetorial. Isto significa que

$\text{fr}(M)$ sempre admite redução de seu grupo estrutural para o grupo das matrizes ortogonais. A classe de bases que fica invariante sob tais mudanças é precisamente a das *bases ortonormais*, de modo que a existência da redução $GL(n) \rightarrow O(n)$ traduz a possibilidade de sempre ser possível falar de *bases ortonormais*.

Agora, se perguntarmos “*quem induziu a redução?*”, a resposta será imediata: *um produto interno*. Portanto, a existência de reduções ao grupo ortogonal provém da possibilidade de se escolher produtos internos em cada espaço tangente. É precisamente essa a dinâmica da geometria: “alguma coisa” induz uma classe restrita de bases, o que define uma redução no grupo estrutural de $\text{fr}(M)$.

Observamos que esta “alguma coisa” em geral se refere ao que se chama de *seção* de um fibrado descendente de TM . Na maior parte dos casos, trata-se simplesmente de uma maneira diferenciável de escolher mapas multilineares em cada espaço tangente, aos quais se requerem certas propriedades. Nem todas as variedades admitem quaisquer seções. Com efeito, as classes de Stiefel-Whitney de M costumam ser empecilhos. É neste sentido que os invariantes $w_i(M)$ são *obstruções à introdução de estruturas geométricas em M* .

Por exemplo, tais classes impedem a introdução de uma estrutura Lorentziana em \mathbb{S}^4 , de modo que *a esfera quadridimensional não serve como modelo para descrever o universo!*

$$\text{secções} \xrightleftharpoons[\text{características}]{\text{classes}} \text{redução dos referenciais} \implies \text{geometria}$$

Observação. Os mesmos tipos de interpretações e colocações anteriores se estendem a fibrados n -planos mais genéricos que TM . De fato, se $\pi : E \rightarrow X$ é um fibrado n -plano arbitrário, então o $GL(n)$ -fibrado principal a ele associado também admite uma interpretação em termos de referenciais. Com efeito, ele pode ser visto como o ente cujas fibras são as bases de cada E_p e no qual, como antes, $GL(n)$ age por meio de mudanças de bases. Assim, a redução $GL(n) \rightarrow O(n)$ aqui também pode ser interpretada em termos da existência de produtos internos em cada uma das fibras E_p , os quais, por sua vez, correspondem a uma seção num fibrado descendente de E que satisfaz propriedades específicas. Como antes, a existência de seções deste tipo em geral estão sujeitas às obstruções fornecidas por classes características. Em

suma, o diagrama anterior faz sentido no contexto mais amplo de qualquer fibrado vetorial.

Advertência. Ainda que, sob a possibilidade de estudar geometria (no sentido de construção de seções com propriedades específicas) no contexto mais amplo dos fibrados vetoriais arbitrários, manteremos nosso foco em TM . Isto por diversos motivos: em primeiro lugar, a teoria passa a admitir um caráter mais intuitivo. Por outro lado (e talvez este seja um argumento mais convincente), as seções básicas de TM são os *campos de vetores*. Estes, como veremos, pelo teorema de existência de soluções para EDO's, induzem um grupo a um parâmetro de difeomorfismos na variedade M , permitindo-nos estudar geometrias (isto é, seções) que ficam invariantes ele. Estas possuem propriedades simétricas adicionais, facilitando seu estudo.

Com as colocações anteriores em mente, no próximo capítulo estudamos as seções, enquanto que no seguinte estudamos as reduções e analisamos diversos exemplos de geometrias obtidas seguindo a linha anterior. Na sequência, estabelecemos a existência de fluxos associados a campos vetoriais e utilizamos destes para falar de geometrias localmente simétricas.

Capítulo 8

Seções

Como comentamos ao final do capítulo anterior, diferentes geometrias em geral se traduzem por meio de diferentes reduções no fibrado dos referenciais. Tais reduções, por sua vez, costumam ser implementadas por “seções regulares” de fibrados descendentes de TM . Ocorre que a existência de seções depende de obstruções, impedindo que, em geral, uma variedade admita muitas geometrias distintas.

Com as colocações anteriores em mente, iniciamos o capítulo definindo o que vem a ser uma seção. Estas fazem sentido em qualquer categoria. No entanto, dentro do contexto dos fibrados, se traduzem simplesmente em escolhas contínuas de elementos em fibras. Na sequência, ainda na primeira seção, atacamos o problema da existência de seções e mostramos que, de fato, existem obstruções topológicas, as quais são dadas por classes características.

Na segunda seção partimos, então, ao estudo das seções em fibrados vetoriais descendentes de TM (afinal, são tais seções que implementam reduções no fibrado dos referenciais e, portanto, que produzem geometria). Damos especial enfoque aos *campos tensoriais*, os quais correspondem às seções de fibrados tensoriais.

Concluimos o texto na terceira seção, onde estudamos os campos tensoriais alternados, usualmente chamados de *formas diferenciais*. Lá generalizamos o processo de diferenciação clássico, que associa a cada função real sua diferencial, para o que se conhece como *diferenciação exterior*. Nele podemos diferenciar não só funções (que são tidas como formas de grau zero), mas também qualquer outra forma diferencial.

Mais precisamente, definimos operadores lineares d^k , responsáveis por associar a

cada k -forma uma outra de grau $k + 1$. Em particular, verificamos que $d^{k+1} \circ d^k = 0$, de modo que a sequência de tais operadores define um complexo de cocadeias, fornecendo-nos uma teoria de cohomologia na categoria **Diff**. Trata-se da *cohomologia de De Rham*.

Para a primeira seção, fizemos uso essencialmente do oitavo capítulo de [82], assim como da última parte de [83] e do quinto capítulo de [93]. Para o restante do capítulo, ótimas referências incluem [11, 33, 61].

8.1 Existência

Pode-se falar de seções no contexto de qualquer categoria. Com efeito, uma *seção* para um morfismo $\pi : E \rightarrow X$ de uma categoria **C** é simplesmente uma inversa à direita para π . Isto é, trata-se de um outro morfismo $s : X \rightarrow E$ que satisfaz a igualdade $\pi \circ s = id_X$.

A existência de uma seção possui uma interpretação bastante clara. Com efeito, como rapidamente se convence, π admite uma seção se, e somente se, possui a propriedade de levantamento relativamente a qualquer $f : Y \rightarrow X$. Isto significa que deve ser possível obter uma $g : Y \rightarrow E$ que deixa comutativo o diagrama abaixo.

$$\begin{array}{ccc} & & E \\ & \nearrow g & \downarrow \pi \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

No entanto, é no contexto dos fibrados que seções mostram-se intuitivas. Com efeito, as seções de um fibrado $\pi : E \rightarrow X$ se identificam precisamente com as regras que a cada ponto $p \in X$ fazem corresponder um elemento $s(p)$ na fibra E_p . Em outras palavras, no âmbito dos fibrados, *uma seção é uma maneira contínua de se escolher um elemento na fibra de cada ponto do espaço*. Por exemplo, uma seção do fibrado tangente TM é uma escolha contínua de vetores tangentes a cada ponto de M .

Pode parecer óbvio que todo fibrado admita uma seção. No entanto, a existência de uma seção pode ser um requerimento muito forte! Com efeito, como veremos

logo mais, *pedir que um fibrado principal admita uma seção é o mesmo que pedir que ele seja trivial.*

Observamos haver um functor $\Gamma : \mathcal{B} \rightarrow \mathbf{Set}$, que a cada fibrado $\pi : E \rightarrow X$ associa o conjunto de suas seções. Assim, questionar a existência de seções equivale a questionar se $\Gamma(E)$ é ou não vazio. Por exemplo, se as fibras de um fibrado E possuem alguma estrutura algébrica \mathbf{Alg} , então $\Gamma(E)$ também a possui: uma vez que seções associam elementos da fibra a pontos, basta definir as operações em seções pontualmente. Desta forma, se E é um fibrado vetorial, então $\Gamma(E)$ é um espaço vetorial real (na verdade, um módulo sobre o anel $\mathcal{D}(M)$) e, conseqüentemente, E admite seções.

Fora deste tipo de situação, garantir a existência (ou inexistência) de seções consiste numa tarefa bastante difícil. Mais uma vez o que se faz é recorrer a invariantes, os quais haverão de fornecer condições necessárias (aqui mais comumente chamadas de *obstruções*) à existência de tais entes.

Obstruções

Como funtores preservam a comutatividade de diagramas, segue-se que todo functor definido numa categoria \mathcal{C} fornece obstruções à existência de seções. Com efeito, se s é seção para um dado π , então $F(s)$ há de ser seção para $F(\pi)$. Ou, em termos de levantamentos, se π possui propriedade de levantamento com respeito a f , então $F(\pi)$ o possui relativamente a $F(f)$.

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc} & & E \\ & \nearrow g & \downarrow \pi \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array} &
 \begin{array}{ccc} & & F(E) \\ & \nearrow F(g) & \downarrow F(\pi) \\ F(Y) & \xrightarrow{F(f)} & F(X) \end{array} &
 \begin{array}{ccc} & & \pi_1(E) \\ & \nearrow & \downarrow \pi_* \\ \pi_1(Y) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(X) \end{array}
 \end{array}$$

Assim, em particular, para que um fibrado π admita uma seção, é preciso que a imagem do mapa induzido π_* esteja contida na imagem de cada f_* . No contexto de fibrados localmente triviais com fibras típicas discretas (isto é, quando π é um espaço de recobrimento), tal condição não só é necessária como também suficiente. Este resultado é conhecido como *teorema fundamental do levantamento* e pode ser encontrado, por exemplo, no segundo capítulo de [82] e também no terceiro capítulo

de [63].

No caso de fibrados mais gerais, necessitamos de invariantes mais fortes que π_1 . Olhamos então para os grupos de homotopia de grau superior. Dado um fibrado $\pi : E \rightarrow X$, suponhamos que o espaço base X admite uma decomposição finita em CW-complexo, com n -esqueleto X_n .

Queremos construir um mapa $s : X \rightarrow E$, tal que $\pi \circ s = id_X$. Nossa estratégia é construí-lo por processo indutivo: partindo de uma seção $s_0 : X_0 \rightarrow E$, tenta-se estendê-la para X_1 , depois X_2 , e assim sucessivamente, até que se obtenha uma função definida no espaço todo cumprindo com a condição requerida. Fornecida uma seção $s_n : X_n \rightarrow E$, vejamos haverem obstruções à existência de sua extensão a X_{n+1} .

Uma vez escolhido um ponto base em $p \in X_n$, observamos que s_n estabelece um mapa c_n^π , obtido da composição abaixo, em que na primeira parte aplicamos $h^{\mathbb{S}^n}$ e utilizamos do fato de s_n ser uma seção, enquanto que na segunda parte aplicamos $\pi : \mathcal{C}_* \rightarrow \mathcal{H}\mathcal{C}_*$ e na terceira utilizamos do fato de todas as fibras serem isomorfas à fibra típica. Como as esferas são cogrupos, tal mapa é, na verdade, homomorfismo de grupos

$$\text{Mor}(\mathbb{S}^n; X_n) \xrightarrow{\quad} \text{Mor}(\mathbb{S}^n; E_p) \xrightarrow{\quad} \pi_n(E_p) \xrightarrow{\cong} \pi(F)$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{c_n}$

Em particular, c_n^π levam as funções que fazem a colagem de n -células em X_n . Estas funções são os geradores do termo de ordem $n + 1$ de um complexo de cadeias associado à base X , cuja homologia equivale à homologia singular. Desta forma, c_n^π (e, portanto, s_n) estabelece um elemento de $\text{Hom}(\text{Sing}_{n+1} X; \pi_n(F))$ e, portanto, uma classe de cohomologia $c_\pi^n \in H^{n+1}(X; \pi_n(F))$, a qual oferece uma obstrução à existência da extensão da seção s_n .

Exemplo 8.1.1. Para um fibrado com típica contrátil, todas as cohomologias anteriores são triviais, de modo que seções sempre existem. Como espaços vetoriais são contráteis, isto dá uma nova demonstração de que todo fibrado vetorial admite uma seção.

Exemplo 8.1.2. No que diz respeito aos G -fibrados principais, suas fibras típicas são os próprios grupos topológicos. Além disso, pelo teorema de classificação, todo

G -fibrado é isomorfo ao *pullback* de $EG \rightarrow BG$ para alguma função $f : X \rightarrow BG$. Além disso, tal construção independe de classe de homotopia de f . Acontece que, se G é contrátil (o que faz com que o fibrado tenha uma seção), então BG também o é, de modo que f é homotópico ao mapa constante $X \rightarrow *$ e, portanto, o fibrado em questão é isomorfo ao trivial. Por outro lado, evidentemente todo fibrado trivial admite seções. Assim, *um fibrado principal possui seções se, e só se, é trivial*.

Classes Características

Anteriormente vimos que os fibrados vetoriais sempre admitem *alguma* seção. Isto significa que não existem obstruções à existência de seções *gerais* nestes fibrados. Observamos, no entanto, que não está garantida a existência de *quaisquer* seções num dado fibrado vetorial. Em outras palavras, pode ser que as seções existentes não satisfaçam certa condição. Em termos mais precisos, para a *existência de seções com propriedades adicionais, espera-se ter outras obstruções além das classes c^n* .

Que obstruções seriam estas? Notamos que na subseção anterior o que fizemos foi partir de um fibrado $\pi : E \rightarrow X$ e a ele associar uma sequência de classes de cohomologia do espaço base X , as quais correspondem às obstruções para a existência de seções. Evidentemente, tais obstruções serão as mesmas para fibrados isomorfos. Assim, *as classes de obstruções c^n são, na verdade, classes características*.

Em termos mais precisos, se α é functor que a cada fibrado π associa um grupo abeliano graduado $\alpha(\pi)$, e H é uma teoria de cohomologia, então podemos definir a *cohomologia com coeficientes em α* : trata-se do functor H_α^* que a cada espaço X devolve a sequência dos $H_\alpha^{n+1}(X, \alpha(\pi)_n)$. Posto isto, se $[-]$ é functor que a cada fibrado associa sua classe de isomorfismos, então a construção da subseção anterior define uma classe característica com coeficientes em H_f^* , em que f é o functor tal que $f(\pi)_n = \pi_n(F)$. Trata-se, pois, da transformação natural $\xi : [-] \Rightarrow H_f^*$, que a cada espaço base X e cada fibrado $\pi : E \rightarrow X$, associa a sequência dos c_n^π .

Voltando à questão colocada, se obstruções à existência de seções são classes características, espera-se que o mesmo aconteça com as obstruções à existência de seções que satisfazem propriedades adicionais. Para o caso de fibrados vetoriais reais, tem-se classes características naturais: as classes de Stiefel-Whitney. Assim,

deve-se esperar que sirvam de obstruções à existência de seções astutas.

8.2 Vetores

Estudamos aqui seções de fibrados descendentes de TM . Iniciamos com duas observações válidas no contexto mais genérico de fibrados vetoriais arbitrários:

1. *qualquer n -functor diferenciável em $\mathbf{Vec}_{\mathbb{R}}$ que se estende à categoria $\mathbf{Mod}_{\mathcal{D}(M)}$ dos módulos sobre o anel das funções diferenciáveis comuta com Γ .* Por exemplo, isto faz de Γ monoidal com respeito à soma de Whitney e também segundo o produto tensorial. Mais precisamente, como \oplus e \otimes são funtores contínuos que fazem sentido para módulos, tem-se os isomorfismos

$$\Gamma(E \oplus E') \simeq \Gamma(E) \oplus \Gamma(E') \quad \text{e} \quad \Gamma(E \otimes E') \simeq \Gamma(E) \otimes \Gamma(E');$$

2. *a trivialidade de um fibrado vetorial pode ser inteiramente caracterizada por propriedades algébricas do módulo de suas seções.* De maneira mais precisa, um fibrado n -plano é trivial se, e só se, o módulo de suas seções é livre e de *rank* n . A demonstração é simples: todo fibrado n -plano $\pi : E \rightarrow M$ é adjunto a um $GL(n)$ -fibrado principal $\text{fr}(E)$. Evidentemente, π é trivial se, e só se, o correspondente $\text{fr}(E)$ o é. Ora, isto pode ocorrer se, e só se, existe uma seção $s : M \rightarrow \text{fr}(E)$. Tais seções associam a cada p um elemento na fibra $\text{fr}(E)_p$. Assim, dar uma seção s é o mesmo que escolher continuamente bases em cada E_p , o que equivale a construir uma base em $\Gamma(E)$.

A primeira de tais observações nos mostra, em particular, que o estudo das seções de fibrados descendentes de TM se resume ao estudo das próprias seções de TM . Estas nada mais são que regras que associam um vetor tangente a cada ponto de M , sendo usualmente chamadas de *campos de vetores*.

A segunda observação, por sua vez, nos será útil no seguinte sentido: se um fibrado n -plano descende do fibrado trivial, então ele também é trivial. Assim, o módulo de suas seções possui uma base que pode ser obtida de uma base de $\Gamma(M \times \mathbb{R}^n)$ ou, equivalentemente, de uma seção de $\text{fr}(M \times \mathbb{R}^n)$.

Como caso particular lembramos que, se $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é carta na variedade M , então TU é trivial. Uma base para $\Gamma(TU)$ é então dada pelos campos $\frac{\partial}{\partial x_i}(p) = \frac{\partial}{\partial x_i}|_p$ (ou, equivalentemente, pela seção $s(p) = dx_p$ do fibrado dos referenciais $\text{fr}(U)$), os quais haverão de induzir nova base no módulo das seções de qualquer fibrado descendente de TU . Em suma, *a escolha de um sistema de coordenadas nos permite descrever seções locais de qualquer fibrado descendente.*

$$\begin{array}{ccccc} \text{sistema} & \implies & \text{campos} & \implies & \text{seções locais} \\ \text{coordenadas} & & \text{locais} & & \text{descendentes} \end{array}$$

Pullback e Pushforward

Com a conclusão a que chegamos na subseção anterior, a ideia é conectar o *conhecimento global* de *seções locais* com o *conhecimento local* de *seções globais*. Mais precisamente, se F é um functor em \mathbf{Vec}_M , obtido por levantamento de um functor contínuo em $\mathbf{Vec}_{\mathbb{R}}$, buscamos por uma regra $\Gamma(F(TM)) \rightarrow \Gamma(F(TU))$ que nos permita associar a cada seção s na variedade M uma correspondente seção no aberto U , a qual haveremos de interpretar como a *restrição de s a U* ou como a *versão local de s* .

Feito isto, no último diagrama poderemos trocar “seções locais descendentes” por “seções descendentes locais”, de modo que a escolha de uma carta na variedade nos fornecerá informações sobre o comportamento local das seções de qualquer fibrado descendente.

A questão agora é: *tal regra existirá para um F dado?* A resposta é afirmativa no caso em que o functor F é *contravariante*. Com efeito, sob tal hipótese, para toda função diferenciável $f : N \rightarrow M$, o mapa $\Gamma(F(T(f)))$ é homomorfismo entre $\Gamma(F(TM))$ e $\Gamma(F(TN))$. Ele é usualmente chamado de *pullback* de f ao longo de F , sendo denotado por f^* . Assim, no caso especial da inclusão $\iota : U \rightarrow M$, seu *pullback* fornece a regra procurada.

Por outro lado, se F é *covariante*, a estratégia anterior falha em nos fornecer o mapa que gostaríamos. No entanto, ainda assim, para cada função f , o correspondente $\Gamma(F(T(f)))$ está bem definido. Agora, no entanto, ele é um homomorfismo entre o módulo das seções de $F(TN)$ e $F(TM)$. Ele é chamado de *pushforward* de

f ao longo de F e usualmente denotado por f_* .

Façamos duas observações:

1. os fibrados descendentes mais importantes na geometria (e, conseqüentemente, na física) são os tensoriais. Assim, pela discussão anterior, existe especial interesse naqueles formados de tensores estritamente covariantes. Isto porque, em tal situação, o respectivo functor F é contravariante e, portanto, sabe-se falar de *pullbacks*;
2. se nos restringimos a \mathbf{Diff}_{pd} (isto é, se nos restringimos às funções diferenciáveis que são sempre difeomorfismos), então, para cada $f : M \rightarrow N$, estão definidos seu *pullback* e seu *pushforward* ao longo de qualquer functor F , seja ele covariante ou contravariante. De fato, no caso de F ser covariante, define-se $f^* = (f^{-1})_*$, enquanto que, se F é contravariante, define-se f_* como sendo $(f^{-1})^*$;

Derivações

Ressaltamos haver uma maneira alternativa de descrever campos de vetores (e, conseqüentemente, seções de qualquer fibrado descendente de TM), a qual é bastante utilizada em geometria. Com efeito, seja $\mathfrak{X}(M)$ o módulo das derivações do anel $\mathcal{D}(M)$. A regra $\tilde{\cdot} : \Gamma(TM) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$, que a cada X associa a derivação

$$\tilde{X} : \mathcal{D}(M) \rightarrow \mathcal{D}(M), \quad \text{tal que} \quad \tilde{X}(f)(p) = X(p)(f),$$

é claramente um homomorfismo injetivo. Via partições da unidade mostra-se que toda derivação corresponde a um campo, de modo que tal regra fornece a caracterização mencionada.

Advertência. No que segue, utilizaremos da mesma notação para representar campos de vetores enquanto seções do fibrado tangente ou enquanto derivações do anel $\mathcal{D}(M)$. Isto é, escreveremos simplesmente X ao invés de \tilde{X} .

Com a caracterização anterior, faz sentido falar da composição de campos vectoriais. Isto é, dados quaisquer campos X, Y , faz sentido considerar a quantidade

$X \circ Y : \mathcal{D}(M) \rightarrow \mathcal{D}(M)$. Ela é claramente uma transformação linear entre os espaços vetoriais subjacentes. No entanto, *não define um campo vetorial*. Isto porque tal composição não satisfaz a regra de Leibnitz e, portanto, não é uma derivação. Em contrapartida, o *comutador* $[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X$ é um verdadeiro campo vetorial.

A justificativa para estes fatos é simples: se campos são derivações de *primeira grandeza* então a composição entre eles há de ser uma derivação de *segunda grandeza*. Posto isto, para obter um verdadeiro campo da composição deve-se então eliminar os termos cruzados de *segunda grandeza*. Isto é feito subtraindo a composição em ordem contrária, pois esta conterá exatamente os termos cruzados em ordem oposta.

Nesta nova caracterização, o mapa que a cada função real associa a sua diferencial também possui uma nova roupagem. Com efeito, como o leitor rapidamente se convencerá, esta passa a ser dada pela regra $d : \mathcal{D}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)^*$, definida por $df(X) = X(f)$. Costuma-se denotar $\Omega^1(M)$ para representar o módulo dual de $\mathfrak{X}(M)$. Seus elementos são chamados de *1-formas* e correspondem às seções do fibrado tangente.

Por sua vez, se escrevemos $\Omega^0(M)$ ao invés de $\mathcal{D}(M)$ e chamamos funções reais diferenciáveis simplesmente de 0-formas, então fica claro que d é um mapa que “aumenta o grau das 0-formas” em uma unidade. Na última seção deste capítulo, veremos que tal processo pode ser estendido: para qualquer k , fala-se de k -formas, enquanto que existe um mapa linear d , que a cada forma de grau k associa uma outra de grau $k + 1$. Em particular, veremos que $d \circ d = 0$, e então estará definida uma teoria de cohomologia especialmente construída no contexto das variedades diferenciáveis.

Tensores

Existe especial interesse nas seções do fibrado descendente $T_r^s M$ de TM , as quais são chamadas de *campos tensoriais de tipo (r, s)* em M . Assim, por exemplo, um campo de tipo $(1, 0)$ é simplesmente um campo vetorial, enquanto que um de tipo $(0, 1)$ é uma seção do fibrado cotangente TM^* (isto é, uma 1-forma). Em acordo

com as observações apresentadas no início da seção, tem-se identificações naturais

$$\Gamma(T_r^s M) \simeq \Gamma(TM) \otimes \dots \otimes \Gamma(TM) \otimes \Gamma(TM^*) \otimes \dots \otimes \Gamma(TM^*).$$

Tal módulo é geralmente denotado por $\mathfrak{X}_s^r(M)$ ao se considerar campos de vetores enquanto derivações. A escolha de uma carta local $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ na variedade M determina uma base para $\mathfrak{X}_s^r(M)$, a qual se vê formada de todos os tensores

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x_{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s}, \quad \text{com } i_k, j_k = 1, \dots, n, \quad (8.1)$$

onde os dx^i constituem a base induzida em $\mathfrak{X}(M)^*$.

Advertência. Quando não houver risco de confusão, escreveremos ∂_i ao invés de $\frac{\partial}{\partial x_i}$ para denotar os elementos da base de $\mathfrak{X}(M)$ induzida por uma carta x .

Alternativamente, identificando produtos tensoriais com aplicações multilineares, pode-se ver um campo de tipo (r, s) como sendo simplesmente uma regra T , que toma 1-formas $\omega^1, \dots, \omega^r$ e campos X_1, \dots, X_s , e devolve uma mapa diferenciável $T(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s)$ em M . A relação entre estas duas interpretações é a seguinte: escolhida uma carta $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, a expressão de um campo tensorial em (8.1) é dada exatamente por sua imagem (enquanto aplicação multilinear) nos elementos de tal base. Em outras palavras, se

$$T = \sum T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} \cdot \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_r} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s},$$

então as funções $T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r}$ são dadas exatamente por

$$T(dx^{i_1}, \dots, dx^{i_r}, \partial_{j_1}, \dots, \partial_{j_s}).$$

Observamos que o produto tensorial dá uma estrutura de álgebra bigraduada ao coproduto de todos os $\mathfrak{X}_s^r(M)$, a qual denotaremos por $\mathcal{T}(M)$. Tem-se morfismos naturais $C_l^k : \mathcal{T}(M) \rightarrow \mathcal{T}(M)$, de grau -1 , chamados de *contrações* e definidos como segue: se T é campo de tipo (r, s) , então, para todo sistema de coordenadas $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ em M , a expressão de $C_l^k T$ na base induzida por x é obtida da expressão $T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r}$ de T fazendo $j_l = i_k$ e somando sobre este índice.

Valores Vetoriais

Pode-se generalizar o estudo das seções de fibrados descendentes de TM . Neste caso, fixam-se um fibrado $\pi : E \rightarrow M$ e um bifunctor \mathcal{G} em \mathbf{Vec}_M levantado de outro em $\mathbf{Vec}_{\mathbb{R}}$. Para cada functor \mathcal{F} (também levantado de $\mathbf{Vec}_{\mathbb{R}}$), olha-se então para as seções do correspondente $\mathcal{G}(\mathcal{F}(TM), E)$. Supomos que tanto \mathcal{F} quanto \mathcal{G} admitem extensões a $\mathbf{Mod}_{\mathcal{D}(M)}$. Neste caso, ao aplicar Γ podemos utilizar das observações do início da seção para obter

$$\Gamma(\mathcal{G}(\mathcal{F}(TM), E)) \simeq \mathcal{G}(\Gamma(\mathcal{F}(TM)), \Gamma(E)).$$

A situação de maior interesse em geometria se dá quando ambos os funtores \mathcal{F} e \mathcal{G} são produtos tensoriais, de modo que podemos identificá-los com mapas multilineares. Assim, o isomorfismo anterior se traduz em

$$\begin{aligned} \Gamma(TM_s^r \otimes E) &\simeq \mathfrak{X}_s^r(M) \otimes \Gamma(E). \\ &\simeq L(\mathfrak{X}(M)^* \times \dots \times \mathfrak{X}(M)^* \times \mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M); \Gamma(E)), \end{aligned}$$

levando-nos a chamar tais seções de *campos tensoriais com valores em E* e a denotar o conjunto de todos eles por $\mathfrak{X}_s^r(M; E)$.

Por exemplo, no caso particular em que $E \simeq M \times \mathbb{E}$ é trivial, dar uma seção de $TM_s^r \otimes E$ se vê o mesmo que dar um mapa multilinear, o qual toma campos e 1-formas e, ao invés de devolver uma função de M com *valores reais* (como faz um campo tensorial usual), devolve uma função de M com *valores vetoriais* (isto é, que chegam no espaço \mathbb{E}).

Geometria

Retomamos a máxima apresentada ao final do capítulo anterior de que a introdução de diferentes geometrias numa variedade é realizada por meio de campos tensoriais satisfazendo certas propriedades. Assim, *para que uma variedade seja compatível com uma dada geometria, é preciso que nela existam determinadas seções*. Espera-se, portanto, haverem obstruções topológicas (em geral dadas por classes de Stiefel-Whitney) à introdução de estruturas geométricas.

Uma exceção à regra (que corresponde à redução de $GL(n)$ ao grupo ortogonal) diz respeito à possibilidade de escolha diferenciável de produtos internos em cada uma das fibras E_p de um fibrado vetorial E . Mais precisamente, via partições da unidade na variedade base¹, verifica-se facilmente que existe uma seção diferenciável g de $E^* \otimes E^*$ tal que cada $g(p)$ é um produto interno em E_p . Vendo g como mapa $\mathcal{D}(M)$ -bilinear de $\Gamma(E)$, isto significa que tal seção é

1. simétrica: $g(s, s') = g(s', s)$;
2. não-degenerada: fixada $s \in \Gamma(E)$, se $g(s, s') = 0$ para todo s' , então $s = 0$;
3. positiva: $g(s, s) > 0$ sempre que $s \neq 0$.

Costuma-se dizer que g é uma *métrica nas fibras* de E . Quando $E = TM$, fala-se que g é uma *métrica Riemanniana* na variedade M . A existência de tais métricas é um fato bastante útil. Por exemplo, vê-se que g induz isomorfismo natural entre os funtores $M \mapsto \mathfrak{X}(M)$ e $M \mapsto \mathfrak{X}(M)^*$, de modo que qualquer campo tensorial de tipo (r, s) pode ser encarado como um campo estritamente covariante de ordem $r + s$.

Particularmente, isto nos permite falar do *pullback* de campos tensoriais arbitrários por aplicações diferenciáveis quaisquer (não necessariamente difeomorfismos). Em suma, *a escolha de uma métrica realiza (via pullback da inclusão), a conexão entre campos locais e campos globais localmente definidos em qualquer caso.*

Outro exemplo de como métricas são úteis é o seguinte: no capítulo anterior, mostramos que as classes de Stiefel-Whitney são obstruções à trivialidade de um fibrado vetorial. Por outro lado, há pouco comentamos que a trivialidade dos fibrados vetoriais fica inteiramente caracterizada pela existência de seções linearmente independentes. Espera-se, portanto, que tais condições estejam relacionadas. Com efeito, provaremos agora que, se $\pi : E \rightarrow M$ possui k seções linearmente independentes, então as k últimas classes de Stiefel-Whitney são nulas. Isto é,

$$w_{n-k+1}(E) = w_{n-k+2}(E) = \dots = w_{n-1}(E) = w_n(E) = 0.$$

¹O uso de partições da unidade é dispensável, como será visto no próximo capítulo. De fato, lá mostraremos que a existência de métricas advém de uma condição puramente topológica, a qual independe de hipóteses adicionais na variedade base: o quociente $GL(n; \mathbb{R})/O(n)$ é contrátil.

A ideia é esta: as k seções s_1, \dots, s_k linearmente independentes induzem um subfibrado $\xi \subset E$, cuja fibra ξ_p é simplesmente o espaço gerado pelos correspondentes vetores $s_i(p)$. Tal fibrado é trivial e de dimensão k . Fixada uma métrica g nas fibras de E , esta define um complemento ortogonal para ξ . Mais precisamente, constrói-se um fibrado ξ^\perp , de dimensão $n - k$, tal que $\xi \oplus \xi^\perp \simeq E$. Desta forma, tem-se $w_i(E) \simeq w_i(\xi^\perp)$, garantindo o afirmado.

8.3 Formas

Como vimos no começo do capítulo, campos tensoriais equivalem a regras multilineares que tomam 1-formas e campos vetoriais, fazendo corresponder funções diferenciáveis. Em particular, campos de tipo $(0, s)$ se identificam com mapas multilineares de $\mathfrak{X}(M)$ no anel das funções diferenciáveis $f : M \rightarrow \mathbb{R}$.

Uma k -forma diferencial na variedade M nada mais é que um campo de tipo $(0, k)$ que, sob tal identificação, não só é multilinear, mas também alternado. Em outras palavras, trata-se simplesmente de uma k -forma alternada em $\mathfrak{X}(M)$. O conjunto de todas elas define um submódulo, o qual denotamos por $\Omega^k(M)$. Por exemplo, para $k = 1$ este corresponde exatamente a $\mathfrak{X}(M)^*$, cujos elementos antes já havíamos chamado de 1-formas diferenciais.

Tais entidades são seções de um certo fibrado. De fato, o functor Alt_k que a cada espaço vetorial associa o correspondente espaço de suas k -formas alternadas é diferenciável e, portanto, admite um levantamento a \mathbf{Vec}_M . Em particular, ele se estende à categoria $\mathbf{Mod}_{\mathcal{D}(M)}$, de modo que comuta com Γ . Assim,

$$\Omega^k(M) = \text{Alt}_k(\Gamma(TM)) \simeq \Gamma(\text{Alt}_k(TM)).$$

Especialmente, se TM é trivial, então o correspondente fibrado $\text{Alt}_k(TM)$ também é, de modo que bases de $\mathfrak{X}(M)$ induzem bases em $\Omega^k(M)$. Tais bases podem ser obtidas de bases em $L_k(M) \simeq \mathfrak{X}_0^k(M)$ por um processo de *antissimetrização*, o qual apresentamos brevemente. Assim, grosso modo, para descrever formas diferenciais, escolhe-se uma carta $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Esta induz uma base em $\mathfrak{X}_0^k(U)$, da qual obtemos

uma base para $\Omega^k(U)$ via antissimetriação.

sistema de \implies **descrição local de** $\xrightarrow{\text{antissim.}}$ **descrição local de**
coordenadas **campos** **formas**

Existe uma transformação natural evidente $\iota : \text{Alt}_k \Rightarrow L_k$, que simplesmente inclui o espaço das formas alternadas no espaço dos mapas multilineares. Tal transformação admite uma inversa à esquerda $\xi : L_k \Rightarrow \text{Alt}_k$, que corresponde ao processo de antissimetriação (observe que esta em geral não é inversa à direita, uma vez que os espaços dos mapas k -lineares e das k -formas possuem dimensões que costumam não coincidir). Por exemplo, para o caso $k = 2$, tem-se

$$\xi(V)(t)(v, w) = \frac{t(v, w) - t(w, v)}{2}.$$

Como os funtores Alt_k e L_k se estendem à categoria dos módulos sobre $\mathcal{D}(M)$, o mesmo acontece com as transformações naturais ι e ξ . Assim, a cada campo tensorial T de tipo $(0, k)$ sabe-se associar sobrejetivamente uma k -forma ω , chamada de *antissimetriação de T* , sendo dada por $\xi(T) = \omega$.

Assim, se o módulo das seções de $L_k(M)$ é livre, então a imagem de ξ por uma base $\hat{e}_{i_1}, \dots, \hat{e}_{i_k}$ gera $\Omega^k(M)$, de modo que ali está contida uma base para ele. Esta é dada precisamente pelos elementos $\xi(\hat{e}_{i_1}), \dots, \xi(\hat{e}_{i_k})$, com $i_1 < i_2 < \dots < i_k$.

Observação. Observamos que, sob a identificação de $L_k(M)$ com produtos tensoriais de $\mathfrak{X}(M)^*$, costuma-se escrever $\omega \wedge \omega'$ para representar a imagem de ξ por um $\omega \otimes \omega'$, dizendo que este é o *produto exterior* entre tais entidades. No que segue, adotaremos esta mesma prática. Assim, por exemplo, escolhida uma carta $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, esta induz uma base $dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_k}$, mostrando-nos que as k -formas em U são simplesmente expressões do tipo

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k} \cdot dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

para certas funções $a_{i_j} : U \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciáveis.

Complexo de De Rham

Nesta subsecção, veremos que a categoria **Diff** das variedades diferenciáveis admite uma teoria de cohomologia natural, chamada de *cohomologia de De Rham*.

A ideia é a seguinte: como $\Omega^k(M)$ é módulo sobre $\mathcal{D}(M)$, também é espaço vetorial. Além disso, a regra que a cada função f associa a sua diferencial df é linear. Através dela, definiremos outros mapas lineares $d_k : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$, chamados de *derivadas exteriores*, os quais constituirão um complexo de cocadeias e comutarão com *pullbacks*. Assim, ficará definido um functor $C_{dR} : \mathbf{Diff} \rightarrow d\mathbf{Vec}_{\mathbb{R}}$ que ao ser composto com $H : d\mathbf{Vec}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbf{Vec}_{\mathbb{R}}$ dará a teoria de cohomologia procurada.

Para definir as derivadas exteriores, observamos que toda k -forma ω fica completamente determinada por seu comportamento local em um sistema de coordenadas. Mas numa carta $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ qualquer, ω é a combinação linear de termos do tipo $a_{i_1 \dots i_k} \cdot dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$. Assim, todo mapa com domínio em $\Omega^k(M)$ fica caracterizado pela maneira como age em funções, em diferenciais de funções e em produtos exteriores, sendo estendido por linearidade.

Como queremos que a derivada exterior seja uma generalização da derivada usual, seu comportamento em funções está previamente fixado. Isto é, deve-se ter $d_k f = df$. Assim, procuramos por condições em diferenciais de funções e em produtos exteriores que façam dos d_k um complexo de cocadeias e, para cada $f : M \rightarrow N$, dos *pullbacks* $f_k^* : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$ um morfismo entre os correspondentes complexos. Isto é, procuramos por condições que certifiquem

$$d_{k+1} \circ d_k = 0 \quad \text{e} \quad f_{k+1}^* \circ d_k = d_k \circ f_k^*. \quad (8.2)$$

Em outras palavras, o que deve aparecer do lado direito de

$$d_1(df) =? \quad \text{e} \quad d_k(\omega \wedge \omega') =?$$

para que valham as expressões (8.2)? Certamente a nulidade de $d_1(df)$ é condição necessária para $d_{k+1} \circ d_k = 0$. Rapidamente se verifica que isto, junto com a antilinearidade

$$d_{r+s}(\omega \wedge \omega') = d_r \omega \wedge \omega' + (-1)^s \omega \wedge d_s \omega'$$

são suficientes para o que procuramos. Por exemplo, temos

$$\begin{aligned} d_k(a_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) &= da_{i_1 \dots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} + (-1)^k a_{i_1 \dots i_k} \cdot d_k(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) \\ &= da_{i_1 \dots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}, \end{aligned} \quad (8.3)$$

já que o segundo termo da soma se traduz em um combinação de coisas do tipo $d_1(df)$, as quais são todas nulas. Desta forma, pela mesma justificativa,

$$d_{k+1}(d_k(a_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k})) = 0.$$

Assim, as derivadas exteriores haverão de ser exatamente as regras d_k que coincidem com a derivada usual para $k = 0$, que se anulam em derivadas de funções (isto é, que cumprem $d_1(df) = 0$) e que são antilineares. Estas existem e são únicas. Para a unicidade, observe que as condições exigidas a determinam localmente (veja expressão (8.3)). Para a existência, basta defini-las localmente por (8.3) e verificar que elas independem da carta escolhida e cumprem com o requerido.

Diante disso, fica definido um functor $C_{dR} : \mathbf{Diff} \rightarrow d\mathbf{Vec}_{\mathbb{R}}$, que a cada variedade M faz corresponder o complexo de cocadeias formado das derivadas exteriores $d_k : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$, e a cada $f : M \rightarrow N$ associa a sequência dos *pullbacks* f_k^* . Os respectivos

$$H_{dR}^k : \mathbf{Diff} \rightarrow \mathbf{Vec}_{\mathbb{R}}, \quad \text{tais que} \quad H_{dR}^k(M) = \ker(d_{k+1})/\text{img}(d_k),$$

são as *cohomologias de De Rham*.

