Réseau de Pacotte, théorie des graphes et géométrie projective

Daniel Parrochia

Réseau de Pacotte, théorie des graphes et géométrie projective

Daniel Parrochia

Université de Lyon (France)

Résumé

La notion de «réseau arborescent» a suscité un regain d'intérêt ces dernières années, notamment en informatique et en biologie (réseau de neurones). Cependant, cette notion est habituellement interprétée de façon extrêmement restrictive : essentiellement liés au traitement des données, les «réseaux arborescents» d'aujourd'hui sont des topologies de réseaux hybrides dans lesquelles des réseaux en étoile sont généralement interconnectés via des réseaux de bus (voir Sosinsky (2009) ; Bradley (2016)). Ces réseaux sont, le plus souvent, hiérarchiques et réguliers (voir Kromer (2017)), et chacun de leurs nœuds peut avoir un nombre arbitraire de fils. Au départ, cependant, la notion de «réseau arborescent», introduite en 1936 par le scientifique belge Julien Pacotte, était assez différente : plus générale et, en même temps, plus contrainte, elle devait en outre servir un objectif ambitieux : la reconstruction des mathématiques à partir de structures empiriques concrètes. Ordinairement mal commentée et mal comprise (notamment des philosophes), elle n'a pas eu de véritable postérité. Dans cet article, nous essayons d'abord de clarifier cette notion de «réseau arborescent» au sens de Julien Pacotte, ce qui permet d'éliminer les mauvaises interprétations auxquelles cette notion a donné lieu (voir, par exemple, Deleuze et Guattari, 1980). Nous utilisons à cette fin le langage et les concepts de la théorie des graphes et formalisons les principales propriétés de ces réseaux qui, contrairement à ce qu'on croit, ne sont pas, en général, des arbres. Dans une seconde partie, nous tentons ensuite de suivre et d'expliquer, pas à pas, comment Pacotte comptait, à l'aide de notions empruntées à la géométrie projective, reconstruire à partir d'un tel réseau l'ensemble des mathématiques.

Mots-clés. Pacotte, Réseau arborescent, graphe, graphe biparti, arbre, arborescence, cycle, cocycle, coloration d'un graphe, projectivité.

1 Introduction

Scientifique et épistémologue d'origine belge, Julien Pacotte est un penseur peu connu [1]. Ses travaux (notamment sur la pensée technique) ont été cités, en leur temps, par des auteurs tels que G. Bachelard [2] et G. Canguilhem [3] mais, comme a pu l'observer récemment F. Sigaut [4], ils sont l'un des grands «oublis» de l'histoire des sciences ou de la technologie. Nous nous intéresserons ici à l'un de ses livres sans doute les plus profonds – *Le Réseau Arborescent, schème primordial de la pensée* (1936) – dont il existe seulement quelques mentions dans la littérature [5]. Cet ouvrage a été également évoqué – mais de façon tout à fait superficielle – par G. Deleuze et Félix

1. Il semblerait s'agir de Julien Désiré Humbert Ghislain Pacotte, né à La Louvière (Hainaut) en 1887 (voir : La Louvière, *État civil*, Naissances 1885-1895, Acte 116 numérisé sur Zoekakten.nl). Physicien de formation, il aurait été assistant à l'Observatoire Royal de Belgique (*Archives de l'Observatoire Royal*, dossier personnel, boîte 029, n° 976), puis chercheur au Fonds National de la Recherche Scientifique à Bruxelles. Selon des proches, il serait peut-être décédé en 1956 ou 1957 au sanatorium de Tombeek (Overijse), des conséquences d'une tuberculose. Sa tombe se trouve au cimetière de Nivelles. Le père de Pacotte, Emile, était d'origine française.

2. G. Bachelard, *La Formation de l'esprit scientifique* (1934), Paris, Vrin, 1967, 5e ed., p. 250.

3. G. Canguilhem, *La connaissance de la vie* (1952), Paris, Vrin, 2006, p. 131.

4. F. Sigaut, «Technocratie et al.», *Mélanges, Hommage en l'honneur d'Hélène Vrin*, Droz, http ://www.francois-sigaut.com/index.php/publications-diverses/publications/12-articles-fond/325-2013c.

5. Une référence, signée de Jean Ullmo, et qui n'est pas un compte-rendu, se borne à faire état de l'existence du livre : «Julien Pacotte, *Le Réseau Arborescent, schème primordial de la pensée*», *Revue philosophique de la France et de l'Etranger*, 126, 11,1938, p. 376. Une autre (voir R. Bouvier, «Julien Pacotte, *Le Réseau Arborescent, schème primordial de la pensée*», *Revue de Synthèse*, 57, 14, p. 124) signale seulement que «partant de l'idée que l'image d'un courant se divisant en ramifications est le schème primordial de la pensée, l'auteur essaie d'édifier une géométrie de l'arborescence "dans le dessein d'éclairer les bases de la pensée formelle"». On peut encore mentionner : «Le réseau arborescent, Schème primordial de la pensée» (Actualités scient. et industr., 429) par J. Pacotte, compte-rendu de E. Pinte, *Archives de Philosophie*, vol. 14, 1938, 14. Enfin, on trouve également un compte-rendu de Paul Schrecker, le traducteur de Leibniz, dans *Thalès*, vol. 3, 1936, 188, ce texte de 24 lignes étant, de loin, le plus fidèle qu'on puisse trouver. L'auteur, qui n'entre pas dans le détail des constructions de Pacotte, estime sa conception "simple et féconde". Il évoque à son sujet la génération des nombres selon Platon, "telle qu'elle a été récemment renouvelée par M. Brouwer".

Guattari, qui en ont fait le fer de lance de la pensée classique, fondamentalement liée, selon eux, à la notion d'«arbre» [6] – à laquelle ils prétendent opposer celle de *rhizome* [7]. Nous montrerons qu'il y a là un contresens, car les réseaux de Pacotte ne sont pas forcément des arbres et supposent une mathématique complexe, loin des trivialités auxquelles les auteurs précédents les réduisent. En réalité, Julien Pacotte était l'un des meilleurs connaisseurs de la science de son temps [8] et sa compétence est sans commune mesure avec celle de ses critiques. Cette compétence, ainsi que la nouveauté de sa perspective, ne semblent pas, malheureusement, avoir été davantage perçues à l'étranger qu'en France. Christy Wampole, par exemple, fait état de l'ouvrage de Pacotte dans un livre consacré à la métaphore de l'arbre, mais seulement pour indiquer que celui-ci a été pris par l'auteur comme une métaphore de la pensée [9]. Même constat pour l'article de Matteo Pasquinelli, où l'on cite là encore le texte de Pacotte à l'appui d'une conception métaphorique de l'arbre [10], ce qui est évidemment, comme dans les cas précédents – Deleuze-Guattari compris –, une erreur totale, puisque c'est au contraire pour l'auteur un «schème formel» avec ses lois, non une simple image. Dans la suite, nous redéfinirons, en premier lieu, le réseau de Pacotte en termes de graphe. Dans une deuxième temps, nous commenterons son application et sa raison d'être, sur lesquelles les auteurs précédents sont muets (la reconstruction rameuse des mathématiques).

---

6. G. Deleuze, F. Guattari, *Capitalisme et Schizophrénie, Mille plateaux*, Paris, Minuit, 1980, p. 25. Les auteurs, visiblement, n' ont lu que quelques pages, et encore, de façon erronée car le schéma de la note 12, censé reproduire un exemple de réseau arborescent, est malheureusement faux.

7. Les auteurs sont sans culture mathématique. En réalité, il n'est nul besoin de réfléchir très longtemps pour s'apercevoir que le rhizome est aussi un arbre, au moins au sens mathématique du terme.