Observação. Existe uma maneira intrínseca de definir a derivada exterior, que é a seguinte: para uma dada k -forma ω , coloca-se

$$\begin{aligned} d_k \omega(X_0, \dots, X_k) &= \sum_{i=0}^k (-1)^i X_i(\omega(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_k)), \\ &+ \sum_{i < j}^k (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_k), \end{aligned}$$

em que o chapéu indica a omissão do correspondente termo. Para ver que tal expressão de fato computa a derivada exterior, por questões de unicidade de d_k , basta mostrar que em coordenadas locais ela se resume a (8.2).

Capítulo 9

Geometria

Em alguns momentos anteriores, comentamos que a geometria de uma variedade pode ser sintetizada no ato de reduzir o grupo estrutural de seu fibrado dos referenciais. No presente capítulo, reforçamos esta máxima.

Iniciamos definindo, de maneira precisa, o que vem a ser uma redução no fibrado dos referenciais: tratam-se de subfibrados principais de $\text{fr}(M)$, estruturados por um subgrupo do grupo linear. Se este subgrupo é G , diz-se a redução corresponde a uma G -estrutura.

Em seguida mostramos que as G -estruturas estão em pareamento bijetivo com seções de um certo fibrado associado a $\text{fr}(M)$, de modo que *reduzir os referenciais possíveis é, efetivamente, dar um conjunto de transformações que preservam uma seção*. Por um lado isto mostra que as reduções estão sujeitas a obstruções. Por outro, nos dá uma estratégia natural de identificar as seções que a definem.

Ainda na primeira seção, exemplificamos como a existência de tais obstruções são refletidas na física: elas *impedem que consideremos qualquer variedade como modelo para o universo*. De fato, quanto mais refinada for a geometria da teoria física em questão, mais restritos serão os referenciais que ela engloba e, conseqüentemente, as variedades que modelarão os sistemas por elas descritos estarão sujeitas a um maior número de obstruções.

Já na segunda seção, mostramos que as G -estruturas são os objetos de uma categoria (que, na verdade, é um grupoide). Em tal categoria, um morfismo entre duas G -estruturas, digamos implementadas por seções σ e σ' , corresponde a um

difeomorfismo f tal que $f^*\sigma = \sigma'$. Na sequência, estudamos as G -estruturas (ditas *integráveis*) que são localmente isomorfas à estrutura trivial.

Finalizamos o capítulo apresentando diversos exemplos de geometrias que podem ser descritas em termos de reduções de referenciais. Ali determinamos as seções que as definem, bem como as obstruções por elas enfrentadas. Além disso, damos uma caracterização à sua integrabilidade e comentamos seu interesse em física.

Textos clássicos sobre o assunto incluem [22, 84]. Outra referência interessante é a obra [12].

9.1 Estruturas

Um subfibrado $\pi : P \rightarrow M$ de $\text{fr}(M)$ estruturado por G é usualmente chamado de G -*estrutura* na variedade M . Ao obter uma delas, diz-se que foi realizada uma *redução no grupo estrutural* do fibrado dos referenciais. Os elementos da fibra P_b são precisamente os referenciais $b : \mathbb{R}^n \rightarrow TM_p$ tais que, se $g \in GL(n)$, então o referencial $b \circ g$ está em P_b se, e só se, $g \in G$.

Observamos que, de maneira análoga, pode-se falar de reduções no grupo estrutural de qualquer fibrado principal. Neste contexto genérico, *a existência de reduções se depara com certas obstruções topológicas*. Isto se deve ao seguinte: se π é um H -fibrado principal qualquer e $G \subset H$ é subgrupo, tem-se uma ação natural de H em H/G . Mostra-se, pois, que as reduções de π a G estão em bijeção com as seções do fibrado associado a π por meio de tal ação (veja, por exemplo, o sexto capítulo de [40]). Assim, *a existência de reduções se resume ao problema de obtenção de seções*. Este último, como já vimos, admite diversas obstruções topológicas.

Se de um lado o resultado anterior evidencia a existência de dificuldades para se obter G -estruturas, de outro ele nos fornece uma estratégia bastante interessante para encontrá-las. Com efeito, a ideia é olhar para o espaço homogêneo $GL(n)/G$ e identificá-lo com um conjunto conhecido. Feito isto, dar uma G -estrutura será o mesmo que fornecer uma regra que a cada $p \in M$ faz corresponder um elemento de tal conjunto.

De forma mais precisa, a ideia é buscar por um espaço de tensores $V(\mathbb{R}^n)$ de

\mathbb{R}^n (isto é, por um fibrado descendente de $T\mathbb{R}^n$) no qual $GL(n)$ age de maneira transitiva, tendo G como grupo de isotropia de algum destes tensores. Neste caso, poderemos escrever

$$V(\mathbb{R}^n) \simeq GL(n)/G,$$

forneendo-nos a identificação procurada. Assim, pode-se dizer que *G-estruturas são traduzidas, em grande parte dos casos, em seções σ de fibrados que descendem de TM* . E, neste caso, as obstruções oferecidas à existência de tais estruturas se resumem exatamente às classes características da variedade M .

Em suma, no diagrama abaixo, já apresentado em outros momentos do texto, a primeira seta pode ser acrescida de uma inversa:

$$\text{secções} \begin{array}{c} \xleftarrow{\text{classes}} \\ \xrightarrow{\text{características}} \end{array} \text{redução dos} \implies \text{geometria} \\ \text{referenciais}$$

Exemplos

Abaixo apresentamos exemplos da dinâmica apresentada pelo diagrama anterior. Eles serão desenvolvidos com mais detalhes na última secção.

Exemplo 9.1.1. A obstrução para a existência de reduções a $SL(n)$ é precisamente a primeira das classes de Stiefel-Whitney. Via *pullback*, o grupo linear geral age transitivamente no espaço das n -formas alternadas e não-nulas de \mathbb{R}^n (isto é, no espaço de suas formas de volume). Todas elas ficam estáveis pela ação do grupo linear especial. Consequentemente,

$$GL(n)/SL(n) \simeq \Omega^n(\mathbb{R}^n) - 0,$$

mostrando-nos que as $SL(n)$ -reduções correspondem às *formas de volume em M* . Uma variedade que admite uma forma de volume é dita *orientável*.

Exemplo 9.1.2. Como veremos mais adiante, as obstruções à redução de $GL(n)$ ao grupo $O(r, s)$ são as últimas s classes de Stiefel-Whitney de M . Para identificar quem são as seções associadas a tal estrutura, observamos que o grupo linear geral admite uma ação natural e transitiva no espaço das formas bilineares simétricas e não-degeneradas de \mathbb{R}^n . Além disso, qualquer um destes mapas que tenha forma

canônica $(-1, \dots, -1, 1, \dots, 1)$, com s termos “ -1 ” e r termos “ 1 ” é estável pela ação de $O(p, q)$. Assim,

$$GL(n)/O(r, s) \simeq \left\{ g \in \text{Sym}_0^2(\mathbb{R}^n), \begin{array}{l} g \text{ é não-degenerada e} \\ \text{de assinatura } (r, s) \end{array} \right\},$$

de modo que as reduções $\text{fr}(M)$ ao grupo $O(r, s)$ estão em bijeção com as *métricas semi-Riemannianas de assinatura (r, s) na variedade M* . Isto é, com as seções g de T_0^2M que são simétricas, não-degeneradas e que em cada ponto possuem assinatura (r, s) .

Exemplo 9.1.3. Dois casos particulares do exemplo anterior merecem destaque: as métricas de assinatura $(n - 1, 1)$ e $(n, 0)$ chamam-se, respectivamente, *lorentzianas* e *riemannianas*. Elas correspondem às reduções ao grupo de Lorentz $O(n - 1, 1)$ e a $O(n)$. Pelo exemplo anterior, inexistente obstrução à existência de métricas riemannianas (o que está de acordo com o que discutimos em outras instâncias do texto), mas para que uma variedade admita métricas lorentzianas é preciso que sua última classe de Stiefel-Whitney se anule. Ou seja, é preciso que ela possua um campo de vetores que não se anula em nenhum ponto. Este não é o caso, por exemplo, das esferas em dimensão par.

Exemplo 9.1.4. Reduções à interseção entre dois grupos indicam compatibilidade entre as geometrias subjacentes. No entanto, para a existência de uma tal redução, enfrenta-se as obstruções de cada uma das partes. Por exemplo, a existência de uma redução a $SO(n) = O(n) \cap SL(n)$ traduz a compatibilidade entre as geometrias induzidas por métricas riemannianas e por formas de volume. Como não existem obstruções à existência de métricas riemannianas, segue-se que toda variedade orientável pode ter grupo estrutural reduzido de $SL(n)$ para $SO(n)$. Em termos explícitos, a compatibilidade entre $O(n)$ e $SL(n)$ se traduz na possibilidade de construir formas de volume partindo-se de qualquer métrica riemanniana.

Matriz Jacobiana

Nesta subseção discutiremos a existência de uma caracterização das G -estruturas em uma variedade M em termos de restrições ao grupo a que pertencem as matrizes

jacobianas das funções de transição de M .

Relembramos existirem adjunções $\mathbf{Vec}_M \rightleftarrows \mathcal{P}_M^{GL(n)}$. Observamos que, se trocamos o grupo estrutural, tal adjunção se mantém. De maneira mais precisa, dado G , tem-se functor \mathcal{F} , que toma um G -fibrado principal π e devolve o fibrado com fibra típica \mathbb{R}^n e estruturado por G , associado a π . Ele é adjunto ao functor \mathcal{G} , que a cada fibrado estruturado por G e com fibra típica \mathbb{R}^n faz corresponder seu fibrado principal.

Desta forma, no caso particular em que π é G -estrutura em M , então $\mathcal{F}(\pi)$ é construído das funções coordenadas de TM que assumem valores em G . Ora, as funções coordenadas do fibrado tangente nada mais são que as regras que a cada ponto associam as matrizes jacobianas das funções de transição. Portanto, se M admite G -estrutura, então existe atlas em M cujas cartas têm funções de transição com jacobianas todas pertencentes a G .

Reciprocamente, se conseguimos reduzir o grupo estrutural do fibrado TM , o que equivale a dizer que há um atlas em M cujas matrizes jacobianas das funções de transição estão em G , então $\mathcal{G}(TM)$ é redução de $\text{fr}(M)$ e, portanto, uma G -estrutura em M .

Exemplo 9.1.5. Desta caracterização segue, por exemplo, que *uma variedade é orientável se, e somente se, admite um atlas coerente*. Isto é, um atlas cujas jacobianas das funções de transição tem sempre determinante positivo, o qual pode ser suposto unitário sem que ocorra perda de generalidade.

Física

Uma maneira de realizar a formulação da mecânica newtoniana é a seguinte: axiomatiza-se a existência de um ponto privilegiado no espaço (o que correspondente à primeira lei) e supõe-se que em tal ponto a expressão $F = m \cdot a$ é verdadeira (segunda lei). Uma vez feito isto, segue-se que todo referencial obtido do absoluto por meio de uma transformação que preserva $F = m \cdot a$ é tão bom quanto o absoluto. Tais referenciais dizem-se *inerciais*.

Ora, o conjunto das transformações que preservam a expressão anterior é for-

mado das rotações em \mathbb{R}^3 , dos movimentos rígidos e das translações. Estas definem um subgrupo $GL(4)$ chamado de *grupo de Galileu*. Se olhamos para o grupo de isotropia da origem (o que equivale a retirar as translações espaciais), então toda transformação resultante preserva o produto interno de \mathbb{R}^4 (que é um campo tensorial).

Assim, pode-se dizer que a *estrutura da mecânica newtoniana provém de uma restrição no grupo estrutural de $\text{fr}(\mathbb{R}^4)$, a qual é obtida olhando-se para as transformações que deixam um campo tensorial invariante*.

As transformações do grupo de Galileu sempre mexem no espaço *ou* no tempo. Assim, há uma diferença nítida entre eles. Uma maneira de colocá-los em pé de igualdade é, na construção anterior, trocar movimentos rígidos por *boosts de Lorentz*, que são transformações que implementam mudanças simultâneas no espaço e no tempo. Ao se fazer isto, obtém-se o *grupo de Poincaré* ao invés do grupo de Galileu. Além disso, se consideramos o grupo de isotropia (que é exatamente o grupo de Lorentz), observamos que ele é formado das transformações que deixam a forma bilinear com expressão diagonal $(-1, 1, 1, 1)$ invariante.

Desta forma, mais uma vez *tem-se uma teoria construída via redução no grupo estrutural do fibrado dos referenciais $\text{fr}(\mathbb{R}^4)$, a qual foi implementada olhando-se para transformações que deixam um certo campo tensorial invariante*.

Tais teorias realmente existem e fazem sentido, uma vez que a contratibilidade de \mathbb{R}^4 garante que seu fibrado dos referenciais possa ser reduzido para qualquer subgrupo de $GL(4)$, inclusive para o grupo trivial. Observamos, no entanto, que se tentássemos generalizá-las, trocando \mathbb{R}^4 por outras variedades, surgiriam obstruções à existência de tais reduções. Por exemplo, se quiséssemos uma teoria que generalizasse a relatividade restrita, precisaríamos de uma redução ao grupo de Lorentz, o que nem sempre existe.

Do ponto de vista físico, o que corresponderia a estas generalizações? Tanto na construção da mecânica newtoniana como na da relatividade restrita, lidamos com referenciais *inerciais*. Assim, a generalização do processo seria permitir referenciais *não-inerciais*. Ora, pelo princípio da equivalência, estudar referenciais não-inerciais é estudar gravitação. Em particular, se lidarmos com teorias relativísticas, então, no

olhar da física, generalizar o procedimento anterior é construir teorias de gravitação relativísticas.

A conclusão a que se chega é que *nem toda variedade de dimensão quatro pode modelar um universo relativístico!* A esfera \mathbb{S}^4 é um exemplo. Em certas condições, necessita-se de outras geometrias adicionais e compatíveis àquela induzida por uma métrica lorentziana. Por exemplo, poder-se-ia pedir também orientabilidade, o que excluiria não só \mathbb{S}^4 , mas também \mathbb{P}^4 da lista de possíveis universos.

9.2 Categoria

Como veremos agora, existe uma categoria formada exclusivamente das reduções de fibrados dos referenciais a um determinado subgrupo estrutural. Em verdade, vamos construí-la num contexto um pouco mais amplo. Com efeito, se por um lado reduções de grupos estruturais correspondem a subgrupos de $GL(n)$, é também possível falar de ρ -estruturas, as quais estão associadas a uma representação $\rho : G \rightarrow GL(n)$ arbitrária (ou seja, que não é necessariamente uma inclusão).

De maneira mais precisa, fixada M , consideremos o functor F , definido na categoria dos grupos de Lie e de suas representações, que a cada G faz corresponder a categoria dos G -fibrados principais com base em M , e que a toda $\rho : G \rightarrow GL(n)$ associa o respectivo $F(\rho) = \rho_M^\#$, que toma o fibrado de coordenadas u_{ij} e devolve outro de coordenadas $\rho \circ u_{ij}$.

Definimos, então, uma ρ -estrutura em M por ser um G -fibrado principal P sobre M que é levado por $\rho_M^\#$ no respectivo fibrado dos referenciais. Isto é, $\rho_M^\# P = \text{fr}(M)$.

Para falar de morfismos entre ρ -estruturas, procuramos por um functor $\text{fr} : \mathbf{Diff}^n \rightarrow \mathcal{B}$, que a cada variedade n -dimensional associa seu fibrado dos referenciais. Afinal, uma vez obtido tal functor, poderemos definir um morfismo entre ρ -estruturas como sendo simplesmente um morfismo h entre os G -fibrados subjacentes, o qual coincide com $\text{fr}(f)$ para alguma aplicação diferenciável f . Em outras palavras, tal que $\rho_M^\#(h) = \text{fr}(f)$ para alguma f .

Procuremos, então, por fr . Observamos que para toda M o functor $\mathcal{G} : \mathbf{Vec}_M \rightarrow \mathcal{P}_M^{GL(n)}$ cumpre $\mathcal{A}_M(TM) = \text{fr}(M)$. Por sua vez, a regra T também é functorial, de

modo que a ideia mais natural seria definir

$$\text{fr}(M) := \mathcal{G}(TM) \quad \text{e} \quad \text{fr}(f) := \mathcal{G}(T(f)). \quad (9.1)$$

Observamos, no entanto, que da maneira como colocado, $\text{fr}(f)$ é um morfismo entre fibrados dos referenciais se, e somente se, f é um difeomorfismo local. Com efeito, sendo $T(f)$ o *pushforward* f_* , para que ele leve referenciais em referenciais, é necessário e suficiente que cada Df_p seja um isomorfismo.

Desta forma, enquanto restrita ao grupoide formado das variedades de dimensão n e dos difeomorfismos (isto é, enquanto restrito a \mathbf{Diff}_{pd}^n), a regra fr fica bem definida por (9.1) e, conseqüentemente, nos dá a noção de morfismo entre ρ -estruturas que procurávamos.

Por exemplo um *morfismo* entre G -estruturas $\pi : P \rightarrow M$ e $\pi' : P' \rightarrow M'$ há de ser um difeomorfismo $f : M \rightarrow M'$ tal que, se $b : \mathbb{R}^n \rightarrow TM_p$ é referencial em P_p , então $Df_p \circ b$ está em $P'_{f(p)}$. Particularmente, se tais estruturas correspondem à existência de certos campos tensoriais σ e σ' , então os morfismos entre π e π' são os difeomorfismos f tais que $f^*\sigma' = \sigma$. Há uma categoria \mathbf{Fr}_M^G , formada das G -estruturas e dos morfismos assim definidos. Como logo se convence, tal categoria é, na verdade, um grupoide.

Integrabilidade

Classificar espaços topológicos é difícil. Isto nos levou a considerar as variedades, que nada mais são que objetos com comportamento local previamente determinado. Por sua vez, vimos que classificar fibrados também é difícil. A estratégia foi então olhar para os fibrados localmente triviais. Estas práticas nada mais são que exemplos de aplicações de uma máxima: *se num certo contexto tem-se um ente que pode ser considerado trivial, a ideia é trabalhar com os objetos localmente equivalentes a ele.*

Tal máxima se aplica às G -estruturas. Com efeito, para qualquer grupo $G \subset GL(n)$ tem-se uma G -estrutura trivial: é aquela dada pela projeção $pr_1 : \mathbb{R}^n \times G \rightarrow \mathbb{R}^n$. Assim, tornam-se interessantes as G -estruturas localmente equivalentes à trivial. De forma mais precisa, fala-se que $\pi : P \rightarrow M$ é *localmente trivial* (ou *integrável* ou mesmo *localmente plano*) quando cada ponto $p \in M$ admite carta $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ que

é um isomorfismo entre $\pi|_U$ e ev . Isto significa que, para todo referencial $b \in P_p$, o respectivo mapa $Dx_p \circ b$ é um elemento de G , e que para qualquer elemento $g \in G$, a correspondência $Dx_y^{-1} \circ g$, com $x(p) = y$, é referencial de P_p .

A primeira condição é trivialmente satisfeita. A segunda, por sua vez, será válida para qualquer g se e, somente se, for válida para a identidade $id_{\mathbb{R}^n}$ (que é o elemento neutro de G). Assim, o fibrado $\pi : P \rightarrow M$ é integrável precisamente quando existe uma carta local $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ nas vizinhanças de cada ponto $p \in M$ tal que $Dx_{x(p)}^{-1}$ é referencial em P_p . Neste caso, a regra $p \mapsto Dx_{x(p)}^{-1}$ define seção local de π e, portanto, base para $\Gamma(TU)$. Como $Dx_{x(p)}^{-1}(\hat{e}_i) = \frac{\partial}{\partial x_i}|_p$, tal base é aquela formada pelos campos coordenados $\frac{\partial}{\partial x_i}$. Desta forma, se $\pi : P \rightarrow M$ é integrável, então cada ponto p de M admite carta cujos campos coordenados assumem valores P_p .

A recíproca é verdadeira, dando-nos uma caracterização interessante para a trivialidade local: *uma G -estrutura $\pi : P \rightarrow M$ é integrável se, e somente se, M possui atlas formado por cartas locais $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ tais que, para todo $p \in U$, a base $\frac{\partial}{\partial x_i}|_p$ está em P_p .* Em tal base, a seção que corresponde à estrutura π admite uma expressão especial, chamada de *forma normal*. Assim, uma estrutura integrável é aquela que pode ser colocada na correspondente forma normal através de cartas locais.

Obstruções

Na primeira seção do capítulo anterior, vimos que a existência de seções num fibrado arbitrário sofre obstruções. Tais obstruções não atingem os fibrados vetoriais, de modo que eles sempre possuem ao menos uma seção. Por sua vez, isso não significa que eles possuem *qualquer* seção. Isto reflete o fato de haverem obstruções relacionadas à existência de G -estruturas. Afinal, estas correspondem à seções de fibrados vetoriais satisfazendo condições adicionais.

Quando se olha para G -estruturas *integráveis*, não se está pedindo que as seções sejam somente especiais, mas que também sejam localmente triviais. Assim, mais propriedades haverão de refletir na presença de ainda mais obstruções. De fato, pode-se mostrar que *as obstruções à integrabilidade fazem parte de uma sequência em cohomologia!* Esta é usualmente chamada de cohomologia de Spencer da G -estrutura. A primeira das obstruções geralmente corresponde ao que se conhece

como *torção*, enquanto que as demais obstruções estão relacionadas com *curvaturas*, no sentido que definiremos no próximo capítulo.

Finalmente, resta dizer que alguns dos mais importantes teoremas da geometria se ocupam de dar caracterizações à condição de integrabilidade (e, portanto, à nulidade das obstruções comentadas) no contexto em que se aplicam. Este é o caso, por exemplo, do teorema de Darboux em geometria simplética, assim como do teorema de Frobenius em teoria das folheações.

Para detalhes, veja [81, 30].

9.3 Exemplos

Ao longo desta seção, discutiremos com mais detalhes exemplos de geometrias que se enquadram no contexto das G -estruturas e que aparecem naturalmente no estudo da gravitação relativista. Analisaremos, em particular, obstruções topológicas à existência de reduções, assim como condições de integrabilidade e de simetria para tais estruturas. Um estudo mais completo sobre o assunto pode ser encontrado no capítulo VII de [84]. Veja também [22].

Métricas

Olhamos aqui para as $O(r, s)$ -reduções, que correspondem bijectivamente às *métricas semi-riemannianas*. Isto é, elas são campos tensoriais g de tipo $(0, 2)$, simétricos, não-degenerados e que possuem assinatura (r, s) .

Vamos mostrar que tais métricas equivalem à existência de q campos X_1, \dots, X_s , um para cada autovalor negativo de g , os quais são linearmente independentes e livres de singularidades. Uma vez feito isto, as classes de Stiefel-Whitney tornar-se-ão obstruções à existência de estruturas semi-riemannianas. Mais precisamente, uma variedade n -dimensional admitirá métrica g de assinatura (r, s) somente se suas últimas s classes são triviais:

$$w_{n-(s+1)}(M) = \dots = w_{n-1}(M) = w_n(M) = 0.$$

Para a prova, suponhamos, de início, haver uma métrica g em M de assinatura

(r, s) . Neste caso, em cada ponto p a forma $g(p)$ possui s autovalores negativos, os quais supomos distintos e denotamos por $\lambda_1(p), \dots, \lambda_s(p)$. Definimos então X_i como sendo o mapa que a cada ponto p faz corresponder o autovetor unitário associado a $\lambda_i(p)$. Tais campos são evidentemente não-singulares e linearmente independentes.

Em contrapartida, se existem campos X_1, \dots, X_s linearmente independentes e não-singulares na variedade M , ali definimos uma métrica de assinatura (r, s) pondo

$$g = -\omega^1 \otimes \omega^1 - \dots - \omega^s \otimes \omega^s + h,$$

em que h é métrica riemanniana (que sempre existe, pois é sempre possível encontrar $O(n)$ -reduções) e ω^i é a 1-forma associada a X_i .

No que diz respeito à integrabilidade das $O(r, s)$ -estruturas, devemos dizer que esta equivale à existência de um atlas formado de cartas locais que colocam cada g_p na sua forma canônica (que é η_{ij} no caso lorentziano e δ_{ij} no caso riemanniano). Isto significa que cada ponto admite um sistema de coordenadas cuja base é um referencial inercial. Tal atlas nem sempre existe. Em verdade, de todas as obstruções à construção de tal atlas, a única que persiste num âmbito genérico corresponde ao que no próximo capítulo chamaremos de *curvatura*. Assim, pode-se dizer que *uma $O(r, s)$ -estrutura é integrável se, e somente se, sua curvatura é nula*. Ou ainda, *que cada ponto admite um referencial inercial se, e somente se, a curvatura do espaço é nula!*

Observamos, por outro lado, que é sempre possível construir uma carta de *coordenadas normais* nas vizinhanças de cada p , relativamente às quais a métrica g coincide com η_{ij} no ponto p (somente no ponto, não na vizinhança inteira, como é requerido na condição de integrabilidade). Isto significa que sobre cada ponto podemos montar um referencial que é *aproximadamente inercial*, o que reflete o princípio da equivalência.

Orientação Temporal

O grupo de Lorentz $O(n-1, 1)$ admite um subgrupo especialmente interessante, chamado de *parte ortócrona* e usualmente denotado por $O^\uparrow(n-1, 1)$. Ele corresponde às transformações que, além de preservarem a estrutura lorentziana, preservam

o tempo. Mais precisamente, isto significa que existe uma métrica g cujo campo de vetores sem singularidades X_g que a ela corresponde satisfaz $g(X_g, X_g) < 0$. Diz-se então que g é *tempo-orientável*.

Ora, na construção da subseção anterior, cada campo X_i satisfaz esta condição. Assim, se uma variedade admite uma redução para o grupo de Lorentz, então também admite uma redução para a sua parte ortócrona. Em suma, *se numa variedade existe uma métrica lorentziana, então sempre existe uma outra que é tempo-orientável*. Consequentemente, *pedir orientabilidade no tempo não gera nenhuma redução aos possíveis modelos que podem ser utilizados para descrever o universo relativístico*.

De um modo geral, ao se trabalhar com gravitação relativística, pede-se (além da existência de métricas lorentzianas), orientabilidade e orientabilidade temporal. Em outras palavras, trabalha-se com reduções ao *grupo próprio e ortócrono* $L^\uparrow(n) = O^\uparrow(n-1, 1) \cap SL(n)$. Isto significa que as obstruções mínimas as quais um modelo que descreve o universo está sujeito incluem a última e a primeira classes de Stiefel-Whitney.

Assim, por exemplo, em dimensão 4 os modelos do universo devem ter no máximo $w_2(M)$ e $w_3(M)$ não-nulos.

Capítulo 10

Simetrias

No presente capítulo, discutimos noções de simetria associadas às G -estruturas. O interesse é imediato: quanto mais simétrica for uma estrutura, mais simples de descrever será a geometria que a ela corresponde.

Tem-se uma noção de simetria global natural para cada G -estrutura: tratam-se simplesmente dos seus *automorfismos*. No caso em que a estrutura é induzida por uma seção σ , estes são formados de difeomorfismos f que preservam σ . Isto é, tais que $f^*\sigma = \sigma$. Tal noção, entretanto, é demasiadamente rígida. A ideia é buscar por *simetrias infinitesimais*.

Na primeira seção, mostramos que cada campo de vetores X define uma família a um parâmetro X_t de difeomorfismos. A *derivada de Lie* de X é o termo em primeira ordem da expansão em Taylor do *pullback* X_t^* , denotado por \mathcal{L}_X . Para que cada difeomorfismo X_t seja uma simetria global da estrutura induzida por σ , é preciso que a derivada de Lie de σ se anule. Isto nos leva a considerar os campos X tais que $\mathcal{L}_X\sigma = 0$ como sendo a noção de simetria infinitesimal procurada.

Logo no início da segunda seção, observamos que o conjunto das simetrias infinitesimais é uma subálgebra $K_\sigma(M)$ de Lie de $\mathfrak{X}(M)$ com respeito ao colchete de campos de vetores. Em geral, esta possui dimensão infinita! Isto significa que, caso simetrias infinitesimais não-triviais existam, então elas existem aos montes.

Espera-se, por outro lado, que a existência de simetrias possa ser observada diretamente na seção σ . A respeito disto, o fato de $K_\sigma(M)$ ter dimensão infinita é um empecilho. De fato, para que consigamos observar restrições em σ introduzi-

das por simetrias, precisamos de álgebras que sejam induzidas por grupos de Lie, algo que ocorre somente quando a álgebra possui dimensão finita. No restante da segunda seção, exploramos a relação entre grupos e álgebras de Lie. Em particular, mostramos ser possível reconstruir o grupo a partir da álgebra por um processo de *exponenciação*.

As referências mais utilizadas para a escrita do capítulo foram [46, 29].

10.1 Derivada

A geometria é rodeada por noções de derivação. Por exemplo, campos de tensores são entes através dos quais se introduz reduções no fibrado dos referenciais, as quais correspondem à geometria numa variedade. Tais campos, por sua vez, podem ser vistos como mapas multilineares no espaço dos campos de vetores. Mas campos de vetores equivalem a derivações.

Nesta seção, introduziremos uma maneira de derivar tensores com respeito a um campo de vetores (digamos X), chamada de *derivada de Lie* e denotada por \mathcal{L}_X . Primeiro mostraremos que todo campo de vetores X induz uma família a um parâmetro de difeomorfismos $X_t : M \rightarrow M$ e é a partir de tal família que definiremos \mathcal{L}_X como sendo a “expansão em primeira ordem” da família X_t . Formalmente, tal derivada será o termo caracterizado por

$$X_t^* = id + t\mathcal{L}_X + o(t^2).$$

A fim de dar uma interpretação geométrica a ela, lembremos que um *morfismo* entre G -estruturas em M , definidas por tensores σ e σ' , é um difeomorfismo $f : M \rightarrow M$ tal que $f^*\sigma = \sigma'$. Isto nos leva a interpretar os campos X cujas famílias X_t cumprem $X_t^*\sigma = \sigma$ como *simetrias globais* da G -estrutura definida por σ . Uma condição necessária para que isto aconteça é a nulidade da quantidade $\mathcal{L}_X\sigma$. Esta, no entanto, pode não ser suficiente. Assim, a interpretação imediata de um campo X que cumpre $\mathcal{L}_X\sigma = 0$ é a de *simetria infinitesimal* da geometria σ . Tais campos são também chamados de *campos de Killing* de σ .

Dinâmica

Vamos obter a família a um parâmetro de difeomorfismos X_t associada a um campo X que comentamos na subseção anterior. Iniciamos mostrando que a escolha de um ponto $p \in M$ determina uma única curva $\gamma : I \rightarrow M$, definida num intervalo pequeno em torno de $t = 0$, com $\gamma(0) = p$ e cumprindo $X(\gamma(t)) = \gamma'(t)$ para todo instante (esta última condição significa que o diagrama abaixo é comutativo). Ela é chamada de *curva integral de X em p* .

$$\begin{array}{ccc} \gamma^*TM & \longrightarrow & TM \\ \gamma' \uparrow & & \uparrow X \\ I & \xrightarrow{\gamma} & M \end{array}$$

Com efeito, utilizando um sistema de coordenadas $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ em torno de p , vê-se que a existência de γ se traduz num problema de valor inicial para o *pushforward* x_*X , definido no aberto $x(U)$, o qual possui solução única pelo teorema de existência e unicidade de EDO's.

Um campo X cujas curvas integrais estão definidas em toda a reta diz-se *completo*. Neste caso, o teorema de diferenciabilidade com respeito às condições iniciais determina um homomorfismo $\mathbb{R} \rightarrow \text{Diff}(M)$, que a cada instante t associa um difeomorfismo X_t , fornecendo a família a um parâmetro que procuramos.

Advertência. Nos contextos que trabalharemos, os campos serão todos completos. Uma condição suficiente para que isto aconteça é que X se anule fora de um compacto o que acontece, por exemplo, quando a variedade M é compacta.

Derivada de Lie

Seja X um campo completo. Assim, está definida a família X_t , com $t \in \mathbb{R}$. Fixado um tensor σ , ela induz caminhos $t \rightarrow X_t^*\sigma$, que denotamos por σ_t . Observamos que o campo X será uma simetria se, e somente se, $\sigma_t = \sigma_0 = \sigma$ para todo t . Como queremos algo que traduza a noção de simetria infinitesimal, isto nos leva a definir a derivada de Lie $\mathcal{L}_X\sigma$ como sendo o termo que aparece em primeira ordem na “expansão de Taylor” de σ_t em torno de $t = 0$. Isto é, definimos

$$\mathcal{L}_X\sigma = \sigma'_t(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{X_t^*(\sigma) - \sigma}{t}.$$

Diretamente de tal expressão, verifica-se que a derivada de Lie é relmente uma derivação na álgebra $\mathcal{T}(M)$. Em outras palavras, tem-se

$$\mathcal{L}_X(\sigma \otimes \sigma') = (\mathcal{L}_X\sigma) \otimes \sigma' + \sigma \otimes (\mathcal{L}_X\sigma'),$$

sejam quais forem os campos tensoriais. Além disso, tal derivação comuta com contrações e com a regra natural $d : \mathcal{D}(M) \rightarrow \Omega^1(M)$, que a cada função associa a sua diferencial. Finalmente, é compatível com o pareamento natural entre 1-formas e campos vetoriais:

$$\mathcal{L}_X(\omega(Y)) = (\mathcal{L}_X\omega)(Y) + \omega(\mathcal{L}_XY).$$

Por exemplo, das condições anteriores vê-se que, para qualquer carta local $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ na variedade M , tem-se $\mathcal{L}_X\partial_i = -\sum \partial_i X^j \partial_j$, em que X^j são as componentes do campo X na base ∂_i definida por x . Portanto, fornecido um campo vetorial arbitrário Y , computa-se

$$\mathcal{L}_XY = \mathcal{L}_X\left(\sum Y^k \partial_k\right) = \sum X(Y^k) \partial_k - \sum Y^k \partial_k X^j \partial_j = \sum [X, Y]^k \partial_k,$$

mostrando-nos que a derivada de Lie de um campo Y ao longo de X é simplesmente o comutador entre os dois campos.

Outra propriedade importante da derivada de Lie é a sua naturalidade com respeito a *pullbacks* e *pushforwards*. Mais precisamente, se f é um difeomorfismo em M , então, sejam quais forem os campos σ e X , tem-se

$$f^*(\mathcal{L}_X\sigma) = \mathcal{L}_{f^*X}(f^*\sigma) \quad \text{e} \quad f_*(\mathcal{L}_X\sigma) = \mathcal{L}_{f_*X}(f_*\sigma).$$

10.2 Álgebras

Tem-se uma máxima de que *simetrias facilitam o problema*. Em que sentido esta máxima se aplica no contexto da geometria? Vamos mostrar que a existência de simetrias “independentes” nos permite construir reduções de uma G -estrutura dada.

Como definimos há pouco, uma *simetria infinitesimal* de uma G -estrutura, induzida por um tensor σ , é simplesmente um campo de vetores X cujo fluxo preserva σ infinitesimalmente. Isto é, tal que $\mathcal{L}_X\sigma = 0$. Como facilmente se verifica, o conjunto $K_\sigma(M)$ das simetrias infinitesimais de σ constitui um subespaço vetorial de $\mathfrak{X}(M)$.

O fato fundamental é que se realizarmos o colchete $[X, Y]$ entre duas simetrias infinitesimais, então o campo resultado ainda é uma simetria infinitesimal! Isto significa que $K_\sigma(M)$ é uma *subálgebra de Lie* de $\mathfrak{X}(M)$.

O problema é que o espaço dos campos de Killing em geral possui dimensão infinita. Existe especial interesse nas subálgebras de $K_\sigma(M)$ que possuem dimensão finita. A razão é a seguinte: se \mathfrak{h} é uma delas, digamos de dimensão k , então existem campos linearmente independentes X_1, \dots, X_k que geram $K_\sigma(M)$. Tais campos definem uma distribuição em M . A independência linear entre eles significa exatamente que $[X_i, X_j] = C_{ij}^k X_k$, mostrando-nos, pelo teorema de Frobenius, que tal distribuição é integrável (veja [30]).

Por outro lado, ressaltamos que os elementos de \mathfrak{h} não são campos quaisquer, mas são precisamente aqueles cujo fluxo preserva σ infinitesimalmente. Assim, *espera-se que as simetrias infinitesimais de \mathfrak{h} traduzam condições explícitas sobre σ* . Como obtê-las?

Na próxima subseção construiremos uma regra que a cada grupo de Lie G faz corresponder uma álgebra de Lie \mathfrak{g} , chamada de *álgebra associada*. Ocorre que tal mapeamento é sobrejetivo sobre a categoria das álgebras de dimensão finita. Isto significa que toda álgebra de Lie de dimensão finita é associada a algum grupo de Lie por um processo de *exponenciação*.

Dito isto, retornando à nossa questão, observamos que a integrabilidade da estrutura definida pelos campos X_1, \dots, X_k é caracterizada pelo fato de todo $p \in M$ pertencer a uma subvariedade imersa $H_p \subset M$, cujo espaço tangente em qualquer $q \in H_p$ é gerado pelos vetores $X_i(q)$.

Ora, a álgebra de Lie \mathfrak{h} gerada pelos X_i é de dimensão finita e, portanto, associada a um certo grupo de Lie H . Este, por sua vez, age na variedade M de maneira natural, tendo como órbita em p precisamente a subvariedade H_p . Assim, a seção σ induz, via *pullback*, outra em cada uma das H_p , de modo que condições sobre as seções induzidas implicam condições sobre σ .

Associação

Relembramos que um grupo de Lie é um grupo interno a **Diff**. Em outras palavras, trata-se de uma variedade G que ao mesmo tempo possui estrutura de grupo dada por uma operação diferenciável, cuja inversão $inv(g) = g^{-1}$ também é diferenciável. Desta forma, tais entidades são geralmente complexas, uma vez que nelas se tem tanto informação *topológica* (estrutura de variedade) quanto *algébrica* (estrutura de grupo).

Nesta subseção, verificaremos que a todo grupo de Lie G faz-se corresponder um espaço vetorial de dimensão finita, o qual vem acompanhado de uma operação binária $[\cdot, \cdot]$ que o torna uma álgebra real. Ao invés de comutatividade e associatividade, tal álgebra é anticomutativa e cumpre com a identidade de Jacobi. Ela é chamada chamada de *álgebra de Lie associada à G* , sendo usualmente denotada por \mathfrak{g} .

De maneira mais precisa, construiremos um functor $\mathcal{L}ie : \mathbf{GLie} \rightarrow \mathbf{ALie}$, em que \mathbf{ALie} é a categoria das álgebras de Lie de dimensão finita (isto é, a subcategoria das álgebras reais de dimensão finita que são anticomutativas e satisfazem a identidade de Jacobi).

Uma vez realizada tal associação, a ideia é analisar a álgebra \mathfrak{g} e a partir de “informações infinitesimais” fornecidas por ela tentar inferir “informações globais” sobre o grupo G . Em suma, a estratégia baseia-se no seguinte: como um grupo de Lie é complicado, olha-se para a sua versão infinitesimal e lá se faz o que precisa ser feito. Finalmente, tenta-se reconstruir as partes de modo a obter o resultado desejado.

Como sempre, a etapa de “extrapolação do local para o global” é delicada. No que segue, nos resumiremos à introdução de um mapa natural $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ que reconstrói parte do grupo via um processo conhecido como *exponenciação*.