8. En témoigne, entre autres, la liste des publications de Julien Pacotte entre 1920 et 1939 : *Les méthodes nouvelles en analyse quantique (Mécanique quantique. Mécanique ondulatoire)*, Paris, A. Blanchard, 1920 ; *La physique théorique nouvelle*, préface de M. Émile Borel, Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1921 ; *La pensée mathématique contemporaine*, Paris, Librairie Félix Alcan, 1925 ; *La pensée technique*, Paris, F. Alcan, 1931 ; *La connaissance : mathématique, technique, humanisme, métaphysique*, Paris, Alcan, 1934 ; *La logique et l'empirisme intégral*, Paris, Hermann et Cie, 1935 ; *Le physicalisme dans le cadre de l'empirisme intégral*, Paris, Hermann, 1936 ; *Le Réseau Arborescent : schème primordial de la pensée*, Paris, Hermann, 1936 ; *L'espace hermitien quantique*, Paris, Hermann, 1938 ; *Le champ pétrographique : Les concepts fondamentaux de la science structurale des corps*, Paris, Hermann, 1939.

9. C. Wampole, *Rootedeness, the ramification of a metaphor*, the University of Chicaco Press, Chicago & London, 2016, p. 183.

10. M. Pasquinelli, «The Arborescent Mind : The Intelligence of an Inverted Tree», in Khadija von Zinnenburg Carroll (ed.) *Botanical Drift : Protagonists of the Invasive Herbarium*, Berlin : Stenberg Press, 2018.

Partie I : Nature et propriétés du réseau

2 Le réseau arborescent

Ce qu'on appelle "réseau arborescent", aujourd'hui, est une structure mathématique souvent utilisée en informatique et qui prend généralement les formes suivantes : (voir Fig.1) :

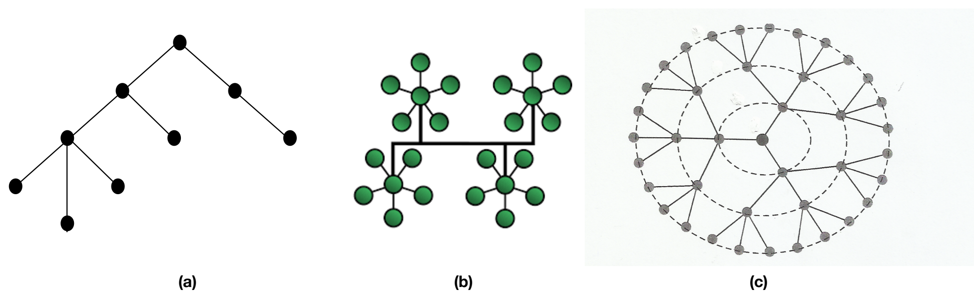


FIGURE 1 – Exemple de structures de réseau arborescent

Autrement dit, on rencontre essentiellement des arbres, c'est-à-dire des graphes connexes sans cycles (voir Fig.1 (a)), des réseaux étoile-bus, c'est-à-dire des topologies de réseaux hybrides dans lesquelles des réseaux étoilés sont interconnectés via des réseaux en bus (voir Fig.1 (b)), enfin des graphes hiérarchiques n réguliers comme le graphe 3-hiérarchique de la Fig.1 (c), qu'un philosophe pourrait très bien identifier, par exemple, à la structure de l'Encyclopédie hegelienne.

Toutefois, la notion de "réseau arborescent", telle qu'introduite initialement par Julien Pacotte en 1936, était assez différente, au sens où elle intégrait au sein d'une même structure des aspects à la fois arborescents et circulaires.

«Nous appelons arborescence, écrit Julien Pacotte au début de son ouvrage, le système de segments de lignes figurant un courant qui se scinde, engendrant ainsi des courants qui peuvent se scinder à leur tour et ainsi de suite. Ainsi, dans l'espace ordinaire, la figure formée par une plante, du sol à la naissance des feuilles, ou bien encore, la cellule qui se dédouble et se multiplie par générations successives, ou encore le grain colloïdal qui se désagrège, la molécule qui se dissocie, l'atome qui s'ionise, le noyau atomique qui se désagrège par paliers, etc.» [11].

On remarquera, avec l'auteur, que de telles «arborescences» sont divergentes. Mais il n'y a là aucune nécessité et l'on peut trouver des exemples où l'orientation des arbres est inversée :

«Ainsi la cristallisation d'un magma hétérogène en milieu de structure granitique, la coalescence des micelles, la marche des demi-chromosomes vers un des deux pôles du noyau ovoïde pour y former un noyau nouveau, sont, dans le continu de l'espace-temps, des arborescences convergentes» [12].

Sur la base de ces données intuitives, Pacotte introduit l'idée plus complexe d'un «réseau» arborescent, circulatoire et polarisé : la nature comme la vie semblent accorder, en effet, beaucoup d'importance à des systèmes arborescents convergents-divergents (plantes, systèmes circulatoires ou nerveux, etc.) [13]. D'une façon générale, l'engendrement des collections semble pouvoir se réduire au schème de l'arborescence, de sorte que, si l'on admet que la mathématique pure et la logique formelle ont pour objet unique les collections et les nombres, alors «une théorie originelle des réseaux polarisés représenterait l'exposé systématique des fondements de la pensée formelle, logique et mathématique» [14].

Julien Pacotte, à une époque où, rappelons-le, les principaux concepts de la théorie des ordres et de celle des graphes, n'existaient pas encore dans toute leur clarté [15], entreprend donc d'édifier une «géométrie des ramifications, doctrine entièrement nouvelle, indépendante comme la géométrie amorphe [entendons : la topologie] ou la géométrie projective pure, mais valant comme fondement de la logique formelle et

11. J. Pacotte, *Le Réseau Arborescent, schème primordial de la pensée*, Paris, Hermann, 1936, p. 3.

12. J. Pacotte, *op. cit.*, p. 4.

13. Pacotte semble avoir remarqué que les réseaux naturels pouvaient être à la fois arborescents *et* bouclés, ce qu'on n'a mis en évidence qu'assez récemment pour les réseaux végétaux. Cf. E. Katifory, G. J. Szöllösi, and M. O. Magnasco, «Damage and Fluctuations Induce Loops in Optimal Transport», *Phys. Rev. Lett.* 104, 048704, 29 January 2010 : F. Corson, «Fluctuations and Redundancy in Optimal Transport Networks», *Phys. Rev. Lett.* 104, 048703, 29 January 2010.

14. J. Pacotte, *op. cit.*, p. 5.

15. Pour une histoire de la théorie des graphes, voir Norman Biggs, E. Keith Lloyd, Robin J. Wilson, *Graph Theory*, 1736-1936, Clarendon Press, Oxford, 1986 ; voir aussi, pour une approche plus philosophique, D. Parrochia, *Philosophie des réseaux*, P.U.F., Paris, 1993, et D. Parrochia, "La rationalité réticulaire", in D. Parrochia (ed.), *Penser les réseaux*, 7-23, Champ Vallon, Seyssel, 2001. Sur la théorie des ordres et les questions qui y sont reliées, voir D. Parrochia, P. Neuville, *Towards a general theory of classifications*, Birkaüser, Basel, 2013.

de la mathématique pure» [16].

Nous allons tenter de relire celle-ci à la lumière des concepts et structures de la théorie des graphes.

3 Concepts fondamentaux : l'idée de «réseau polarisé»

Etant donné des segments de lignes rayonnant autour d'un point et parcouru, chacun, dans un sens déterminé, nous introduisons, d'après Pacotte, les définitions suivantes.

Définition 3.1. On appellera *diffluence* un ensemble formé par n arcs divergents d'un sommet avec 1 seul arc convergeant vers lui.

Définition 3.2. On appellera *confluence* un ensemble formé par p arcs convergeant vers un sommet avec 1 seul arc divergent orienté vers l'extérieur.

Définition 3.3. Dans une diffluence (resp. confluence), le système des courants divergents (resp. convergents) sera une *gerbe*. Dans les deux cas, le segment unique restant sera nommé *segment opposé*.

3.1 Visualisation

Soient deux diffluences (resp. confluences) successives. On peut supposer qu'un rayon de la gerbe de l'une soit le segment opposé de l'autre. Par ailleurs, la même ligne peut servir de segment opposé pour une confluence et une diffluence. Visualisons d'abord cela dans le cas de deux diffluences (Fig. 2 gauche) et dans celui d'une confluence et d'une diffluence associée (Fig. 2 droite).

Définition 3.4. Un réseau de segments orientés assemblés par leurs extrémités et formant des confluences et des diffluences sera appelé un *réseau polarisé*.

16. J. Pacotte, *op. cit.*, p. 6.

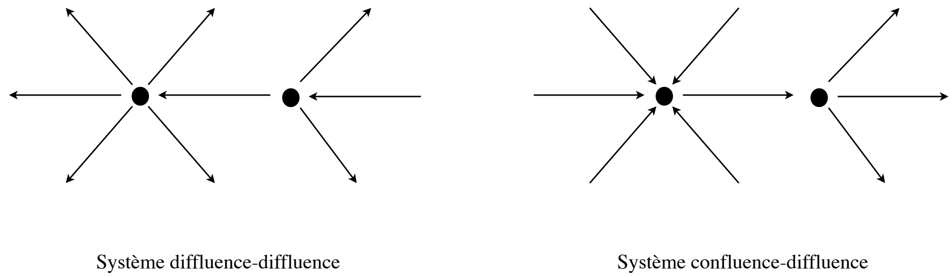


Figure 2 – Les éléments du réseau polarisé

3.2 Propriétés du réseau polarisé

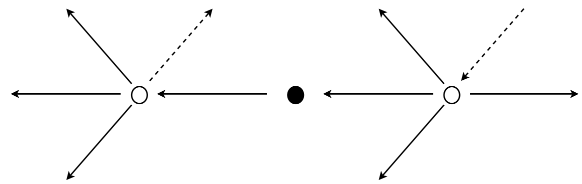
Le réseau polarisé présente les propriétés suivantes :

1. Il existe, partout dans le réseau, un courant, dont le sens est permanent le long d'un segment ;
2. Il est permis de retourner, à la fois, tous les courants : une diffluence devient une confluence et inversement ;
3. Tout réseau admet un *courant direct* et un *courant inverse*. On nommera *pôles positifs* les diffluences du courant direct ;
4. Le signe des pôles résulte du sens du courant.

3.3 La notion de *dipôle*

Reprenons le cas de deux diffluences successives : la ligne joignant les deux pôles positifs joue des rôles différents vis à vis des deux pôles, étant d'un côté un rayon de gerbe, de l'autre, un segment opposé. Pour que chaque segment ait un rôle propre, le même pour ses deux pôles, Pacotte partage la ligne des deux pôles positifs par un nouveau point. En ce dernier, il n'y a ni confluence, ni diffluence, mais simplement *fluence*. Ce point sera aussi nommé un pôle, mais il sera dit *négatif*. Inversement, entre deux pôles négatifs, on intercalera toujours un pôle positif. Dans le cas d'une diffluence et d'une confluence consécutives, la ligne commune jouera uniquement le rôle de segment opposé et il n'y aura pas lieu d'intercaler un pôle de fluence (voir Fig. 3).

Dans ces conditions, le réseau a les nouvelles propriétés suivantes, qui se déduisent



Système diffluence-fluence-diffluence

FIGURE 3 – Le réseau dipolaire

de ce qui précède :

Proposition 3.1. *Les pôles négatifs et positifs alternent partout.*

Proposition 3.2. *Les segments du réseau sont de deux sortes : les uns sont des rayons de gerbe, les autres des segments opposés.*

Proposition 3.3. *Un signe convenable étant assigné aux extrémités libres, tous les segments sont des dipôles.*

Définition 3.5. On appellera les rayons de gerbe des *dipôles-unités* et les segments opposés des *dipôles de liaison.*

Sachant que l'on a défini comme *positif* le pôle qui, pour le courant direct, est une diffluence, les conditions de l'alternance permettent de déduire encore :

Proposition 3.4. *Dans un dipôle unité, le courant va du pôle positif au pôle négatif.*

Proposition 3.5. *Dans un dipôle de liaison, le courant va du pôle négatif au pôle positif.*

On voit que la permanence du sens du courant le long d'une ligne formée de plusieurs dipôles s'exprime par l'alternance des dipôles des deux sortes. On en déduit que l'usage des pôles alternés permet de faire passer au second plan les idées de courant, de sens direct et de sens inverse. Le signe des pôles (positif ou négatif) rend donc désormais inutile la notation du sens du courant.

Définition 3.6. On appelle aujourd'hui *coloration* des sommets d'un graphe l'affectation d'une couleur à chacun de ses sommets de telle sorte que deux sommets adjacents ne soient pas porteurs de la même couleur.

Définition 3.7. Un graphe est dit *p-chromatique* si ses sommets admettent une coloration en p couleurs. On appellera *nombre chromatique* $\gamma(G)$ d'un graphe G le nombre minimum de couleurs distinctes nécessaires pour effectuer une coloration de ses sommets.

On en déduit la proposition suivante :

Proposition 3.6. *Le réseau arborescent de Pacotte est un graphe bi-chromatique. Son nombre chromatique* $\gamma(G) = 2$.

En d'autres termes, on déduit immédiatement des conditions extrêmement générales posées antérieurement l'existence d'une bicoloration du réseau en prenant, par exemple, comme points blancs les pôles positifs et comme points noirs les pôles négatifs. Comme l'indiquait Pacotte, une telle bicoloration permet de s'affranchir de toute indication d'orientation dans le réseau qui gagne ainsi en généralité.

Sur le plan graphique, Pacotte entend distinguer les dipôles de liaison des dipôles-unités de la façon suivante : dans un dipôle de liaison, la ligne des pôles atteindra effectivement les deux pôles. Elle ne les atteindra ni l'un ni l'autre dans un dipôle-unité. Cela conduit aux configurations de la Fig. 4.

Pour la clarté, cependant, nous allons rétablir le sens du courant dans le 4^e schéma et numéroter les sommets. Nous obtenons ainsi le réseau de la Fig. 5, qui servira plus loin de réseau de référence. Cette figure illustre parfaitement la notion de «réseau circulatoire» mise en avant par Pacotte au début de son ouvrage [17].

La convention de l'alternance des pôles conduit cependant à une schématisation plus avancée qui est celle de l'alternance des dipôles. Comme le montre Pacotte, une chaîne alternée de ces entités présente ainsi 4 types d'objets : la combinaison simple des 2 types de pôles et des 2 types de segments. Sur l'ensemble $X = \{1, 2, 3, ...\}$ des points du réseau, on peut alors faire jouer deux types d'opérateurs : l'opérateur de permutation cyclique des points et celui du retournement du sens du courant. La combinaison des deux engendre le groupe diédrique.

17. J. Pacotte, *op. cit.*, p. 4.

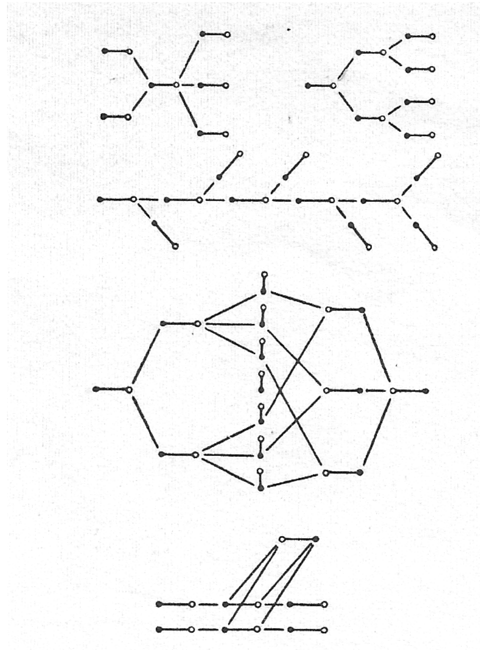


FIGURE 4 – Exemples de réseaux de Pacotte (d'après J. Pacotte, *op. cit.*, p. 9)

3.4 Soudures, gerbes et chaînes

Si nous récapitulons, le réseau polarisé se présente donc comme suit [18] :