Realçamos, no entanto, que existem dois resultados fundamentais, usualmente conhecidos como *segundo e terceiro teoremas de Lie*, os quais garantem, respectivamente, que $\mathcal{L}ie$ é sobrejetivo em objetos (isto é, o processo de exponenciação pode ser definido para qualquer álgebra) e que tal functor é bijetivo em morfismos (e, portanto, uma equivalência) quando restrito à subcategoria \mathbf{GLie}_1 dos grupos simplesmente conexos. Em suma, $\mathbf{GLie}_1 \simeq \mathbf{ALie}$.

A fim de definir o functor *Lie*, realçamos que a álgebra \mathfrak{g} em algum sentido deve descrever versões infinitesimais das transformações do grupo G . Por sua vez, vimos na subseção anterior que a derivada de Lie é justamente a ferramenta que nos permite falar de versões infinitesimais de tensores. Assim, espera-se que ela seja a peça fundamental na definição de \mathfrak{g} .

Iniciamos observando que o comutador $[\cdot, \cdot]$ de campos vetoriais introduz uma estrutura de álgebra de Lie no conjunto $\mathfrak{X}(G)$, visto enquanto espaço vetorial real. Ora, mas $[X, Y]$ é exatamente $\mathcal{L}_X Y$ quando nos restringimos a campos completos. Assim, a maneira imediata de definir \mathfrak{g} seria considerá-la igual à álgebra $\mathfrak{X}(G)$. Ocorre que esta em geral possui dimensão infinita, o que contradiria o que procuramos. Assim, a próxima ideia é tomar \mathfrak{g} como sendo alguma subálgebra de dimensão finita de $\mathfrak{X}(G)$, formada exclusivamente por campos completos, a qual deve ser construída de maneira canônica.

Ora, tem-se uma ação natural de G em $\mathfrak{X}(G)$, que a cada (g, X) associa o *pullback* $L_g^* X$, induzindo-nos a considerar o subespaço dos campos que ficam estáveis por ela (tais campos são ditos *invariantes à esquerda*). Afirmamos que este subespaço possui dimensão finita. De fato, a regra $\mathfrak{X}(G) \rightarrow TG_e$, dada por $X(e)$ é naturalmente linear e sobrejetiva. Ao ser restrita aos campos invariantes ela também se torna injetiva (e, portanto um isomorfismo).

Além disso, observamos que todos estes campos são completos. De fato, como verificaremos nos próximos capítulos¹, a única curva integral de X é aquela $\gamma_X : \mathbb{R} \rightarrow G$ que passa pela origem, a qual fica inteiramente determinada por $\gamma'_X(0) = X(e)$. Em particular, ela define um morfismo injetivo entre o grupo abeliano \mathbb{R} e G , chamado de *subgrupo uniparamétrico de X* .

Por último, mostremos que o subespaço dos campos invariantes à esquerda é, na verdade, uma subálgebra de $\mathfrak{X}(G)$, de modo que cumpre com todos os requisitos desejados, levando-nos à tomá-lo como sendo a álgebra de Lie \mathfrak{g} de G . Com efeito, isto segue imediatamente da comutatividade do colchete de Lie com *pullbacks*:

$$L_g^*[X, Y] = L_g^*(\mathcal{L}_X Y) = \mathcal{L}_{L_g^* X}(L_g^* Y) = \mathcal{L}_X Y = [X, Y].$$

¹A razão é a seguinte: existe uma conexão afin natural em cada grupo de Lie G tal que a única geodésica que parte do elemento neutro com velocidade X é γ_X .

A regra $G \mapsto \mathfrak{g}$ define $\mathcal{L}ie$ em objetos. A fim de completar sua definição, relembramos haver um functor natural $\mathfrak{X} : \mathbf{Diff} \rightarrow \mathbf{Vec}_{\mathbb{R}}$, que a cada variedade associa o espaço de seus campos. Dotando cada $\mathfrak{X}(M)$ com comutador usual de campos, vê-se que tal functor em verdade assume valores na categoria das álgebras de Lie. Além disso, ele associa cada grupo de Lie à sua correspondente álgebra. Isto nos leva a definir $\mathcal{L}ie$ como sendo simplesmente a restrição de \mathfrak{X} a \mathbf{GLie} , como representado no diagrama abaixo.

$$\mathbf{GLie} \xrightarrow{\iota} \mathbf{Diff} \xrightarrow{\mathfrak{X}} \mathbf{ALie}$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\mathcal{L}ie}$$

Assim, fornecido um morfismo $f : G \rightarrow H$, o mapa $\mathcal{L}ie(f) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ é simplesmente aquele que a cada campo invariante devolve seu *pushforward* por f . Em outras palavras, como $\mathfrak{g} \simeq TG_e$ tem-se simplesmente $\mathcal{L}ie(f) = Df_e$.

Exemplo 10.2.1. Como rapidamente se verifica, se um grupo de Lie G é abeliano, então sua álgebra de Lie, introduzida da maneira acima, é comutativa e, consequentemente, associativa. Isto significa que *o colchete nada introduz à álgebra de um grupo abeliano*. Em particular, os morfismos entre \mathfrak{g} e qualquer outra álgebra nada mais são que transformações lineares entre os espaços subjacentes.

Exponencial

Para terminar, introduzamos o processo de exponenciação que havíamos comentado. Pois bem, como o grupo aditivo \mathbb{R} é abeliano, sua álgebra é comutativa, de modo que todo morfismo $\mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{g}$ é a multiplicação por um vetor fixo. Mais precisamente, a regra $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow L(\mathbb{R}; \mathfrak{g})$, definida por $\varphi_X(t) = tX$ é um isomorfismo.

Como a variedade \mathbb{R} é simplesmente conexa, pelo segundo teorema de Lie, obtém-se um único morfismo $\bar{\varphi} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbf{Mor}(\mathbb{R}; G)$ satisfazendo a condição $\mathcal{L}ie(\bar{\varphi}_X) = \varphi_X$. Sejam $\phi(X, t) = \varphi_X(t)$ e $\bar{\phi}$ definido de maneira análoga. A regra $\exp(X) = \bar{\phi}(X, 1)$ é canônica: trata-se do único mapa que deixa comutativo o diagrama abaixo. Ela é chamada de *mapa exponencial de G* .

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} \times \mathbb{R} & \xrightarrow{\bar{\phi}} & G \\ id \uparrow & & \uparrow \exp \\ \mathfrak{g} \times \mathbb{R} & \xrightarrow{\phi} & \mathfrak{g} \end{array}$$

Que morfismo será $\bar{\varphi}_X$? Relembramos que cada campo invariante X possui uma única curva integral γ_X , a qual é um morfismo de \mathbb{R} em G . Isto nos sugere que $\bar{\varphi}_X = \gamma_X$. A verificação de que tal mapa realmente cumpre com o requisitado segue da seguinte observação: para todo k , os caminhos $\gamma_X(kt)$ e $\gamma_{kX}(t)$ partem do mesmo ponto com igual velocidade e, portanto, devem ser coincidentes. Em particular, tem-se $\gamma_X(t) = \gamma_{tX}(0)$, de modo que

$$\gamma'_X(t) = \gamma'_{tX}(0) = (tX)(e) = \varphi_X(t).$$

Capítulo 11

Gauge

Nos capítulos anteriores, vimos que G -estruturas são os entes através dos quais as mais diversas geometrias se desenvolvem. Assim, diferentes G -estruturas originam diferentes conceitos geométricos. No presente capítulo, em contrapartida, buscamos por conceitos mais fundamentais, os quais estejam presentes em todas as geometrias.

Iniciamos o capítulo na primeira seção, onde discutimos o primeiro de tais conceitos: *o paralelismo*. Trata-se de uma maneira de conectar as fibras de diferentes pontos de um fibrado principal $\pi : P \rightarrow M$. Mostramos que a presença de tal conceito equivale à existência de uma decomposição do fibrado tangente de P em duas partes: uma definida pelo *kernel* de π e outra complementar a esta, cujos elementos são chamados de *vetores horizontais*. Assim, no fundo, *paralelismo* é o mesmo que *horizontabilidade*.

No caso de uma geometria associada a uma G -estrutura, verificamos que os mapeamentos que conectam as fibras são automorfismos da estrutura em questão (por exemplo, no caso da geometria riemanniana, são isometrias). Mais precisamente, são mapas que preservam elementos de $GL(n)/G$ (na geometria riemanniana, tais elementos são produtos internos). Reciprocamente, toda noção de paralelismo define uma redução no grupo estrutural de $\text{fr}(M)$ para o *grupo de holonomia da conexão*.

Na segunda seção, apresentamos a segunda noção geométrica intrínseca: a *curvatura*. Esta possui diversas caracterizações. Por exemplo, se lembrarmos que paralelismo equivale à conexão, e que esta é uma maneira de decompor o fibrado tangente, então podemos ver a curvatura como sendo a obstrução à integrabilidade da dis-

tribuição assim definida. Equivalentemente, é possível interpretar curvatura como sendo a quantidade que mede quão distante a holonomia está de ser *infinitesimalmente trivial* (isto é, trata-se da quantidade que gera a álgebra de Lie do grupo de holonomia).

As obras clássicas sobre o assunto contemplam [84, 46]. Elas, assim como o primeiro capítulo de [9] e [29], foram as principais referências utilizadas ao longo do capítulo.

11.1 Conexão

Todo fibrado $\pi : P \rightarrow M$ determina uma distribuição natural V em P . Trata-se, pois, daquela que a cada ponto $a \in P$ associa o *kernel* de $d\pi_a$. Em outras palavras, tem-se uma parte privilegiada $V(a)$ de TP_a (e, portanto, subfibrado $VP \subset TP$). Seus elementos são ditos *verticais* em a . Uma *conexão* no fibrado π é simplesmente uma distribuição H em P complementar a V . Isto significa que cada espaço tangente TP_a se decompõe na forma $V(a) \oplus H(a)$ e, conseqüentemente, existe fibrado HP satisfazendo $TP = VP \oplus HP$. Em outras palavras, é uma maneira de falar de *vetores horizontais* em cada ponto.

Observamos que, no caso particular em que π é um G -fibrado principal, então “ser vertical” é propriedade invariante pela ação de G . Isto significa que, se $\text{Act} : G \rightarrow \text{Diff}(P)$ é a ação natural definida por π , então os difeomorfismos Act_g são simetrias de V (ou seja, vale $\text{Act}_g^*V = V$). Em outras palavras, o *pushforward* de Act_g mapeia isomorficamente vetores verticais em vetores verticais, de modo que existe a seta pontilhada no primeiro dos diagramas abaixo.

$$\begin{array}{ccc} TP & \xrightarrow{\text{Act}_{g^*}} & TP \\ \uparrow \iota_1 & & \uparrow \iota_1 \\ VP & \dashrightarrow & VP \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} TP & \xrightarrow{\text{Act}_{g^*}} & TP \\ \uparrow \iota_2 & & \uparrow \iota_2 \\ HP & \dashrightarrow & HP \end{array}$$

Diante disso, ao se trabalhar com fibrados principais, costuma-se pedir a mesma invariância à propriedade “ser horizontal”. Mais precisamente, define-se uma *conexão num G -fibrado principal* $\pi : P \rightarrow M$ como sendo uma distribuição H em P , a qual não só é complementar a V , como também é invariante pela ação de G . Assim,

pressupõe-se a existência da seta pontilhada no segundo dos diagramas acima.

Esta postura (de trabalhar com distribuições equivariantes) traz consigo diversas conveniências. A mais imediata delas é que os levantamentos horizontais de um dado vetor $v \in TM_p$ estão todos canonicamente ligados pelos *pushforwards* dos Act_g . Por exemplo, mostraremos que conexões em G -fibrados principais equivalem a 1-formas em P com valores na álgebra \mathfrak{g} que satisfazem certas condições. Isto reforçará a máxima, já evidenciada no capítulo anterior pelas G -estruturas, de que *estruturas geométricas numa variedade P são induzidas por seções de fibrados descendentes de TP* .

Pois bem, dada uma conexão H em $\pi : P \rightarrow M$, afirmamos que ela induz uma seção A do fibrado $\Gamma(TP^* \otimes \mathfrak{g})$, chamada de *1-forma de conexão*, a qual é:

1. *vertical*, no sentido de que $A_a(v) = 0$ para todo vetor v horizontal a a ;
2. *equivariante pela ação adjunta de G* , significando que, para qualquer g , o *pullback* de A pelo difeomorfismo Act_g é precisamente $\text{Ad}_g \cdot \omega$.

A ideia é simples: verificando que cada $V(a)$ é isomorfo a \mathfrak{g} , digamos por um isomorfismo ϕ_a , definiremos A de modo que A_a coincida com ϕ_a quando restrita a $V(a)$ e seja nula no complementar. Em outras palavras, de posse dos ϕ_a colocamos $A_a = \phi_a^{-1} \circ \text{ver}$, em que, sob o isomorfismo canônico abaixo, *ver* é simplesmente a projeção na primeira entrada (a projeção na segunda entrada é denotada por *hor*):

$$V(a) \oplus H(a) \simeq V(a) \times H(a).$$

Para construir os ϕ_a , notamos que a ação Act define uma representação de G em $\text{Diff}(P)$ a qual, por sua vez, induz uma representação derivada $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{X}(P)$, que a cada vetor $v \in \mathfrak{g}$ associa seu campo fundamental X_v . Dado $a \in P$, colocamos então $\phi_a(v) = X_v(a)$. Que o mapa ϕ_a assim definido assume valores em $V(a)$ não há dúvidas. Afinal, por definição $X_v(a) = \gamma'(0)$, com $\gamma(t) = e^{tv} * a$, de modo que

$$D\pi_a(X_v(a)) = D\pi_a(\gamma'(0)) = (\pi \circ \gamma)'(0) = 0,$$

pois o caminho $\pi \circ \gamma$ é constante. A injetividade e a sobrejetividade de ϕ_a vem, respectivamente, do fato da ação Act ser livre e transitiva.

Reciprocamente, dada uma 1-forma ω com valores em \mathfrak{g} , esta define uma distribuição H em P , pondo $H(a) = \ker(\omega_a)$. Se ω é vertical, então H é complementar a V . Por sua vez, a equivariância de ω pela ação adjunta de G acarreta na invariância de H por tal grupo. Portanto, tem-se realmente uma correspondência bijetiva

$$\begin{array}{ccc} \text{conexões num} & & \text{1-formas com valores em } \mathfrak{g} \\ G\text{-fibrado principal} & \iff & \text{verticais e equivariantes} \\ & & \text{pela ação adjunta} \end{array}$$

Transporte Paralelo

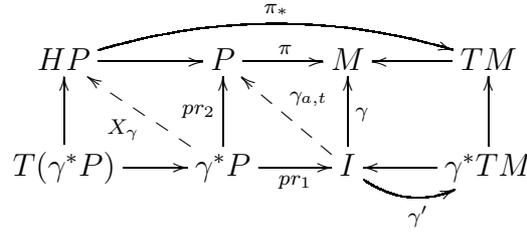
Veremos agora que, de fato, a presença de uma conexão num fibrado $\pi : P \rightarrow M$ induz uma noção de *paralelismo* de vetores tangentes.

Iniciamos observando que conexões passam ao *pullback*. Com efeito, se a conexão em P é definida por uma distribuição H , então, para todo mapa diferenciável f , a distribuição f^*H é conexão em f^*P (o fibrado f^*TP decompõe-se em termos de f^*VP e f^*HP). Particularmente, no contexto dos fibrados principais, se A é 1-forma de conexão, então o correspondente f^*A também o é.

Com isto em mente, diz-se que um caminho $\alpha : I \rightarrow P$ realiza *transporte paralelo* se $\alpha'(t)$ é vetor horizontal para cada t . Isto é, quando α' é seção horizontal de α^*TP . Neste caso, fala-se que o vetor $v = \alpha'(0)$ é *transportado paralelamente* ao longo de α e que os outros $\alpha'(t)$ são *paralelos a v segundo a curva α* .

Por exemplo, qualquer curva integral de um campo horizontal em P (isto é, de uma seção do fibrado HP) realiza transporte paralelo. Diante disso, vamos mostrar que, dado $\gamma : I \rightarrow M$, a escolha de um ponto (a, t) em γ^*P determina um único levantamento $\gamma_{a,t}$ de γ , o qual realiza transporte paralelo. Mais precisamente, provaremos que γ induz um campo horizontal X_γ em γ^*P , de modo que, pelo teorema de existência e unicidade para EDO's, este admite um única curva integral que passa por cada $(a, t) \in \gamma^*P$. Sua projeção em P será $\gamma_{a,t}$, como ilustrado no diagrama

abaixo (para melhor entendê-lo, recomendamos girá-lo 90° no sentido horário).



Para definir X_γ notamos que, como o espaço $V(a)$ é o *kernel* de $D\pi_a$, a restrição de tal aplicação a $H(a)$ determina um isomorfismo deste último sobre $TM_{\pi(a)}$. Posto isto, colocamos

$$X_\gamma(a, t) = D_a\pi^{-1}(\gamma'(t)).$$

Tal campo induz uma família a dois parâmetros de aplicações

$$\Gamma(\gamma)_t^s : P_{\gamma(t)} \rightarrow P_{\gamma(s)}, \quad \text{tais que} \quad \Gamma(\gamma)_t^s(a) = X_{\gamma_t}^{s-t}(a),$$

usualmente chamadas de *transporte paralelo* de γ . Concluimos, assim, que a presença da conexão num fibrado $\pi : P \rightarrow M$ realmente induz uma maneira de transportar elementos de uma fibra para elementos de outra fibra, de tal modo que, ao longo do trajeto, a “direção” é sempre mantida.

As aplicações $\Gamma(\gamma)_t^s$ anteriores satisfazem

$$\Gamma(\gamma)_t^t = id \quad \text{e} \quad \Gamma_{t'}^s(\gamma) \circ \Gamma(\gamma)_t^{t'} = \Gamma_t^s(\gamma),$$

como logo se verifica. Reciprocamente, pode-se mostrar que toda regra que associa uma família a dois parâmetros a cada caminho $\gamma : I \rightarrow M$, de tal modo que as propriedades anteriores sejam satisfeitas, define conexão em P . Portanto, tem-se uma equivalência

$$\text{conexões num} \iff \text{noções de} \\ \text{fibrado qualquer} \iff \text{transporte paralelo}$$

Holonomia

Na subseção anterior, vimos que conexões equivalem a transportes que ligam fibras distintas preservando a direção inicial. No que segue, verificaremos que toda conexão num G -fibrado principal determina reduções de tal fibrado. Particularmente,

conexões em $\text{fr}(M)$ induzem estruturas geométricas na variedade M (a recíproca para este fato será estudada na última seção do capítulo).

Em suma, contemplaremos o seguinte diagrama, onde as setas cheias existem em qualquer situação e a tracejada no âmbito dos fibrados principais. Ele representa o fato de que a presença de conexões nos permite falar de geometria num contexto mais genérico que o das G -estruturas.

$$\begin{array}{ccccccc} \text{transporte} & \iff & \text{conexões em} & \iff & \text{reduções no} & \iff & \text{geometria} \\ \text{paralelo} & & \text{fibrados} & & \text{grupo estrutural} & & \end{array}$$

A redução que uma 1-forma de conexão A implementa num fibrado principal é o *grupo de holonomia* de A , o qual passamos a discutir. Como vimos, dados um caminho γ e um ponto em γ^*P , existe um único levantamento horizontal $\gamma_{a,t}$. Questionemos sobre as propriedades que $\gamma_{a,t}$ herda de γ . Por exemplo, se γ for um *loop*, seus levantamentos também o serão? Para qualquer par $(a, 0)$ em γ^*P (isto é, para cada ponto em $P_{\gamma(0)}$), o *grupo de holonomia* $\text{Hol}(A, a)$ da conexão A em a é justamente o invariante que mede essa condição.

Com efeito, define-se $\text{Hol}(A, a)$ como sendo o conjunto de todo elemento $g \in G$ tal que existe um caminho horizontal ligando a a $g * a$. Este constitui, na verdade, um subgrupo de G . Vamos mostrar que a informação traduzida por ele é realmente a que procuramos. Se γ é um *loop* em M , então, pela propriedade $\pi \circ \gamma_a = \gamma$, certamente há um g_γ satisfazendo

$$\gamma_a(1) = g_\gamma * \gamma_a(0) = g_\gamma * a,$$

donde $g_\gamma \in \text{Hol}(A, a)$. Particularmente, γ_a é um *loop* se, e somente se, $g_\gamma = e$. Desta forma, se o grupo de holonomia em a é trivial, então o levantamento horizontal γ_a de qualquer *loop* γ também é um *loop*, que é a condição que procurávamos.

Mostremos agora que o G -fibrado principal $\pi : P \rightarrow M$, ditado pela conexão A , admite redução ao grupo de holomia de qualquer ponto. Com efeito, dado um certo a , seja $P(a)$ seu *fibrado holonômico*. Isto é, seja $P(a) \subset P$ o conjunto formado de todo a' que pode ser ligado em a por um caminho horizontal. Tal conjunto é exatamente aquele restrito ao qual $\text{Hol}(A, a)$ age de forma livre e transitiva.

Afirmamos que $\pi : P(a) \rightarrow M$ também é localmente trivial e, portanto, que consiste na redução desejada. Como um fibrado principal é trivial se, e só se, admite uma seção global, basta construirmos uma seção local de π nas vizinhanças de cada $p \in M$. Escolhido um tal ponto, seja $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma carta em suas vizinhanças. Dado um outro ponto q em U , seja γ^q algum caminho ligando-o a p . Por exemplo, supondo $x(U)$ convexo, γ^q pode ser obtido tomando x^{-1} na semi-reta que liga $x(p)$ a $x(q)$. Fixado qualquer $a' \in P(a)$ na fibra de p , definimos $s : U \rightarrow P(a)$ como sendo a regra que a cada q faz corresponder o ponto de chegada do levantamento horizontal de γ^q , determinado por a' . Isto é, $s(q) = \gamma_{a'}^q(1)$. Tal mapa é seção local, garantindo a trivialidade local de $P(a)$.

Derivada Exterior Covariante

Provemos que toda conexão A num G -fibrado principal $\pi : P \rightarrow M$ induz, para cada ação efetiva $G \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ de G num espaço vetorial \mathbb{E} , uma correspondente maneira de derivar seções que tomam valores no fibrado vetorial E associado a π , chamada de *derivada exterior covariante* e usualmente denotada por D_A .

Para tanto, em primeiro lugar notemos que, como o functor que a cada fibrado associa o módulo de suas seções é monoidal, a decomposição $VP \oplus HP$ proporcionada por A induz uma outra $\mathfrak{X}(P) \simeq \mathfrak{X}(HP) \oplus \mathfrak{X}(VP)$. Sob tal identificação, utilizemos de X_{hor} e X_{ver} para representar as respectivas componentes horizontal e vertical de um campo vetorial arbitrário X em P . Fica então definido um homomorfismo de $\mathcal{D}(M)$ -módulos

$$hor : \Omega^k(P) \rightarrow \Omega_H^k(P) \quad \text{dado por} \quad (hor\omega)(X_1, \dots, X_k) = \omega((X_1)_{hor}, \dots, (X_k)_{hor}).$$

Assim, a k -forma $hor\omega$ (denominada *parte horizontal* de ω) é simplesmente aquela que ao ser avaliada em certos vetores devolve como resultado ω avaliada na projeção horizontal de tais vetores. Vê-se que a parte horizontal de uma k -forma que assume valor em \mathbb{E} e é equivariante por ρ também possui tais propriedades. Em seguida, consideramos a regra

$$d_A : \Omega_E^k(P; \mathbb{E}) \rightarrow \Omega_{EH}^{k+1}(P; \mathbb{E}), \quad \text{tal que} \quad d_A\omega = hor(d\omega). \quad (11.1)$$

Finalmente, definimos D_A por ser o mapa obtido de d_A pela correspondência entre o espaço das k -formas em P que são equivariantes por ρ e o espaço das k -formas em M com valores no fibrado E . Em outras palavras, consideramos D_A como sendo a única aplicação que deixa comutativo o primeiro dos diagramas abaixo. Assim, no caso particular em que $k = 0$, lembrando que as 0-formas da variedade M com valores em E nada mais são que seções de tal fibrado, tal regra se torna realmente uma maneira de derivar seções de E (segundo os diagramas abaixo).

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{EH}^0(P; \mathbb{E}) & \xrightarrow{d_A} & \Omega_{EH}^1(P; \mathbb{E}) \\ \simeq \downarrow & & \downarrow \simeq \\ \Gamma(E) & \dashrightarrow & \Omega^1(M; E) \end{array}$$

Compatibilidade

Como discutiremos, o seguinte fato é fundamental no estudo da geometria: os vetores de V que ficam invariantes pela ação natural do grupo de holonomia $\text{Hol}(\omega, a)$, obtida diretamente da ação de G , estão em bijeção com as seções s do fibrado associado E que são *covariantemente constantes*. Isto é, tais que $D_A s = 0$ (fala-se também que s é *compatível com A*).

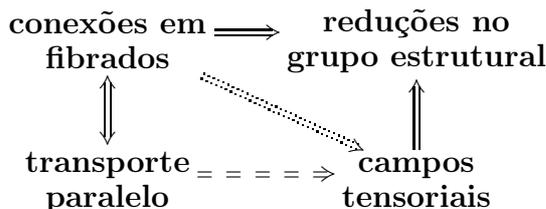
Para conexões em $\text{Fr}(M)$ esta correspondência tem um significado bastante claro. Com efeito, em geral toma-se V como sendo algum espaço de formas $V \subset \Omega^k(\mathbb{R}^n)$, dotado da ação natural de $GL(n; \mathbb{R})$. Conseqüentemente, o fibrado associado E é um subfibrado de $\wedge^k TM^*$ e, portanto, a existência de uma k -forma $\omega \in V$ invariante pela ação de $\text{Hol}(A, a)$ equivale à existência de uma k -forma $\tilde{\omega} : M \rightarrow E$ compatível com A . Observamos que, em tal situação, $\text{Hol}(A, a)$ contém o grupo G das transformações que deixam ω invariante e, como a redução de um fibrado principal ao grupo de holonomia sempre existe, também existe a redução de $\text{Fr}(M)$ a G , de modo que M admite uma tal G -estrutura.

Conclusão: no último capítulo vimos exemplos de que a existência de certos campos tensoriais numa variedade M induz reduções de $\text{Fr}(M)$ ao grupo das transformações que deixam tais campos invariantes ponto a ponto. O resultado anterior, por sua vez, nos diz que a presença de uma conexão pode ser suficiente para garantir a

existência destes campos. Além disso, ele nos ensina como obtê-los.

Ainda sobre tal resultado, três observações:

1. ele pode ser encarado de uma maneira bastante simples: no diagrama abaixo, *a seta pontilhada existe se, e somente se, a segmentada também existe* (o que é natural, em virtude da equivalência entre conexões e noções de transporte paralelo)



2. ele nos fornece uma estratégia de ataque ao problema de “*determinar as possíveis geometrias que podem ser introduzidas numa variedade*”. Com efeito, primeiro procura-se pelas conexões que nela existem e depois analisa-se vetores invariantes pelas correspondentes holonomias. Para cada vetor, tem-se uma diferente geometria;
3. particularmente, ele também nos fornece uma estratégia para encarar o problema de “*determinar as geometrias que são compatíveis com outra previamente estabelecida*”. Por exemplo, isto é exatamente o que se precisa responder ao se estudar gravitação relativista: parte-se do pressuposto que existe métrica lorentziana compatível com uma conexão. Entretanto, em alguns sistemas precisa-se de estruturas adicionais (orientabilidade, orientabilidade temporal, alguma folheação, estruturas espinoriais, etc) e que, num certo sentido, concordem com a geometria da métrica. Assim, no contexto genérico a ideia é a seguinte: dada uma conexão cuja holonomia deixa um certo vetor invariante (que é a métrica no caso da gravitação), busca-se por outros vetores invariantes pela mesma holonomia (correspondendo às demais estruturas geométricas que volta e meia se necessita utilizar).

Em suma, todas as três observações se resumem na máxima de que *conhecer holonomia implica conhecer geometria*, explicitada na seta abaixo

$$\text{holonomia} \Longrightarrow \text{geometria}$$

11.2 Curvatura

Na seção anterior, estudamos os fibrados $\pi : P \rightarrow M$ dotados de alguma *distribuição horizontal* H , a qual nos fornecia uma correspondente decomposição $TP = VP \oplus HP$ e uma noção de *transporte paralelo*, capturada pelo levantamento horizontal γ_a de caminhos γ em M . A dependência de γ_a com respeito ao caminho γ , por sua vez, é medida pelo *grupo de holonomia* $\text{Hol}(A, a)$, o qual traduz diversas informações geométricas.

Iniciamos esta seção observando que a *estrutura de* $\text{Hol}(A, a)$ *está intimamente ligada com condições de integrabilidade de* H . Motivamos tal relação mostrando que, se H é integrável, então a holonomia é trivial. Pois bem, dado $\gamma : I \rightarrow M$ *loop* em M , lembramos que qualquer levantamento γ_a é curva integral de um campo horizontal. Sob hipótese de integrabilidade, cada ponto $a \in P$ está contido numa *única* subvariedade S_a e, em particular, a curva integral γ_a está inteiramente contida em S_a . Portanto, como $\gamma_a(1)$ está na mesma fibra que $\gamma_a(0)$, segue-se que tais pontos são coincidentes, mostrando que o levantamento γ_a também é *loop* e garantindo a trivialidade da holonomia.

Em seguida, notemos que o teorema de Frobenius nos fornece uma caracterização à integrabilidade de H . Com efeito, tal distribuição será integrável se, e somente se, os campos horizontais (isto é, as seções de HP) constituírem uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{X}(M)$. Em outras palavras, se, e só se, para quaisquer campos horizontais X e Y , o colchete $[X, Y]$ entre eles também for um campo horizontal. Assim, a integrabilidade de H fica inteiramente caracterizada pela nulidade do mapa ¹

$$\Omega : \mathfrak{X}(P) \times \mathfrak{X}(P) \rightarrow \mathfrak{X}(VP), \quad \text{tal que} \quad \Omega(X, Y) = -[X_{hor}, Y_{hor}]_{ver},$$

chamado de *curvatura* de H . Isto nos dá o seguinte “slogan”: *curvatura é obstrução para holonomia trivial*. Em verdade, veremos que a curvatura determina a estrutura da holonomia, o que pode ser representado por

$$\text{curvatura} \implies \text{holonomia} \implies \text{geometria}$$

Observamos que, no contexto dos fibrados principais, o fibrado vertical VP é

¹O sinal negativo vem por conveniência, como veremos na próxima subseção.

trivial e isomorfo a $pr_1 : P \times \mathfrak{g} \rightarrow P$ pela regra que a cada par (a, v) em $P \times \mathfrak{g}$ associa o vetor $X_v(a)$. Assim, os campos vetoriais se identificam com as funções diferenciáveis de P na álgebra \mathfrak{g} e, portanto, a curvatura R torna-se uma 2-forma horizontal em P com valores em \mathfrak{g} . Tal forma também é equivariante pela ação adjunta, uma vez que campos horizontais são invariantes por G . Em suma, Ω é um elemento de $\Omega_{EH}^2(P; \mathfrak{g})$.

O fato fundamental (usualmente conhecido como teorema de Ambrose-Singer; para mais detalhes, veja [30, 71]) é este: *para todo par (A, a) , a subálgebra de Lie $\mathfrak{hol}(A, a) \subset \mathfrak{g}$ do grupo de holonomia $\text{Hol}(A, a)$ é gerada pela imagem da forma de curvatura Ω enquanto restrita aos campos horizontais do fibrado holonômico $P(a)$. Em outras palavras, é gerada pelos vetores $\Omega_u(v, w) \in \mathfrak{g}$, com $u \in P(a)$. Assim, uma vez conhecida a curvatura, determina-se o grupo de holonomia (ou parte dele) por exponenciação da álgebra.*

Identidades

Obtenhamos agora uma porção de identidades úteis, usualmente conhecidas como *identidades de Bianchi e de Ricci*. Para tanto, notemos que a derivada exterior covariante d_A pode ser pensada como uma “correção (ou perturbação) em primeira ordem” para a derivada exterior d , introduzida pela presença da conexão A . Mais precisamente, pode-se escrever $d_A = d + \delta_A$, em que δ_A é uma regra totalmente definida em termos de A , que não depende de termos de ordem superior como, por exemplo, $A^2 = A \wedge A$.

De fato, para uma k -forma ω com valores em \mathbb{E} e equivariante por uma representação ρ , dados campos X_0, \dots, X_k quaisquer, decompondo-os em termos de uma soma de campos horizontais e verticais, e utilizando essencialmente do fato de que a componente vertical comuta com a horizontal, chega-se à relação

$$\begin{aligned} d\omega(X_0, \dots, X_k) &= d\omega((X_0)_{hor}, \dots, d(X_k)_{hor}) + \sum_{i=0}^k (-1)^{i+1} \rho_*(A(X_i)) \cdot \omega(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_k) \\ &= d_A\omega(X_0, \dots, X_k) - \sum_{i=0}^k (-1)^i \rho_*(A(X_i)) \cdot \omega(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_k), \end{aligned}$$

em que $\rho_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ é a representação derivada ρ , permitindo-nos realmente

escrever a derivada exterior covariante d_A na forma $d + \delta_A$, com $\delta_A = \rho_*(A) \wedge$

Observamos, em particular, que ao ser avaliado em campos horizontais, $d_A A$ nada mais é que a curvatura. Com efeito, pela expressão anterior, lembrando que A é vertical e equivariante pela ação adjunta (cuja representação derivada é a identidade), temos

$$d_A A(X_{hor}, Y_{hor}) = dA(X_{hor}, Y_{hor}) = -[X_{hor}, Y_{hor}]_{ver} = \Omega(X, Y),$$

evidenciando a motivação para introduzirmos um sinal negativo na definição de Ω . Isto nos leva a *redefinir a curvatura como sendo o próprio $d_A A$* (note que a definição inicial de curvatura foi introduzida de modo que esta fosse uma obstrução à integrabilidade da distribuição H . De fato, esta nova definição mantém tal propriedade).

Assim, *a curvatura nada mais é que a derivada covariante da própria conexão*. Um cálculo direto fornece $d_{\nabla} \Omega = d_{\nabla}^2 \omega = 0$, que é conhecida como *identidade de Bianchi*. Observamos, no entanto, que nem sempre se tem $d_{\nabla}^2 = 0$, o que reflete o fato das derivadas exteriores covariantes não definirem uma teoria de cohomologia. De fato, tem-se $d_{\nabla} = d + [-, \Omega]$, de modo que a curvatura é exatamente a obstrução para $d_{\nabla}^2 = 0$.

Para detalhes, sugerimos a secção 20.4 de [29] ou a quinta secção do capítulo II de [46]. Outras referências sobre os assuntos que foram aqui abordados são [30] e [71].

Parte III

Buracos Negros

Capítulo 12

Gravitação

Nas partes I e II, foram desenvolvidos os elementos em ordem crescente de complexidade a fim de se entender a teoria proposta por Einstein no início do século XX com o objetivo de explicar a gravitação; tal teoria, que ficou conhecida como relatividade geral, passou pelo crivo de inúmeros experimentos científicos desde então e consiste na teoria mais verificada da atualidade. Recentemente, uma de suas previsões – a existência de *ondas gravitacionais* – foi confirmada (ver capítulo 18) dando maior credibilidade ainda para a teoria. Einstein revolucionou o pensamento científico porque a relatividade geral, assim como a mecânica quântica, reforça a ideia de que a natureza não é intuitiva do ponto de vista do homem, especialmente em regiões onde não temos acesso direto, como é o caso do mundo astronômico ou do subatômico. Diante disso, o que Einstein propõe é que a busca por uma explicação do universo passa necessariamente pela correta determinação da sua estrutura matemática. Por causa desse pensamento oriundo das teorias revolucionárias do início do século passado, a topologia e a geometria se desenvolveram tanto e a interface entre física e matemática se tornou mais robusta.

Este capítulo tem por objetivo apresentar ao leitor a estrutura matemática básica da relatividade geral, utilizando dos conceitos desenvolvidos nos capítulos precedentes. Na primeira seção, iremos mostrar como Einstein foi levado às equações do campo gravitacional e na segunda seção, como sua teoria pode ser descrita de forma concisa através da linguagem mais moderna dos fibrados vetoriais.

Essa terceira parte tem um enfoque diferente do restante do livro na medida em

que se destina principalmente à interpretação física de tópicos da teoria matemática de buracos negros. Dessa forma, não é assumido que o leitor tenha feito uma leitura prévia das partes I e II. Por isso, alguns conceitos podem estar repetidos ou, inclusive, apresentados de outra forma em relação aos capítulos anteriores. Uma obra bem interessante, que procura fornecer uma sólida e moderna base matemática ao leitor, ao mesmo tempo em que esclarece a interface entre os conceitos aqui apresentados e as teorias físicas atuais, é [71]. Outras referências sobre o assunto são [68, 35, 92, 89, 16].

12.1 Equações de Einstein

Uma das observações mais antigas sobre a gravitação remonta a Galileu em seus experimentos jogando pesos do alto da torre de Pisa (essa é uma imagem pictórica; na verdade, Galileu chegou a suas conclusões analisando a queda de pesos em planos inclinados): *no vácuo, todos os corpos caem com a mesma aceleração*. Em outras palavras, é possível distinguir-se movimento de queda livre da ação de um campo eletromagnético pelas diferentes acelerações de partículas com diferentes cargas; com a gravidade isso não acontece porque a resposta da matéria à gravitação é universal. É claro que isso é válido para regiões suficientemente pequenas do espaço-tempo, pois caso contrário surgem discrepâncias no campo gravitacional que são detectadas como forças de maré.

Einstein extrapolou esse raciocínio e estabeleceu o seu famoso princípio de equivalência:

Em regiões suficientemente pequenas do espaço-tempo, é impossível distinguir-se entre a ação da gravidade e referenciais uniformemente acelerados, não importa qual experimento seja feito.

O princípio de equivalência de Einstein afirma que a gravitação acopla não apenas com a massa de repouso (como estabeleceu Newton), mas com todas as formas de energia. Como consequência, não existe objeto *gravitacionalmente neutro* em relação ao qual se possa medir a aceleração devida à gravidade. Diante disso e do papel desenvolvido pelos referenciais uniformemente acelerados, definiu-se como ace-

lação gravitacional zero, o movimento de corpos em queda livre. Como o princípio de equivalência de Einstein vale apenas localmente, os referenciais inerciais (corpos em queda livre) de objetos distantes são independentes, ou seja, as velocidades medidas em relação a eles não podem ser comparadas.

A ideia de que referenciais inerciais, onde valem as leis da relatividade especial (espaço plano quadridimensional), só podem existir localmente, corresponde à possibilidade de se reduzir a métrica à sua forma canônica em cada ponto de uma variedade [16]. A impossibilidade de se comparar velocidades (vetores) entre dois referenciais inerciais distantes corresponde à dependência do caminho durante o transporte paralelo ao longo de uma curva. O movimento de queda livre, definido como aceleração nula (derivada covariante do vetor tangente à curva igual a zero), corresponde às geodésicas (devidamente parametrizadas). Essas considerações foram suficientes para motivar Einstein a considerar a gravitação como uma manifestação da curvatura do espaço-tempo.

Em poucas palavras, a teoria da gravitação pode ser descrita como:

O espaço-tempo consiste numa variedade riemanniana quadridimensional com uma métrica indefinida de assinatura -2 que dá origem a uma conexão riemanniana para a qual o traço reverso do tensor de curvatura é proporcional ao tensor energia-momento que descreve a matéria e os campos não gravitacionais.

A necessidade de uma métrica indefinida de assinatura -2 provém do fato de que o espaço-tempo, pelo princípio de equivalência, deve ser localmente semelhante ao espaço de Minkowski da relatividade especial, que possui uma métrica da forma

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \quad (12.1)$$

onde c denota a velocidade da luz (geralmente tomada igual a um por escolha de unidades).