1. Le réseau comporte deux types de pôles (positifs et négatifs) et deux types de dipôles (dipôles-unité et dipôles de liaison). On admet que les pôles appartiennent toujours aux dipôles et on nomme *pôles de soudure* les pôles de même signe par lesquels les dipôles-unités s'assemblent. Ils permettent, corrélativement, de lier les dipôles de liaison aux dipôles-unités.
2. Une *gerbe* est un système de dipôles-unités assemblés par une seule soudure ; elle est dite positive ou négative selon le signe de celle-ci.
3. Une *chaîne* est un système de dipôles quelconques, dont les soudures assemblent deux dipôles. Une chaîne de dipôles-unités présente alternativement des gerbes (deux dipôles-unités) positives et négatives. Une chaîne où alternent des dipôles des deux types (ou *chaîne alternée*) ne présente aucune gerbe.
4. Un réseau polarisé est un système de dipôles, caractérisé comme suit : chaque dipôle de liaison peut s'attacher, en chacun de ses pôles, un ou plusieurs

18. J. Pacotte, *op. cit.*, p. 11.

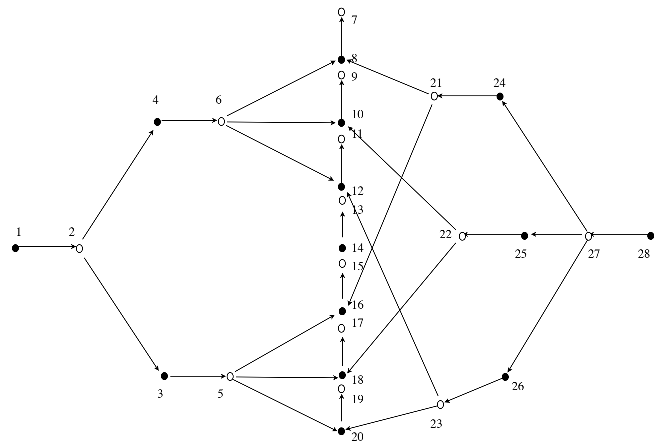


Figure 5 – Réseau de Pacotte avec courants

dipôles-unités, mais aucun dipôle de liaison ; chaque dipôle-unité s'attache, en chacun de ses pôles, un dipôle de liaison et un seul. Il n'y a pas de dipôle de liaison dont aucun pôle ne serait une soudure.

Voici une illustration de ces concepts à partir du schéma de la Fig. 5.

- Les sommets négatifs 1, 3, 4 sont des *pôles de soudures*, tout comme les sommets positifs 2, 5, 6, par exemple ;

- Le système de dipôles-unités (5-16), (5-18), (5-20), assemblés par une seule soudure, la soudure positive (5), est une *gerbe positive*.

- La *chaîne* (28-27, 27-24, 24-21, 21-8, 8-7) est un système de dipôles quelconques, comportant à la fois des dipôles unités (27-24, 21-8) et des dipôles de liaison (28-27, 24-21, 8-7).

- La chaîne (23-20, 20-5, 5-16, 16-21, 21-8) est une *chaîne de dipôle-unités*. Elle présente alternativement des gerbes positives (23-20, 5-16, 21-8) et négatives (20-5, 16-21).

- La chaîne (28-27, 27-25, 25-22, 22-10) où alternent dipôles de liaison et dipôles-unités ne comporte pas de gerbe car elle ne comporte aucune soudure entre dipôles-unités.

3.5 Un fondement graphique de la pensée formelle

Dans l'esprit de Pacotte, la formalisation précédente n'est pas un système de conventions parmi d'autres mais «un objet formel inévitable, convenant originellement à la schématisation des ramifications qualitatives qui sont un aspect universel de la réalité intime» [19]. Autrement dit, l'axiomatique précédente présenterait une «évidence irréductible» qui serait en fait un véritable fondement de la pensée formelle, logique et mathématique. Le réseau polarisé n'est donc pas une structure qui s'inscrirait dans celle-ci ou s'en déduirait. C'est l'inverse. Les structures logico-mathématiques, des plus simples aux plus complexes, doivent se déduire d'un tel réseau. Ainsi «toute collection, tout nombre est une gerbe» [20].

Malgré ces affirmations – qui doivent se comprendre dans le contexte d'une époque où la question du fondement des mathématiques était à l'ordre du jour – nous allons continuer de réinterpréter le réseau de Pacotte à la lumière des concepts et structures mathématiques modernes.

4 Domaine, couche, concordance

Dans le chapitre 2 de son ouvrage [21], Pacotte en vient à introduire les nouvelles notions suivantes :

4.1 Domaines et cocycles

Définition 4.1. Une région du réseau qui, à partir d'un pôle, est parcourue par un courant de même sens s'appelle le *domaine* du pôle.

Etant donné un sous-ensemble $A \subset X$ de sommets du graphe $G(X, U)$, le domaine de A où A est réduit au singleton $\{s\}$ et que nous noterons plus simplement $\text{dom}(\{s\})$, comprend donc les courants de même sens issus de $\{s\}$, c'est-à-dire, généralement, dans le cas d'un réseau quelconque, «d'abord une gerbe, puis une arborescence» [22].

19. J. Pacotte, *op.cit.*, p. 11.
20. *Ibid.*.
21. *Ibid.*, p. 12 sq.
22. *Ibid.*, p. 12.

Cette notion de *domaine* n'est pas évidente à traduire en théorie des graphes. Pour la clarté, rappelons d'abord ici quelques définitions familières aux théoriciens des graphes.

Définition 4.2 (Cocycles)**.** Pour toute région A d'un graphe $G(X, U)$, on définit :

– $\omega^+(A)$: ensemble des arcs ayant leur extrémité initiale dans A et leur extrémité terminale dans $\bar{A} = X - A$;

– $\omega^-(A)$: ensemble des arcs ayant leur extrémité terminale dans A et leur extrémité initiale dans $\bar{A} = X - A$;

On note : $\omega(A) = \omega^+(A) + \omega^-(A)$, l'ensemble d'arcs ou d'arêtes appelé *cocycle* du graphe.

Ces définitions étant rappelées, on pourrait exprimer aujourd'hui la conception de Pacotte de la manière suivante. Partant d'un 1-graphe connexe orienté $G(X, U)$, sa démarche revient à fixer certaines conditions sur les *cocycles*. Supposons que $A = \{s\}$ ne comporte qu'un seul sommet. On dira que :

1. $\omega^+(A)$ est une *diffluence* si $|\omega^+(A)| = |\omega(A) - 1|$ (autrement dit, si $|\omega^-(A)| = 1$) ;
2. $\omega^-(A)$ est une *confluence* si $|\omega^-(A)| = |\omega(A) - 1|$ (autrement dit, si $|\omega^+(A)| = 1$) ;
3. $\omega(A)$ est une *fluence* si $|\omega^+(A)| = |\omega^-(A)| = 1$ (autrement dit, si $|\omega(A)| = 2$).

Ainsi, dans le graphe de la Fig. 5, pour $A = \{2\}$, nous avons $\omega^+(\{2\}) = \{4\}$. Posons alors $B = \{6\}$, nous avons désormais $\omega^+(\{6\}) = \{8, 10, 12\}$. Dès lors, $\mathrm{dom}(\{2\}) = \omega^+(\{2\}) \cup \omega^+(\{6\}) = \{4, 8, 10, 12\} = \omega^+(A, B)$.

Définition 4.3. Dans le langage de Pacotte, un réseau qui ne présente que des diffluences (resp. des confluences) est une *arborescence*.

Cette définition, qui revient à définir un arbre (ou une arborescence) par ses cocycles, est duale des définitions de la théorie des graphes. En effet, en théorie des graphes, on appelle *arbre* un graphe connexe sans cycles et *arborescence* (graphe $\mathcal{F} = (X, T)$, un arbre enraciné de racine $r \in X$ et tel que, pour tout sommet $j \in X$, il existe dans T un chemin allant de r à j. Cela ne signifie pas que tout réseau de Pacotte soit un arbre ou une arborescence. Certains peuvent en fait comporter des *cycles*.

Définition 4.4. Dans un graphe $G(X, U)$, un *cycle* est une séquence d'arcs :

$$\mu = (u_1, u_2, ..., u_q)$$

telle que :

(1) tout arc u_k (avec $1 < k < q$) est relié par une de ses extrémités au précédent u_{k-1} et par l'autre extrémité à u_{k+1} (en d'autres termes, c'est une chaîne) ;

(2) la séquence n'utilise pas deux fois le même arc ;

(3) le sommet initial et le sommet terminal de la chaîne coïncident.

Un cycle *élémentaire* vérifie en outre :

(4) en parcourant le cycle, on ne rencontre qu'une fois le même sommet (excepté bien entendu le sommet initial qui coïncide avec le sommet final).

On aboutit alors au théorème suivant, qui montre l'erreur grossière commise par Deleuze et Guattari :

Théorème 4.1. *Un réseau arborescent de Pacotte contient un cycle si l'une de ses composantes connexes de cardinal n contient n arêtes ou plus.*

Démonstration. Soit G un réseau de Pacotte, C une composante connexe de G de cardinal n (i.e. ayant n sommets) et A un arbre couvrant pour cette composante. A a $n-1$ arêtes. Si C a n arêtes, il existe donc $a = (s, t) \in C$, qui n'est pas dans A. On a donc un chemin c, de s à t, dans A qui ne contient pas a. Et, par conséquent, c *plus* a forme un cycle de C. Pour savoir si G a des cycles, on considère donc chaque composante. Si l'une d'entre elles contient n arêtes ou plus, alors G contient un cycle.

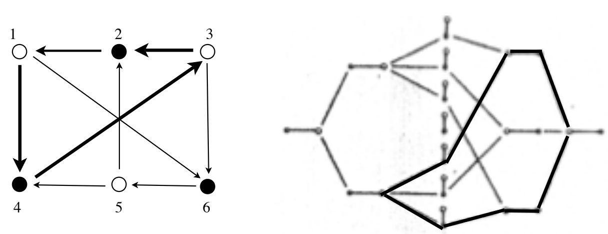


FIGURE 6 – Cycles de longueur paire dans un réseau de Pacotte)

Sur la Fig. 6, des exemples de cycles sont représentés en gras. Ils montrent qu'un réseau de Pacotte n'est pas nécessairement un arbre ou une arborescence. □

Rappelons maintenant la définition suivante :

Définition 4.5. On appelle *circuit* un cycle $\mu = (u_1, u_2, ..., u_q)$ tel que, pour tout $i < q$, l 'extrémité terminale de u_i coïncide avec l'extrémité initiale de u_{i+1}.

Théorème 4.2. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un réseau de Pacotte $G(X, U)$ soit sans circuit est que tout sous-ensemble de sommets $A \subset X$ non vide admette au moins un élément dont tous les prédécesseurs sont dans $\bar{A}$, le complémentaire de A. Autrement dit, le sous-graphe G_A a au moins un sommet sans prédécesseur.*

Démonstration. Supposons que $G(X, U)$ ait un circuit $[x_0, x_1, ..., x_r]$. Posons $A = \{x_0, x_1, ..., x_r\}$ et considérons le sous-graphe G_A : tout sommet de G_A appartenant au circuit a au moins un prédécesseur dans A. Il existe donc un ensemble A pour lequel la propriété est fausse. Réciproquement supposons $G(X, U)$ sans circuit et la propriété fausse. Il existe donc un graphe G_A dont tous les sommets ont au moins un prédécesseur dans A. Partons de x_{i_0} dans G_A. x_{i_0} a un prédécesseur x_{i_1}, ..., $x_{i_{h-1}}$ a un prédécesseur x_{i_h}. On peut donc construire un chemin $[x_{i_n}, x_{i_{n-1}}, ..., x_{i_0}]$. Le graphe ayant n sommets distincts, deux sommets de ce chemin sont identiques. Ce graphe a donc un circuit ce qui est absurde. □

Dans le cas général, un réseau de Pacotte peut toutefois très bien admettre des circuits. Ce n'est pas le cas du réseau de la Fig. 5, mais c'est le cas du réseau de la Fig. 6 (gauche) qui admet plusieurs circuits : (3, 2, 1, 4, 3), (3, 6, 5, 4, 3), (3, 6, 5, 2, 1, 4, 3), (3, 2, 1, 6, 5, 4, 3).

Théorème 4.3. *Quand un réseau de Pacotte admet des cycles ou des circuits, ceux-ci sont nécessairement de longueur paire.*

Démonstration. Le réseau de Pacotte est un graphe biparti. Or un graphe biparti n'a pas de cycles de longueur impaire. □

Prenons maintenant le point de vue, non plus des courants, mais des dipôles. Parcourir le domaine en suivant le sens du courant revient à aller du dipôle de liaison associé au pôle initial à ses dipôles-unités. On admet [23] que le dipôle de liaison tenant au pôle choisi appartient déjà au domaine. C'est le *dipôle initial*. Si le pôle choisi est un pôle libre (qui n'est pas une soudure), alors il se termine par un dipôle de liaison

23. J. Pacotte, *op. cit.*, p. 13.

et, dans ce cas, le domaine se réduit à ce dipôle même. Sinon, le dipôle de liaison est lié à d'autres dipôles de liaison, chaque fois par le biais d'un dipôle-unité.

4.2 La notion de *couche*

Pacotte porte ensuite son attention sur le front mouvant de la nappe qui engendre le domaine. «Puisqu'il faut prendre, en chaque pôle de même signe que le pôle donné, finalement toute la gerbe, supposons que nous la prenions chaque fois d'un seul coup ; et puisqu'il faut poursuivre chaque ligne amorcée par la gerbe, jusqu'au pôle de même signe que son centre, supposons que, d'un seul coup, on prenne la gerbe et les dipôles de liaison qui la prolongent immédiatement. Dans ces conditions, la nappe avance par bonds bien définis ; toutefois, les lignes de front successives ne sont pas imposées. Le premier bond est imposé ; le second partira d'une ligne quelconque de la gerbe ; le troisième partira d'une autre ligne de la première gerbe ou d'une ligne quelconque de la gerbe engendrée au second bond ; et ainsi de suite. Nous appelons *couche* du domaine, un système de pôles qui définit un front possible de la nappe. La couche est formée de pôles portant le même signe que le pôle du domaine : elle a le signe de ce pôle.» [24].

Pour donner un sens à cette notion de *couche* du point de vue de la théorie des graphes, il convient d'introduire de nouvelles définitions.

Définition 4.6. Etant donné un graphe $G(X,U)$, on associe à chaque arc $u \in U$ un nombre noté $\ell(u) \in \mathbb{R}$ et appelé «longueur de l'arc». On dit que G est *valué* par les longueurs $\ell(u)$. Si $u = (i,j)$ on pourra aussi utiliser la notation ℓ_{ij} pour la longueur de l'arc u.

Dans le cas du réseau de Pacotte, on pourra associer à tout dipôle (i,j) la même longueur $\ell_{ij} = 1$.

On considèrera maintenant un réseau de Pacotte R sans circuits, muni d'une racine 1. Dans ces conditions, on peut introduire la fonction *rang* suivante :

Définition 4.7. La fonction *rang* associée à un graphe sans circuit de racine 1 est obtenue en associant, à chaque sommet $i \in X$ du graphe un nombre entier positif $r(i)$ appelé *rang* du sommet i tel que :

$$r(1) = 0,$$

24. J. Pacotte, *op. cit.*, p. 13.

$r(i)$ étant le nombre d'arcs dans un chemin de cardinalité maximum entre 1 et i.

On pourra alors décomposer le graphe en niveaux, chaque niveau correspondant aux pôles ayant le même rang. Dans le cas du réseau de Pacotte, les couches formées des pôles de même rang sont appelées des *couches normales*. Comme l'explique Pacotte, elles constituent un ensemble ordonné. Toutefois, entre deux couches quelconques d'un domaine, même arborescent, il n'existe pas, en général, de rapport de succession. On aboutit donc à la proposition suivante :

Proposition 4.4 (Pacotte)**.** *L'ensemble des couches du réseau de Pacotte n'est pas, en général, un ordre total.*

L'ensemble des couches (normales et anormales) du réseau ou ensemble des fronts possibles de la nappe forme donc plutôt un ordre partiel (*poset* ou «partially ordered set» en anglais).