Com essa assinatura, a métrica do espaço-tempo é indefinida de modo que qualquer uma das condições abaixo pode se verificar para um vetor X :

- i) $g(X, X) > 0$, caso em que X denomina-se *de tipo-tempo*;
- ii) $g(X, X) = 0$, caso em que X denomina-se *de tipo-luz* (ou *nulo*);

iii) $g(X, X) < 0$, caso em que X denomina-se *de tipo-espaço*.

Partículas materiais (massa de repouso finita) descrevem trajetórias *de tipo-tempo*, enquanto que partículas sem massa (isto é, fótons, grávitons) descrevem trajetórias *de tipo-luz*. O comprimento de arco das geodésicas do tipo-tempo é interpretado como o tempo próprio medido no referencial da partícula material. Geodésicas do tipo-luz não podem ser parametrizadas pelo comprimento de arco, mas admitem parâmetros afins (para um estudo das geodésicas, sugerimos o capítulo 1 de [19]).

Uma conexão riemanniana é aquela que é compatível com a métrica e cuja torção se anula. Além de sua existência e unicidade, a escolha de uma conexão com essas propriedades se justifica pelo fato de que:

- (i) a norma de um vetor transportado paralelamente sob essa conexão se preserva ao longo de qualquer curva;
- (ii) os extremos do funcional de comprimento são atingidos por geodésicas relativas a essa conexão; e
- (iii) o tensor de Ricci é simétrico e consiste na única contração independente do tensor de curvatura de Riemann.

O item (i) acima garante o caráter (tipo-tempo, luz ou espaço) do movimento geodésico descrito pelas partículas em queda livre. O item (ii) unifica as noções de linha reta (geodésica) e caminho mais curto entre dois pontos para um espaço curvo.

Como localmente a gravitação acopla com todas as formas de energia e sua ação é manifestada pela curvatura do espaço-tempo, Einstein supôs que a relação mais simples entre essas quantidades seria uma equação tensorial de proporcionalidade entre os tensores T e \mathcal{G} ,

$$\mathcal{G} = kT,$$

ambos simétricos de tipo (0,2), onde T representa o tensor energia-momento e \mathcal{G} deveria ser obtido do tensor de Riemann,

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z,$$

em que X, Y, Z são campos vetoriais e ∇ é a conexão, e possuir divergente nulo, ou seja,

$$\mathcal{G}_{j;i}^i = 0 \quad (12.2)$$

ao longo da variedade (por causa da conservação da energia, representada por $T_{j;i}^i = 0$)¹.

Como em uma conexão riemanniana o tensor de Ricci, com componentes R_{ij} , é simétrico, é a única contração independente do tensor de Riemann e seu traço reverso

$$\mathcal{G}_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R$$

satisfaz a condição (12.2), seguem as equações de Einstein

$$\mathcal{G} = \frac{8\pi G}{c^4}T$$

ou, em componentes,

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ij}, \quad (12.3)$$

onde $\frac{8\pi G}{c^4}$ é a constante de proporcionalidade obtida a partir de comparações com o limite newtoniano² e R é a curvatura escalar obtida através do traço do tensor de Ricci.

Uma forma alternativa das equações (12.3) é

$$R_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}T\right), \quad (T = g^{ij}T_{ij}),$$

de forma que no vácuo (regiões do espaço-tempo em que $T_{ij} = 0$), as equações de Einstein se reduzem a

$$R_{ij} = 0.$$

¹O ponto e vírgula corresponde à aplicação da derivada covariante.

²O limite newtoniano consiste nas três condições abaixo:

- (i) As partículas devem se mover lentamente com respeito à velocidade da luz: $\frac{dx^i}{d\tau} \ll \frac{dt}{d\tau}, i = 1, 2, 3$.
- (ii) O campo gravitacional é fraco, podendo ser considerado como uma perturbação da métrica η do espaço plano: $g_{ij} = \eta_{ij} + h_{ij}, |h_{ij}| \ll 1, i, j = 0, 1, 2, 3$.
- (iii) O campo gravitacional é estático, ou seja, é invariante com o tempo: $\partial_0 g_{ij} \equiv 0, i, j = 0, 1, 2, 3$.

As equações de Einstein representam equações diferenciais de segunda ordem nas funções g_{ij} que compõem a métrica. Como ambos os membros constituem-se de tensores simétricos de ordem $(0,2)$, existem apenas dez equações independentes. O fato do tensor \mathcal{G} , denominado *tensor de Einstein*, satisfazer a condição (12.2) impõe mais quatro graus de liberdade à solução, reduzindo para seis o número de equações independentes. Isso condiz com a definição do espaço-tempo como uma variedade quadridimensional, pois assim todos os tensores estão definidos a menos de mudanças de coordenadas (difeomorfismos, cuja representação envolve quatro funções).

Quando o tensor energia-momento é dado pelo tensor de Maxwell do campo eletromagnético,

$$T_{ab} = \eta^{cd} F_{ac} F_{bd} - \frac{1}{4} \eta_{ab} F_{ef} F^{ef},$$

as equações (12.3) são conhecidas como *equações de Einstein-Maxwell*. No capítulo 2 de [?], essas equações estão explicitadas para o caso de uma métrica suficientemente geral.

12.2 Descrição Moderna

Na seção anterior, demos um enfoque ao raciocínio que levou Einstein a construir um modelo para a gravitação baseado nos elementos da geometria riemanniana. De lá para cá, a linguagem matemática se desenvolveu muito, principalmente inspirada na física teórica. O objetivo desta seção é dar uma caracterização mais moderna para a relatividade geral, utilizando o conceito de fibrado. Para isso, vamos revisar certos conceitos já vistos em outras partes do livro, apresentando-os de forma mais específica para que o leitor entenda melhor as estruturas envolvidas e como elas se relacionam umas com as outras. Essa subseção foi construída na mesma linha de pensamento das obras [71] e [30]. Os resultados serão apenas enunciados e as respectivas demonstrações são deixadas para consulta a essas referências.

Fibrados

O conceito de *fibrado* capta a ideia da construção de um campo de força sobre um espaço base, identificando cada ponto do fibrado com uma seta aplicada a um ponto do espaço base. Um *fibrado diferencial* (E, π, M, F, G) consiste dos seguintes elementos:

1. Uma variedade diferenciável E chamada *espaço total*.
2. Uma variedade diferenciável M chamada *espaço base*.
3. Uma variedade diferenciável F chamada *fibra*.
4. Uma sobrejeção $\pi : E \rightarrow M$ chamada *projeção*. A imagem inversa $\pi^{-1}(p) = F_p \cong F$ é chamada a fibra em p .
5. Um grupo de Lie G chamado *grupo estrutural*, que age sobre F pela esquerda.
6. Uma cobertura aberta $\{U_i\}$ de M com difeomorfismos $\phi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times F$ tal que $\pi \circ \phi_i^{-1}(p, f) = p$, chamada *trivialização local*.
7. Em $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, as *funções de transição* $t_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$ são mapas diferenciáveis, tais que $f_i = t_{ij}(p)f_j$. A fim de que pedaços locais de um fibrado possam ser colados consistentemente, as funções de transição precisam satisfazer a *condição de cociclo*:

$$t_{ij}(p) \cdot t_{jk}(p) = t_{ik}(p) \quad (p \in U_i \cap U_j \cap U_k).$$

A definição de fibrado é independente da cobertura usada. Dois fibrados coordenados

$(E, \pi, M, F, G, \{U_i\}, \{\phi_i\})$ e $(E, \pi, M, F, G, \{V_j\}, \{\psi_j\})$ são equivalentes se $(E, \pi, M, F, G, \{U_i\} \cup \{V_j\}, \{\phi_i\} \cup \{\psi_j\})$ é um fibrado coordenado. Um fibrado é definido então como uma classe de equivalência de fibrados coordenados.

Seja $\pi : E \rightarrow M$ um fibrado. Uma *seção* $s : M \rightarrow E$ é um mapa suave que satisfaz $\pi \circ s = id_M$. O conjunto de seções em M é denotado por $\Gamma(M, F)$. Nem todos os fibrados admitem seções globais.

Sejam $\pi : E \rightarrow M$ e $\pi' : E' \rightarrow M'$ dois fibrados e $\bar{f} : E' \rightarrow E$ um mapa suave. O mapa \bar{f} é chamado *mapa de fibrados* se ele preserva as fibras, isto é, cada fibra F'_p de E' é mapeada sobre $F_{f(p)}$ de E . Um mapa de fibrados naturalmente induz um mapa $f : M' \rightarrow M$. Se $M' = M$, dois fibrados são *equivalentes* quando existe um mapa de fibrados que é um difeomorfismo e cujo mapa induzido $f : M \rightarrow M$ é a identidade.

Dado um fibrado $\pi : E \rightarrow M$, um mapa $f : N \rightarrow M$ define um *pullback* f^*E sobre N por $f^*E = \{(p, u) \in N \times E / f(p) = \pi(u)\}$. A fibra F_p de f^*E é simplesmente uma cópia da fibra $F_{f(p)}$ de E . A função de transição t_{ij}^* do *pullback* f^*E é um *pullback* da função de transição t_{ij} de E . Os *pullbacks* de mapas homotópicos serão fibrados equivalentes.

Um *fibrado principal* é aquele cuja fibra F é idêntica ao grupo estrutural G . A função de transição atua na fibra pela esquerda como usual, mas em um fibrado principal podemos definir uma ação de G sobre F pela direita. Seja $\phi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times G$ uma trivialização local. A ação à direita de G em $\pi^{-1}(U_i)$ é definida por

$$ua = \phi_i^{-1}(p, g_i a)$$

onde $p = \pi(u)$, $a \in G$ e $\phi_i(u) = (p, g_i)$. Pode-se mostrar que essa definição independe da trivialização local. A ação à direita de G sobre a fibra $\pi^{-1}(p)$ é transitiva e livre.

Em um fibrado principal podemos definir uma trivialização preferida, denominada *trivialização local canônica*, tomando uma seção s_i sobre U_i e definindo $u \in \pi^{-1}(p)$ como

$$u = \phi_i^{-1}(p, g_u)$$

onde $g_u \in G$ é o único elemento que efetua a decomposição $u = s_i(p)g_u$ de modo que

$$s_i(p) = \phi_i^{-1}(p, e).$$

Dado um fibrado principal $P(M, G)$, podemos construir um *fibrado associado*, com fibra F , como segue. Defina uma ação de $g \in G$ em $P \times F$ por

$$(u, f) \mapsto (ug^{-1}, \rho(g)f),$$

onde $\rho : G \rightarrow \text{Diff}(F)$ é uma representação de G sobre F . Então o fibrado associado $(E, \pi, M, F, G, P, \rho)$ é o conjunto $\frac{P \times F}{\sim}$ no qual dois pontos (u, f) e $(ug^{-1}, \rho(g)f)$ são identificados.

Se a fibra for um espaço vetorial V e a representação for linear, isto é, $\rho : G \rightarrow \text{Gl}(V)$, então o fibrado associado será um *fibrado vetorial*.

1. Se todas as funções de transição são identidades, o fibrado chama-se *trivial* e, nesse caso, $E = M \times F$.
2. Um fibrado principal é trivial se admite uma seção global.
3. Um fibrado vetorial (aquele cuja fibra é um espaço vetorial) é trivial se seu fibrado associado principal admite uma seção global.

Conexão

Seja u um elemento de um fibrado principal $P(M, G)$ e G_p a fibra em $p = \pi(u)$. Definimos o *espaço vertical* $V_u P$ como sendo o subespaço de $T_u P$ que é tangente à fibra G_p – de modo que a projeção dos vetores de $V_u P$ pela diferencial de π é nula – e que se constrói como segue. Tome um elemento A da álgebra de Lie \mathfrak{g} . A ação à direita

$$R_{\exp(tA)}u = u \exp(tA)$$

define uma curva na fibra G_p . Defina o *campo vetorial fundamental* $A^\# \in T_u P$ por

$$A^\# f(u) = \frac{d}{dt} f(u \exp(tA))|_{t=0}$$

que é tangente à fibra em p e, portanto, pertence a $V_u P$. A associação $A \mapsto A^\#$ é um isomorfismo entre \mathfrak{g} e $V_u P$. Uma *conexão* é uma distribuição diferenciável que associa um complemento de $V_u P$ em $T_u P$, denominado *espaço horizontal* $H_u P$ e tal que:

1. $T_u P = V_u P + H_u P$
2. $H_{ug} P = R_{g*} H_u P$

Uma 1-forma de conexão $\omega \in T^*P \otimes \mathfrak{g}$, com valores na álgebra de Lie, é uma *projeção* de T_uP sobre a componente vertical $V_uP \simeq \mathfrak{g}$ tal que:

1. $\omega(A^\#) = A$
2. $R_g^*\omega = Ad_{g^{-1}}\omega$

O espaço horizontal corresponde ao núcleo de ω .

Seja $\{U_i, \phi_i\}$ uma carta trivializante de M e seja σ_i uma seção local definida pela trivialização canônica, isto é, $\sigma_i(p) = \phi^{-1}(p, e)$. Definimos o *potencial de gauge* \mathfrak{A}_i como sendo a forma local da conexão, isto é,

$$\mathfrak{A}_i = \sigma_i^*\omega \in \mathfrak{g} \otimes \Omega^1(U_i).$$

A fim de que ω seja definida de forma *única*, isto é, $\omega_i = \omega_j$ em $U_i \cap U_j$, os potenciais de gauge devem satisfazer a *condição de compatibilidade*

$$\mathfrak{A}_j = t_{ij}^{-1}\mathfrak{A}_i t_{ij} + t_{ij}^{-1} dt_{ij}.$$

Seja $P(M, G)$ um fibrado principal. Uma curva $\tilde{\gamma}$ em P é denominada um *levantamento horizontal* de uma curva γ em M se $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ e o vetor tangente a $\tilde{\gamma}(t)$ sempre pertence a $H_{\tilde{\gamma}(t)}P$. A existência e unicidade local do levantamento horizontal $\tilde{\gamma}$ é garantida porque $\omega(\tilde{X}) = 0$ é uma EDO, onde \tilde{X} é um vetor tangente a $\tilde{\gamma}$.

Dado uma curva γ em M existe um único levantamento horizontal $\tilde{\gamma}$ dessa curva em P de modo que os pontos do levantamento são unicamente determinados a partir do ponto inicial $u_0 = \tilde{\gamma}(0)$. Essa relação descreve uma função, denominada *transporte paralelo*, e pode ser mostrado que ela representa um isomorfismo de fibras.

Curvatura

A forma mais geral de uma r -forma com valores vetoriais é

$$\phi = \sum_{\alpha=1}^k \phi^\alpha \otimes e_\alpha,$$

em que $\{e_\alpha\}$ é uma base de um espaço vetorial V de dimensão k e $\phi^\alpha \in \Omega^r(P)$. A *derivada exterior covariante* de ϕ é definida por

$$D\phi(X_1, \dots, X_{r+1}) = d\phi(X_1^H, \dots, X_{r+1}^H),$$

onde $d\phi = \sum_{\alpha=1}^k d\phi^\alpha \otimes e_\alpha$. A *curvatura* é a derivada covariante da conexão, $\Omega = D\omega$. A curvatura satisfaz a *equação estrutural de Cartan*,

$$\Omega(X, Y) = d\omega(X, Y) + [\omega(X), \omega(Y)],$$

ou, equivalentemente,

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega.$$

A curvatura também satisfaz a *identidade de Bianchi*:

$$D\Omega = D^2\omega = 0.$$

Em geral, o levantamento horizontal $\tilde{\gamma}$ de um laço γ falha em se fechar. Esta falha é proporcional ao vetor vertical $[X, Y]$ conectando o ponto inicial e o ponto final numa mesma fibra. A curvatura mede essa distância,

$$\Omega(X, Y) = -\omega([X, Y]) = A$$

onde A é um elemento de \mathfrak{g} tal que $A^\# = [X, Y]$. Como a discrepância entre os pontos inicial e final do levantamento horizontal de uma curva fechada é definida como a *holonomia*, o teorema de Ambrose-Singer estabelece que o grupo de holonomia é expresso em termos da curvatura.

A *intensidade de campo* é a forma local da curvatura, definida de forma semelhante ao potencial de gauge por

$$\mathfrak{F}_i = \sigma_i^* \Omega.$$

A ação de \mathfrak{F} nos vetores de TM é dada por

$$\mathfrak{F}_i(X, Y) = d\mathfrak{A}_i(X, Y) + [\mathfrak{A}_i(X), \mathfrak{A}_i(Y)]$$

ou, equivalentemente,

$$\mathfrak{F} = d\mathfrak{A} + \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{A}.$$

Além disso, as intensidades de campo satisfazem a *condição de compatibilidade*

$$\mathfrak{F}_j = t_{ij}^{-1} \mathfrak{F}_i t_{ij}$$

em $U_i \cap U_j$, a fim de que a curvatura Ω seja única.

A partir da conexão em um fibrado principal, podemos diferenciar seções de seu fibrado associado por meio da *derivada covariante*. Seja a seção

$$s(\gamma(t)) = [(\tilde{\gamma}(t), \eta(\gamma(t)))]$$

e X o vetor tangente à curva γ em $p_0 = \gamma(0)$. Definimos a derivada covariante da seção s ao longo de γ (ou na direção de X) como sendo a seção

$$\nabla_X s = [(\tilde{\gamma}(0), \frac{d}{dt}\eta(\gamma(t))|_{t=0})]$$

ou, equivalentemente,

$$\nabla_X s = [(\tilde{\gamma}(0), \tilde{X}(\eta(\gamma(0))))]$$

onde \tilde{X} corresponde ao levantamento de X .

Essa definição independe do levantamento horizontal usado; ela depende exclusivamente da curva γ e da conexão. Pode-se mostrar que a forma local da derivada covariante em um fibrado associado é determinada inteiramente pelo potencial de gauge do fibrado principal.

Gravitação

Em relatividade geral, o universo é modelado por uma estrutura denominada *espaço-tempo* que corresponde a uma variedade quadridimensional M com métrica lorentziana. Associado ao fibrado tangente TM , existe um fibrado principal chamado de *fibrado dos referenciais* em que as fibras são conjuntos de bases ordenadas de TM em cada ponto de M . Nesse fibrado, a ação à direita, que transforma os *referenciais*, consiste nas transformações de Lorentz que preservam a métrica de Minkowski (essa condição se traduz no fato de que as leis da relatividade especial são obedecidas localmente); por sua vez, a ação à esquerda, representada pelas funções de transição, consiste nas transformações gerais de coordenadas (tal condição nada mais é que o princípio da covariância).

A conexão do fibrado dos referenciais induz uma derivada covariante no fibrado tangente e essa, por sua vez, dá origem ao tensor de Riemann que representa a curvatura do espaço-tempo M . As equações de Einstein correspondem à imposição de que essa curvatura, interpretada como *gravitação*, é produzida pela energia e

matéria presente no universo na forma expressa pelo acoplamento entre o tensor de Einstein e o tensor energia-momento.

Fica assim evidenciado o poder simplificador do conceito de fibrado para a descrição da relatividade geral. Outras teorias, especialmente as teorias de gauge, foram construídas especificamente a partir da teoria geral de fibrados principais. Como já foi dito antes, uma ótima referência sobre esses assuntos é a obra [71].

Capítulo 13

Buracos Negros

Na primeira seção, explicitamos uma classe de soluções especiais das equações de Einstein, dotadas de importantes simetrias, que por suas propriedades físicas ficaram conhecidas como *buracos negros*. Na verdade, pelo fato de as equações de Einstein serem equações diferenciais não lineares de alta complexidade, conhecemos apenas algumas soluções nas quais impomos simetrias úteis; os buracos negros talvez estejam entre as soluções mais simples (tanto que foi o buraco negro de Schwarzschild [80] a primeira solução exata das equações da relatividade geral). Na segunda seção do capítulo, discutimos a interpretação física dessa classe de soluções: os objetos que elas definem e seus parâmetros. O texto foi escrito com base no clássico [19]. Outras referências sobre o assunto são [68, 35, 92, 89].

13.1 Soluções

Um vetor de Killing em uma variedade riemanniana¹ é um campo K tal que $\mathcal{L}_K g = 0$, onde g é a métrica e \mathcal{L} é o operador derivada de Lie. Em uma variedade riemanniana que possui um vetor de Killing, sempre é possível encontrar um sistema de coordenadas no qual a métrica é independente de uma das coordenadas [23].

Uma métrica g é dita *estacionária* se possui um vetor de Killing K de tipo-

¹A partir desse momento, ao falarmos em variedade riemanniana, fica entendido que os resultados são válidos também para variedades pseudo-riemannianas, as quais representam os principais modelos utilizados atualmente para se descrever o universo relativístico.

tempo, isto é, $g(K, K) > 0$. Uma métrica é chamada *estática* se possui um vetor de Killing de tipo-tempo que é ortogonal a uma família de hipersuperfícies (uma hipersuperfície em uma variedade n-dimensional é uma subvariedade de dimensão $n - 1$).

Uma métrica g é dita *axissimétrica* se possui um vetor de Killing K de tipo-espaço, isto é, $g(K, K) < 0$. Uma métrica é chamada *esfericamente simétrica* se possui um vetor de Killing de tipo-espaço que é ortogonal a uma família de hipersuperfícies.

Proposição 13.1.1. *A forma geral da métrica descrevendo um espaço-tempo estacionário e axissimétrico é*

$$ds^2 = e^{2\nu}(dt)^2 - e^{2\psi}(d\varphi - \omega dt)^2 - e^{2\mu_2}(dx^2)^2 - e^{2\mu_3}(dx^3)^2, \quad (13.1)$$

onde ν, ψ, ω, μ_2 e μ_3 são funções das coordenadas x^2 e x^3 .

Demonstração. Inicialmente, tomam-se como coordenadas o tempo $t(= x^0)$ e o ângulo azimutal $\varphi(= x^1)$ em torno do eixo de simetria. Como a métrica estacionária e axissimétrica possui dois vetores de Killing, é possível encontrar um sistema de coordenadas em que suas componentes são independentes de duas coordenadas [23]. Dessa forma, as componentes da métrica são dadas por

$$g_{ij} = g_{ij}(x^2, x^3),$$

onde x^2 e x^3 são as coordenadas espaciais restantes. Além disso, será imposta à métrica sua invariância por inversão simultânea de t e φ , isto é,

$$g_{02} = g_{03} = g_{12} = g_{13} = 0,$$

pois os termos da métrica com esses coeficientes mudam de sinal sob a inversão, $t \rightarrow -t$ e $\varphi \rightarrow -\varphi$. A ideia por trás dessa condição é permitir que o tensor energia-momento apresente essa invariância, de modo que a fonte do campo gravitacional terá movimentos puramente rotacionais em torno do eixo de simetria. Em outras palavras, busca-se com isso descrever o espaço-tempo associado a um corpo em rotação.

Sob essas condições, a métrica adquire a forma

$$ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 + 2g_{01}dx^0dx^1 + g_{11}(dx^1)^2 + [g_{22}(dx^2)^2 + 2g_{23}dx^2dx^3 + g_{33}(dx^3)^2].$$

Tal métrica pode sempre ser diagonalizada mediante uma transformação de coordenadas [23], resultando em

$$ds^2 = e^{2\nu}(dt)^2 - e^{2\psi}(d\varphi - \omega dt)^2 - e^{2\mu_2}(dx^2)^2 - e^{2\mu_3}(dx^3)^2, \quad (13.2)$$

que de fato descreve uma métrica estacionária, axissimétrica e de assinatura -2 (perceba que (13.2) está diagonalizada) em uma variedade riemanniana quadridimensional. \square

É preciso salientar que as funções μ_2 e μ_3 na proposição acima não precisam ser distinguidas. Tal distinção foi feita com o intuito de oferecer a possibilidade - na proposição adiante - de se estabelecer o vínculo que definirá a *função de horizonte*, caracterizando as soluções de buracos negros: *soluções das equações de Einstein que possuem um horizonte de eventos e são assintoticamente planas*. Um *horizonte de eventos* consiste numa subvariedade diferenciável bidimensional de tipo-luz gerada por um vetor de Killing de tipo-tempo e outro de tipo-espaço. Um espaço-tempo é considerado *assintoticamente plano* se ele se comporta como o espaço de Minkowski em regiões distantes da fonte.

Proposição 13.1.2. *Existe uma única família de soluções para as equações de Einstein-Maxwell que sejam assintoticamente planas, estacionárias e axissimétricas, com horizonte de eventos convexo e não-degeneradas fora desse horizonte.*

Demonstração. Devido à sua extensão e complexidade, nos limitaremos a apenas esboçar um esquema da demonstração. Uma demonstração mais detalhada pode ser encontrada nos capítulos 6 e 11 de [19]. Pela proposição 13.1.1, uma solução estacionária e axissimétrica das equações de Einstein-Maxwell deve ter a forma (13.1) e a equação do horizonte de eventos deve ser do tipo $N(x^2, x^3) = 0$. Como o horizonte é subvariedade de tipo-luz, segue de (13.1) que

$$g^{ij}N_{,i}N_{,j} = e^{2(\mu_3 - \mu_2)}(N_{,r})^2 + (N_{,\theta})^2 = 0,$$

onde $x^2 = r$ e $x^3 = \theta$. Utilizando a liberdade de escolha do vínculo entre μ_2 e μ_3 , garantida pela forma da métrica, impomos

$$e^{2(\mu_3 - \mu_2)} = \Delta(r), \quad (13.3)$$

onde $\Delta = \Delta(r)$ é denominada *função de horizonte*. Como o determinante da métrica do subespaço (t, φ) é dado por

$$-e^{2\beta}, \quad (\beta = \nu + \psi),$$

segue da definição de horizonte de eventos, da equação (13.3) e da identidade

$$[e^{\mu_3 - \mu_2}(e^\beta)_{,2}]_{,2} + [e^{\mu_3 - \mu_2}(e^\beta)_{,3}]_{,3} = 0$$

que a solução apropriada para uma função de horizonte convexa é

$$\Delta(r) = r^2 - 2Mr + M_0^2, \quad (13.4)$$

onde M e M_0 são constantes.

Além disso, $\Delta(r) = 0$ no horizonte de eventos e

$$e^\beta = \Delta^{\frac{1}{2}} \sin \theta. \quad (13.5)$$

Substituindo

$$H = A + iB, \quad \chi = e^{\nu - \psi} \quad e \quad \delta = \sin^2 \theta \quad (13.6)$$

nas equações de Einstein-Maxwell e efetuando uma série de manipulações algébricas, resultam as seguintes equações²

$$\left[\frac{\chi}{\sqrt{(\Delta\delta)}} \Delta H_{,2} \right]_{,2} + \left[\frac{\chi}{\sqrt{(\Delta\delta)}} \delta H_{,3} \right]_{,3} = i(\omega_{,2} H_{,3} - \omega_{,3} H_{,2}), \quad (13.7)$$

$$\left[\frac{\Delta}{\chi^2} \omega_{,2} - 2Im(HH_{,3}^*) \right]_{,2} + \left[\frac{\delta}{\chi^2} \omega_{,3} + 2Im(HH_{,2}^*) \right]_{,3} = 0 \quad (13.8)$$

e

$$[\Delta(\ln \chi)_{,2}]_{,2} + [\delta(\ln \chi)_{,3}]_{,3} = \frac{1}{\chi^2} [\Delta(\omega_{,2})^2 + \delta(\omega_{,3})^2] + \frac{2\chi}{\sqrt{(\Delta\delta)}} [\Delta|H_{,2}|^2 + \delta|H_{,3}|^2]. \quad (13.9)$$

²O índice 3 corresponde a $\cos \theta$ em vez de θ .

A solução completa do problema consiste em se determinar as soluções (χ, ω) nas equações (13.7-13.9) e depois encontrar as funções ψ e ν por meio de (13.5) e (13.6). Uma vez determinado o par (χ, ω) , a integração das equações

$$\begin{aligned} & (\psi + \nu)_{,2,3} - (\psi + \nu)_{,2}\mu_{2,3} - (\psi + \nu)_{,3}\mu_{3,2} + \psi_{,2}\psi_{,3} + \nu_{,2}\nu_{,3} = \\ & \frac{1}{2}e^{2\psi-2\nu}\omega_{,2}\omega_{,3} - 2e^{-2\psi}(A_{,2}A_{,3} + B_{,2}B_{,3}) \end{aligned} \quad (13.10)$$

e

$$\begin{aligned} & 4e^{\mu_3-\mu_2}(\beta_{,2}\mu_{3,2} + \psi_{,2}\nu_{,2}) - 4e^{\mu_2-\mu_3}(\beta_{,3}\mu_{2,3} + \psi_{,3}\nu_{,3}) \\ & = 2e^{-\beta}\{[e^{\mu_3-\mu_2}(e^\beta)_{,2}]_{,2} - [e^{\mu_2-\mu_3}(e^\beta)_{,3}]_{,3}\} - e^{2\psi-2\nu}[e^{\mu_3-\mu_2}(\omega_{,2})^2 - e^{\mu_2-\mu_3}(\omega_{,3})^2] \\ & + 4e^{-2\psi}\{e^{\mu_3-\mu_2}[(A_{,2})^2 + (B_{,2})^2] - e^{\mu_2-\mu_3}[(A_{,3})^2 + (B_{,3})^2]\}, \end{aligned} \quad (13.11)$$

juntamente com (13.3), fornece os valores de μ_2 e μ_3 . Tais equações foram obtidas a partir do uso da métrica (13.1) nas equações de Einstein-Maxwell [19].

Resta, portanto, resolver (13.7-13.9) para χ e ω . Substituindo Φ e Ψ , definidas por

$$\begin{aligned} -\Phi_{,2} &= \frac{\delta}{\chi^2}\omega_{,3} + 2Im(HH^*_{,2}) \quad e \quad \Phi_{,3} = \frac{\Delta}{\chi^2}\omega_{,2} - 2Im(HH^*_{,3}); \\ \Psi &= \frac{\sqrt{(\Delta\delta)}}{\chi}, \quad Z = \Psi + |H|^2 + i\Phi, \end{aligned} \quad (13.12)$$

e, a partir de identidades entre elas, as equações (13.8) e (13.9) se tornam

$$\Psi[(\Delta Z_{,2})_{,2} + (\delta Z_{,3})_{,3}] = \Delta(Z_{,2})^2 + \delta(Z_{,3})^2 - 2H^*(\Delta Z_{,2}H_{,2} + \delta Z_{,3}H_{,3}), \quad (13.13)$$

enquanto que (13.7) resulta

$$\Psi[(\Delta H_{,2})_{,2} + (\delta H_{,3})_{,3}] = \Delta H_{,2}Z_{,2} + \delta H_{,3}Z_{,3} - 2H^*[\Delta(H_{,2})^2 + \delta(H_{,3})^2]. \quad (13.14)$$

O par (13.13) e (13.14) constitui-se nas *equações de Ernst*.

A fim de reduzir as equações de Ernst a uma única equação, toma-se

$$H = Q(Z + 1), \quad Q \in \mathbb{C},$$

obtendo-se

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}[(1 - 2|Q|^2)(Z + Z^*) - 2|Q|^2(|Z|^2 + 1)][(\Delta Z_{,2})_{,2} + (\delta Z_{,3})_{,3}] = \\ & = [1 - 2|Q|^2(Z^* + 1)][\Delta(Z_{,2})^2 + \delta(Z_{,3})^2]. \end{aligned} \quad (13.15)$$

Com a transformação

$$Z = \frac{1 + E}{1 - E} \quad e \quad \eta = \frac{(r - M)}{(M^2 - M_0^2)^{\frac{1}{2}}},$$

a equação (13.15) se expressa como

$$\begin{aligned} & (1 - 4|Q|^2 - |E|^2)\{[(\eta^2 - 1)E_{,\eta}]_{,\eta} + [(1 - \mu^2)E_{,\mu}]_{,\mu}\} = \\ & = -2E^*[(\eta^2 - 1)(E_{,\eta})^2 + (1 - \mu^2)(E_{,\mu})^2]. \end{aligned} \quad (13.16)$$

A métrica de Kerr-Newman consiste na solução mais simples das equações de Ernst para a métrica conjugada, que é obtida pela transformação

$$t \rightarrow i\varphi, \quad \varphi \rightarrow -it, \quad \tilde{\chi} = -\frac{\chi}{\chi^2 - \omega^2} \quad e \quad \tilde{\omega} = \frac{\omega}{\chi^2 - \omega^2}.$$

A métrica conjugada satisfaz uma equação idêntica à equação (13.16) e admite a solução simples

$$\tilde{E} = -p\eta - iq\mu,$$

onde p e q são constantes reais que obedecem à relação

$$p^2 + q^2 = 1 - 4|Q|^2. \quad (13.17)$$

Revertendo para a variável r e escolhendo as constantes p e q como

$$p = \frac{(M^2 - M_0^2)^{\frac{1}{2}}}{M} \quad e \quad q = \frac{a}{M},$$

pois corresponde à escolha mais simples consistente com a relação (13.17), obtém-se

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q_*^2, \quad (13.18)$$

e

$$\tilde{\chi} = -\frac{\rho^2}{\Delta - a^2\delta} \sqrt{(\Delta\delta)} \quad \tilde{\omega} = \frac{a\delta}{\Delta - a^2\delta} [(r^2 + a^2) - \Delta]. \quad (13.19)$$

Retornando às variáveis originais e fazendo os cálculos descritos anteriormente, resulta

$$\chi = e^{\nu-\psi} = \frac{\rho^2 \sqrt{\Delta}}{\Sigma^2 \sqrt{\delta}}, \quad e^{2\beta} = e^{2(\psi+\nu)} = \Delta \delta, \quad e^{2\psi} = \frac{\delta \Sigma^2}{\rho^2} e \quad e^{2\nu} = \frac{\rho^2 \Delta}{\Sigma^2}; \quad (13.20)$$

$$\omega = \frac{a}{\Sigma^2}(r^2 + a^2 - \Delta); \quad (13.21)$$

$$e^{\mu_2+\mu_3} = \frac{\rho^2}{\sqrt{\Delta}}, \quad e^{\mu_2-\mu_3} = \sqrt{\Delta}, \quad e^{2\mu_2} = \frac{\rho^2}{\Delta} e \quad e^{2\mu_3} = \rho^2, \quad (13.22)$$

onde

$$\Sigma^2 = (r^2 + a^2)^2 - a^2 \delta \Delta. \quad (13.23)$$

Do comportamento assintótico ($r \rightarrow +\infty$) das componentes da métrica (13.1) com as substituições acima,

$$\begin{aligned} e^{2\nu} &\longrightarrow 1 - \frac{2M}{r} + \mathcal{O}(r^{-2}), & e^{2\psi} &\longrightarrow r^2 \sin^2 \theta + \mathcal{O}(r), \\ \omega &\longrightarrow \frac{2aM}{r^3} + \mathcal{O}(r^{-4}), \\ e^{-2\mu_2} &\longrightarrow 1 - \frac{2M}{r} + \mathcal{O}(r^{-2}), & e^{2\mu_3} &\longrightarrow r^2 + \mathcal{O}(r), \end{aligned} \quad (13.24)$$

conclui-se que tal métrica descreve um espaço-tempo assintoticamente plano. A existência da família de soluções descrita no enunciado está provada. Para a demonstração de sua unicidade, confira [19], pp.292-299. \square

Existe também uma única família de soluções para as equações de Einstein-Maxwell que sejam assintoticamente planas, estáticas e esfericamente simétricas, com horizonte de eventos convexo e não-degeneradas fora desse horizonte. Com efeito, basta tomarmos $a = 0$ nas equações (13.20)-(13.24).

É importante ressaltar que as soluções pertencentes à família obtida na proposição acima estão unicamente determinadas por apenas três parâmetros, (M, a, Q_*) , permitindo a classificação das mesmas. Na próxima seção, tais parâmetros serão identificados com a massa, o momento angular por unidade de massa e a carga do buraco negro, respectivamente.

A métrica obtida na proposição 13.1.2, cuja forma geral é dada por

$$ds^2 = \rho^2 \frac{\Delta}{\Sigma^2} (dt)^2 - \frac{\Sigma^2}{\rho^2} \left(d\varphi - \frac{2aMr}{\Sigma^2} dt \right)^2 \sin^2 \theta - \frac{\rho^2}{\Delta} (dr)^2 - \rho^2 (d\theta)^2, \quad (13.25)$$

onde

$$\begin{aligned}\rho^2 &= r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \\ \Sigma^2 &= (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta\end{aligned}\tag{13.26}$$

e a função de horizonte é

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q_*,\tag{13.27}$$

descreve um espaço-tempo denominado *buraco negro de Kerr-Newman*. Para $Q_* = 0$, tal métrica, correspondente ao *buraco negro de Kerr*, é formalmente idêntica à métrica (13.25), mas tem função de horizonte dada por

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2.\tag{13.28}$$

Tomando-se $a = 0$ em (13.25), obtemos a métrica

$$ds^2 = \frac{\Delta}{r^2}(dt)^2 - \frac{r^2}{\Delta}(dr)^2 - r^2[(d\theta)^2 + (d\varphi)^2 \sin^2 \theta], \quad (\Delta = r^2 - 2Mr + Q_*),\tag{13.29}$$

que descreve um espaço-tempo denominado *buraco negro de Reissner-Nordström*. Para $Q_* = 0$, tal métrica se reduz a

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)(dt)^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}(dr)^2 - r^2[(d\theta)^2 + (d\varphi)^2 \sin^2 \theta], \quad (\Delta = r^2 - 2Mr),\tag{13.30}$$

que corresponde ao espaço-tempo descrito pelo *buraco negro de Schwarzschild*, historicamente a primeira solução exata das equações de Einstein [80] e talvez a mais importante até hoje.

Pelas equações (13.25)-(13.30) é fácil perceber que existem pontos nos quais algumas componentes do tensor métrico se tornam infinitas. Como as componentes de um tensor são dependentes do sistema de coordenadas, é necessário algum indicador invariante por mudança de coordenadas (isto é, difeomorfismos) para se concluir sobre as singularidades da métrica. Considera-se uma condição suficiente para a existência de um ponto singular no espaço-tempo o fato de algum campo escalar obtido do tensor de Riemann tender ao infinito quando se aproxima do ponto.

Utilizando-se a base de 1-formas

$$\omega^0 = e^\nu dt, \quad \omega^1 = e^\psi(d\varphi - \omega dt), \quad \omega^2 = e^{\mu_2} dr \quad e \quad \omega^3 = e^{\mu_3} d\theta,\tag{13.31}$$

é possível determinar as componentes do tensor de Riemann fazendo uso das equações de Maurer-Cartan. A partir dessas componentes, o escalar $R^{ijkl}R_{ijkl}$ se torna infinito em $(r, \theta) = (0, \frac{\pi}{2})$ para as métricas de Kerr e Kerr-Newman. Tomando-se $a = 0$, a singularidade se restringe a $r = 0$.

Esse resultado garante a existência de singularidades nas soluções encontradas. Surge a pergunta: existem outras singularidades em algumas dessas métricas? Uma possibilidade está em se considerar que um ponto não é singularidade no espaço-tempo se as geodésicas são bem comportadas nesse ponto ([16], pp.171-172). Baseado nesse fato, nenhuma das soluções encontradas apresenta singularidades além daquelas explicitadas acima. O leitor interessado nesse assunto pode consultar, por exemplo, as obras [19], [68] ou [35].

13.2 Buracos Negros

Buracos negros são objetos no espaço-tempo constituídos de uma singularidade essencial "ocultada" por um horizonte de eventos. As soluções encontradas na seção anterior possuem essa característica. De fato, como foi visto acima, tais soluções admitem singularidades essenciais, isto é, locais do espaço-tempo em que a curvatura se torna infinita. Além disso, uma análise das geodésicas ([68],[16],[19]) que cruzam as superfícies descritas pelas raízes da função de horizonte Δ , descrita na equação (13.18), dadas por

$$r_+ = M + \sqrt{(M^2 - a^2 - Q_*^2)} \quad e \quad r_- = M - \sqrt{(M^2 - a^2 - Q_*^2)}, \quad (13.32)$$

mostra que tais superfícies são regulares e que r_+ envolve a singularidade em cada caso. Na verdade, para $a = Q_* = 0$, r_- degenera na singularidade de Schwarzschild.