Définition 4.8. Appelons Γ l'application multivoque qui, à tout élément de X fait correspondre une partie de X (i.e. un élément de $P(X)$).

Théorème 4.5 (Gondran et Minoux, 1979)**.** *Dans tout graphe sans circuit, il existe au moins un sommet i tel que $\Gamma_i^{-1} = \emptyset$.*

Définition 4.9. On appelle *antibase* d'un graphe quelconque un ensemble $A \subset X$ vérifiant les deux conditions suivantes :

(1) $\forall j \in \bar{A}, \exists i \in A$ tel qu'il existe un chemin de j à i ;

(2) Il n'existe pas de chemins entre deux sommets de l'antibase.

Dans un graphe sans circuit, l'ensemble des sommets n'ayant pas de successeur forme l'unique antibase. Si l'antibase est réduite à un seul élément, on l'appellera l'*antiracine* du graphe.

Dans le réseau de Pacotte de la Fig. 6, les sommets 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 et 28 forment ainsi l'unique antibase du graphe.

On prouve également les théorèmes suivants :

Théorème 4.6 (Berge, 1970)**.** *Si G est un graphe sans circuit avec au moins un arc, par tout arc passe un cocircuit.*

Théorème 4.7 (Berge 1970)**.** *Un graphe est fortement connexe si et seulement si par tout arc passe un circuit.*

On en déduit qu'un réseau de Pacotte sans circuits ne peut pas être fortement connexe. On prouvera cependant plus loin qu'il est, dans ce cas, *quasi-fortement connexe*.

4.3 La notion de *concordance*

Pacotte nomme *concordants* les sommets ayant une couche commune [25] et qui seront nécessairement de même signe.

Appelons $\mathcal{R}$ la relation de concordance, définie sur X, l'ensemble des sommets ou pôles de $R = G(X, U)$. Elle présente, d'après Pacotte, les propriétés suivantes :

(1) $x\mathcal{R}y$ et $x\mathcal{R}z \Rightarrow \text{dom}(x) \equiv \text{dom}(y)$ au-delà de la couche de concordance (xy) ;

(2) $x\mathcal{R}y$ et $x\mathcal{R}z \Rightarrow \text{dom}(x) \equiv \text{dom}(z)$ au-delà de la couche de concordance (xz).

On en déduit que $\text{dom}(y) \equiv \text{dom}(z)$, donc que $y\mathcal{R}z$ (transitivité de $\mathcal{R}$).

Par ailleurs :

- Si la couche $(xz) \in \text{dom}(x)$, est au delà de la couche $(xy) \in \text{dom}(x)$, alors, $y\mathcal{R}z$ selon (xz).

- Inversement, si $y\mathcal{R}z$ selon (xz), alors la couche $(xz) \in \text{dom}(x)$ est au delà de la couche $(xy) \in \text{dom}(x)$.

Dans le cas intermédiaire, la couche de concordance $(xy) \cap (xz)$ sera faite d'une partie de (xy) et d'une partie de (xz).

Notons que la relation $\mathcal{R}$ n'est pas irréflexive, car sinon, comme elle est transitive, il y aurait un *ordre total* sur l'ensemble des pôles du réseau, ce qui n'est pas forcément le cas. Par ailleurs, la notion de concordance n'ayant guère de sens pour un pôle unique, Pacotte ne signale pas qu'elle puisse être réflexive. Toutefois, si l'on admet qu'un pôle puisse concorder avec lui-même et qu'on confère à $\mathcal{R}$ la réflexivité, alors l'ensemble des pôles du réseau devient un *préordre*. En revanche, $\mathcal{R}$ n'est pas antisymétrique au sens faible :

$$\forall x, y \in X, x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x \not\Rightarrow x = y,$$

25. J. Pacotte, *op.cit.*, p. 13-14.

Le fait que deux pôles différents x et y ait une couche commune ne signifie nullement que $x = y$. A fortiori, $\mathcal{R}$ n'est pas antisymétrique au sens fort, de sorte que $\mathcal{R}$ n'est pas une relation d'*ordre*[26].

Pacotte introduit encore les éléments suivants :

Définition 4.10. On dira que deux pôles sont *perspectifs* lorsqu'ils sont concordants et que leurs domaines sont arborescents dans la région qui précède la couche de concordance et qui devient alors une *couche de perpectivité.*

Proposition 4.8 (Pacotte)**.** *La relation de perspectivité (des pôles) est transitive.*

Démonstration. Si x est perspectif avec y et y avec z, alors x est perspectif avec z. La transitivité de la relation de concordance engendre la transitivité de la relation de perspectivité. Pour la réflexivité et l'antisymétrie, on peut faire les mêmes remarques que plus haut.

□

Définition 4.11. On appelle *graphe transitif* le 1-graphe $H(X, U)$ vérifiant :

$$(x, y) \in U, (y, z) \in U \Rightarrow (x, z) \in U.$$

Proposition 4.9. *Dans un réseau de Pacotte, les graphes $H(C, W)$ et $H(P, Z)$ associés respectivement aux concordances et aux perspectivités sont des graphes transitifs.*

Définition 4.12. On appelle *double couche* d'un domaine le système des dipôles de liaison aboutissant à une couche.

4.4 Généralisation

Supposons que nous partions d'un pôle positif. En ce cas, c'est le courant direct qui engendre le domaine et la couche elle-même est dite *positive.* La double couche correspondante est traversée de l'intérieur vers l'extérieur. Arrivés du pôle du domaine à la couche, au lieu de poursuivre, passons du courant direct au courant inverse. Nous traversons à rebours les dipôles de la double couche puis engendrons les domaines de

26. Cela n'empêche pas les réseaux de Pacotte d'être des graphes antisymétriques puisque, entre deux pôles, l'existence d'une flèche orientée dans un sens exclut l'existence d'une flèche orientée en sens contraire (voir infra, § 5).

tous ses pôles négatifs. D'où l'idée de *domaine de rebroussement*.

Définition 4.13. On appelle *domaine de rebroussement* le domaine parcouru en partant du pôle choisi (sauf le dipôle initial) et en rebroussant chemin sur une couche de même signe. On engendre ainsi un domaine par couches de signe contraire et on aboutit finalement à des pôles également opposés.

On pourra parfois exclure, après rebroussement, au sortir de la double couche, le retour sur la ligne d'arrivée. S'il ne reste ainsi qu'une voie, le rebroussement est alors appelé une *réflexion*.

D'après l'auteur, les notions précédentes suffisent pour reconstituer l'ensemble du domaine logico-mathématique et, de fait, le mathématicien définit successivement, dans les chapitres 3 à 9 de son ouvrage, une conception *rameuse* de la somme, du produit ordonné, des combinaisons, des espaces multidimensionnels, du produit logique, du réseau des prédicats et du réseau de la logique des propositions.

Nous sommes donc devant une démarche extrêmement puissante et dont on ne peut se débarrasser d'un revers de main. Concernant en particulier les idées de *domaîne d'un pôle*, de *couche d'un domaine* et de *pôles dont les domaines ont une couche commune*, Pacotte observe «qu'elles ne doivent pas être saisies comme des concepts mettant en œuvre les schèmes formels abstraits de totalité, de classe, de définition par prédicats ou par conditions» [27]. Elles donnent en fait, selon lui, le «juste point de vue» [28] qui permet ensuite d'engendrer toute la logique formelle et la mathématique la plus abstraite.

5 Complément mathématique

Comme on l'a vu, un réseau arborescent de Pacotte est un graphe bi-chromatique. Si on lui suppose n sommets (ce nombre est fonction du réseau considéré), c'est un graphe d'ordre n. Par ailleurs, le nombre d'arcs allant d'un sommet x_i à un sommet x_j n'excédant jamais 1, c'est un 1-graphe. Ce 1-graphe est, de plus, *antisymétrique* car $(x, y) \in U \Rightarrow (y, x) \notin U$.