A superfície r_+ em (13.32) funciona globalmente como um ponto sem volta, no sentido de que geodésicas direcionadas para o futuro (isto é, no sentido crescente do parâmetro afim) que cruzam tal superfície não tornam a cruzá-la, ficando presas no interior do horizonte de eventos. O nome *buraco negro* surge da observação acima e do fato de que a luz descreve geodésicas (de tipo-luz) no espaço-tempo.

Como foi visto na seção precedente, a família de soluções descrita na proposição 13.1.2 está determinada de forma única por três parâmetros, denotados Q_* , M e

a. A interpretação física dessas quantidades decorre de uma análise dos tipos de buracos negros. A constante M corresponde à *massa* do buraco negro, pois das expressões (13.24) segue que a forma assintótica da métrica de Schwarzschild para $r \rightarrow +\infty$ representa o espaço-tempo exterior a uma distribuição esférica de massa inercial M . A função ω na forma geral da métrica, expressa pela equação (13.1), representa o *arrasto do referencial inercial*, isto é, uma partícula em repouso em relação a uma base ortonormal do espaço-tempo terá uma velocidade angular ω numa base canônica ([19], pp.69-70). Decorre do comportamento assintótico de ω em (13.24) que a deve ser interpretado como o *momento angular por unidade de massa* do buraco negro. Finalmente, segue das equações de Maxwell para a métrica de Reissner-Nordström que o único componente não-nulo do tensor de Maxwell é dado por ([19], capítulo 5)

$$F_{02} = -\frac{Q_*}{r^2},$$

o que permite interpretar a constante Q_* como sendo a *carga* do buraco negro.

Como vimos, afirmar que um espaço-tempo é assintoticamente plano equivale a dizer que ele é originado por uma *fonte isolada*. Dessa forma, pelo que foi visto até o momento, a proposição 13.1.2 pode ser enunciada como: *buracos negros isolados estão unicamente determinados por suas massas, cargas e momentos angulares*.

Os buracos negros apresentam características especiais e dão margem à imaginação humana. Algumas das possibilidades que um espaço-tempo produzido por um buraco negro pode oferecer são:

- o buraco negro pode permitir a passagem a um outro universo assintoticamente plano, distinto do original;
- um viajante que, sob certas condições, atravesse o horizonte de Cauchy (superfície r_-) não tem sua vida futura guiada pelo seu passado;
- ao encontrar a singularidade essencial, o viajante “sai” do universo;
- em certos buracos negros, é possível desviar da singularidade e retornar ao universo;

- em alguns casos, está prevista a existência de *singularidades nuas*, de modo que elas podem ser atingidas e visualizadas por serem desprovidas de horizonte de eventos.

Uma característica interessante apresentada pelo buraco negro de Kerr é o fato de que a superfície $g_{tt} = 0$ não coincide com o horizonte de eventos $r = r_+$. A região entre essas duas superfícies denomina-se *ergoesfera* e nela o vetor de Killing $\frac{\partial}{\partial t}$ torna-se de tipo-espaço. Desse comportamento resulta que uma partícula material que se encontre na ergoesfera pode extrair energia do buraco negro; tal fenômeno é conhecido como *processo de Penrose*. Em geral, o ganho de energia δM e de momento angular δJ está sujeito à desigualdade

$$2r_+M\delta M \geq a\delta J \quad (13.33)$$

que, por sua vez, limita a quantidade de energia que pode ser extraída do buraco negro ([19], pp.366-375).

Como muito do que as soluções encontradas prevêem está fora da realidade física, sua importância reside principalmente na análise da estrutura matemática da teoria. Ao lado disso, é possível que existam buracos negros na natureza provenientes do colapso de massas estelares. A vida de uma estrela é guiada pela luta entre os efeitos gravitacionais e as pressões internas. Originalmente, tais pressões surgem da queima de combustível nuclear; com o término do combustível, a pressão contrária à gravitação surge da repulsão entre elétrons (se essa pressão equilibra o efeito gravitacional, forma-se uma *anã branca*). Se o processo de colapso continuar, prótons e elétrons se combinam resultando numa *estrela de nêutrons*, a qual é formada quase que inteiramente por nêutrons. Como um fluido de nêutrons é o que existe de mais denso na natureza, acredita-se que se a massa da estrela original for suficientemente alta (superior a dez massas solares), o colapso continuará, dando origem a um buraco negro.

Dessa forma, a solução de Schwarzschild (estática e esfericamente simétrica) descreve o colapso de estrelas sem rotação enquanto que a solução de Kerr (estacionária, axissimétrica e invariante por inversões simultâneas das coordenadas t e φ) corresponde ao colapso de estrelas com rotação. Além disso, como tais soluções são válidas

apenas no vácuo ($T_{ij} = 0$, pois $Q_* = 0$) espera-se que elas sejam úteis na descrição do espaço exterior a uma estrela. Em princípio, as métricas de Kerr-Newman e Reissner-Nordström não descrevem sistemas físicos possíveis na Natureza na medida em que não se concebe a existência de um corpo macroscópico que possua carga resultante não-nula.

Capítulo 14

Newman-Penrose

Nesse capítulo será introduzida a base matemática para o estudo das perturbações das métricas descritas no capítulo anterior. O estudo completo das perturbações em buracos negros só foi possível graças a uma abordagem diferenciada das equações de Einstein via formalismo de Newman-Penrose. Tratado mediante tal formalismo, o problema adquire um caráter algébrico e – o que é mais importante – as equações são extremamente simplificadas para o caso dos buracos negros.

Inicialmente serão introduzidas as noções de base de tétrades e coeficientes de rotação, juntamente com as equações fundamentais da teoria. O formalismo de Newman-Penrose é então definido como aquele em que as tétrades são vetores de tipo-luz que obedecem certas condições. Também serão apresentadas as quantidades fundamentais do formalismo – a saber, os escalares de Weyl, Ricci, Maxwell e os coeficientes de spin – bem como as transformações possíveis nessas quantidades. Finalmente, será determinada a base de Newman-Penrose a ser utilizada em capítulos futuros bem como a expressão da solução geral para buracos negros via formalismo de Newman-Penrose, manifestando o caráter simplificado dos buracos negros quando descritos em tal formalismo.

Nesse capítulo, a escrita foi guiada pelos textos clássicos [73] e [74] a cerca do formalismo espinorial, iniciado por Cartan e largamente desenvolvido por Roger Penrose e outros. O formalismo de Newman-Penrose é elegantemente descrito através de espinores; sua intrínseca conexão com os cones de luz foi levada adiante por Penrose no desenvolvimento do conceito de *twistor*, com o intuito de estabelecer a estrutura

relativística do espaço-tempo como uma consequência lógica do comportamento da luz. O leitor interessado nesse assunto bem como nas tentativas de quantização da relatividade geral a partir de seu espaço de *twistors* é aconselhado a ler as obras [75] e [73].

14.1 Espinores

Um *cone de luz* consiste no conjunto dos vetores nulos (ou de tipo-luz) através de um ponto do espaço de Minkowski. A noção de *espinor* surge da observação de que o cone de luz em torno da origem do espaço de Minkowski admite parametrização complexa, isto é, um ponto no cone de luz pode ser representado tanto por uma matriz com quatro entradas reais como por uma matriz com duas entradas complexas.

Conceito

Os espinores de ordem 1, ξ^A e $\bar{\xi}^{A'}$, são vetores complexos em espaços bidimensionais, $(A, A' = 0, 1)$, sujeitos às transformações

$$\xi_*^A = \alpha_B^A \xi^B \quad e \quad \bar{\xi}_*^{A'} = \bar{\alpha}_{B'}^{A'} \bar{\xi}^{B'}, \quad (14.1)$$

onde (α_B^A) e $(\bar{\alpha}_{B'}^{A'})$ são matrizes conjugadas complexas unimodulares (determinante real unitário), denominadas matrizes-spin.

Cada espinor de ordem 1 representa um ponto do cone de luz no espaço de Minkowski. De fato, seja $\xi^A, (A = 0, 1)$, um espinor de ordem 1 e considere o ponto $x^i, (i = 0, 1, 2, 3)$ no espaço de Minkowski, dado por

$$\begin{aligned} x^0 &= +\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi^0 \bar{\xi}^{0'} + \xi^1 \bar{\xi}^{1'}), \\ x^1 &= +\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi^0 \bar{\xi}^{1'} + \xi^1 \bar{\xi}^{0'}), \\ x^2 &= -\frac{i}{\sqrt{2}}(\xi^0 \bar{\xi}^{1'} - \xi^1 \bar{\xi}^{0'}), \\ x^3 &= +\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi^0 \bar{\xi}^{0'} - \xi^1 \bar{\xi}^{1'}), \end{aligned}$$

ou, inversamente,

$$\begin{aligned}\xi^0 \bar{\xi}^{0'} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 + x^3), & \xi^0 \bar{\xi}^{1'} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x^1 + ix^2), \\ \xi^1 \bar{\xi}^{0'} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x^1 - ix^2), & \xi^1 \bar{\xi}^{1'} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 - x^3).\end{aligned}$$

Por essas equações, resulta

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = 2(\xi^0 \bar{\xi}^{0'} \xi^1 \bar{\xi}^{1'} - \xi^0 \bar{\xi}^{1'} \xi^1 \bar{\xi}^{0'}) = 0.$$

Além disso, definindo-se x_*^i em termos de ξ_*^A e $\bar{\xi}_*^{A'}$ à semelhança de (14.1), pode-se mostrar ([19], pp.532-533) que as matrizes-spin constituem-se em condição necessária e suficiente para que a transformação

$$x_*^i = \beta_j^i x^j$$

seja lorentziana.

É importante observar que existem duas classes de espinores (com e sem linha) conforme as transformações às quais elas estão sujeitas. Isso se deve ao fato de que existem dois conjuntos de vetores-spin, \mathcal{S}^A e $\mathcal{S}^{A'}$, interligados pela relação de *conjugação*,

$$\xi^A = (\xi^0, \xi^1) \in \mathcal{S}^A \mapsto \bar{\xi}^{A'} = (\bar{\xi}^{0'}, \bar{\xi}^{1'}) \in \mathcal{S}^{A'}, \quad (14.2)$$

de maneira que as componentes de $\bar{\xi}^{A'}$ são as conjugadas complexas das componentes de ξ^A .

Consideremos agora $\kappa = (\kappa^0, \kappa^1)$, $\omega = (\omega^0, \omega^1) \in \mathcal{S}^A$ e as operações:

(i) adição: $\mathcal{S}^A \times \mathcal{S}^A \longrightarrow \mathcal{S}^A$, dada por

$$\kappa + \omega = (\kappa^0, \kappa^1) + (\omega^0, \omega^1) = (\kappa^0 + \omega^0, \kappa^1 + \omega^1);$$

(ii) multiplicação escalar: $\mathbb{C} \times \mathcal{S}^A \longrightarrow \mathcal{S}^A$, dada por

$$\lambda \kappa = \lambda(\kappa^0, \kappa^1) = (\lambda \kappa^0, \lambda \kappa^1);$$

(iii) produto interno: $\mathcal{S}^A \times \mathcal{S}^A \longrightarrow \mathbb{C}$, dado por

$$\{\kappa, \omega\} = \{(\kappa^0, \kappa^1), (\omega^0, \omega^1)\} = \kappa^0 \omega^1 - \kappa^1 \omega^0.$$

Pode-se verificar facilmente que tais operações permanecem invariantes por transformações de spin e, sendo assim, o conjunto dos vetores-spin, \mathcal{S}^A , forma um espaço linear bidimensional sobre o corpo dos complexos e admite um produto interno antissimétrico ϵ_{AB} , definido por

$$\epsilon_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (14.3)$$

Observação. Analogamente, pode-se demonstrar um resultado similar para o conjunto $\mathcal{S}^{A'}$ dos vetores-spin definidos por (14.2).

Da mesma forma que no caso tensorial, podemos construir a *álgebra espinorial* gerada pelos espaços lineares \mathcal{S}^A e $\mathcal{S}^{A'}$, através de classes de equivalência de somas formais de produtos formais (para maiores detalhes, ver o capítulo 2 de [74]). Assim, definimos espinores de ordem superior como, por exemplo,

$$\begin{aligned} X^{AB} &\in \mathcal{S}^A \otimes \mathcal{S}^{A'}, \\ X^{AB'} &\in \mathcal{S}^A \otimes \mathcal{S}^{A'}, \\ X_C^{AB'} &\in \mathcal{S}^A \otimes \mathcal{S}^{A'} \otimes \mathcal{S}_A, \end{aligned}$$

onde \mathcal{S}_A denota o dual de \mathcal{S}^A .

A necessidade de se construir a álgebra espinorial a partir dos espaços \mathcal{S}^A e $\mathcal{S}^{A'}$, e não apenas \mathcal{S}^A , reside no fato de que, desse modo, *a álgebra tensorial pode ser vista como estando incluída na álgebra espinorial*, da mesma forma com que o corpo dos números reais está incluído no corpo dos complexos. Assim, um *tensor real* (ou simplesmente *tensor*) corresponde ao espinor que é invariante pela operação de conjugação (14.2), ou seja, corresponde aos elementos da álgebra espinorial gerados por $\mathcal{S}^A \otimes \mathcal{S}^{A'}$ que são hermitianos. Os espinores, em geral, gerados por $\mathcal{S}^A \otimes \mathcal{S}^{A'}$ são denominados *tensores complexos*.

Sabemos que o conceito de espinor está associado à noção de vetor nulo. No entanto, a construção de uma álgebra linear não-comutativa graduada gerada, em cada ponto de uma variedade, por seus espaços tangente e cotangente, é possível e é única (demonstração no capítulo 4 de [49]). Além disso, os vetores nulos geram o espaço de Minkowski. Dessas considerações, concluímos que a álgebra tensorial induzida pela álgebra espinorial está bem definida.

Pelo que foi visto, um vetor tangente pode ser expresso através de uma base tensorial ou espinorial. A correspondência entre essas bases é feita pelos *símbolos de Infeld-van der Waerden*. Sejam $\{\xi_A : A = 0, 1\}$, $\{\xi^A : A = 0, 1\}$ uma base espinorial, e sua dual, e sejam $\{e_i : i = 0, 1, 2, 3\}$, $\{e^i : i = 0, 1, 2, 3\}$ uma base tensorial, e sua dual. Os símbolos de Infeld-van der Waerden são definidos por¹

$$\sigma_i^{AB'} = e_i(\xi^A \xi^{B'}), \quad (14.4)$$

$$\sigma^i_{AB'} = (\xi_A \xi_{B'}) e^i.$$

Com a definição acima, podemos representar as componentes do vetor K em termos das componentes do mesmo vetor numa base espinorial, e vice-versa, isto é,

$$K^i = \sigma^i_{AB'} K^{AB'} \quad e \quad K^{AB'} = \sigma_i^{AB'} K^i. \quad (14.5)$$

Das equações (14.5) segue que as matrizes- σ devem ser hermitianas quando o vetor K for real. A equação (14.5) pode ser generalizada para tensores de ordem superior de forma natural; por exemplo, as componentes do tensor métrico são dadas por

$$g_{ij} = \sigma_i^{AB'} \sigma_j^{CD'} \xi_{AC} \xi_{B'D'}. \quad (14.6)$$

Tétrades

Uma tétrade consiste numa base ortonormal de vetores tangentes definida em cada ponto de um espaço-tempo. Assim, dado qualquer tensor, basta projetá-lo no referencial tétrade a fim de encontrar suas componentes tétrades. Baseado nesse processo, é possível construir uma métrica (plana) e estabelecer diferenciação no formalismo tétrade. As demonstrações dos resultados dessa seção e da próxima, essencialmente baseadas no processo descrito acima, podem ser encontradas no capítulo 1 da referência [19].

A *derivada direcional* de um vetor A , com componentes tétrades $A_{(a)}$, na direção $e_{(b)}$, é dada por

$$A_{(a),(b)} = e^j_{(a)} A_{j;i} e^i_{(b)} + \gamma_{(c)(a)(b)} A^{(c)} \quad (14.7)$$

¹Cada operação em (14.4) corresponde à ação do vetor e^i , visto como "incluído" no espaço $\mathcal{S}^A \otimes \mathcal{S}^{A'}$ dos vetores complexos.

e sua *derivada intrínseca* é

$$A_{(a)|(b)} = A_{(a),(b)} - \eta^{(n)(m)} \gamma_{(n)(a)(b)} A_{(m)}, \quad (14.8)$$

em que se fez uso dos *coeficientes de rotação de Ricci*

$$\gamma_{(a)(b)(c)} = \frac{1}{2} [\lambda_{(a)(b)(c)} + \lambda_{(c)(a)(b)} - \lambda_{(b)(c)(a)}] \quad (14.9)$$

onde

$$\lambda_{(a)(b)(c)} = [e_{(b)i,j} - e_{(b)j,i}] e_{(a)}^i e_{(c)}^j. \quad (14.10)$$

A principal vantagem desse formalismo é que, uma vez determinada a base tétrade, toda a análise da geometria do espaço-tempo pode ser feita sem recorrer à conexão riemanniana. As equações fundamentais do formalismo tétrade são:

(i) as relações de comutação

$$[e_{(a)}, e_{(b)}] = \gamma_{(b)(a)}^{(c)} - \gamma_{(a)(b)}^{(c)}, \quad (14.11)$$

(ii) a identidade de Ricci

$$\begin{aligned} R_{(a)(b)(c)(d)} &= -\gamma_{(a)(b)(c),(d)} + \gamma_{(a)(b)(d),(c)} \\ &+ \gamma_{(b)(a)(f)} [\gamma_{(c)}^{(f)}{}_{(d)} - \gamma_{(d)}^{(f)}{}_{(c)}] + \gamma_{(f)(a)(c)} \gamma_{(b)}^{(f)}{}_{(d)} - \gamma_{(f)(a)(d)} \gamma_{(b)}^{(f)}{}_{(c)}, \end{aligned} \quad (14.12)$$

(iii) a identidade de Bianchi²

$$\begin{aligned} R_{(a)(b)[(c)(d)](f)} &= \frac{1}{6} \sum_{[(c)(d)(f)]} \{ R_{(a)(b)(c)(d),(f)} - \eta^{(n)(m)} [\gamma_{(n)(a)(f)} R_{(m)(b)(c)(d)} \\ &+ \gamma_{(n)(b)(f)} R_{(a)(m)(c)(d)} + \gamma_{(n)(c)(f)} R_{(a)(b)(m)(d)} + \gamma_{(n)(d)(f)} R_{(a)(b)(c)(m)}] \}. \end{aligned} \quad (14.13)$$

Tais equações substituirão as equações de Einstein nos desenvolvimentos futuros quando analisaremos as perturbações das soluções representativas de buracos negros.

²Agrupar um conjunto de índices entre colchetes significa que a quantidade em questão está sob a ação do operador de antissimetriação.

Newman-Penrose

A base de Newman-Penrose (l, n, m, \bar{m}) consiste em uma base tétrade formada por vetores de tipo-luz, sendo dois reais (l, n) e dois conjugados-complexos (m, \bar{m}) , de forma que a métrica plana é dada por

$$\eta_{(a)(b)} = \eta^{(a)(b)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (14.14)$$

Os vetores da base, considerados como derivadas direcionais, são denotados por símbolos especiais:

a) $e_1 = e^2 = D;$

b) $e_2 = e^1 = \bar{\Delta};$

c) $e_3 = -e^4 = \delta; e$

d) $e_4 = -e^3 = \delta^*.$

(14.15)

Os vários coeficientes de rotação de Ricci, agora denominados *coeficientes de spin*, são representados pelos símbolos:

$$\kappa = \gamma_{311} \quad \lambda = \gamma_{244} \quad \rho = \gamma_{314} \quad \tau = \gamma_{312} \quad \varepsilon = \frac{1}{2}(\gamma_{211} + \gamma_{341}) \quad \alpha = \frac{1}{2}(\gamma_{214} + \gamma_{344})$$

$$\sigma = \gamma_{313} \quad \nu = \gamma_{242} \quad \mu = \gamma_{243} \quad \pi = \gamma_{241} \quad \gamma = \frac{1}{2}(\gamma_{212} + \gamma_{342}) \quad \beta = \frac{1}{2}(\gamma_{213} + \gamma_{343}) \quad (14.16)$$

Deve ficar claro que o conjugado complexo de qualquer quantidade no formalismo de Newman-Penrose pode ser obtido pela substituição do índice 3, onde quer que ele ocorra, pelo índice 4, e vice-versa.

Com base no fato de que o espaço-tempo é localmente semelhante ao espaço de Minkowski, é possível estabelecer, à semelhança das tétrades no caso tensorial, uma base espinorial ortonormal em cada ponto do espaço-tempo, $\zeta_{(a)}^A$ e $\zeta_{(a')}^{A'}$ ($a, a' =$

$0, 1$ e $A, A' = 0, 1$), denominada *base díade*. Devemos observar, no entanto, que a existência de campos de espinores globais depende de condições topológicas do espaço-tempo considerado. Uma condição necessária e suficiente é que o espaço-tempo seja não-compacto e paralelizável (teorema de Geroch) de forma que o módulo dos vetores-spin possa ser finitamente gerado ([74], capítulo 1).

Em particular, os espinores da base díade receberão símbolos especiais,

$$\zeta_{(0)}^A = o^A \quad e \quad \zeta_{(1)}^A = \iota^A,$$

e a condição de normalização será expressa por

$$\epsilon_{AB} o^A \iota^B = o^0 \iota^1 - o^1 \iota^0 = o_B \iota^B = -o^A \iota_A = 1.$$

Utilizando-se dos símbolos de Infeld-van der Waerden (14.4), os espinores da base díade determinam uma base de Newman-Penrose através da correspondência

$$\begin{aligned} \sigma_{AB'}^0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_0^{AB'}, & \sigma_{AB'}^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \sigma_1^{AB'}, \\ \sigma_{AB'}^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_2^{AB'}, & \sigma_{AB'}^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_3^{AB'}. \end{aligned}$$

Os elementos da base de Newman-Penrose podem ser escritos em termos da base díade como

$$\begin{aligned} l &= o^A \bar{o}^{B'}, & m &= o^A \bar{\iota}^{B'}, \\ \bar{m} &= \iota^A \bar{o}^{B'} & n &= \iota^A \bar{\iota}^{B'}. \end{aligned} \tag{14.17}$$

Os espinores da base díade também determinam uma tétrade no espaço de Minkowski através da correspondência

$$\begin{aligned} \sigma_0^{AB'} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \sigma_{AB'}^0, & \sigma_1^{AB'} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_{AB'}^1, \\ \sigma_2^{AB'} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = -\sigma_{AB'}^2, & \sigma_3^{AB'} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \sigma_{AB'}^3. \end{aligned}$$

Pode-se demonstrar (veja o capítulo 10 de [19]) que os coeficientes de spin, resultantes da derivação intrínseca de espinores, concordam com a definição (14.16)

obtida em termos da base tétrade. Mais ainda, eles são simétricos no primeiro par de índices de modo que existem apenas 12 coeficientes independentes ([19], p.541).

São eles:

$(c)(d) \setminus (a)(b)$	00	01 ou 10	11
00'	κ	ε	π
10'	ρ	α	λ
01'	σ	β	μ
11'	τ	γ	ν

(14.18)

Decorre das simetrias do tensor de Riemann em uma conexão riemanniana numa variedade quadridimensional que o tensor de Weyl (componente de traço nulo do tensor de Riemann, responsável pela informação de como a *forma* de um corpo muda pela ação de forças de maré durante uma geodésica) e o tensor de Ricci (traço do tensor de Riemann, responsável por informar como o *volume* de um corpo muda pela ação das forças de maré) possuem dez componentes independentes cada ([19], pp.42-43).

No formalismo de Newman-Penrose, as dez componentes independentes do tensor de Weyl são representadas pelos cinco escalares complexos,

$$\begin{aligned}
 \Psi_0 &= -C_{1313} = -C_{pqrs}l^p m^q l^r m^s, \\
 \Psi_1 &= -C_{1213} = -C_{pqrs}l^p n^q l^r m^s, \\
 \Psi_2 &= -C_{1342} = -C_{pqrs}l^p m^q \bar{m}^r n^s, \\
 \Psi_3 &= -C_{1242} = -C_{pqrs}l^p n^q \bar{m}^r n^s, \\
 \Psi_4 &= -C_{2424} = -C_{pqrs}n^p \bar{m}^q n^r \bar{m}^s,
 \end{aligned}
 \tag{14.19}$$

denominados *escalares de Weyl*. As dez componentes independentes do tensor de Ricci são representadas pelos quatro escalares reais e pelos três complexos:

$$\begin{aligned}
 \Phi_{00} &= -\frac{1}{2}R_{11}, & \Phi_{22} &= -\frac{1}{2}R_{22}, & \Phi_{02} &= -\frac{1}{2}R_{33}, & \Phi_{20} &= -\frac{1}{2}R_{44}; \\
 \Phi_{11} &= -\frac{1}{4}(R_{12} + R_{34}), & \Phi_{01} &= -\frac{1}{2}R_{13}, & \Phi_{12} &= -\frac{1}{2}R_{23}, \\
 \Lambda &= \frac{1}{24} = \frac{1}{12}(R_{12} - R_{34}), & \Phi_{10} &= -\frac{1}{2}R_{14}, & \Phi_{21} &= -\frac{1}{2}R_{24}.
 \end{aligned}
 \tag{14.20}$$

As quantidades acima são denominadas *escalares de Ricci*.

Projetando as equações de Maxwell,

$$F_{[ij;k]} = 0 \quad e \quad g^{ik} F_{ij;k} = 0 \quad (14.21)$$

em um referencial tétrade, obtemos

$$F_{[(a)(b)|(c)]} = 0 \quad e \quad \eta^{(n)(m)} F_{(a)(n)|(m)} = 0, \quad (14.22)$$

onde F_{ij} denota o tensor antissimétrico de Maxwell. No formalismo de Newman-Penrose, o tensor de Maxwell é substituído pelos três escalares complexos

$$\begin{aligned} \phi_0 &= F_{13} = F_{ij} l^i m^j \\ \phi_1 &= \frac{1}{2}(F_{12} + F_{43}) = \frac{1}{2} F_{ij} (l^i n^j + \bar{m}^i m^j) \\ \phi_2 &= F_{42} = F_{ij} \bar{m}^i n^j \end{aligned} \quad (14.23)$$

denominados *escalares de Maxwell*.

Adaptabilidade

Como veremos nessa seção, o formalismo de Newman-Penrose se adapta perfeitamente à descrição das soluções de buracos negros. Nos próximos capítulos, veremos que essa adaptabilidade vai além da simplificação nas expressões dos campos, sendo de importância central no desacoplamento das equações da teoria de perturbação dessas soluções. Essa seção foi escrita com base no texto [19].

Uma *congruência de tipo-luz* consiste numa família de curvas integrais de um vetor l de tipo-luz. Quando as curvas são geodésicas de tipo-luz, diz-se que a congruência é geodésica (ou de raios). Os vetores l da base de Newman-Penrose formam uma congruência de geodésicas de tipo-luz se, e somente se, $\kappa = 0$. Além disso, as geodésicas estarão parametrizadas por parâmetros afins se, e somente se, $Re(\varepsilon) = 0$. Para a demonstração desses resultados, sugerimos ao leitor a referência [23].

A fim de se encontrar congruências de raios nos espaços-tempo que descrevem buracos negros é necessário determinar-se a forma explícita das geodésicas. Sabemos da referência [68], pp. 641-649, que o movimento geodésico em um espaço-tempo com tensor métrico g_{ij} é descrito pela equação de Hamilton-Jacobi

$$2 \frac{\partial S}{\partial \tau} = g^{ij} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^j}, \quad (14.24)$$

onde S denota a função principal de Hamilton.

Substituindo as componentes da métrica de Kerr-Newman (13.25) na equação de Hamilton-Jacobi (14.24), resulta

$$2\frac{\partial S}{\partial \tau} = \frac{1}{\rho^2 \Delta} [(r^2 + a^2) \frac{\partial S}{\partial t} + a \frac{\partial S}{\partial \varphi}]^2 - \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} [(a \sin^2 \theta) \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial \varphi}]^2 - \frac{\Delta}{\rho^2} \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2. \quad (14.25)$$

Vamos supor que a equação acima admite solução da forma

$$S = \frac{1}{2} \delta_1 \tau - Et + L_z \varphi + S_r(r) + S_\theta(\theta). \quad (14.26)$$

Inserindo (14.26) e utilizando-se a identidade

$$(aE \sin^2 \theta - L_z)^2 \csc^2 \theta = (L_z^2 \csc^2 \theta - a^2 E^2) \cos^2 \theta + (L_z - aE)^2,$$

a equação (14.25) pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} & \left\{ \Delta \left(\frac{dS_r}{dr}\right)^2 - \frac{1}{\Delta} [(r^2 + a^2)E - aL_z]^2 + (L_z - aE)^2 + \delta_1 r^2 \right\} + \\ & + \left\{ \left(\frac{dS_\theta}{d\theta}\right)^2 + (L_z^2 \csc^2 \theta - a^2 E^2) \cos^2 \theta + \delta_1 a^2 \cos^2 \theta \right\} = 0. \end{aligned} \quad (14.27)$$

A equação acima pode ser separada no par

$$\Delta \left(\frac{dS_r}{dr}\right)^2 = \frac{1}{\Delta} [(r^2 + a^2)E - aL_z]^2 - [\mathcal{L} + (L_z - aE)^2 + \delta_1 r^2], \quad (14.28)$$

$$\left(\frac{dS_\theta}{d\theta}\right)^2 = \mathcal{L} - (L_z^2 \csc^2 \theta - a^2 E^2 + \delta_1 a^2) \cos^2 \theta,$$

onde \mathcal{L} é uma constante de separação. A solução desse sistema é dada por

$$S = \frac{1}{2} \delta_1 \tau - Et + L_z \varphi + \int^r \frac{\sqrt{\mathcal{R}(r)}}{\Delta} dr + \int^\theta d\theta \sqrt{\Theta(\theta)}, \quad (14.29)$$

onde \mathcal{R} e Θ são dadas pelas equações

$$\mathcal{R} = E^2 r^4 + (a^2 E^2 - L_z^2 - \mathcal{L}) r^2 + 2Mr[\mathcal{L} + (L_z - aE)^2] - a^2 \mathcal{L} - \delta_1 r^2 \Delta \quad (14.30)$$

e

$$\Theta = \mathcal{L} + (a^2 E^2 - L_z^2 \csc^2 \theta) \cos^2 \theta - \delta_1 a^2 \cos^2 \theta. \quad (14.31)$$

Derivando a solução S em (14.29) com respeito às quantidades conservadas, \mathcal{L} , δ_1 , E e L_z , concluímos que a equação de Hamilton-Jacobi aplicada à métrica de Kerr-Newman (e casos particulares desta) é separável e apresenta solução dada por

$$\rho^4 \dot{r}^2 = \mathcal{R}, \quad (14.32)$$

$$\rho^4 \dot{\theta}^2 = \Theta, \quad (14.33)$$

$$\rho^2 \dot{\varphi} = \frac{1}{\Delta} [2aMrE + (\rho^2 - 2Mr)L_z \csc^2 \theta], \quad (14.34)$$

$$\rho^2 \dot{t} = \frac{1}{\Delta} (\Sigma^2 E - 2aMrL_z). \quad (14.35)$$

Pela definição de base de Newman-Penrose, temos que l é o vetor tangente a um raio de luz N e m é um vetor complexo ortogonal a l , de modo que em um ponto $p \in N$, a parte real de m gera com l um plano. Considerando um círculo nesse plano e seguindo os raios da congruência l que interceptam o círculo, na direção-futuro (parâmetro crescente), observamos possível contração (ou expansão), rotação e distorção do círculo (em uma elipse). A contração (ou expansão), a rotação e a distorção são medidas, respectivamente, por $-Re(\rho)$, $Im(\rho)$ e σ ([19], pp. 56-58). Além disso, $\kappa = 0$ implica que os raios da congruência são geodésicas.

Dentre as congruências do vetor l , aquelas responsáveis por uma maior simplificação das quantidades e equações fundamentais são as *congruências geodésicas sem distorção*, para as quais $\kappa = \sigma = 0$ (esse resultado decorre do teorema de Goldberg-Sachs; [19], pp.62-63). O principal problema do formalismo de Newman-Penrose está em se encontrar uma base para a qual as congruências de l sejam geodésicas sem distorção. Felizmente, essa base pôde ser encontrada no caso das soluções de buracos negros. Para o espaço-tempo de Kerr-Newman, uma análise da solução (14.32)-(14.35) da equação de Hamilton-Jacobi revela que as órbitas definidas por

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{r^2 + a^2}{\Delta} E, \quad \frac{dr}{d\tau} = \pm E, \quad \frac{d\theta}{d\tau} = 0, \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{a}{\Delta} E, \quad (14.36)$$

são geodésicas de tipo-luz ([19], pp. 347-350 e 623). A partir de (14.36), definimos

a base de Newman-Penrose como

$$\begin{aligned}
l &= \frac{1}{\Delta}(r^2 + a^2, \Delta, 0, a), \\
n &= \frac{1}{2\rho^2}(r^2 + a^2, -\Delta, 0, a), \\
m &= \frac{1}{\bar{\rho}\sqrt{2}}(iasin\theta, 0, 1, icsc\theta), \\
\bar{m} &= \frac{1}{\bar{\rho}^*\sqrt{2}}(-iasin\theta, 0, 1, -icsc\theta),
\end{aligned} \tag{14.37}$$

onde

$$\bar{\rho} = r + iacos\theta, \quad \bar{\rho}^* = r - iacos\theta, \quad e \quad \rho^2 = \bar{\rho}\bar{\rho}^*. \tag{14.38}$$

Não é difícil constatar que $\kappa = \sigma = 0$ de modo que a base (14.37) define uma congruência geodésica sem distorção para o vetor $l = (\frac{r^2+a^2}{\Delta}, \Delta, 0, \frac{a}{\Delta})$.

Os coeficientes de spin e os escalares de Weyl e Maxwell para esse espaço-tempo, em termos dessa base, são dados por

$$\kappa = \sigma = \lambda = \nu = \varepsilon = 0, \tag{14.39}$$

$$\rho = -\frac{1}{\bar{\rho}^*}, \quad \beta = \frac{\cot\theta}{\bar{\rho}2\sqrt{2}}, \quad \pi = \frac{iasin\theta}{\bar{\rho}^*2\sqrt{2}}, \quad \tau = -\frac{iasin\theta}{\rho^2\sqrt{2}}, \tag{14.40}$$

$$\mu = -\frac{\Delta}{2\rho^2\bar{\rho}^*}, \quad \gamma = \mu + \frac{r-M}{2\rho^2}, \quad \alpha = \pi - \beta^*; \tag{14.41}$$

$$\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_3 = \Psi_4 = 0, \tag{14.42}$$

$$\Psi_2 = -\frac{M}{(\bar{\rho}^*)^3} + \frac{Q_*^2}{\bar{\rho}(\bar{\rho}^*)^3}; \tag{14.43}$$

$$\phi_0 = \phi_2 = 0, \tag{14.44}$$

$$\phi_1 = -i\frac{Q_*}{2(\bar{\rho}^*)^2}. \tag{14.45}$$

O resultado acima revela a adaptabilidade dos buracos negros ao formalismo de Newman-Penrose, não apenas pela descrição unificada das soluções, mas principalmente pela simplificação algébrica ($\kappa = \sigma = \lambda = \nu = \varepsilon = \Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_3 = \Psi_4 = 0$) proporcionada nesses casos. Tal simplificação deve-se ao fato de que os espaços-tempo característicos de buracos negros permitem uma simplificação do tensor de Weyl, mediante transformações da base de Newman-Penrose, que tornam as congruências formadas pelos vetores l e n geodésicas sem distorção (para uma análise detalhada, veja [19], pp.62-63).

14.2 Cones de Luz

A noção de campos de tetrades, compondo bases ortonormais sujeitas ao grupo de transformações de Lorentz corresponde à construção de referenciais inerciais ao longo do espaço-tempo. Para o espaço de Minkowski, esses referenciais são globais, enquanto que no caso geral sua definição é local, como foi visto no capítulo 12.

O formalismo tétrede foi desenvolvido por Cartan e é equivalente ao formalismo tensorial da geometria riemanniana, mas enquanto esse último concentra as propriedades do espaço-tempo nas componentes do tensor métrico, a abordagem tétrede focaliza a análise na geometria dos vetores da base, através dos coeficientes de rotação. Dessa forma, podemos explorar as simetrias presentes em certo espaço-tempo e escolher bases tetrades que se adaptem ao problema.

Outro conceito introduzido por Cartan, e desenvolvido por Penrose, é o de *espinor*, o qual surge no processo de parametrização complexa do cone de luz, definido como o conjunto de vetores de tipo-luz em um ponto do espaço de Minkowski. Como a álgebra tensorial está incluída na álgebra espinorial, podemos entender os tensores como sendo um tipo de espinor, mais precisamente como espinores “reais”. A base de Newman-Penrose consiste em um conjunto de espinores de ordem 2, mas pode ser vista, via inclusão, como uma tétrede de tensores reais e “complexos”. Nesse sentido, uma base de Newman-Penrose corresponde à utilização das congruências de raios de luz como referenciais.

O formalismo de Newman-Penrose foi construído de modo a descrever o espaço-tempo por meio da geometria (coeficientes de spin) dos cones de luz. Isso decorre da forte crença de Roger Penrose de que o elemento essencial de um espaço-tempo é sua estrutura de cone de luz. Além do caráter algébrico que a teoria adquire, com a possível classificação dos espaços-tempo de acordo com a forma do tensor de Weyl (essa é a chamada *classificação de Petrov*; para uma exposição detalhada, confira [19], pp.58-62), é nas soluções representativas dos buracos negros que a estrutura do cone de luz se mostra mais efetiva, como evidenciado pela expressão simplificada desses espaços-tempo e pela separação das variáveis na função principal de Jacobi.

Nos capítulos seguintes, a adaptabilidade do formalismo de Newman-Penrose

aos buracos negros se tornará evidente, na medida em que permitirá o estudo das perturbações dos mesmos através da separabilidade, e conseqüente resolução, das equações fundamentais da teoria.

Capítulo 15

Perturbações

Este capítulo é devotado ao estudo das perturbações dos buracos negros de Kerr e Schwarzschild, para os quais existe um tratamento analítico completo da teoria. As perturbações em buracos negros carregados (Kerr-Newman e Reissner-Nordström) serão tratadas no próximo capítulo.

Estudar as perturbações em buracos negros consiste em se descrever a propagação de ondas de diferentes tipos pelo espaço-tempo e como elas são espalhadas e absorvidas. A necessidade de tal estudo surgiu no contexto da estabilidade de buracos negros, isto é, a configuração de colapso deve ser estável a qualquer tipo de perturbação externa a fim de que tais objetos possam se manter na natureza (e serem detectados). Em outras palavras, um buraco negro será estável se toda perturbação inicial com suporte compacto permanecer limitada durante sua evolução ([19], pp.199-200).

Inicialmente as equações dos campos de partículas sem massa - fótons e grávitons - serão expressas de forma apropriada à solução de Kerr e então reduzidas e separadas nas chamadas equações de Teukolsky. A partir de uma forma padrão das equações de Teukolsky, serão determinadas condições necessárias e suficientes para transformá-la numa equação de onda. Em cada caso (fótons e grávitons), serão obtidas as barreiras de potencial e as soluções, denominadas *modos normais*, das respectivas equações de onda. Finalmente, será feita uma análise dos coeficientes de reflexão e transmissão das ondas incidentes nos buracos negros a fim de se entender como elas são espalhadas e absorvidas.