27. J. Pacotte, *op.cit.*., p. 15.
28. *Ibid.*.

5.1 Connexité

Un réseau de Pacotte est aussi *connexe*. La connexité pourrait être discutée puisque, dans la représentation de Pacotte (voir Fig. 6), les dipôles-unités n'atteignent pas leurs extrémités. Mais il s'agit en fait d'un artifice destiné à les distinguer des dipôles de liaison [29]. En réalité, le réseau est connexe, c'est-à-dire que, pour toute paire (x, y) de sommets distincts, il existe une chaîne $\mu[x, y]$ reliant ces deux points. Dans le cas d'un réseau de Pacotte sans circuits, le réseau est même en général *quasi-fortement connexe* car on peut vérifier, en particulier lorsqu'il s'agit d'un arbre ou d'une arborescence au sens de la théorie des graphes, que, pour tout couple de sommets (x, y), il existe un sommet $z(x, y)$ d'où partent à la fois un chemin allant en x et un chemin allant en y.

5.2 Stabilité

Rappelons maintenant la définition suivante :

Définition 5.1. Un graphe G est dit *biparti* si l'on peut partitionner l'ensemble de ses sommets en deux classes, de sorte que deux sommets adjacents appartiennent à des classes différentes.

Un réseau de Pacotte est évidemment un graphe biparti. Nous allons voir qu'il est, en outre, composé de deux ensembles stables.

Définition 5.2. Soit $G(X, U)$ un graphe simple (i.e. un 1-graphe antisymétrique). On dit qu'un ensemble $S \subset X$ est *stable* si deux sommets distincts de S ne sont jamais adjacents.

Un réseau de Pacotte, graphe bichromatique et biparti (c'est-à-dire ne possédant pas de cycle de longueur impaire) admet nécessairement une partition (A, B) de l'ensemble de ses sommets en deux ensembles stables A et B.

29. Pacotte remarque que des signes + ou - placés sur les pôles rétabliraient la connexité. S'il n'utilise pas cette solution, c'est uniquement parce que, graphiquement, ces signes auraient du mal à être bien centrés. Voir J. Pacotte, *op. cit.*, p. 8-9.

5.3 Noyau. Fonction de Grundy

Définition 5.3. Etant donné un 1-graphe $G = (X, \Gamma)$ on dit qu'un ensemble $A \subset X$ est *absorbant* si, pour tout sommet $x \notin A$, on a :

$$\Gamma(x) \cap A \neq 0.$$

Définition 5.4. Etant donné un 1-graphe $G = (X, \Gamma)$ on dit qu'un ensemble $S \subset X$ est un *noyau* si S est à la fois stable et absorbant. On a donc :

$$(1) \qquad x \in S \Rightarrow \Gamma(x) \cap S = \emptyset \qquad \text{(stable);}$$

$$(2) \qquad x \notin S \Rightarrow \Gamma(x) \cap S \neq \emptyset \qquad \text{(absorbant).}$$

Quand un réseau de Pacotte est un graphe sans circuits, on peut donc appliquer le théorème suivant.

Théorème 5.1 (Berge 1970)**.** *Si $G = (X, \Gamma)$ est un 1-graphe sans circuits, il admet un noyau ; en outre, ce noyau est unique.*

En ce cas, un réseau de Pacotte admet un noyau unique. On peut aussi montrer qu'il admet une fonction de Grundy. Rappelons la définition :

Définition 5.5. Soit $G = (X, \Gamma)$ un 1-graphe sans boucles. Par définition, une fonction $g(x)$ qui fait correspondre à tout entier $x \in X$ un entier ≥ 0, est une fonction de Grundy si $g(x)$ est le plus petit entier qui n'apparaît pas dans l'ensemble $\{g(y)/y \in \Gamma(x)\}$.

Il résulte alors du théorème précédent que :

Théorème 5.2 (Grundy 1939)**.** *Un graphe sans circuits admet une fonction de Grundy unique $g(x)$; en tout point x, cette fonction $g(x)$ est inférieure ou égale à la longueur du plus long chemin issu de x.*

Un réseau de Pacotte sans circuits admet donc également une fonction de Grundy et une seule.

Supposons maintenant un réseau de Pacotte admettant des circuits (comme dans le cas de la Fig. 9 (gauche)). Comme ces circuits sont de longueur paire (théorème 4.3), le théorème suivant s'applique.

Théorème 5.3 (Richardson, 1953)). *Si $G = (X, U)$) est un 1-graphe sans circuits de longueur impaire, il admet un noyau (pas nécessairement unique).*

Un réseau de Pacotte qui admet des circuits admet donc également au moins un noyau. En conséquence, comme un graphe sans circuits de longueur impaire admet une fonction de Grundy (Berge 1970), il admet aussi une fonction de Grundy.

5.4 Couplages. Chaîne alternée

On rappellera maintenant que les arcs ou arêtes du réseau de Pacotte sont, comme les pôles, de deux sortes : des rayons de gerbe (dipôles-unités) et des segments opposés (dipôles de liaison). On introduit ici la définition suivante :

Définition 5.6. Etant donné un graphe simple $G(X, U)$, on appelle *couplage* un ensemble U_0 d'arêtes tel que deux quelconques des arêtes de U_0 sont non-adjacentes.

Pour un couplage donné U_0, on dessine en général les arêtes de U_0 par des traits *épais*, les arêtes de $V_0 = U - U_0$ par des traits *fins*.

Définition 5.7. On dit qu'un sommet x est *saturé* par un couplage U_0 s'il existe une arête de U_0 attachée à x. Dans ce cas, on écrit $S \in U_0$. Si $S \notin U_0$, on dit que le sommet x est *insaturé* par U_0.

Un couplage qui sature tous les sommets est dit un *couplage parfait*. Un couplage parfait est évidemment maximum.

Définition 5.8. On appelle *chaîne alternée* une chaîne simple (c'est-à-dire n'utilisant pas deux fois la même arête) dont les arêtes sont alternativement dans U_0 et dans V_0 (c'est-à-dire alternativement *épaisses* et *fines*).

Théorème 5.4 (Berge, 1957). *Un couplage U_0 est maximum si et seulement si il n'existe pas de chaîne alternée reliant un point insaturé à un autre point insaturé.*

Le réseau arborescent de Pacotte présente des chaînes alternées de deux types de segments, les dipôles-unités et les dipôles de liaison, qu'on peut représenter respectivement par des traits épais et fins. Les premiers seront dans U_0, les seconds dans V_0. En principe, tous les points sont saturés, ces couplages sont donc tous les deux maximums et on a, dans chacun, $q = n/2$ arêtes.

6 Bilan provisoire

Au bilan, un réseau arborescent de Pacotte est donc un 1-graphe antisymétrique connexe (quasi fortement connexe s'il est sans circuits), bichromatique et biparti. Il peut admettre des cycles ou des circuits de longueur paire et n'est donc pas forcément un arbre ni une arborescence au sens de la théorie des graphes. Il n'a pas de sommet insaturé et on y décèle deux sous-ensembles stables et des chaînes alternées de deux types de segments qui conduisent à l'existence de deux couplages maximaux. Il est doté d'au moins un noyau et d'une fonction de Grundy. Les notions de «pôles» positifs et négatifs, posées par Pacotte, sont traduites par la bicoloration des sommets. Celles de «diffluence», «fluence», «confluence» et «domaine» deviennent des conditions posées sur les cocycles. Si le réseau de Pacotte considéré est sans circuits et muni d'une racine, une fonction «rang» peut être définie sur les pôles, qui permet d'identifier les «couches normales» du réseau à des niveaux du graphe $G(X, U)$ correspondant. En revanche, dans le cas quelconque, il n'est pas possible d'établir un ordre total sur les couches. Tout ce qu'on peut dire est que les graphes associés aux concordances et aux perspectivités des pôles sont des graphes transitifs (éventuellement des préordres si l'on admet la réflexivité de ces relations).