Para a escrita desse capítulo, nos guiamos essencialmente pelo texto [19].

15.1 Equações de Teukolsky

Como a métrica de Kerr é estacionária e axissimétrica, é natural analisar uma perturbação geral desse espaço-tempo como uma superposição de ondas com diferentes frequências ω e períodos m em φ . Uma *perturbação* consiste numa superposição de diferentes modos com uma dependência nas variáveis t e φ , dada por

$$e^{i(\omega t + m\varphi)}, \quad (15.1)$$

onde ω é um real positivo e m , um inteiro positivo, negativo ou zero (no buraco negro de Schwarzschild, $m = 0$ devido à simetria esférica).

No que segue, o fator comum (15.1), presente nas quantidades que descrevem a perturbação, será omitido de forma que tais grandezas estarão representadas por suas amplitudes. Em princípio, não há motivo para se esperar que a dependência das amplitudes nas variáveis restantes, r e θ , seja passível de separação. É um resultado surpreendente [86] que essa separação seja possível quando as equações dos campos de onda são escritas no formalismo de Newman-Penrose com a base de vetores (14.37).

Seja (l, n, m, \bar{m}) essa base. Quando tais vetores atuam sobre funções com a dependência em t e φ especificada em (15.1), resulta

$$\begin{aligned} l &= D = \mathcal{D}_0, \\ n &= \bar{\Delta} = -\frac{\Delta}{2\rho^2} \mathcal{D}_0^\dagger, \\ m &= \delta = \frac{1}{\bar{\rho}\sqrt{2}} \mathcal{L}_0^\dagger, \\ \bar{m} &= \delta^* = \frac{1}{\bar{\rho}^*\sqrt{2}} \mathcal{L}_0, \end{aligned} \quad (15.2)$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_n &= \partial_r + \frac{iK}{\Delta} + 2n \frac{r-M}{\Delta}, \\
\mathcal{D}_n^\dagger &= \partial_r - \frac{iK}{\Delta} + 2n \frac{r-M}{\Delta}, \\
\mathcal{L}_n &= \partial_\theta + Q + n \cot \theta, \\
\mathcal{L}_n^\dagger &= \partial_\theta - Q + n \cot \theta,
\end{aligned} \tag{15.3}$$

e

$$K = (r^2 + a^2)\omega + am, \quad Q = a\omega \sin \theta + m \operatorname{csc} \theta, \tag{15.4}$$

$$\bar{\rho} = r + i a \cos \theta, \quad \bar{\rho}^* = r - i a \cos \theta, \quad \bar{\rho}^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta. \tag{15.5}$$

Estabelecida a formulação matemática do problema, o objetivo agora consiste em expressar as equações das partículas sem massa – fótons e grávitons – no formalismo de Newman-Penrose, reduzi-las e separá-las a fim de se obter as equações de Teukolsky. Esse procedimento será feito caso a caso.

Fótons

Não é difícil deduzir que as equações de Maxwell no formalismo de Newman-Penrose são dadas por

$$D\phi_1 - \delta^* \phi_0 = (\pi - 2\alpha)\phi_0 + 2\rho\phi_1 - \kappa\phi_2, \tag{15.6}$$

$$D\phi_2 - \delta^* \phi_1 = -\lambda\phi_0 + 2\pi\phi_1 + (\rho - 2\varepsilon)\phi_2, \tag{15.7}$$

$$\delta\phi_1 - \bar{\Delta}\phi_0 = (\mu - 2\gamma)\phi_0 + 2\tau\phi_1 - \sigma\phi_2, \tag{15.8}$$

$$\delta\phi_2 - \bar{\Delta}\phi_1 = -\nu\phi_0 + 2\mu\phi_1 + (\tau - 2\beta)\phi_2, \tag{15.9}$$

onde ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2 são os escalares de Maxwell, $\lambda, \pi, \rho, \varepsilon, \mu, \gamma, \tau, \sigma, \nu, \beta$ são os coeficientes de spin e $D, \bar{\Delta}, \delta, \delta^*$ representam os operadores derivada direcional (15.2) da base de Newman-Penrose.

Proposição 15.1.1. *A propagação de fótons no espaço-tempo do buraco negro de Kerr é governada pelas equações*

$$(\Delta\mathcal{D}_0\mathcal{D}_0^\dagger - 2i\omega r)(\Delta R_{+1}) = \mathcal{Q}(\Delta R_{+1}), \quad (15.10)$$

$$(\Delta\mathcal{D}_0^\dagger\mathcal{D}_0 + 2i\omega r)R_{-1} = \mathcal{Q}R_{-1}, \quad (15.11)$$

$$(\mathcal{L}_0^\dagger\mathcal{L}_1 + 2a\omega\cos\theta)S_{+1} = -\mathcal{Q}S_{+1}, \quad (15.12)$$

$$(\mathcal{L}_0\mathcal{L}_1^\dagger - 2a\omega\cos\theta)S_{-1} = -\mathcal{Q}S_{-1}, \quad (15.13)$$

com

$$\phi_0 = R_{+1}(r)S_{+1}(\theta) \quad (15.14)$$

e

$$\phi_2 = \frac{1}{2(\bar{\rho}^*)^2}R_{-1}(r)S_{-1}(\theta), \quad (15.15)$$

onde \mathcal{Q} é uma constante de separação, e $R_{\pm 1}$ e $S_{\pm 1}$ são, respectivamente, funções de r e θ somente.

Demonstração. Substituindo nas equações de Maxwell os coeficientes de spin (14.39)-(14.41), apropriados à métrica de Kerr ($Q_* = 0$), as derivadas direcionais definidas em (15.2), e fazendo as substituições

$$\Phi_0 = \phi_0, \quad \Phi_1 = \phi_1\bar{\rho}^*\sqrt{2} \quad e \quad \Phi_2 = 2\phi_2(\bar{\rho}^*)^2, \quad (15.16)$$

com $\bar{\rho}$ e $\bar{\rho}^*$ definidas em (15.5), obtemos um sistema de quatro equações lineares de 1ª ordem que podem ser reduzidas ao sistema

$$\left[\left(\mathcal{L}_0^\dagger + \frac{ia\sin\theta}{\bar{\rho}^*}\right)\left(\mathcal{L}_1 - \frac{ia\sin\theta}{\bar{\rho}^*}\right) + \Delta\left(\mathcal{D}_1 + \frac{1}{\bar{\rho}^*}\right)\left(\mathcal{D}_1^\dagger - \frac{1}{\bar{\rho}^*}\right)\right]\Phi_0 = 0, \quad (15.17)$$

$$\left[\left(\mathcal{L}_0 + \frac{ia\sin\theta}{\bar{\rho}^*}\right)\left(\mathcal{L}_1^\dagger - \frac{ia\sin\theta}{\bar{\rho}^*}\right) + \Delta\left(\mathcal{D}_0^\dagger + \frac{1}{\bar{\rho}^*}\right)\left(\mathcal{D}_0 - \frac{1}{\bar{\rho}^*}\right)\right]\Phi_2 = 0, \quad (15.18)$$

mediante a eliminação de Φ_1 , devido à comutatividade dos operadores $(\mathcal{D}_0 + \frac{1}{\bar{\rho}^*})$ e $(\mathcal{L}_0^\dagger + \frac{ia\sin\theta}{\bar{\rho}^*})$, bem como dos operadores $(\mathcal{L}_0 + \frac{ia\sin\theta}{\bar{\rho}^*})$ e $\Delta(\mathcal{D}_0^\dagger + \frac{1}{\bar{\rho}^*})$.

A equação (15.17) pode ser simplificada fazendo-se uso das identidades

$$\begin{aligned} \Delta\left(\mathcal{D}_1 + \frac{1}{\bar{\rho}^*}\right)\left(\mathcal{D}_1^\dagger - \frac{1}{\bar{\rho}^*}\right) &= \Delta\mathcal{D}_1\mathcal{D}_1^\dagger - \frac{2iK}{\bar{\rho}^*}, \\ \left(\mathcal{L}_0^\dagger + \frac{ia\sin\theta}{\bar{\rho}^*}\right)\left(\mathcal{L}_1 - \frac{ia\sin\theta}{\bar{\rho}^*}\right) &= \mathcal{L}_0^\dagger\mathcal{L}_1 + \frac{2ia\sin\theta}{\bar{\rho}^*}Q, \end{aligned}$$

$$K - aQ \sin \theta = \rho^2 \omega,$$

em que K e Q estão definidas por (15.4). Redução semelhante pode ser feita à equação (15.18), de modo que o sistema (15.17)-(15.18) se torna

$$[\Delta \mathcal{D}_1 \mathcal{D}_1^\dagger + \mathcal{L}_0^\dagger \mathcal{L}_1 - 2i\omega(r + ia \cos \theta)] \Phi_0 = 0, \quad (15.19)$$

$$[\Delta \mathcal{D}_0^\dagger \mathcal{D}_0 + \mathcal{L}_0 \mathcal{L}_1^\dagger + 2i\omega(r + ia \cos \theta)] \Phi_2 = 0. \quad (15.20)$$

A separação das equações (15.19)-(15.20) é então possível mediante as substituições

$$\Phi_0 = R_{+1}(r)S_{+1}(\theta) \quad e \quad \Phi_2 = R_{-1}(r)S_{-1}(\theta), \quad (15.21)$$

resultando nas equações (15.10)-(15.13). \square

Observação. A constante de separação Q é única porque as equações (15.12) e (15.13) são conjugadas complexas de modo que as funções S_{+1} e S_{-1} admitem o mesmo conjunto de autovalores; tais equações podem ser expandidas e resolvidas a fim de se obter a constante de separação. Além disso, observando (15.10) e (15.11), podemos concluir que ΔR_{+1} e R_{-1} também satisfazem equações conjugadas complexas.

As equações (15.10)-(15.13) e as funções $R_{\pm 1}$ e $S_{\pm 1}$ são denominadas, respectivamente, *equações de Teukolsky* e *funções de Teukolsky*.

Grávítions

Ao contrário do campo eletromagnético, não se conhece uma definição geral para o tensor energia-momento do campo gravitacional. Dessa forma, não existe um análogo das equações de Maxwell para os grávítions. Portanto, a fim de se estudar o comportamento das ondas gravitacionais incidentes no buraco negro de Kerr, é preciso analisar as perturbações nas componentes da métrica.

Como vimos no capítulo 14, a descrição do espaço-tempo de Kerr (assim como de todos os buracos negros) no formalismo de Newman-Penrose é bastante simplificada pelo anulamento dos escalares de Weyl, Ψ_0 , Ψ_1 , Ψ_3 e Ψ_4 , e dos coeficientes de spin,

κ , σ , λ e ν , na base escolhida. Quando o buraco negro de Kerr é perturbado gravitacionalmente, tais quantidades deixam de se anular e adquirem valores de primeira ordem de grandeza. No que segue, as equações que governam as perturbações nessas quantidades serão obtidas e separadas de forma análoga ao procedimento realizado para os fótons. Um estudo completo do problema, envolvendo a perturbação nas demais quantidades da geometria de Kerr aqui não consideradas, é extremamente complexo – envolvendo as relações de comutação (14.11) e um conjunto maior de identidades de Ricci (14.12) e Bianchi (14.13) – e pode ser encontrado no capítulo 9 de [19].

O comportamento dos escalares de Weyl, Ψ_0 , Ψ_1 , Ψ_3 e Ψ_4 , e dos coeficientes de spin, κ , σ , λ e ν , é descrito pelas quatro identidades de Bianchi e pelas duas identidades de Ricci¹, dadas por

$$(\delta^* - 4\alpha + \pi)\Psi_0 - (D - 2\varepsilon - 4\tilde{\rho})\Psi_1 = 3\kappa\Psi_2, \quad (15.22)$$

$$(\bar{\Delta} - 4\gamma + \mu)\Psi_0 - (\delta - 4\tau - 2\beta)\Psi_1 = 3\sigma\Psi_2, \quad (15.23)$$

$$(D - \tilde{\rho} - \tilde{\rho}^* - 3\varepsilon + \varepsilon^*)\sigma - (\delta - \tau + \pi^* - \alpha^* - 3\beta)\kappa = \Psi_0, \quad (15.24)$$

e

$$(D + 4\varepsilon - \tilde{\rho})\Psi_4 - (\delta^* + 4\pi + 2\alpha)\Psi_3 = -3\lambda\Psi_2, \quad (15.25)$$

$$(\delta + 4\beta - \tau)\Psi_4 - (\bar{\Delta} + 2\gamma + 4\mu)\Psi_3 = -3\nu\Psi_2, \quad (15.26)$$

$$(\bar{\Delta} + \mu + \mu^* + 3\gamma - \gamma^*)\lambda - (\delta^* + 3\alpha + \beta^* + \pi - \tau^*)\nu = -\Psi_4. \quad (15.27)$$

Com essas equações em mãos, podemos determinar como se dá a evolução da perturbação do campo gravitacional sobre um espaço-tempo produzido por um buraco negro de Kerr. Esse é o resultado da proposição seguinte.

Proposição 15.1.2. *A propagação de grávitons no espaço-tempo de Kerr é gover-*

¹A razão para a escolha dessas seis equações, dentre todas possíveis, reside no fato de elas serem matematicamente simples, pois são homogêneas e lineares nas quantidades consideradas, Ψ_0 , Ψ_1 , Ψ_3 , Ψ_4 , κ , σ , λ e ν . Como as perturbações nessas quantidades são de 1ª ordem, todas as demais quantidades podem ser substituídas por seus valores não-perturbados ([19], p.431).

nada pelas equações

$$(\Delta\mathcal{D}_{-1}\mathcal{D}_0^\dagger - 6i\omega r)(\Delta^2 R_{+2}) = \mathcal{Q}(\Delta^2 R_{+2}), \quad (15.28)$$

$$(\Delta\mathcal{D}_{-1}^\dagger\mathcal{D}_0 + 6i\omega r)R_{-2} = \mathcal{Q}R_{-2}, \quad (15.29)$$

$$(\mathcal{L}_{-1}^\dagger\mathcal{L}_2 + 6a\omega\cos\theta)S_{+2} = -\mathcal{Q}S_{+2}, \quad (15.30)$$

$$(\mathcal{L}_{-1}\mathcal{L}_2^\dagger - 6a\omega\cos\theta)S_{-2} = -\mathcal{Q}S_{-2}, \quad (15.31)$$

com

$$\Psi_0 = R_{+2}(r)S_{+2}(\theta) \quad (15.32)$$

e

$$\Psi_4 = \frac{1}{(\bar{\rho}^*)^4}R_{-2}(r)S_{-2}(\theta), \quad (15.33)$$

onde \mathcal{Q} é uma constante de separação, e $R_{\pm 2}$ e $S_{\pm 2}$ são, respectivamente, funções de r e θ somente.

Demonstração. A demonstração é análoga ao processo descrito na obtenção das equações (15.10)-(15.13). Para o caso dos grávitons, devem ser feitas as substituições

$$\Phi_0 = \Psi_0, \quad \Phi_1 = \Psi_1\bar{\rho}^*\sqrt{2}, \quad k = \frac{\kappa}{(\bar{\rho}^*)^2\sqrt{2}} \quad e \quad s = \frac{\sigma\bar{\rho}}{(\bar{\rho}^*)^2}, \quad (15.34)$$

$$\Phi_4 = \Psi_4(\bar{\rho}^*)^4, \quad \Phi_3 = \Psi_3\frac{(\bar{\rho}^*)^3}{\sqrt{2}}, \quad l = \frac{\lambda\bar{\rho}^*}{2} \quad e \quad n = \frac{\nu\bar{\rho}^2}{\sqrt{2}}, \quad (15.35)$$

e usar as identidades

$$Q_{,\theta} + Q \cot\theta = 2a\omega \cos\theta,$$

$$K - aQ \sin\theta = \rho^2\omega,$$

a fim de reduzir o sistema (15.22)-(15.27) a um sistema de duas equações lineares de 2ª ordem em Φ_0 e Φ_4 , cujas variáveis podem ser separadas mediante as substituições

$$\Phi_0 = R_{+2}(r)S_{+2}(\theta) \quad e \quad \Phi_4 = R_{-2}(r)S_{-2}(\theta).$$

□

As equações da proposição acima são também denominadas *equações de Teukolsky*.

Equações Gerais de Teukolsky

É impossível não se surpreender com a simetria intrínseca apresentada pelas equações de Teukolsky na geometria de Kerr, sugerindo uma possível representação geral e um tratamento formal (que será feito na próxima seção) englobando os dois casos estudados. A representação geral pode ser feita com o auxílio do conceito de spin s (fótons: $s = 1$; grávitons: $s = 2$). A partir dessa consideração, a *forma geral das equações de Teukolsky* é

$$\{\Delta \mathcal{D}_{1-s} \mathcal{D}_0^\dagger - 2(2s-1)i\omega r\} P_{+s} = Q P_{+s}, \quad (15.36)$$

$$\{\Delta \mathcal{D}_{1-s}^\dagger \mathcal{D}_0 + 2(2s-1)i\omega r\} P_{-s} = Q P_{-s}, \quad (15.37)$$

$$\{\mathcal{L}_{1-s}^\dagger \mathcal{L}_s + 2(2s-1)a\omega \cos \theta\} S_{+s} = -Q S_{+s}, \quad (15.38)$$

$$\{\mathcal{L}_{1-s} \mathcal{L}_s^\dagger - 2(2s-1)a\omega \cos \theta\} S_{-s} = -Q S_{-s}, \quad (15.39)$$

onde $P_{+s} = \Delta^s R_{+s}$ e $P_{-s} = R_{-s}$.

A interpretação física das perturbações de buracos negros consiste na análise das equações de Teukolsky para a parte radial, cuja resolução completa está condicionada à determinação da constante de separação, obtida através da normalização e solução da parte angular.

15.2 Perturbações

A análise matemática das perturbações do buraco negro de Kerr será feita em três passos: primeiramente, as equações gerais de Teukolsky que governam a parte radial da perturbação serão transformadas em uma equação de onda unidimensional com potenciais a determinar; após isso, soluções explícitas para os potenciais em cada caso (spins 1 e 2) serão encontradas; finalmente, o comportamento das ondas refletidas e transmitidas pelo buraco negro no horizonte será estudado.

Teoria da Transformação

A coordenada tartaruga r_* é obtida da coordenada radial r por

$$\frac{d}{dr_*} = \frac{\Delta}{\varpi^2} \frac{d}{dr}, \quad (15.40)$$

onde Δ é a função de horizonte e $\varpi^2 = r^2 + \alpha^2$, com $\alpha^2 = a^2 + (\frac{am}{\omega})$. Integrando a equação (15.40), obtemos

$$r_* = r + \frac{2Mr_+ + (\frac{am}{\omega})}{r_+ - r_-} \ln\left(\frac{r}{r_+} - 1\right) - \frac{2Mr_- + (\frac{am}{\omega})}{r_+ - r_-} \ln\left(\frac{r}{r_-} - 1\right), \quad (15.41)$$

de modo que a coordenada tartaruga só está definida para $r > r_+$, isto é, a análise através de r_* só é válida fora do horizonte de eventos. Do comportamento de $r_*(r)$ na equação (15.41), é fácil de ver que a coordenada tartaruga é

(a) univaluada quando $\omega > \omega_s$, ou seja, $r_* \rightarrow +\infty$ para $r \rightarrow +\infty$ e $r_* \rightarrow -\infty$ para $r \rightarrow r_+ + 0^2$;

(b) bivaluada quando $0 < \omega < \omega_s$, ou seja, $r_* \rightarrow +\infty$ para $r \rightarrow +\infty$ e $r \rightarrow r_+ + 0$,

onde $\omega_s = -\frac{am}{2Mr_+}$ ($m < 0$).

Na equação geral de Teukolsky para P_{+s} ,

$$[\Delta \mathcal{D}_{1-s} \mathcal{D}_0^\dagger - 2(2s-1)i\omega r] P_{+s} = \mathcal{Q} P_{+s},$$

o período m ocorre explicitamente nos operadores \mathcal{D} e \mathcal{D}^\dagger através de

$$K = (r^2 + a^2)\omega + am. \quad (15.42)$$

Eliminando m em (15.42) mediante a mudança para a coordenada tartaruga na variável independente e a mudança

$$Y = |\varpi^2|^{-s+\frac{1}{2}} P_{+s}, \quad \Lambda^2 = \Lambda_+ \Lambda_- = \Lambda_- \Lambda_+ \quad e \quad \Lambda_\pm = \frac{d}{dr_*} \pm i\omega, \quad (15.43)$$

na variável dependente, podemos colocar a equação geral de Teukolsky para P_{+s} na forma

$$\Lambda^2 Y + P \Lambda_- Y - Q Y = 0, \quad (15.44)$$

²A expressão " $r \rightarrow r_+ + 0$ " significa que r tende a r_+ pela direita.

onde

$$P = \frac{2s}{\varpi^4} [2r\Delta - \varpi^2(r - M)] \quad (15.45)$$

e

$$Q = \frac{\Delta}{\varpi^4} \left\{ \mathcal{Q} - (2s - 1) \left[\frac{\Delta - 2(s - 1)r(r - M)}{\varpi^2} + (2s - 3) \frac{r^2 \Delta}{\varpi^4} \right] \right\}. \quad (15.46)$$

Quando a coordenada tartaruga é bivaluada, as funções P e Q se tornam singulares em $r = |\alpha|$ de forma que a equação (15.44) deve ser analisada nos dois ramos da relação $r_*(r)$: $r_+ < r < |\alpha|$ e $r > |\alpha|$.

Uma vez que a equação geral de Teukolsky (para P_{+s}) foi posta na forma padrão (15.44), o próximo passo é reduzi-la a uma equação de onda unidimensional

$$\Lambda^2 Z = VZ. \quad (15.47)$$

Em [23], demonstra-se que uma condição necessária e suficiente para que isso seja possível consiste na existência de funções ℓ , β , R , T e V que satisfaçam o sistema

$$Y = \ell V Z + T \Lambda_+ Z, \quad (15.48)$$

$$\Lambda_- Y = -\frac{\Delta^s}{\varpi^{4s}} \beta Z + R \Lambda_+ Z, \quad (15.49)$$

$$\frac{\Delta^s}{\varpi^{4s}} K Z = R Y - T \Lambda_- Y, \quad (15.50)$$

$$K \Lambda_+ Z = \beta Y + \frac{\varpi^{4s}}{\Delta^s} \ell V \Lambda_- Y \quad (15.51)$$

ou, equivalentemente,

$$R - \ell V = \frac{dT}{dr_*}, \quad (15.52)$$

$$\frac{d}{dr_*} \left(\frac{\varpi^{4s}}{\Delta^s} R \right) = \frac{\varpi^{4s}}{\Delta^s} (QT - 2i\omega R) + \beta, \quad (15.53)$$

$$R \left(R - \frac{dT}{dr_*} \right) + \frac{\Delta^s}{\varpi^{4s}} \beta T = \frac{\Delta^s}{\varpi^{4s}} K, \quad (15.54)$$

$$(R - Q\ell)V = \frac{\Delta^s}{\varpi^{4s}} \frac{d\beta}{dr_*}. \quad (15.55)$$

Vamos estudar agora o comportamento das soluções da equação de onda (15.47). Considere duas soluções independentes dessa equação, Z_1 e Z_2 . Não é difícil de ver que seu wronskiano

$$[Z_1, Z_2]_{r_*} = Z_1 \Lambda_- Z_2 - Z_2 \Lambda_- Z_1 \quad (15.56)$$

satisfaz a identidade

$$K[Z_1, Z_2]_{r_*} = -\Delta^{1-s} \frac{\varpi^{4s-2}}{|\varpi^2|^{2s-1}} [P_s(1), P_s(2)], \quad (15.57)$$

onde $P_s(1)$ e $P_s(2)$ são soluções distintas da equação de Teukolsky correspondentes a Z_1 e Z_2 . Como Z_1 e Z_2 são independentes, seu wronskiano será constante. No entanto, quando $0 < \omega < \omega_s$, o potencial V se torna singular em $r = |\alpha|$ e a equação (15.56) precisa ser analisada, separadamente, nos dois ramos de r_* ($r_+ < r < |\alpha|$ e $r > |\alpha|$). Nesse caso, o wronskiano assumirá valores constantes nos dois ramos, não necessariamente idênticos. Em [23], demonstra-se que os valores são, na verdade, idênticos a menos de mudança de sinal ao cruzar a singularidade $r = |\alpha|$ – mudança essa que traz implicações físicas importantes (ver seção 15.3).

Antes de partir para a determinação de soluções explícitas para o potencial V nos casos $s = 1$ e 2 , precisamos ressaltar que todo o raciocínio feito para P_{+s} pode ser aplicado à equação (15.37), que governa P_{-s} , resultando em

$$\Lambda^2 Y + P\Lambda_+ Y - QY = 0 \quad (15.58)$$

que é conjugada complexa da equação (15.44). As soluções das equações (15.44) e (15.58) serão distinguidas por $Y^{(+\omega)}$ e $Y^{(-\omega)}$, respectivamente, assim como as funções $Z^{(+\omega)}$ e $Z^{(-\omega)}$, que satisfazem as equações de onda unidimensionais associadas.

Potenciais

É um fato surpreendente que as condições (15.48)-(15.51) sejam satisfeitas para as partículas de spins 1 e 2, de modo que as respectivas equações de Teukolsky possam ser transformadas em equações de onda com funções potenciais explicitamente determinadas.

Para o caso dos fótons ($s = 1$), tais condições são satisfeitas para as funções

$$T = 2i\omega, \quad R = \mp 2\omega\alpha \frac{\Delta}{\varpi^4}, \quad (15.59)$$

$$K = 4\omega^2(Q \pm 2\omega\alpha), \quad \beta = -2i\omega(Q - \alpha^2 \frac{\Delta}{\varpi^4} \pm 2\omega\alpha),$$

resultando na equação de onda

$$\Lambda^2 Z^{(\pm\omega)} = VZ^{(\pm\omega)}, \quad (\Lambda^2 = \frac{d^2}{dr_*^2} + \omega^2), \quad (15.60)$$

com potencial V dado por

$$V = \frac{\Delta}{\varpi^4} \left[\mathcal{Q} - \alpha^2 \frac{\Delta}{\varpi^4} \mp i\alpha\varpi^2 \frac{d}{dr_*} \left(\frac{\Delta}{\varpi^4} \right) \right], \quad (\varpi^2 = r^2 + \alpha^2). \quad (15.61)$$

É importante salientar que o potencial V produz *duas* soluções distintas de acordo com a escolha do sinal em sua fórmula. Além disso, ambos os potenciais apresentam características comuns:

- (i) tornam-se complexos para $\omega > \omega_c (= -\frac{m}{a})$;
- (ii) decaem exponencialmente em r_* , quando se aproximam do horizonte $r \rightarrow r_+ + 0$;
- (iii) comportam-se como r^{-2} , quando $r \rightarrow +\infty$;
- (iv) quando $\omega < \omega_s$, são singulares em $r = |\alpha|$.

No caso dos grávitons ($s = 2$), as condições (15.48)-(15.51) são satisfeitas com a escolha de funções

$$\begin{aligned} T &= \left(\frac{F_{,r_*} - \kappa_2}{F - \beta_2} \right) + 2i\omega, & \beta &= \left[\kappa_2 - \beta_2 \left(\frac{F_{,r_*} - \kappa_2}{F - \beta_2} \right) \right] + 2i\omega\beta_2, \\ K &= [\mathcal{Q}(\mathcal{Q} + 2) - 4\omega^2\beta_2] + 2i\omega\kappa_2, & R &= \frac{\Delta^2}{\varpi^8} (F + \beta_2), \end{aligned} \quad (15.62)$$

que nos fornece a equação de onda

$$\Lambda^2 Z^{(\pm\omega)} = V Z^{(\pm\omega)}, \quad (\Lambda^2 = \frac{d^2}{dr_*^2} + \omega^2), \quad (15.63)$$

cujo potencial é dado por

$$V = -\frac{\Delta^2}{\varpi^8} \beta_2^2 + \frac{\mathcal{Q}(\mathcal{Q} + 2)}{F + \beta_2} - \frac{(F' - \kappa_2)(\kappa_2 F - \beta_2 F')}{(F - \beta_2)(F^2 - \beta_2^2)}, \quad (\varpi^2 = r^2 + \alpha^2), \quad (15.64)$$

em que

$$F = \frac{1}{\Delta} [\mathcal{Q}\varpi^4 + 3\varpi^2(r^2 - a^2) - 3r^2\Delta], \quad F' = \frac{dF}{dr_*}, \quad (15.65)$$

$$\beta_2 = \pm 3\alpha^2, \quad (15.66)$$

$$\kappa_2 = \pm \{36M^2 - 2\mathcal{Q}[\alpha^2(5\mathcal{Q} + 6) - 12a^2] + 2\beta_2\mathcal{Q}(\mathcal{Q} + 2)\}^{\frac{1}{2}} \quad (15.67)$$

e os sinais de κ_2 e β_2 são escolhidos independentemente.

Como os sinais de β_2 e κ_2 podem ser escolhidos independentemente, resulta que o potencial (15.64) produz *quatro* soluções distintas. Esses potenciais apresentam características comuns:

- (i) tornam-se complexos, dependendo do sinal sob a raiz quadrada na definição de κ_2 ;
- (ii) decaem exponencialmente em r_* , quando se aproximam do horizonte $r \rightarrow r_+ + 0$;
- (iii) comportam-se como r^{-2} , quando $r \rightarrow +\infty$;
- (iv) quando $\omega < \omega_s$, são singulares em $r = |\alpha|$.

Teoria de Espalhamento

De acordo com os resultados da seção anterior, todos os potenciais encontrados comportam-se como r^{-2} quando $r \rightarrow r_* \rightarrow +\infty$ e decaem exponencialmente à medida que se aproximam do horizonte em $r_* \rightarrow -\infty$. No caso real, tal comportamento caracteriza uma *barreira de potencial*.

Analisar o comportamento das ondas incidentes sobre uma barreira de potencial unidimensional consiste em um problema de autovalor e autovetor para o operador definido pela equação de onda (15.47), que pode ser reescrita como

$$\left(\frac{d^2}{dr_*^2} - V\right)Z = (-\omega^2)Z \quad (15.68)$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{d^2 Z}{dr_*^2} + k^2 Z = 0, \quad (15.69)$$

onde $k^2(r_*) = \omega^2 - V(r_*)$.

A *teoria de espalhamento (independente do tempo)* consiste no estudo da equação (15.68) para tipos diversos de funções potenciais V . O caso mais simples ocorre quando a ação do sistema se dá de maneira uniforme em uma região infinita do espaço, isto é, o suporte da função potencial V corresponde a um intervalo $[-a, 0]$, $a > 0$, e $V(r_*)$ é constante nesse intervalo. Como fora da barreira, supomos movimento livre de partículas ($V(r_*) = 0$), as soluções de (15.69) são da forma

$$Z(r_*) = A_1 e^{+i\omega r_*} + B_1 e^{-i\omega r_*}, \quad r_* > 0, \quad (15.70)$$

$$Z(r_*) = A_2 e^{+i\omega r_*} + B_2 e^{-i\omega r_*}, \quad -a \leq r_* \leq 0, \quad (15.71)$$

$$Z(r_*) = A_3 e^{+i\omega r_*} + B_3 e^{-i\omega r_*}, \quad r_* < -a. \quad (15.72)$$

As amplitudes, A_1 , A_2 , A_3 , B_1 , B_2 e B_3 , são constantes de integração as quais podem ser determinadas a partir da condição de continuidade³ da função de onda $Z(r_*)$ e de sua derivada na fronteira de $[-a, 0]$, ou seja,

$$\begin{aligned} Z(-a-0) &= Z(-a+0), & Z(0-0) &= Z(0+0), \\ Z'(-a-0) &= Z'(-a+0), & Z'(0-0) &= Z'(0+0). \end{aligned} \quad (15.73)$$

Os termos da forma $e^{+i\omega r_*}$, e^{+ikr_*} representam ondas planas propagando-se no sentido negativo de r_* enquanto que os termos $e^{-i\omega r_*}$, e^{-ikr_*} correspondem às ondas que se deslocam na direção positiva de r_* . Considerando que a onda incidente se propaga na direção negativa de r_* e o fato de que (15.73) permite dois graus de liberdade ao conjunto das constantes de integração, segue que

$$A_1 = 0 \quad e \quad B_3 = 0. \quad (15.74)$$

A razão entre as intensidades da onda refletida, $|B_1|^2$, e incidente, $|A_1|^2$, denomina-se *coeficiente de reflexão* \mathbb{R} . Da mesma forma, define-se o *coeficiente de transmissão* \mathbb{T} a partir das intensidades da onda transmitida, $|A_3|^2$, e da onda incidente, $|A_1|^2$. Decorre das equações (15.70)-(15.74) o resultado

$$\mathbb{R} + \mathbb{T} = 1, \quad (15.75)$$

que expressa a lei da conservação da energia.

O processo aqui descrito pode ser generalizado para os potenciais complexos V^j da seção anterior para os quais a reflexão e transmissão das ondas incidentes no buraco negro ocorre no infinito ($r_* \rightarrow +\infty$) e no horizonte de eventos ($r_* \rightarrow -\infty$). Como os potenciais V^j , ($j = 1, \dots, 2s$), são de curto-alcance, isto é, decaem mais rapidamente que r_*^{-1} para $r_* \rightarrow \pm \infty$, o comportamento assintótico das soluções $Z^{(\pm\omega)}$ para $r_* \rightarrow \pm \infty$ será

$$e^{\pm i\omega r_*}, \quad (r_* \rightarrow \pm \infty). \quad (15.76)$$

Sejam agora $Z^{(\pm\omega)}$ soluções da equação de onda unidimensional

$$\Lambda^2 Z^{(\pm\omega)} = V Z^{(\pm\omega)},$$

³As condições de continuidade impostas à função de onda visam garantir que os autovalores em (15.68) sejam reais ([76], pp.48-49).

satisfazendo as condições de fronteira

$$\begin{aligned} Z^{(\pm\omega)} &\longrightarrow C^{(\pm\omega)} e^{\pm i\omega r_*} + A^{(\pm\omega)} e^{\mp i\omega r_*} \quad (r_* \rightarrow +\infty), \\ &\longrightarrow B^{(\pm\omega)} e^{\pm i\omega r_*} \quad (r_* \rightarrow -\infty). \end{aligned} \tag{15.77}$$

Os coeficientes de reflexão \mathbb{R} e transmissão \mathbb{T} são definidos por

$$\mathbb{R} = \frac{A^{(+\omega)} A^{(-\omega)}}{C^{(+\omega)} C^{(-\omega)}} \quad e \quad \mathbb{T} = \frac{B^{(+\omega)} B^{(-\omega)}}{C^{(+\omega)} C^{(-\omega)}}. \tag{15.78}$$

Em geral, adota-se $C^{(\pm\omega)} = 1$.

As condições de fronteira (15.77) correspondem a uma *onda incidente* de amplitude unitária proveniente de $+\infty$, dando origem a uma *onda refletida* de amplitude $A^{(\pm\omega)}$ no infinito ($+\infty$) e uma *onda transmitida* de amplitude $B^{(\pm\omega)}$ no horizonte ($-\infty$). Se o potencial V é real, $A^{(+\omega)}$ e $B^{(+\omega)}$ são conjugados complexos de $A^{(-\omega)}$ e $B^{(-\omega)}$; dessa forma, (15.78) consiste de fato numa generalização da teoria de espalhamento para o caso dos potenciais complexos, onde $Z^{(+\omega)}$ e $Z^{(-\omega)}$ satisfazem a mesma equação, mas não são conjugados complexos. Seguem dois resultados importantes dessa generalização cujas demonstrações são omitidas.

Proposição 15.2.1. *Todos os potenciais V^j , $j = 1, \dots, 2s$, produzem os mesmos coeficientes de reflexão e transmissão.*

Demonstração. Conferir [19], p.515. □

Proposição 15.2.2. *Para ondas (eletromagnéticas ou gravitacionais) incidentes no buraco negro de Kerr, os coeficientes de reflexão e transmissão obedecem à lei de conservação*

$$\mathbb{R} + \mathbb{T} = 1, \tag{15.79}$$

em geral, e para frequências $\omega < \omega_s (= -\frac{am}{2Mr_+}, m < 0)$,

$$\mathbb{R} - \mathbb{T} = 1, \tag{15.80}$$

isto é, $\mathbb{T} < 0$.

Demonstração. Conferir [19], pp. 410-417 e pp. 517-528. □

15.3 Modos Normais

Nesse capítulo, vimos que as perturbações do buraco negro de Kerr pelos campos de partículas sem massa (fótons e grávitons) são descritas pelas equações de Teukolsky (15.39). Conforme a formulação matemática do problema, uma perturbação genérica propagando-se no espaço-tempo de Kerr corresponde a uma superposição de modos

$$R(r)S(\theta)e^{i(\omega t+m\varphi)} \quad (15.81)$$

em que a parte angular $S(\theta)$ satisfaz equações dependentes da geometria do buraco negro e do campo de ondas, enquanto que a parte radial $R(r)$ obedece à equação de onda da forma

$$\Lambda^2 Z = VZ, \quad (\Lambda^2 = \frac{d^2}{dr_*^2} + \omega^2), \quad (15.82)$$

com um potencial V específico para cada tipo de partícula.

As soluções (15.81) são denominadas *modos normais* e seus comportamentos assintóticos representam *ondas refletidas* no infinito e *ondas transmitidas* no horizonte do buraco negro, cujas amplitudes definem os coeficientes de reflexão \mathbb{R} e transmissão \mathbb{T} . Chandrasekhar ([19], seções 76, 98 e 107) mostra que os valores de \mathbb{R} e \mathbb{T} obtidos estão de acordo com os valores determinados para o fluxo de radiação (eletromagnética ou gravitacional) no infinito e através do horizonte do buraco negro.

De acordo com a interpretação física de \mathbb{R} e \mathbb{T} , podemos concluir da proposição 15.2.2 que o coeficiente de reflexão excede a unidade para as ondas incidentes de frequências $\omega < \omega_s$ e spins inteiros, isto é, parte da energia rotacional do buraco negro é extraída pelas ondas, eletromagnéticas ou gravitacionais. Esse fenômeno denomina-se *super-radiância* e constitui-se no análogo do processo de Penrose para partículas materiais, discutido na seção 13.2. A analogia entre os dois fenômenos se torna marcante através da comparação entre a desigualdade (equivalente a $\omega < \omega_s$)

$$2Mr_+\omega < -am \quad (15.83)$$

e a desigualdade (equação (13.33))

$$2Mr_+(\delta M) \geq a(\delta J),$$

pois elas são idênticas mediante as identificações

$$\begin{aligned} h\omega &\longleftrightarrow \delta M, \\ hm &\longleftrightarrow \delta J, \end{aligned} \tag{15.84}$$

onde h é a constante de Planck.

Considerando novamente a interpretação física de \mathbb{R} e \mathbb{T} , concluímos que a proposição 15.2.2 – e, portanto, a identidade wronskiana (15.57) – expressa a conservação da energia.

Toda a análise nesse capítulo foi tomada em relação ao buraco negro de Kerr, cuja métrica é estacionária e axissimétrica. No entanto, o procedimento pode ser realizado de forma análoga para o buraco negro de Schwarzschild, estático e esfericamente simétrico. Mais que isso, os resultados aqui obtidos valem para o espaço-tempo de Schwarzschild com as substituições $a = m = 0$. Por exemplo, no limite de Schwarzschild as equações (15.65)-(15.67) nos fornecem

$$\beta_2 = 0, \quad \kappa_2 = \pm 6M \quad e \quad F = \frac{r^3}{\Delta}(\mathcal{Q}r + 6M)$$

de modo que os quatro potenciais (15.64) degeneram em dois:

$$\begin{aligned} V_{(+)} &= +\kappa_2 \frac{d}{dr_*} \left(\frac{1}{F} \right) + \kappa_2^2 \left(\frac{1}{F} \right)^2 + \mathcal{Q}(\mathcal{Q} + 2) \left(\frac{1}{F} \right) \\ &= \frac{2\Delta}{r^5 \left(\frac{\mathcal{Q}}{2} + 3M \right)^2} \left[\frac{\mathcal{Q}^2(\mathcal{Q} + 2)}{8} r^3 + \frac{3M\mathcal{Q}^2}{4} r^2 + \frac{9M^2\mathcal{Q}}{2} r + 9M^3 \right] \end{aligned} \tag{15.85}$$

e

$$V_{(-)} = -\kappa_2 \frac{d}{dr_*} \left(\frac{1}{F} \right) + \kappa_2^2 \left(\frac{1}{F} \right)^2 + \mathcal{Q}(\mathcal{Q} + 2) \left(\frac{1}{F} \right) = \frac{\Delta}{r^5} [(\mathcal{Q} + 2)r - 6M]. \tag{15.86}$$

O potencial V_+ denomina-se *potencial de Zerilli* e dá origem às *perturbações polares* da métrica de Schwarzschild, caracterizadas por não induzirem rotação no buraco negro. O potencial V_- denomina-se *potencial de Regge-Wheeler* e está associado às *perturbações axiais* da métrica, cuja característica principal é a de introduzir rotação no buraco negro de Schwarzschild, originalmente ausente.

Pelo teorema de Cotton-Darboux, uma métrica em um espaço tridimensional sempre pode ser diagonalizada por meio de uma transformação local das coordenadas. Desse fato, segue que a generalização natural da métrica (13.1) é dada por

([19], pp.70-73)

$$ds^2 = e^{2\nu}(dt)^2 - e^{2\psi}(d\varphi - q_2 dx^2 - q_3 dx^3 - \omega dt)^2 - e^{2\mu_2}(dx^2)^2 - e^{2\mu_3}(dx^3)^2, \quad (15.87)$$

a qual descreve espaços-tempo que não são estacionários nem axissimétricos. As perturbações polares da métrica de Schwarzschild (13.30) produzem alterações nas funções ν , ψ , μ_2 e μ_3 , enquanto que as perturbações axiais resultam em valores não-nulos para as quantidades ω , q_2 e q_3 . A terminologia polar/axial se justifica pelo efeito nas componentes da métrica perturbada (15.87), provocado por uma reversão no sinal da coordenada φ : não há efeito se a perturbação é polar, enquanto que, para o caso axial, as funções ω , q_2 e q_3 mudam de sinal⁴.

Os potenciais gerados no buraco negro de Schwarzschild, assim como aqueles associados ao buraco negro de Kerr, apresentam decaimento exponencial em r_* no horizonte e comportam-se como r^{-2} no infinito; eles também produzem os mesmos coeficientes de reflexão e transmissão. Os potenciais da forma (15.85) e (15.86) pertencem a uma classe de potenciais que garante a igualdade dos coeficientes de reflexão e transmissão (veja a seção 28 de [19]); questiona-se sobre a possibilidade da equação (15.64) representar uma classe mais ampla de potenciais que garantam essa igualdade.

Além disso, a relação de *paridade*, isto é, a presença do caráter polar/axial entre as perturbações originadas pelos potenciais reais de Regge-Wheeler e Zerilli, faz surgir a indagação sobre a existência de alguma simetria íntima, passível de interpretação física, no caso mais geral dos potenciais complexos associados ao buraco negro de Kerr. Historicamente, a evidência de paridade decorreu do estudo das perturbações do buraco negro de Schwarzschild através do processo de linearização das equações de Einstein para a métrica perturbada (15.87), enquanto que, para o buraco negro de Kerr, a separabilidade das equações de perturbação, e sua consequente resolução, só foi possível via formalismo de Newman-Penrose. Trabalhar diretamente com as componentes do tensor métrico propicia maior interpretação física do problema, mas nos casos mais gerais, a solução completa só é possível quando consideramos a inclusão da álgebra tensorial na álgebra espinorial. Embora

⁴Conferir a interpretação de ω na seção 13.2.

o conceito de objeto espinorial seja um tanto abstrato, existem fenômenos físicos que sugerem sua existência na natureza (veja, por exemplo, [74], pp.55-56), como o estado de elétrons, prótons e nêutrons, provenientes de formas alternativas das equações de Dirac.

Os resultados da teoria da perturbação de buracos negros possibilitaram comprovar que o buraco negro de Schwarzschild é, de fato, completamente estável [88], isto é, assumindo a existência de fenômenos físicos que assegurem a formação de uma massa esférica colapsada e a consequente produção do buraco negro de Schwarzschild, tal objeto continuará a existir. Para o buraco negro de Kerr, a questão de sua estabilidade diante de pequenas perturbações foi alvo de muita discussão durante muito tempo, motivando o estudo de soluções das equações de perturbação para frequências complexas, denominadas *modos quase-normais*, que é o assunto do capítulo 17.

Capítulo 16

Buracos Negros Carregados

Embora a métrica de Kerr-Newman seja uma generalização natural da métrica de Kerr, o sucesso na análise das perturbações do buraco negro de Kerr não se repete quando se aplica a teoria desenvolvida no capítulo 15 ao buraco negro de Kerr-Newman. Como veremos nesse capítulo, o acoplamento das perturbações eletromagnética e gravitacional na geometria de Kerr-Newman produz equações que, ao contrário das equações de Teukolsky, não puderam ser separadas. Para o caso especial do buraco negro de Reissner-Nordström, no entanto, as equações que governam as perturbações foram separadas e a teoria da transformação pôde ser aplicada.

16.1 Kerr-Newman

O estudo das perturbações gravitacionais do buraco negro de Kerr-Newman seguirá o mesmo caminho traçado na seção 15.1 com as alterações necessárias para englobar o efeito da presença de uma carga resultante Q_* no buraco negro. Para uma completa exposição do assunto, que é bem complexo, sugerimos ao leitor conferir as seções 110 e 111 da obra [19]. No que segue, iremos apenas expor os resultados principais para posterior discussão.

O comportamento dos escalares de Weyl, Ψ_0 , Ψ_1 , Ψ_3 e Ψ_4 , dos coeficientes de spin, κ , σ , λ e ν , e dos escalares de Maxwell, ϕ_0 e ϕ_2 , é descrito pelas equações a

seguir:

$$(\delta^* - 4\alpha + \pi)\Psi_0 - (D - 2\varepsilon - 4\rho)\Psi_1 = -\frac{\kappa}{(\rho^*)^3}\left[3\left(M - \frac{Q_*^2}{\bar{\rho}}\right) + Q_*^2\frac{\bar{\rho}^*}{\bar{\rho}^2}\right], \quad (16.1)$$

$$(\bar{\Delta} - 4\gamma + \mu)\Psi_0 - (\delta - 4\tau - 2\beta)\Psi_1 = -\frac{\sigma}{(\rho^*)^3}\left[3\left(M - \frac{Q_*^2}{\bar{\rho}}\right) - Q_*^2\frac{\bar{\rho}^*}{\bar{\rho}^2}\right], \quad (16.2)$$

$$(D - \rho - \rho^* - 3\varepsilon + \varepsilon^*)\sigma - (\delta - \tau + \pi^* - \alpha^* - 3\beta)\kappa = \Psi_0, \quad (16.3)$$

$$(\bar{\Delta} - 3\gamma - \gamma^* - 2\mu + \mu^*)\kappa - (\delta^* - 3\alpha + \beta^* - \tau^* - 2\pi)\sigma = -2\Psi_1, \quad (16.4)$$

e

$$(D + 4\varepsilon - \rho)\Psi_4 - (\delta^* + 4\pi + 2\alpha)\Psi_3 = \frac{\lambda}{(\rho^*)^3}\left[3\left(M - \frac{Q_*^2}{\bar{\rho}}\right) - Q_*^2\frac{\bar{\rho}^*}{\bar{\rho}^2}\right], \quad (16.5)$$

$$(\delta + 4\beta - \tau)\Psi_4 - (\bar{\Delta} + 2\gamma + 4\mu)\Psi_3 = \frac{\nu}{(\rho^*)^3}\left[3\left(M - \frac{Q_*^2}{\bar{\rho}}\right) + Q_*^2\frac{\bar{\rho}^*}{\bar{\rho}^2}\right], \quad (16.6)$$

$$(\bar{\Delta} + \mu + \mu^* + 3\gamma - \gamma^*)\lambda - (\delta^* + 3\alpha + \beta^* + \pi - \tau^*)\nu = -\Psi_4, \quad (16.7)$$

$$(\delta + \pi^* + 2\tau - \alpha^* + 3\beta)\lambda - (D + 3\varepsilon + \varepsilon^* + 2\rho - \rho^*)\nu = -2\Psi_3, \quad (16.8)$$

onde $\bar{\rho} = r + ia \cos \theta$.

Com base nesses valores, podemos mostrar que as perturbações eletromagnéticas e gravitacionais acopladas na geometria de Kerr-Newman são governadas por

$$(\Delta\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2^\dagger + \mathcal{L}_{-1}^\dagger\mathcal{L}_2 - 6i\omega\bar{\rho})\Phi_0 = -2Q_*^2(\mathcal{L}_{-1}^\dagger k\frac{\bar{\rho}^*}{\bar{\rho}^2} + \mathcal{D}_0 s\frac{\bar{\rho}^*}{\bar{\rho}^2}) \quad (16.9)$$

e

$$(\Delta\mathcal{D}_2^\dagger\mathcal{D}_0 + \mathcal{L}_2\mathcal{L}_{-1}^\dagger - 6i\omega\bar{\rho})\Phi_1 = +2Q_*^2(\Delta\mathcal{D}_2^\dagger k\frac{\bar{\rho}^*}{\bar{\rho}^2} - \mathcal{L}_2 s\frac{\bar{\rho}^*}{\bar{\rho}^2}), \quad (16.10)$$

onde

$$\Phi_0 = \Psi_0, \quad \Phi_1 = \Psi_1\bar{\rho}^*\sqrt{2}, \quad k = \frac{\kappa}{(\bar{\rho}^*)^2\sqrt{2}} \quad e \quad s = \frac{\sigma\bar{\rho}}{(\bar{\rho}^*)^2}; \quad (16.11)$$

$$\Phi_3 = \Psi_3\frac{(\bar{\rho}^*)^3}{\sqrt{2}}, \quad \Phi_4 = \Psi_4(\bar{\rho}^*)^4, \quad l = \frac{\lambda\bar{\rho}^*}{2} \quad e \quad n = \frac{\nu\bar{\rho}^2}{\sqrt{2}}.$$

O próximo passo seria separar as variáveis em funções puramente radiais e angulares, como nas equações de Teukolsky, mas todas as tentativas de realizar esse feito fracassaram. No entanto, uma análise das equações acima para o caso especial do buraco negro de Reissner-Nordström ($a = 0$) é possível.

16.2 Reissner-Nordström

A solução de Reissner-Nordström, que consiste num buraco negro estático ($a = 0$) e carregado, é estudada em detalhes no capítulo 5 da referência [19].

Tomando $a = 0$ nas equações que descrevem as perturbações eletromagnéticas e gravitacionais acopladas na geometria de Kerr-Newman obtemos

$$\mathcal{L}_2\Phi_0 - (\mathcal{D}_0 + \frac{3}{r})\Phi_1 = -2k(3M - 2\frac{Q_*^2}{r}), \quad (16.12)$$

$$\Delta(\mathcal{D}_2^\dagger - \frac{3}{r})\Phi_0 + \mathcal{L}_{-1}^\dagger\Phi_1 = +2s(3M - 4\frac{Q_*^2}{r}), \quad (16.13)$$

$$(\mathcal{D}_0 + \frac{3}{r})s - \mathcal{L}_{-1}^\dagger k = \frac{\Phi_0}{r}, \quad (16.14)$$

$$\Delta(\mathcal{D}_2^\dagger - \frac{3}{r})k + \mathcal{L}_2 s = 2\frac{\Phi_1}{r}, \quad (16.15)$$

e

$$\mathcal{L}_2^\dagger\Phi_4 + \Delta(\mathcal{D}_{-1}^\dagger + \frac{3}{r})\Phi_3 = +2n(3M - 2\frac{Q_*^2}{r}), \quad (16.16)$$

$$(\mathcal{D}_0 - \frac{3}{r})\Phi_4 - \mathcal{L}_{-1}\Phi_3 = +2l(3M - 4\frac{Q_*^2}{r}), \quad (16.17)$$

$$(\mathcal{D}_0 - \frac{3}{r})n - \mathcal{L}_2^\dagger l = 2\frac{\Phi_3}{r}, \quad (16.18)$$

$$\Delta(\mathcal{D}_{-1}^\dagger + \frac{3}{r})l + \mathcal{L}_{-1}n = \frac{\Phi_4}{r}, \quad (16.19)$$

onde

$$\begin{aligned} \Phi_0 = \Psi_0, \quad \Phi_1 = \Psi_1 r \sqrt{2}, \quad k = \frac{\kappa}{r^2 \sqrt{2}} \quad e \quad s = \frac{\sigma}{r}; \\ \Phi_3 = \Psi_3 \frac{r^3}{\sqrt{2}}, \quad \Phi_4 = \Psi_4 r^4, \quad l = \frac{\lambda r}{2} \quad e \quad n = \frac{\nu r^2}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (16.20)$$

Com as substituições

$$\begin{aligned} \Phi_0(r, \theta) = R_{+2}(r)S_{+2}(\theta), \quad \Phi_1(r, \theta) = R_{+1}(r)S_{+1}(\theta), \\ k(r, \theta) = k(r)S_{+1}(\theta), \quad s(r, \theta) = s(r)S_{+2}(\theta), \end{aligned} \quad (16.21)$$

as equações (16.12)-(16.15) podem ser transformadas no par

$$\Lambda^2 Y_{+i} + P_i \Lambda_- Y_{+i} - Q_i Y_{+i} = 0 \quad (i = 1, 2), \quad (16.22)$$

onde

$$\begin{aligned}
P_i &= \frac{d}{dr_*} \ln\left(\frac{r^8}{D_i}\right), & D_i &= \Delta^2\left(1 + \frac{2q_i}{\mu^2 r}\right), \\
Q_i &= \mu_2 \frac{\Delta}{r^4} \left(1 + \frac{2q_i}{\mu^2 r}\right) \left(1 + \frac{q_j}{\mu^2 r}\right), & Y_{+i} &= \frac{\Delta^2}{r^3} \left(R_{+2} + \frac{q_i k}{\mu}\right), \\
q_1 &= 3M + \sqrt{9M^2 + 4Q_*^2 \mu^2}, & q_2 &= 3M - \sqrt{9M^2 + 4Q_*^2 \mu^2}.
\end{aligned} \tag{16.23}$$

De forma inteiramente similar, as equações (16.16)-(16.19) podem ser transformadas em

$$\Lambda^2 Y_{-i} + P_i \Lambda_+ Y_{-i} - Q_i Y_{-i} = 0 \quad (i = 1, 2), \tag{16.24}$$

por meio das substituições

$$\begin{aligned}
\Phi_4(r, \theta) &= R_{-2}(r) S_{-2}(\theta), & \Phi_3(r, \theta) &= R_{-1}(r) S_{-1}(\theta), \\
n(r, \theta) &= n(r) S_{-1}(\theta), & l(r, \theta) &= l(r) S_{-2}(\theta), \\
Y_{-i} &= \frac{1}{r^3} \left(R_{-2} + \frac{q_i n}{\mu}\right), & X_{-i} &= \frac{r^3}{\Delta^2} \left(R_{-1} + \frac{q_i l}{\mu}\right), \\
q_1 &= 3M + \sqrt{9M^2 + 4Q_*^2 \mu^2}, & q_2 &= 3M - \sqrt{9M^2 + 4Q_*^2 \mu^2}.
\end{aligned} \tag{16.25}$$

Procedendo de forma análoga à demonstração das condições (15.48)-(15.51), é possível mostrar que as equações (16.22) e (16.24) são transformadas em equações de onda unidimensionais,

$$\Lambda^2 Z_i = V_i Z_i, \tag{16.26}$$

através da substituição

$$Y_i = \ell_i V_i Z_i + T_i \Lambda_+ Z_i, \tag{16.27}$$

desde que existam funções ℓ_i , β_i , T_i , R_i e V_i que satisfaçam o sistema

$$-\frac{D_i}{r^8} \beta_i = \frac{d}{dr_*} (\ell_i V_i) + (T_i - 2i\omega \ell_i) V_i, \tag{16.28}$$

$$R_i = \ell_i V_i + \frac{dT_i}{dr_*}, \tag{16.29}$$

$$-\frac{D_i}{r^8} \frac{d\beta_i}{dr_*} = (Q_i \ell_i - R_i) V_i, \tag{16.30}$$

$$\frac{d}{dr^*} \left(\frac{r^8}{D_i} R_i \right) = \frac{r^8}{D_i} [Q_i(T_i - 2i\omega\ell_i) + 2i\omega(Q_i\ell_i - R_i)] + \beta_i, \quad (16.31)$$

$$\frac{r^8}{D_i} R_i \ell_i V_i + \beta_i(T_i - 2i\omega\ell_i) = K_i = \text{constante}, \quad (16.32)$$

onde D_i e Q_i estão definidos em (16.23).

Mas o sistema acima é compatível com as soluções

$$\beta_i^2 = q_j^2 \quad K_i = \mu^2(\mu^2 + 2) + 2i\omega q_j^2, \quad (i, j = 1, 2; i \neq j), \quad (16.33)$$

$$\ell_i = 1, \quad R_i = \mu^2 \frac{\Delta}{r^4} \left(1 + \frac{2q_i}{\mu^2 r}\right) \left(1 + \frac{q_j}{\mu^2 r}\right),$$

e com o potencial expresso por

$$V_i = \pm q_j \frac{d}{dr^*} \left(\frac{1}{F_i} \right) + q_j^2 \left(\frac{1}{F_i} \right)^2 + \mathcal{Q}(\mathcal{Q} + 2) \left(\frac{1}{F_i} \right) \quad (i, j = 1, 2; i \neq j), \quad (16.34)$$

onde

$$q_1 = 3M + \sqrt{9M^2 + 4Q_*^2 \mu^2}, \quad q_2 = 3M - \sqrt{9M^2 + 4Q_*^2 \mu^2}, \quad F_i = \frac{r^3}{\Delta} (\mu^2 r + q_j). \quad (16.35)$$

A equação (16.34) é a expressão dos potenciais associados às perturbações eletromagnéticas e gravitacionais acopladas do buraco negro de Reissner-Nordström.

16.3 Considerações

À semelhança do buraco negro de Schwarzschild, uma análise das equações (16.34) revela que o buraco negro de Reissner-Nordström é cercado por potenciais de curto-alcance, comportando-se como r^{-2} no infinito ($r \rightarrow +\infty$) e decaindo exponencialmente em r_* no horizonte ($r \rightarrow r_+ + 0$). Além disso, no limite de Schwarzschild ($Q_* = 0$), as equações (16.34) fornecem exatamente os potenciais de Zerilli e Regge-Wheeler, de forma que o buraco negro de Reissner-Nordström também admite paridade nas perturbações da métrica, como afirma Chandrasekhar ([19], p.270): *todas as barreiras de potencial pertencem a uma classe muito especial que assegura a igualdade de seu poder de reflexão a ondas de tipos axial e polar*. Chandrasekhar verifica ainda a igualdade dos coeficientes de reflexão e transmissão produzidos pela classe de funções à qual pertencem os potenciais (16.34) e conclui que a reflexão de ondas

incidentes pelo buraco negro de Reissner-Nordström produz conversão de energia eletromagnética em gravitacional, e vice-versa.

Resta observar que o estudo completo das equações (16.12)-(16.19), em contraste com o sistema (16.9)-(16.10), só foi possível por causa da simetria esférica do espaço-tempo de Reissner-Nordström que assegurou a separabilidade das variáveis. O que podemos concluir também é que a dificuldade no tratamento das perturbações do buraco negro de Kerr-Newman reside na presença simultânea das constantes a e Q_* , pois elevam a complexidade das equações ao ponto de impossibilitar a busca por combinações entre as funções radiais – associadas aos escalares de Weyl – e os coeficientes de spin.

Na verdade, a perturbação dos buracos negros esfericamente simétricos ($a = 0$) pôde ser determinada tanto pela linearização das equações de Einstein como pelo formalismo de Newman-Penrose (as análises completas de ambos os casos podem ser encontradas em [19]). Para o buraco negro axissimétrico de Kerr ($a \neq 0, Q_* = 0$), a solução das equações de perturbação só foi possível mediante o uso dos tensores complexos de Newman-Penrose. Como visto no início desse capítulo, quando se considera o caso mais geral ($a \neq 0, Q_* \neq 0$), nem mesmo através de tensores complexos é possível encontrarmos solução analítica para o problema, que continua em aberto.

Capítulo 17

Modos Quase-Normais

A teoria da perturbação, apresentada nos capítulos anteriores, pode ser generalizada para englobar frequências complexas ao espectro de radiação dos buracos negros. Esse problema foi inicialmente proposto por Vishweshwara [88] no contexto da análise da estabilidade dos espaços-tempo gerados por buracos negros. Atualmente, o estudo de certas soluções para frequências complexas, denominadas *modos quase-normais*, é de grande importância em astrofísica na tentativa de se detectar diretamente a presença de buracos negros no universo. Isso se deve ao fato de que os modos quase-normais são definidos de forma a representar radiação gravitacional que independe do processo de perturbação, ou seja, depende exclusivamente das características que definem a geometria do buraco negro.

Inicialmente o problema dos modos quase-normais (MQN) será formalizado matematicamente. Nas seções seguintes, serão apresentados os principais métodos semi-analíticos utilizados até hoje para a determinação dos MQN, baseados na similaridade de equações da teoria de perturbação com equações da teoria quântica. Os métodos serão confrontados e as propriedades dos MQN dos buracos negros de Schwarzschild e Kerr serão discutidas. A restrição da análise a essas soluções baseia-se no fato de que elas expressam os possíveis buracos negros existentes na natureza; portanto, toda a discussão realizada nesse capítulo diz respeito aos buracos negros de Schwarzschild e Kerr, embora alguns resultados sejam válidos para a solução de Reissner-Nordström.

A principal referência que sugerimos sobre esse assunto é um artigo de revisão

escrito por Kokkotas e Schmidt [48].

17.1 Matemática

Como foi visto nos capítulos anteriores, uma perturbação genérica de um buraco negro (Schwarzschild, Kerr e Reissner-Nordström) tem sua evolução governada pela superposição de modos normais, isto é, soluções $Z(r_*, \omega)$ da equação de onda (15.82) com frequências ω , reais e positivas. Vishweshwara [88], após estudar o comportamento do espaço-tempo de Schwarzschild para perturbações com frequências reais, sugeriu que a estabilidade dos buracos negros deveria ser também testada para frequências complexas.

Os *modos quase-normais* são as soluções $Z(r_*, \omega)$ das equações de perturbação correspondentes a frequências complexas ω e satisfazendo as condições de fronteira

$$\begin{aligned} Z &\longrightarrow A(\omega)e^{-i\omega r_*} \quad (r_* \rightarrow +\infty), \\ &\longrightarrow B(\omega)e^{+i\omega r_*} \quad (r_* \rightarrow -\infty), \end{aligned} \tag{17.1}$$

onde r_* é a coordenada tartaruga. Por comparação com a equação (15.77), conclui-se que (17.1) corresponde a uma onda de *incidência zero* sendo puramente refletida no infinito ($r_* \rightarrow +\infty$) e puramente absorvida no horizonte ($r_* \rightarrow -\infty$) do buraco negro.

Sejam $\mathbb{R}(\omega)$ e $\mathbb{T}(\omega)$ os coeficientes de reflexão e transmissão de uma onda incidente num buraco negro. No caso real, temos

$$\mathbb{R}(\omega) = \frac{|A(\omega)|^2}{|C(\omega)|^2} = \frac{(\frac{\Gamma}{2})^2}{(\omega - \omega_0)^2 + (\frac{\Gamma}{2})^2}, \tag{17.2}$$

que consiste na resposta apropriada a uma ressonância em um oscilador harmônico amortecido, onde ω_0 corresponde à frequência de ressonância e $\frac{\Gamma}{2}$ determina a taxa de amortecimento do oscilador (esse resultado é apresentado em [41]). Estendendo a função $\mathbb{R}(\omega)$ ao plano das frequências complexas, obtemos

$$\frac{A(\omega)}{C(\omega)} = \frac{\frac{\Gamma}{2}}{\omega - \omega_0 + i\frac{\Gamma}{2}}. \tag{17.3}$$

Impondo as condições de fronteira de MQN, concluímos que os MQN correspondem aos pólos da extensão analítica de $\mathbb{R}(\omega)$ ao plano das frequências complexas. Os vínculos $Re(\omega) \neq 0$ e $\frac{\mathbb{T}(\omega)}{\mathbb{R}(\omega)}$ regular não-nulo servem para assegurar o cumprimento das condições de fronteira [32]. Segue da interpretação física da equação (17.2) que os MQN constituem-se em *oscilações amortecidas*.

Como vimos, o potencial V em (15.82) é invariante sob a inversão simultânea dos sinais de ω e m , no caso de frequências reais; dessa forma, $\mathbb{R}(\omega) = \mathbb{R}^*(-\omega^*)$ e $\mathbb{T}(\omega) = \mathbb{T}^*(-\omega^*)$ no plano complexo [32]. Assim, se ω for uma frequência quase-normal, $-\omega^*$ também será. Concluimos, portanto, que *os MQN dos buracos negros de Kerr e Schwarzschild estão distribuídos simetricamente em relação ao eixo imaginário do plano das frequências complexas*.

Além disso, se reescrevermos a equação de onda (15.82) na forma

$$\frac{d^2 Z}{dr_*^2} + [\omega^2 - V]Z = 0, \quad (17.4)$$

e multiplicarmos por Z^* , integrando o resultado de $-\infty$ a $+\infty$, obteremos o valor médio do potencial efetivo $U(r_*) = \omega^2 - V(r_*)$, que é dado por

$$\bar{U}(r_*) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} U(r_*)|Z|^2 dr_*}{\int_{-\infty}^{+\infty} |Z|^2 dr_*}. \quad (17.5)$$

Para uma frequência complexa $\omega = \omega_0 + i\Gamma$, temos que (conferir [32])

$$\bar{U} \geq 0 \Rightarrow \Gamma > 0. \quad (17.6)$$

Mas o buraco negro de Schwarzschild produz barreiras de potencial reais que garantem a condição (17.6), pois $U(r_*) \geq 0$ em (17.5). Portanto, as frequências quase-normais estão confinadas ao semiplano superior do plano das frequências complexas e $|Z| \rightarrow \infty$ quando $r_* \rightarrow \pm\infty$ ([19], p.201). Concluimos assim que *os MQN do buraco negro de Schwarzschild divergem no infinito ($r_* \rightarrow +\infty$) e no horizonte ($r_* \rightarrow -\infty$)*.

A condição (17.6) revela que o buraco negro de Schwarzschild admite apenas os modos quase-normais de oscilação que sejam amortecidos. Segue ainda do seu comportamento no horizonte do buraco negro de Schwarzschild que os MQN não representam perturbações pois divergem no horizonte onde a métrica é finita; esse resultado decorre da admissão implícita na definição de MQN de uma perturbação infinita no passado.

Kokkotas e Schmidt [48] afirmam que não está claro ainda se, nos seus últimos estágios (isto é, para $t > r_*$), uma perturbação pode ser expandida pontualmente em termos de MQN. Ferrari e Mashhoon [32] determinaram que a resposta de um buraco negro a perturbações externas comporta-se, em seus últimos estágios, como

$$\Psi_{re}(r_*, t) = 2\pi i \sum_s \hat{f}(\omega_s) e^{i\omega_s(t-r_*)}, \quad (17.7)$$

onde $\hat{f}(\omega_s)$ é o resíduo, no ponto singular ω_s , da função que representa a distribuição das amplitudes das componentes da perturbação com diferentes frequências. As oscilações amortecidas correspondentes aos MQN estão presentes na expansão (17.7) com amplitudes dadas pelos resíduos de \mathbb{R} ; mais que isso, tal resultado mostra que, embora os MQN não representem perturbações propriamente ditas no que diz respeito a seu comportamento espacial, quando a dependência temporal é levada em conta eles aparecem como *oscilações amortecidas nos últimos estágios da perturbação*.

17.2 Determinação

Nessa seção apresentaremos alguns métodos semi-analíticos para a determinação de MQN de buracos negros, isto é, desenvolvimentos da teoria de perturbação que resultam em análise numérica.

Potenciais Parametrizados

Esse método baseia-se no estabelecimento de uma conexão entre modos quase-normais e os estados fundamentais¹ de potenciais de buracos negros submetidos a transformações apropriadas. Vimos que os MQN correspondem às singularidades do coeficiente de reflexão quando estendido ao plano das frequências complexas. Kramers e Heisenberg [50] indicaram que as singularidades das amplitudes de espalhamento estão relacionadas aos estados fundamentais do potencial. Na verdade,

¹Em física, estados fundamentais correspondem aos autovetores do operador de Schrödinger independente do tempo. Classicamente, estados fundamentais constituem trajetórias limitadas em um campo de força central.

para um *poço* de potencial, as singularidades de $\mathbb{R}(\omega)$ para $\omega = \omega^0 + i\Gamma$, $\omega^0 = 0$ e $\Gamma \leq 0$, correspondem aos estados fundamentais do poço. Como foi visto no capítulo 15, os buracos negros apresentam *barreiras* de potencial, caso em que a conexão não é evidente; nessas condições, Ferrari e Mashhoon [32] mostraram que os MQN correspondem aos estados fundamentais do potencial *transformado*.

Uma perturbação genérica de um buraco negro é expressa pela superposição de modos da forma (15.81) em que a parte radial $R(r)$ satisfaz

$$\Lambda^2 Z = VZ, \quad (\Lambda^2 = \frac{d^2}{dr_*^2} + \omega^2). \quad (17.8)$$

O método consiste em associar um conjunto de parâmetros p ao potencial (eles podem já pertencer ao potencial ou podem ser introduzidos como fatores de escala) e submeter as funções envolvidas na equação acima à transformação formal

$$r_* \longrightarrow -ir_* \quad e \quad p \longrightarrow \pi(p), \quad (17.9)$$

de modo que o potencial transformado

$$U(r_*; \Omega; p) = V(-ir_*; \omega(p'); p') \quad (17.10)$$

constitua uma barreira de potencial *real*, onde

$$\Omega(p) = \omega(p'), \quad (17.11)$$

$$\phi(r_*; p) = \psi(-ir_*; p') \quad (17.12)$$

e

$$\frac{d^2 \phi}{dr_*^2} + (-\Omega^2 + U)\phi = 0. \quad (17.13)$$

As condições de fronteira para modos quase-normais se reduzem a

$$\begin{aligned} \phi(r_*; p) &\propto e^{-\Omega r_*} \quad (r_* \rightarrow +\infty), \\ &\propto e^{+\Omega r_*} \quad (r_* \rightarrow -\infty). \end{aligned} \quad (17.14)$$

Para $\Omega(p)$ real não-negativo, as equações (17.13) e (17.14) correspondem à equação de Schrödinger independente do tempo,

$$-\frac{d^2 \psi}{dx^2} + V\psi = E\psi,$$

onde E denota a energia do sistema, aqui identificada com $-\Omega^2$, o potencial é dado por $-U$ e as condições de fronteira são apropriadas para estados fundamentais. Os MQN associados ao potencial $V(r_*, \omega)$ podem ser determinados pela transformação inversa

$$\omega(p) = \Omega(\pi^{-1}(p)) \quad e \quad \psi(r_*; p) = \phi(ix; \pi^{-1}(p)) \quad (17.15)$$

e pelo restabelecimento dos valores originais dos parâmetros.

Infelizmente as tentativas em se determinar analiticamente os estados fundamentais fracassaram; para os buracos negros, essa função foi estimada por Ferrari e Mashhoon [32] a partir do uso de um potencial mais simples que aproxima uma barreira de potencial, especialmente nas proximidades de seu máximo ($r_* = r_0$). O potencial de Pöschl-Teller U_{PT} é dado por

$$U_{PT} = \frac{U_0}{\cosh^2 \alpha(r_* - r_0)}, \quad (17.16)$$

onde U_0 e $\alpha > 0$ são, respectivamente, a altura e a curvatura de uma barreira de potencial U , ou seja,

$$U_0 = U(r_0) \quad (17.17)$$

e

$$\alpha^2 = -\frac{1}{2U_0} \left[\frac{d^2 U}{dr_*^2} \right]_{r_0}. \quad (17.18)$$

Proposição 17.2.1. *As frequências de MQN para o potencial $-U_{PT}$ são dadas por*

$$\omega_n = \pm \left(U_0 - \frac{\alpha^2}{4} \right)^{\frac{1}{2}} + i\alpha \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (17.19)$$

Demonstração. Substituindo (17.16) em (17.13) e fazendo uso da definição da coordenada tartaruga, as soluções que satisfazem as condições de fronteira (17.14) produzem coeficientes de reflexão e transmissão dados por

$$\mathbb{R}(\omega) = \frac{\Gamma(-i\frac{\omega}{\alpha})\Gamma(1 + \beta + i\frac{\omega}{\alpha})\Gamma(-\beta + i\frac{\omega}{\alpha})}{\Gamma(i\frac{\omega}{\alpha})\Gamma(1 + \beta)\Gamma(-\beta)} \quad (17.20)$$

e

$$\mathbb{T}(\omega) = \frac{\Gamma(1 + \beta + i\frac{\omega}{\alpha})\Gamma(-\beta + i\frac{\omega}{\alpha})}{\Gamma(1 + i\frac{\omega}{\alpha})\Gamma(i\frac{\omega}{\alpha})}, \quad (17.21)$$

com

$$\beta = -\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} - \frac{U_0}{\alpha^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Para que os MQN correspondam aos pólos de $\mathbb{R}(\omega)$ tais que $Re(\omega) \neq 0$ se verifique e $\frac{\mathbb{T}(\omega)}{\mathbb{R}(\omega)}$ seja regular não-nulo, devemos ter $1 + \beta + i\frac{\omega}{\alpha}$ ou $-\beta + i\frac{\omega}{\alpha}$ iguais a $-n$, ($n = 0, 1, 2, \dots$), donde resulta

$$\omega_n = i\alpha\left(n + \frac{1}{2}\right) \pm i\alpha\left(\frac{\alpha^2 - 4U_0}{4\alpha^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (17.22)$$

Como o buraco negro de Schwarzschild verifica as condições (17.6) e $4U_0 > \alpha^2$, temos o resultado desejado. \square

Proposição 17.2.2. *Segundo o método dos potenciais parametrizados, as frequências quase-normais do buraco negro de Schwarzschild são dadas pela expressão (aproximada)*

$$\omega_n = \omega^0 + i\Gamma_n, \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (17.23)$$

onde

$$\omega^0 = \gamma_0 \left\{ j(j+1) + \frac{2}{3}(\sigma^2 - 1) - \frac{1}{4} + \frac{1}{54} \frac{(\sigma^2 - 1)[2(\sigma^2 - 1) - 3]}{j(j+1)} + \dots \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (17.24)$$

$$\Gamma_n = \gamma_0 \left[1 + \frac{1(\sigma^2 - 1)}{9j(j+1)} - \frac{1(\sigma^2 - 1)^2}{27j^2(j+1)^2} + \dots \right]^{\frac{1}{2}} \left(n + \frac{1}{2} \right),$$

com

$$j = \frac{\sqrt{4Q - 9} - 1}{2} \quad (17.25)$$

e

$$\gamma_0 = \frac{1}{3\sqrt{3}M}. \quad (17.26)$$

Nessas equações, $\sigma = 0$ para fótons e $\sigma = -3$ para grávitons.

Demonstração. A partir dos resultados do capítulo 15, podemos mostrar que o buraco negro de Schwarzschild possui um potencial efetivo dado por

$$U(r_*) = \varepsilon \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left(\frac{j(j+1)}{r^2} + \frac{2\sigma M}{r^3} \right), \quad (17.27)$$

onde

$$r_* = r + \ln\left(\frac{r}{2M} - 1\right). \quad (17.28)$$

Na equação (17.27), $\sigma = 0$ para fótons e $\sigma = -3$ para grávitons; o parâmetro $\varepsilon > 0$ vale 1 para perturbações em buracos negros. Efetuando-se a transformação

(17.9) com $\pi(M, \varepsilon) = (-iM, -\varepsilon)$, as frequências quase-normais do buraco negro de Schwarzschild são dadas por

$$\omega = \omega^0 + i\Gamma = \Omega(iM, -1), \quad (17.29)$$

mas, como dito anteriormente, não foi possível se determinar analiticamente a quantidade $\Omega(M, \varepsilon)$. As expressões (17.23)-(17.24) foram obtidas a partir da fórmula (17.19), considerando que o potencial efetivo (17.27) apresenta um único máximo r_0 determinado por

$$2y_0 = 3\left[1 - \frac{\sigma}{j(j+1)}\right] + \left\{9 + 14\left[\frac{\sigma}{j(j+1)}\right] + 9\left[\frac{\sigma}{j(j+1)}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (17.30)$$

em que r_0 e $r = My_0$ estão relacionados por (17.28). Para maiores detalhes, conferir o apêndice B de [32]. \square

A determinação dos MQN do buraco negro de Kerr é complicada pelo fato de que os potenciais podem ser complexos e dependerem da frequência de radiação ω bem como do momento angular $J = aM$ do buraco negro. O método descrito acima pode ser aplicado, desde que seja escolhido um conjunto de parâmetros adequado a fim de produzir um potencial real. Ferrari e Mashhoon [32] determinaram explicitamente os MQN do buraco negro de Kerr para um caso restrito em que se evita o aparecimento de potenciais complexos.

Proposição 17.2.3. *As frequências quase-normais do buraco negro de Kerr com rotação lenta ($a \ll M$) e na aproximação eikonal ($j \gg 1$) são dadas por*

$$\omega_n = \omega^0 + i\Gamma_n, \quad (17.31)$$

com

$$\omega^0 = \pm\gamma_0\left(j + \frac{1}{2}\right) + 2am\gamma_0^2 \quad (17.32)$$

e

$$\Gamma_n = \gamma_0\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots (n \gg j), \quad (17.33)$$

onde j e γ_0 estão definidos por (17.25) e (17.26).

Demonstração. Considerando apenas os termos lineares em $\frac{a}{M}$, pois $a \ll M$, e usando o fato de que na aproximação eikonal ω^0 é proporcional a j , o potencial efetivo para o buraco negro de Kerr é aproximadamente

$$U(r_*, \omega) \approx \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{j(j+1)}{r^2} + \frac{4am\omega M}{r^3}. \quad (17.34)$$

Como esse é um potencial real independente do spin da perturbação, as frequências quase-normais podem ser estimadas por meio do uso do potencial de Pöschl-Teller.

□

Aproximação WKB

A motivação para se utilizar esse método é a similaridade existente entre a equação de onda da teoria de perturbação dos buracos negros e a equação de Schrödinger unidimensional para uma barreira de potencial. Sabemos que os MQN são caracterizados basicamente por possuírem frequências complexas e condições de fronteira correspondentes a ondas se afastando da barreira nas direções $\pm\infty$. Mantendo a analogia com a teoria quântica, os MQN correspondem a ressonâncias do operador de Schrödinger com autovalores (energias) complexos [47].

Em ambos os casos, a equação básica (17.8) pode ser colocada na forma

$$\frac{d^2\psi}{dr_*^2} + Q(r_*, \omega)\psi = 0, \quad (Q = \omega^2 - V), \quad (17.35)$$

onde $Q(r_*, \omega)$ é o potencial efetivo que no caso quântico é real e, para os buracos negros, pode ser complexo.

Proposição 17.2.4. (*Fórmula de Schutz-Will*) *Considere a equação (17.35) na qual Q representa uma barreira de potencial efetivo com pico em r_0 . Então vale a relação*

$$Q_0 = \pm i[2Q_0'']^{\frac{1}{2}}\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad (17.36)$$

onde $Q_0 = Q(r_0)$.

Demonstração. Da equivalência já mencionada entre a equação (17.35) e a equação de Schrödinger unidimensional para uma partícula encontrando uma barreira de potencial, segue a validade da regra de Bohr-Sommerfeld,

$$\int_{r_1}^{r_2} [Q(r_*)]^{\frac{1}{2}} dr_* = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad (17.37)$$

onde r_1 e r_2 são raízes de Q . Aproximando o potencial Q por uma parábola em torno de seu máximo r_0 ,

$$Q(r_*) = Q(r_0) + \frac{1}{2} + Q''(r_0)(r_* - r_0)^2, \quad (17.38)$$

e substituindo em (17.37), obtemos o resultado desejado. \square

É possível derivar-se a fórmula de Schutz-Will a partir do método descrito em [41], baseado na determinação da matriz de conexão entre as soluções para diferentes regiões da barreira, mas a abordagem da aproximação WKB via regra de Bohr-Sommerfeld é muito mais direta e geral, podendo inclusive ser estendida a potenciais complexos (ver [47]). Iyer e Will [41] estenderam a fórmula de Schutz-Will ao considerar mais termos na expansão de Q , obtendo

$$Q_0 = \Lambda + i[2Q_0'']^{\frac{1}{2}}(n + \frac{1}{2})(1 + \Omega), \quad (17.39)$$

onde

$$\begin{aligned} \Lambda(n) &= \frac{1}{(2Q_0'')^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{1}{8} \left(\frac{Q_0^{(4)}}{Q_0''} \right) \left(\frac{1}{4} + \alpha^2 \right) - \frac{1}{288} \left(\frac{Q_0'''}{Q_0''} \right)^2 (7 + 60\alpha^2) \right], \\ \Omega(n) &= \frac{\alpha}{2Q_0''} \left[\frac{5}{6912} \left(\frac{Q_0'''}{Q_0''} \right)^4 (77 + 188\alpha^2) - \frac{1}{384} \left(\frac{Q_0'''' Q_0^{(4)}}{Q_0''^3} \right) (51 + 100\alpha^2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2304} \left(\frac{Q_0^{(4)}}{Q_0''} \right)^2 (67 + 68\alpha^2) + \frac{1}{288} \left(\frac{Q_0'' Q_0^{(5)}}{Q_0''^2} \right) (19 + 28\alpha^2) - \frac{1}{288} \left(\frac{Q_0^{(6)}}{Q_0''} \right) (5 + 4\alpha^2) \right], \end{aligned} \quad (17.40)$$

com $\alpha = n + \frac{1}{2}$.

Por causa da expansão (17.38) do potencial efetivo Q em torno de seu ponto de máximo, a fórmula de Schutz-Will é tanto mais precisa quanto maior for a proximidade entre os pontos de retorno r_1 e r_2 ; essa situação é possível para frequências com partes imaginárias de pequena magnitude. Kokkotas [47] afirma que esta é a única fórmula analítica a fornecer explicitamente as frequências dos MQN do buraco negro de Schwarzschild com precisão satisfatória. Não é difícil ver que as frequências quase-normais do buraco negro de Schwarzschild são dadas por

$$\omega^2 = V_0 \pm i[2V_0'']^{\frac{1}{2}}(n + \frac{1}{2}), \quad (17.41)$$

onde $V_0 = V(r_0)$ corresponde ao valor máximo do potencial.

Para o buraco negro de Kerr, a equação (17.35) não é simples como no caso da solução de Schwarzschild. Decorre das equações do capítulo 15 para os potenciais na geometria de Kerr que o potencial efetivo correspondente a uma perturbação de spin s é dado por

$$Q(r_*; \omega, \alpha, s) = \omega^2 - 2is\omega \frac{2r\Delta - (r-1)(r^2 + \alpha^2)}{(r^2 + \alpha^2)^2} - \left[\frac{\lambda\Delta}{(r^2 + \alpha^2)^2} + G^2 + \frac{dG}{dr_*} \right], \quad (17.42)$$

onde

$$\lambda = \mathcal{Q} + a^2\omega^2 + 2am\omega - s(s+1), \quad (17.43)$$

$$G = \frac{s(r-1)}{r^2 + \alpha^2} + \frac{r\Delta}{(r^2 + \alpha^2)^2}. \quad (17.44)$$

e $\alpha^2 = a^2 + \frac{am}{\omega}$.

Dessa forma, uma expressão explícita para as frequências quase-normais do buraco negro de Kerr não pode ser encontrada, pois a função $Q(r_*; \omega, \alpha, s)$ é complexa e a frequência complexa ω não está separada do potencial $V(r)$ de uma forma elementar. Assim, a equação complexa transcendental (17.36), ou sua extensão (17.39), será resolvida com r_0 calculado através da equação

$$\frac{dQ}{dr_*}(r_*; \omega, \alpha, s) = 0. \quad (17.45)$$

Kokkotas [47] sugere um procedimento numérico para a resolução do sistema de equações complexas não-lineares (17.36) e (17.45). A partir de um valor específico de α , são dadas três frequências e para elas a constante de separação \mathcal{Q} é determinada. Após isso, os coeficientes da parábola $F(\omega) = a\omega^2 + b\omega + c$ são calculados e a solução da equação $F(\omega) = 0$ fornece uma primeira estimativa para ω ; o processo continua iterativamente até que uma solução do sistema seja encontrada com a precisão desejada.

Frações Contínuas

O método das frações contínuas (para uma exposição completa, veja [53]) consiste no único procedimento semi-analítico capaz de fornecer as frequências de MQN com partes imaginárias pequenas e grandes. Ao contrário dos procedimentos anteriores, essa abordagem baseia-se na observação de que as equações de Teukolsky

são equações de onda esferoidais generalizadas do mesmo tipo que aquelas resolvidas por George Jaffé [42] na determinação do espectro eletrônico da molécula do íon de hidrogênio. As equações de Teukolsky são resolvidas analiticamente com o auxílio de uma forma generalizada da solução de Jaffé, devida a Baber e Hassé [4], eliminando a necessidade de integração numérica presente nos métodos anteriores. No entanto, as frequências quase-normais e as constantes de separação são definidas como raízes simultâneas de duas equações envolvendo frações contínuas, as quais devem ser resolvidas numericamente (mas com grande precisão).

Proposição 17.2.5. *As frequências de MQN do buraco negro de Kerr correspondem às raízes da equação²*

$$0 = \beta_0^r - \frac{\alpha_0^r \gamma_1^r}{\beta_1^r -} \frac{\alpha_1^r \gamma_2^r}{\beta_2^r -} \frac{\alpha_2^r \gamma_3^r}{\beta_3^r -} \dots, \quad (17.46)$$

onde

$$\begin{aligned} \alpha_n^r &= n^2 + (r_0 + 1)n + r_0, \\ \beta_n^r &= -2n^2 + (c_1 + 2)n + c_3, \\ \gamma_n^r &= n^2 + (c_2 - 3)n + c_4 - c_2 + 2 \end{aligned} \quad (17.47)$$

e

²Temos que

$$\beta_n - \frac{\alpha_n \gamma_{n+1}}{\beta_{n+1} -} \frac{\alpha_{n+1} \gamma_{n+2}}{\beta_{n+2} -} \frac{\alpha_{n+2} \gamma_{n+3}}{\beta_{n+3} -} \dots = \beta_n - \frac{\alpha_n \gamma_{n+1}}{\beta_{n+1} - \frac{\alpha_{n+1} \gamma_{n+2}}{\beta_{n+2} - \frac{\alpha_{n+2} \gamma_{n+3}}{\beta_{n+3} -} \dots}}.$$

$$\begin{aligned}
c_0 &= 1 - s - i\omega - \frac{2i}{b}\left(\frac{\omega}{2} - am\right), \\
c_1 &= -4 + 2i\omega(2 + b) + \frac{4i}{b}\left(\frac{\omega}{2} - am\right), \\
c_2 &= s + 3 - 3i\omega - \frac{2i}{b}\left(\frac{\omega}{2} - am\right), \\
c_3 &= \omega^2(4 + 2b - a^2) - 2am\omega - s - 1 + (2 + b)i\omega - \mathcal{Q} + \frac{4\omega + 2i}{b}\left(\frac{\omega}{2} - am\right), \\
c_4 &= s + 1 - 2\omega^2 - (2s + 3)i\omega - \frac{4\omega + 2i}{b}\left(\frac{\omega}{2} - am\right), \quad (b = \sqrt{1 - 4a^2}).
\end{aligned} \tag{17.48}$$

Demonstração. Utilizando a forma generalizada da solução de Jaffé para as equações gerais de Teukolsky, é possível expressar a parte radial da perturbação como uma expansão de potências de $\left(\frac{r-r_+}{r-r_-}\right)$, cujos coeficientes d_n obedecem à relação de recorrência

$$\begin{aligned}
\alpha_0^r d_1 + \beta_0^r d_0 &= 0, \\
\alpha_n^r d_{n+1} + \beta_n^r d_n + \gamma_n^r d_{n-1} &= 0, \quad n = 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{17.49}$$

As condições da proposição garantem a convergência da série que define a parte radial da perturbação. Para maiores detalhes, confira [53] e [72]. \square

Finalmente vale ressaltar que, fazendo $a \rightarrow 0$ na proposição acima, resulta que as frequências de MQN do buraco negro de Schwarzschild correspondem às raízes da equação

$$0 = \beta_0 - \frac{\alpha_0 \gamma_1}{\beta_{1-}} \frac{\alpha_1 \gamma_2}{\beta_{2-}} \frac{\alpha_2 \gamma_3}{\beta_{3-}} \dots, \tag{17.50}$$

onde

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= n^2 + (2 - 2i\omega)n - 2i\omega + 1, \\
\beta_n &= -(2n^2 + (2 - 8i\omega)n - 8\omega^2 - 4i\omega + \mathcal{Q} - 2 - (s^2 - 1)), \\
\gamma_n &= n^2 - 4i\omega n - 4\omega^2 - (s^2 - 1) - 1.
\end{aligned} \tag{17.51}$$

17.3 Discussão

Consiste numa evidência astrofísica que praticamente todo objeto estelar oscila de alguma forma. No entanto, a radiação gravitacional emitida pelas estrelas é fraca e com frequências muito baixas o que exclui sua relevância no estudo das ondas gravitacionais. Esse não é o caso quando se consideram objetos muito densos, como estrelas de nêutrons e buracos negros, pois suas oscilações podem ser fortes o bastante para serem detectadas pelos detectores de ondas gravitacionais atuais.

Um buraco negro pode ser perturbado pela incidência de ondas de diversos tipos, mas também pode oscilar e emitir radiação devido ao acréscimo de matéria ao seu redor, ou pela presença de um objeto atraído por ele, ou durante sua formação mediante um colapso estelar (supernova). No entanto, *espera-se que uma perturbação irá, em seus últimos estágios, decair de uma maneira característica do buraco negro e independente da causa original, apresentando frequências e taxas de amortecimento próprias daquele objeto, da mesma forma que as últimas notas emitidas por um sino.* Essa é a ideia em que se baseia o conceito de *modos quase-normais*. De fato, devido à emissão de ondas gravitacionais, o buraco negro não consiste num sistema oscilante fechado e, por isso, os modos normais dão lugar a modos com frequências *quase-normais* (complexas), em que a parte real corresponde à frequência de oscilação e a parte imaginária indica a taxa de amortecimento. Além disso, uma comparação entre as equações (15.77) e (17.1) revela que as condições de fronteira para MQN implicam na independência da perturbação original à qual é imposta amplitude zero. Daí a importância dos MQN na tentativa de se identificar buracos negros no universo.

Vimos nesse capítulo que os MQN podem ser interpretados como ressonâncias do operador de Schrödinger, ou seja, representam uma perturbação inicial infinita. Em outras palavras, os MQN consistem nos modos de oscilação para os quais a resposta do buraco negro a uma perturbação externa é máxima. Por isso os MQN são importantes no estudo da estabilidade de buracos negros.

Com o intuito de se determinar os MQN de buracos negros, foram desenvolvidos vários métodos [48]. Entretanto, o padrão de estudo numérico dos MQN de buracos

negros segue o modelo estabelecido por Chandrasekhar e Detweiler [20], o qual consiste em se escolher um valor para a frequência complexa, integrar a equação de perturbação, e determinar as soluções que satisfazem as condições de fronteira. Dos métodos semi-analíticos apresentados, aquele desenvolvido por Leaver se destaca no sentido de que evita a integração em favor da determinação das raízes de equações com frações contínuas.

O cálculo dos MQN mostrou que a parte real das frequências permanece constante enquanto que suas partes imaginárias (amortecimento) crescem proporcionalmente com a ordem do modo [48]. Resultados como esse, e como o da equação (17.7), visam garantir que os MQN de fato possam representar o comportamento da radiação emitida por buracos negros, observado através de investigações numéricas as quais revelaram que, nos seus últimos estágios, a resposta dos buracos negros a perturbações externas é governada por oscilações amortecidas ([31],[47],[48]).

Outra característica dos MQN é que, ao contrário do espectro contínuo de frequências reais (modos normais), o espectro das frequências quase-normais de um buraco negro é discreto. Essa propriedade decorre do fato de que a determinação dos MQN é equivalente ao problema da teoria quântica elementar de se encontrar os estados fundamentais de uma barreira de potencial. Mais que isso, o espectro de frequências quase-normais do buraco negro de Schwarzschild é infinito enumerável, pois existem infinitas raízes para a equação (17.50), à semelhança dos espectros da molécula do íon de hidrogênio [53]. Como foi visto na seção 17.1, tais frequências se distribuem simetricamente em relação ao eixo imaginário, ou seja, uma perturbação real que excite um MQN também excitará seu conjugado complexo; essa condição é essencial para que a radiação emitida seja de fato real.

Como foi explicado no capítulo 15, o estudo das perturbações de buracos negros surgiu com o intuito de se analisar a estabilidade dos espaços-tempo associados a fim de se determinar a possibilidade da permanência de tais objetos na natureza. Buracos negros astrofisicamente relevantes são consequência da coalescência de estrelas binárias de nêutrons, supostamente munidos de grande momento angular, de forma que um estudo detalhado dos MQN para o limite de Kerr ($a = M$) se faz necessário. Para o buraco negro de Kerr, uma análise da conservação do fluxo de

radiação revela que um MQN com frequência real não pode existir no caso ordinário, mas é em princípio possível para o super-radiante [32]. Portanto, a amplitude de reflexão é *limitada* no eixo real restrito ao regime ordinário; dessa forma, se um MQN se aproxima dessa parte do eixo de frequências reais, seu resíduo se aproxima de zero. Decorre dessa observação e da equação (17.7) que MQN pouco amortecidos ($\Gamma \rightarrow 0$) não contribuem nos últimos estágios das oscilações de um buraco negro de Kerr. Esse resultado dá indícios de que buracos negros de Kerr sejam estáveis. Ao lado disso está a análise, feita pelo método das frações contínuas [72] e demonstrada analiticamente por Detweiler [24], indicando que as frequências de MQN de Kerr (para $a = 0$ até $a = M$) são limitadas pela frequência real

$$\omega_c = \frac{mc^3}{2GM}, \quad (17.52)$$

correspondente ao espalhamento super-radiante de uma onda incidente. Kokkotas [47] afirma que Whiting [94] provou a estabilidade dos buracos negros de Kerr a todo tipo de perturbação; Onozawa [72] afirma que o comportamento dos MQN para buracos negros com alta rotação (isto é, próximos do limite de Kerr) ainda não é bem conhecido.

Uma confrontação entre os resultados derivados pelos métodos semi-analíticos apresentados e evolução numérica das equações de perturbação revela que o método das frações contínuas possui maior precisão e funciona para frequências com pequeno e grande amortecimento. A aproximação WKB tem a vantagem de sua precisão poder ser aumentada mediante o acréscimo de mais termos na expansão (17.39), mas só produz resultados confiáveis para pequeno amortecimento; para frequências muito amortecidas, a parte imaginária mantém a acurácia, mas a parte real não. O método dos potenciais parametrizados não é viável, pois depende de um potencial específico e sua precisão não pode ser determinada; sua importância reside no fato de ter sido a primeira tentativa de um método semi-analítico para esse tipo de problema. No limite de Schwarzschild ($a = 0$), a precisão dos resultados obtidos pelos métodos apresentados na seção 17.2 está em bom acordo com as frequências determinadas por outros meios. A exceção está na aproximação WKB, pois os MQN do buraco negro de Kerr surgem da solução numérica do sistema de equações (17.36)

e (17.45), de forma que um erro pequeno no cálculo de um dos parâmetros, r_0 ou ω , implica em erro no outro que, por sua vez, produz o mesmo efeito no valor, já errado, do parâmetro inicial.

O método de Leaver serve como padrão de comparação para qualquer novo método analítico relativo à determinação dos MQN de buracos negros. No entanto, ao contrário dos outros métodos, tal procedimento não fornece *insight* sobre as quantidades físicas envolvidas de modo que os resultados, muitas vezes, carecem de interpretação sobre qual configuração está sendo representada. Por isso, a importância da teoria de perturbação de buracos negros está em fornecer modelos a fim de permitir que os resultados numéricos possam ser comparados e interpretados fisicamente. Do ponto de vista matemático, o estudo dos MQN de buracos negros consiste em um campo aberto para a generalização da teoria de espalhamento da mecânica quântica.

Capítulo 18

Atualidade

Albert Einstein apresentou a teoria da relatividade geral ao mundo no ano de 1915. No ano seguinte, o próprio Einstein previa, a partir das equações de campo linearizadas no limite de “campo fraco”, a existência de *ondas gravitacionais*: soluções de onda que representavam perturbações no espaço-tempo provocadas pela fonte de matéria e que se moviam à velocidade da luz [26, 27]. Ele também percebeu que a amplitude dessas ondas seria muito pequena para ser detectada com a tecnologia da época, o que gerou muita discussão ao longo do século passado sobre a realidade física das ondas gravitacionais.

Também no ano de 1916, Schwarzschild publicou a primeira solução exata das equações de Einstein, descrevendo uma fonte compacta do campo gravitacional que posteriormente foi interpretada como aquilo que conhecemos hoje com o nome de *buraco negro* [80]. O buraco negro de Schwarzschild foi mais tarde generalizado para admitir rotação, sendo denominado buraco negro de Kerr [44].

Durante todo o século XX, questionou-se a estabilidade dos buracos negros na Natureza, especialmente por serem objetos tão exóticos e distantes da intuição humana. O estudo da estabilidade das soluções compactas das equações de Einstein levou Vishweshwara [88] a criar o conceito de *modos quase-normais* que, por sua vez, aguçaram a pesquisa astrofísica por buracos negros na medida em que eles carregavam informações características dos objetos estudados e a evolução numérica revelava que eles poderiam ser detectados no caso de buracos negros muito massivos.

Assim, o problema criado em 1916 pela possibilidade de detecção de buracos

negros na natureza mediante as ondas gravitacionais emitidas por eles durante uma perturbação relativamente grande no passado se estendeu por todo o século XX. No início desse século, foram construídos vários observatórios espalhados pelo mundo: TAMA no Japão, GEO na Alemanha, VIRGO na Itália e LIGO nos Estados Unidos. Em 2015, cerca de cem anos após a sua previsão, o LIGO (sigla para *Laser Interferometer Gravitational-wave Observatory*) anunciou a primeira detecção de ondas gravitacionais da história [1].

Na primeira seção, faremos considerações finais sobre os desenvolvimentos da teoria exposta na parte III e veremos como esses desenvolvimentos contribuíram para a descoberta astronômica recente. Na segunda seção, discutiremos o problema da determinação dos buracos negros no universo e o que podemos concluir dos resultados obtidos pela equipe do LIGO. Para o leitor interessado nessa descoberta revolucionária, especialmente para a astrofísica, sugerimos a leitura do artigo original [1] e de sua crítica [14]. Nesses textos, o leitor poderá encontrar também uma lista de referências para estudos futuros.

18.1 Ondas Gravitacionais

Buracos negros consistem em soluções exatas das equações de Einstein, as quais descrevem como a matéria e a energia afetam a geometria do espaço-tempo, produzindo o que se conhece como gravitação. A identificação direta de um buraco negro no universo nunca foi feita por serem objetos distantes e isolados. No entanto, existem inúmeros *indícios* de que eles existam; de fato, existem vários candidatos resultantes de observações eletromagnéticas [90, 10, 18]. Embora não haja até o momento nenhuma evidência concreta da existência de buracos negros na natureza, imagina-se que eles sejam corpos astronômicos formados pelo colapso estelar e que constituam-se na fonte de energia responsável pela atividade observada no núcleo das galáxias.

Na década de 50, o trabalho pioneiro de Regge e Wheeler [77] iniciou o estudo das perturbações dos buracos negros com o intuito de analisar sua estabilidade mediante influência externa. Esse estudo foi motivado pelo fato de que buracos negros, assim

como as estrelas, oscilam mediante a incidência de campos de ondas, ou acréscimo de matéria, de forma que surge a questão: *caso tal objeto se forme, será possível a sua permanência na natureza?* Tentando responder a essa questão, Vishweshwara [88] propôs a necessidade de se considerar o efeito das frequências complexas nas equações de perturbação, em que a parte real representa a frequência de oscilação e a parte imaginária representa a taxa de amortecimento; tal observação é condizente com o fato de que um buraco negro deve ser visto como uma membrana infinita ao invés de um sistema oscilante fechado, como uma corda de violão.

Quando um corpo astronômico oscila, ele emite radiação determinada principalmente pelo fenômeno que provocou tal oscilação; no entanto, acredita-se que uma perturbação irá, em seus últimos estágios, decair de uma maneira característica do objeto oscilante e independente da causa original, apresentando frequências e taxas de amortecimento determinadas exclusivamente pelos parâmetros daquele objeto, da mesma forma que as últimas notas emitidas por um sino. Soluções das equações de perturbação dos buracos negros para certas frequências complexas, os modos quase-normais (MQN), captam essa idéia e permitem caracterizar um buraco negro através da radiação gravitacional emitida por ele.

Após o trabalho de Vishweshwara, foram feitos vários desenvolvimentos numéricos e semi-analíticos, mas nos últimos anos, o interesse pelos MQN de buracos negros intensificou-se porque, diferentemente do caso estelar, a teoria prevê que a radiação gravitacional emitida por buracos negros com grande massa e rotação é suficientemente forte para ser detectada pelos detectores de ondas gravitacionais existentes. Esses avanços, juntamente com desenvolvimentos no campo da relatividade numérica na última década, tornaram possível modelar matematicamente a fusão de um sistema binário de buracos negros e fazer previsões acuradas das ondas gravitacionais resultantes desse processo. Os resultados numéricos aplicados a um buraco negro de Kerr formado por tal processo de fusão apontavam para um espectro de modos quase-normais com intensidade suficiente para serem detectados pelos observatórios existentes, como de fato aconteceu.

18.2 Buracos Negros?

A teoria desenvolvida na parte III desse livro fornece uma base teórica clara para a descrição e investigação do tipo de onda gravitacional que seria produzida durante a formação de um buraco negro. Esse corpo compacto e massivo poderia ser formado pelo colapso de uma estrela com massa superior a dez massas solares, no fenômeno que se conhece como *supernova*. No entanto, modelos recentes puderam ser construídos nos quais um buraco negro é formado a partir da colisão e posterior *fusão* de dois buracos negros. Esses foram os modelos usados na interpretação dos resultados obtidos em 2015 pela equipe do LIGO [1].

Em tese, as ondas gravitacionais são produzidas em três etapas.

inspiral stage: Antes da fusão, quando as órbitas dos dois buracos negros começam a reduzir e eles iniciam sua trajetória em direção ao lento colapso, o espectro de frequências tem separação larga e pode ser bem aproximado por teoria pós-newtoniana. Nessa fase, a intensidade da radiação emitida será tanto maior quanto menor for a distância inicial entre os buracos negros.

merger stage: Durante o processo de fusão, as frequências e amplitudes das ondas aumentam até atingir um pico característico ao momento da fusão. Essa etapa só pode ser descrita de maneira acurada por meio de simulações numéricas.

ringdown stage: Esse processo cataclísmico dá origem a um buraco negro altamente distorcido que rapidamente perde energia eliminando a deformação inicial. Essa é a fase em que o sistema “soa como um sino” produzindo radiação que perde força, decaindo exponencialmente, enquanto o objeto final da fusão se acomoda na forma de uma solução de equilíbrio das equações de Einstein.

O que vimos no capítulo 17 foi que a forma da onda gravitacional emitida por um buraco negro perturbado será, em seus estágios finais, dominada pelos modos quase-normais (MQN). Portanto, se o objeto final do processo de fusão descrito acima for um buraco negro de Kerr, todo o espectro de MQN estará caracterizado tão somente pela massa e pelo momento angular do buraco negro. Assim, a detecção de alguns poucos modos nesse espectro pode ser suficiente para se fazer medições

precisas da massa e da rotação de um buraco negro, comprovando a existência de horizonte de eventos em objetos escuros e compactos. Esse raciocínio é análogo à percepção de um objeto sonoro em um quarto escuro. Imagine-se em um canto de um quarto totalmente escuro e suponha que exista uma segunda pessoa no outro canto do quarto com um violão. Como você sabe que lá naquele canto se encontra um violão se você não consegue vê-lo? Basta que a pessoa toque o violão para que você identifique a presença do instrumento por meio do som que ele emitiu. A situação é idêntica para o problema da determinação de buracos negros no universo, pois a sua evidência através da observação direta (radiação eletromagnética) é no mínimo questionável, restando-nos comprová-los indiretamente mediante as ondas gravitacionais por eles emitidas (os MQN seriam as “notas musicais” de um buraco negro).

O sinal detectado pela equipe do LIGO tem exatamente as características acima, o que levou a equipe do LIGO a concluir que as ondas gravitacionais observadas pela sua interferência no sistema de *lasers* de fato comprovam a existência de um buraco negro de Kerr formado a partir da fusão de um sistema binário de buracos negros com rotação. No entanto, recentemente uma equipe internacional de cientistas, liderados por Vitor Cardoso, questionou essas conclusões ao propor modelos alternativos de objetos astronômicos, sem um horizonte de eventos, que também poderiam ter emitido radiação gravitacional com o mesmo padrão detectado pelo LIGO (veja [14] para a exposição completa do argumento).

A ideia de Cardoso baseia-se no fato de que todo objeto compacto possui um *anel de luz*, que consiste numa órbita circular de fótons ao redor de corpos muito compactos prevista pela relatividade geral. Estrelas de nêutrons não são compactas o suficiente para possuírem tais estruturas, mas buracos negros as possuem. O ponto é que objetos exóticos, como *gravastars* – objetos celestiais cujo interior é constituído de energia escura – e *wormholes* – variações topológicas do espaço-tempo interpretadas como túneis ligando regiões distintas do universo – também possuem esses anéis de luz, mas não possuem horizonte de eventos. A equipe de Cardoso mostrou que se um objeto é compacto o suficiente para possuir um anel de luz, então seu espectro de MQN será quase idêntico ao de um buraco negro, sendo a

semelhança tanto maior quanto mais compacto for o objeto [14]. A conclusão a que os cientistas chegaram após as simulações numéricas foi de que o espectro de modos quase-normais está associado ao anel de luz, ou seja, é o anel de luz que vibra e não o horizonte de eventos.

Cardoso [14] afirma que, embora a presença de um buraco negro seja a hipótese mais natural, não podemos tomar conclusões precipitadas a cerca da existência de horizontes de eventos na natureza. O estudo de Cardoso e seus colegas revela que há divergência entre os MQN de objetos exóticos e buracos negros, mas o sinal detectado pelo LIGO não durou tempo suficiente para podermos fazer tal distinção. Avanço na tecnologia utilizada e novos experimentos serão necessários a fim de que possamos ter uma comprovação efetiva da existência de buracos negros no universo. Dito isso, devemos registrar a importância da descoberta feita pela equipe do LIGO por comprovar uma previsão da teoria de Einstein feita há um século atrás e por estabelecer um novo rumo na pesquisa astrofísica. Diante disso, encerramos nosso texto esperando que o leitor possa ter encontrado aqui uma base conceitual, orientação e, principalmente, motivação para continuar seus estudos na tentativa de entender melhor o mundo em que vivemos.

Referências Bibliográficas

- [1] Abbott, B.P. et al. (LIGO/Virgo Scientific Collaboration), *Phys. Rev. Lett.* 116, 061102 (2016).
- [2] Adachi, M. “Embeddings and Immersions”, *Translations of Mathematical Monographs*, vol. 124, 1993.
- [3] Aguiar, M., Mahajan, S., *Monoidal Functors, Species and Hopf Algebras*
- [4] Baber, W.G., e Hassé, H.R., *Proc. Camb. phil. Soc.*, **25**, 564, (1935).
- [5] Baez, J. C., Dolan, J., *Categorification*, arXiv:math/9802029
- [6] Bardeen, J.M., e Press, W.H., *J. Math. Phys.*, **14**, 7, (1973).
- [7] Baues, H. J., *Algebraic Homotopy*, Cambridge University Press, 1988.
- [8] Bender, C.M., e Orszag, S.A., *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*, (McGraw-Hill, New York, 1978).
- [9] Besse, A. L., *Einstein Manifolds*, Springer-Verlag, 1980.
- [10] Bolton, C.T., *Nature (London)* 240, 124 (1972).
- [11] Bott, R., Tu, L. W., *Differential Forms in Algebraic Topology*, Springer-Verlag, 1982.
- [12] Boyer, C., e Galicki, K., *Sasakian Geometry*, (Oxford University Press, 2008).
- [13] Brickell, F., e Clark, R.S., *Differentiable Manifolds*, (Van Nostrand Reinhold Co., London, 1970).

- [14] Cardoso, V. et al., "Is the Gravitational-Wave Ringdown a Probe of the Event Horizon?", *Phys. Rev. Lett.*, **116**, 171101, (2016).
- [15] Carmo, M.P. do, *Geometria Riemanniana*, (Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1988).
- [16] Carroll, S.M., *Lecture Notes on General Relativity*, (1997), <http://itp.ucsb.edu/~carroll/notes/>.
- [17] Cartan, H., Eilenberg, S., *Homological Algebra*, Princeton University Press, 1956.
- [18] Casares, J. and Jonker, P.G., *Space Sci. Rev.* 183, 223 (2014).
- [19] Chandrasekhar, S., *The Mathematical Theory of Black Holes*, (Clarendon Press, Oxford, 1983).
- [20] Chandrasekhar, S., e Detweiler, S., *Proc. Roy. Soc. London*, **A344**, 441, (1975).
- [21] Cheng, E., Lauda, A. *Higher Dimensional Categories: an illustred guide book*. University of Cambridge.
- [22] Chern, S. S., *The Geometry of G-Structures*.
- [23] Dadam, F., *Oscilações de Buracos Negros* (dissertação de mestrado), <http://www.bibliotecadigital.unicamp.br/document/?code=vtls000344435>
- [24] Detweiler, S., *Astrophys. J.*, **239**, 292, (1980).
- [25] Eckmann, B., Hilton, P. J., "Group-Like Structures in General Categories I: Multiplications and Comultiplications", *Math. Annalen*, 142, p. 227-255, 1962.
- [26] Einstein, A., *Sitzungsber. K. Preuss. Akad. Wiss.* 1, 688 (1916).
- [27] Einstein, A., *Sitzungsber. K. Preuss. Akad. Wiss.* 1, 154 (1918).
- [28] Farjoun, E. D., "Fundamental Group of Homotopy Colimits", *Advances in Mathematics*, 182, 2004, p. 1-27

- [29] Fecko, M., *Differential Geometry and Lie Groups for Physicists*, Cambridge University Press, 2006.
- [30] Fernandes, R.L., *Lições de Geometria Diferencial* (notas de aula), <https://www.math.tecnico.ulisboa.pt/~rfern/GD/notas.pdf>
- [31] Ferrari, V., e Mashhoon, B., "Oscillations of a black hole", *Phys. Rev. D*, **52**, 1361, (1984).
- [32] Ferrari, V., e Mashhoon, B., "New approach to the quasinormal modes of a black hole", *Phys. Rev. D*, **30**, 295, (1984).
- [33] Greub, W., *Connections, Curvature and Cohomology*, Vol. I, Academic Press, 1972.
- [34] Guillemin, V., e Pollack, A., *Differential Topology*, (Prentice-Hall, New Jersey, 1974).
- [35] Hawking, S., e Ellis, G.F.R. *The Large-Scale Structure of Spacetime*, (Cambridge University Press, 1973).
- [36] HELLER, A., "Homological Algebra in Abelian Categories", **Ann. of Math.** 68 (1958), pp. 484-525
- [37] Hirsch, M. W. "Differential Topology", Springer-Verlag, 1976.
- [38] Hirschhorn, P. S., *Model Categories and Their Localizations*, AMS, 2003.
- [39] Hovey, M. *Model Categories*, 1991.
- [40] Husemoller, D. "Fibre Bundles", GTM 20, Springer-Verlag, 1993.
- [41] Iyer, S., e Will, C.M., "Black-hole normal modes: A WKB approach. I. Foundations and application of a higher order WKB analysis of potential-barrier scattering", *Phys. Rev. D*, **35**, 3621, (1987).
- [42] Jaffé, G., *Z.Phys.*, **87**, 535, (1934).
- [43] Kelley, J. L. *General Topology*, GTM 27, Springer-Verlag, 1991.

- [44] Kerr, R.P., Phys. Rev. Lett. 11, 237 (1963).
- [45] Kervaire, M. A. "A Manifold with does not admit any Differentiable Structure", *Commentarii Mathematici Helvetici*, 34, 1960, pp. 304-312.
- [46] Kobayashi, S., Nomizu, K., *Foundations of Differential Geometry*, vol. 1,2, John Wiley & Sons, 1963.
- [47] Kokkotas,K.D.,"Normal modes of the Kerr black hole", *Class. Quantum Grav.*, 8, 2217, (1991).
- [48] Kokkotas,K.D., e Schmidt, B.G.,"Quasi-normal modes of stars and black holes", (1999), <http://www.astro.auth.gr/~kokkotas>.
- [49] Kostrikin,A.I., e Manin,Y.I., *Linear Algebra and Geometry*, (Gordon and Breach, New York, 1981).
- [50] Kramers,H.A., *Hand.Jahrb. Chem. Phys.*, 1, 312, (1938); Heisenberg,W., *Z. Naturforsch.*, 1, 608, (1946).
- [51] Lang, S., *Algebra*, GTM 211, Springer-Verlag, 2000.
- [52] Lang, S., *Introduction to Differentiable Manifolds*, Springer, 2000.
- [53] Leaver,E.W.,"An analytic representation for the quasi-normal modes of Kerr black holes", *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, 402, 285, (1985).
- [54] Leinster, T. *Higher Operads, Higher Categories*, Cambridge University Press.
- [55] Leinster, T. *Basic Category Theory*, Cambridge University Press, 2014.
- [56] Levich,B.G., Myamlin,V.A., e Vdovin,Yu.A., *Theoretical Physics - Quantum Mechanics*, v.3, (North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1973).
- [57] Lima, E.L., *Elementos de Topologia Geral*, (SBM, 2014).
- [58] Lurie, J., *Higher Topos Theory*, Princeton University Press, 2009.
- [59] MacLane, S. *Categories for the Working Mathematician*, Springer, 1991.

- [60] MacLane, S. *Homology*, Springer, 1991.
- [61] Madsen, I., Tornehave, J., *From Calculus to Cohomology: de Rham cohomology and characteristic classes*, Cambridge University Press, 1997.
- [62] Marion, J.B., e Thornton, S.T., *Classical Dynamics of Particles and Systems*, (Harcourt Brace & Company, Fort Worth, 1995).
- [63] May, J. P. *A Concise Course on Algebraic Topology*, Chicago University Press, 1999.
- [64] May, J. P., Sigurdsson, J. *Parametrized Homotopy Theory*, AMS., vol 10, 2006.
- [65] May, J. P., Ponto, K., *More Concise Algebraic Topology*, Chicago University Press, 2012.
- [66] Milnor, J. On manifolds homeomorphic to the 7-sphere. **Annals of Mathematics**, vol. 64, n.2, 1956, pp. 399-405.
- [67] Milnor e Stasheff, *Characteristic Classes*.
- [68] Misner, C.W., Thorne, K.S., e Wheeler, J.W., *Gravitation*, (W.H. Freeman and Co., San Francisco, 1970).
- [69] Mitchell, B. *Theory of Categories*, Academic Press, 1965.
- [70] Munkres, J., *Topology*, Pearson, 2000.
- [71] Nakahara, M., *Geometry, Topology and Physics*, (IOP Publishing Ltd, 2003).
- [72] Onozawa, H., "Detailed study of quasinormal frequencies of the Kerr black hole", *Phys. Rev. D*, **55**, 3593, (1997).
- [73] Penrose, R., e MacCallum, M.A.H., "Twistor Theory: an approach to the quantisation of fields and space-time", *Physics Reports* **6**, **4**, 241-316, (1972).
- [74] Penrose, R., e Rindler, W., *Spinors and Space-time*, v.1, (Cambridge University Press, Cambridge, 1987).

- [75] Penrose,R., e Rindler,W., *Spinors and Space-time*, v.2, (Cambridge University Press, Cambridge, 1987).
- [76] Prugovecki,E., *Quantum Mechanics in Hilbert Space*, (Academic Press, New York, 1971).
- [77] Regge,T., e Wheeler,J.A., *Phys. Rev.*, **108**, 1063, (1957).
- [78] Rotman, J. J., *An Introduction to Homological Algebra*, Springer, 2000.
- [79] Schutz,B., *Geometrical Methods of Mathematical Physics*, (Cambridge, 1980).
- [80] Schwarzschild, K., *Sitzungsber. K. Preuss. Akad. Wiss.* 1, 189 (1916).
- [81] Silva, A.C., *Lectures on Symplectic Geometry*, (Springer-Verlag, 2006).
- [82] Spanier, E. H. "Algebraic Topology", McGraw Hill, 1966;
- [83] Steenrod, N. "The topology of Fibre Bundle", Princeton University Press, 1951.
- [84] Sternberg, S., *Lectures on Differential Geometry*, Prentice-Hall, 1964.
- [85] Strom, J., *Modern Homotopy Theory*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 127, AMS, 2011.
- [86] Teukolsky,S.A., *Phys. Rev. Lett.*, **29**, 1114, (1972).
- [87] Teukolsky,S.A., *Astrophys. J.*, **185**, 635, (1973).
- [88] Vishweshwara,C.V.,"Stability of the Schwarzschild metric", *Phys. Rev. D*, **1**, 2870, (1970).
- [89] Wald, R.M., *General Relativity*, (University of Chicago Press, 1984).
- [90] Webster, B.L. and Murdin, P., *Nature (London)* 235, 37 (1972).
- [91] Weibel, C. A., *An Introduction to Homological Algebra*, Cambridge University Press, 1994.
- [92] Weinberg, S., *Gravitation and Cosmology*, (John Wiley and Sons Inc., 1972).

- [93] Whitehead, G. W. *Elements of Homotopy Theory*, Springer-Verlag, 1978.
- [94] Whiting, B.F., *J. Math. Phys.*, **30**, 1301, (1989).
- [95] Zemmour-I., P., *Diffeology*, AMS, 2013.