Partie 2 : La reconstruction des mathématiques

Le but de Pacotte dans *Le réseau arborescent* ne se restreint pas à la description du réseau. Le réseau est en fait un moyen, non une fin. En réalité, fidèle à sa position philosophique fondamentale – celle d'un «empirisme intégral» [30] – Pacotte donnait à son entreprise un but beaucoup plus ambitieux : il s'agissait de reconstruire l'ensemble des mathématiques à l'aide de cette seule notion de «réseau arborescent» et des concepts y afférents [31]. Dans un article qui contient, pour ainsi dire, la "philosophie" du travail que nous commentons, Pacotte s'en explique en ces termes :

«Dans un travail récent [il s'agit du *Réseau arborescent*], nous avons tracé les grandes lignes d'une théorie des ramifications et nous avons proposé de la considérer, non pas

30. Voir en particulier J. Pacotte, *La logique et l'empirisme intégral*, Paris, Hermann et Cie, 1935.

31. Il est à noter que ce projet s'inscrit dans une série de tentatives qui, à l'époque, allaient plus ou moins dans le même sens. On a déjà mentionné celle de Brouwer, mais l'on pourrait parler de toutes les autres tentatives de relier la logique ou la géométrie au monde sensible - par exemple, celle de Nicod (1920) ou de Tarski (1927) - projets qui se sont poursuivis jusqu'à N. Goodman et J. Vuillemin. Sur tout cela, voir nos commentaires dans D. Parrochia, Mathématiques et existence, ordres, fragments, empiétements, Champ Vallon, Seyssel, 1991, 116-123.

comme une application de la logique formelle et de la mathématique pure, mais bien comme le fondement de l'une et de l'autre. La logique formelle cesserait ainsi d'être une activité s'exerçant sur un objet indéterminé : un objet formel bien caractérisé la conditionnerait nécessairement.» [32]

Dans cet article, Pacotte explique avoir entrevu cette idée essentielle, puis l'avoir toujours plus nettement conçue, au cours de ses études antérieures concernant l'axiomatique, le rapport du formel au réel et la logique de l'action et de l'expression, thèmes respectivement rencontrés dans ses ouvrages successifs : *La connaissance*, chapitre premier, Alcan, Paris, 1931 ; *La logique et L'empirisme intégral*, Hermann, 1935 ; enfin, *Le physicalisme*, Hermann, 1936. Mais ce qui fonde philosophiquement un tel projet, c'est sans doute l'a priori bergsonien de l'auteur, selon lequel le temps (ou, disons, le devenir), c'est-à-dire une sorte de flux ordonné de faits ou d'impressions, est notre expérience fondamentale du monde, à partir de laquelle tout doit être reconstruit [33].

Aussi bien la majeure partie du texte *Le Réseau Arborescent* (les pages 17-54) est-elle consacrée à ce projet. Cette partie de l'œuvre de Pacotte, jamais commentée, est extrêmement abstraite et difficile à suivre. Comme le livre tout entier (si l'on en excepte les dessins de la page 9), elle souffre d'une totale absence de schémas ou d'illustrations qui en eussent facilité la lecture. Suivant l'ordre du texte, nous commençons par présenter la plus simple de ces reconstructions : «la conception rameuse de la somme».

7 La construction rameuse de la somme

Pour établir cette «conception rameuse de la somme» (chap. 3 du *Réseau Arborescent*), Pacotte considère la partie arborescente d'un domaine et, dans cette partie, les couches qui le constituent. Il introduit les définitions suivantes :

Définition 7.1 (perspectivité des couches et arborescences)**.** Deux couches d'une même arborescence sont nommées *couches perspectives*. Deux arborescences ayant des pôles perspectifs sont dites *arborescences perspectives*.

32. J. Pacotte, "L'objet formel", *Travaux du IXe Congrès International de Philosophie*, Volume 6, Logique et Mathématiques,1937, p. 46.

33. Voir aussi, à ce sujet, J. Pacotte, "La temporalité du rationnel", *Revue Philosophique de la France et de l'Étranger*, T. 129, No. 3/4n Mars-Avril 1940, p 164 et p. 178 notamment.

Définition 7.2 (projectivité)**.** Deux couches perspectives ou appartenant à deux arborescences perspectives sont dites *projectives.*

Théorème 7.1 (Pacotte)**.** *La perspectivité des couches n'est pas transitive.*

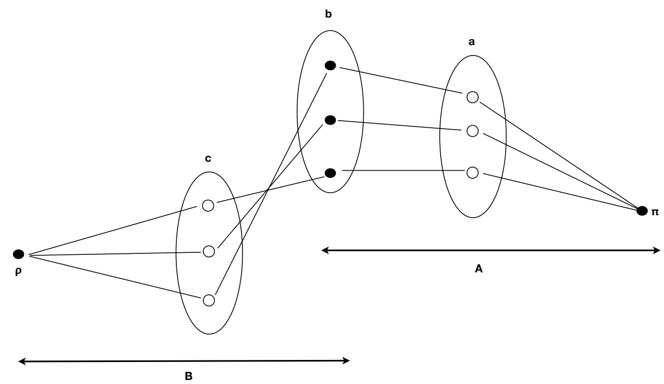


FIGURE 7 – Perspectivité des couches dans un réseau de Pacotte

Démonstration. Soit R un réseau de Pacotte, a, b, c des couches de R, A et B deux arborescences de R. Soit $\mathcal{P}$ une relation de perspectivité définie sur $\mathcal{C}$, ensemble des couches. Supposons $a, b \in A$ et $b, c \in B$ (voir Fig. 7). En ce cas, on aura :

$$a\mathcal{P}b \quad \text{et} \quad b\mathcal{P}c \quad \text{mais non pas} \quad a\mathcal{P}c,$$

puisque a et c ne sont pas des couches d'une même arborescence et appartiennent à des pôles différents. Donc, contrairement à la perspectivité des pôles, la perspectivité des couches n'est pas transitive. Néanmoins, les pôles étant perspectifs (puisque la couche b est commune aux deux arborescences), les deux couches seront *projectives.* □

Théorème 7.2 (Pacotte)**.** *La projectivité des couches est une relation transitive.*

Démonstration. Comme on l'a vu ci-dessus, la projectivité des couches est fondée sur la perspectivité des pôles. La perspectivité des pôles étant une relation transitive, la projectivité des couches est aussi une relation transitive. □

Considérons maintenant, dans une arborescence A, la région comprise entre une couche α et le pôle π du domaine D auquel appartient cette couche (*pôle dominant*). Soit, dans cette région, un pôle P quelconque, de même signe que l'arborescence.

Pacotte explique que son domaine d *traverse* la couche, constituant ainsi une totalité en soi.

Définition 7.3 (Section d'arborescence)**.** On appellera *section* de l'arborescence P cette totalité associée à la traversée de la couche α par un domaine d ou, ce qui revient au même, par la projection du pôle P sur α.

Pour comprendre cela, rappelons (Définition 4.1) que le domaine d'un pôle est cette région du réseau qui, à partir du pôle en question, est parcourue par un courant de même sens. La section est la sous-arborescence traversant la couche (voir Fig. 8) :

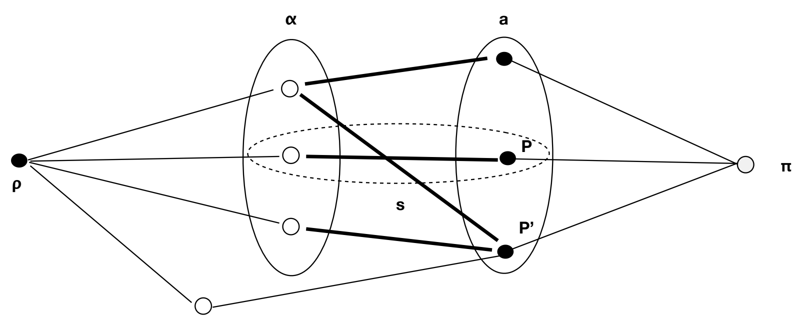


FIGURE 8 – Section d'arborescence dans un réseau de Pacotte

Pacotte continue ainsi : «Prenons maintenant dans la région envisagée une couche a. Chacun de ses pôles, tel que P, se projette sur α suivant une couche. Au contraire, un pôle de la couche $-\alpha$ a pour domaine une simple chaîne, qui traverse la couche a en un point unique, tel que $-P$. Cette situation s'explique en disant qu'il existe entre les couches successives a et α d'une arborescence, une *correspondance multi-univoque.*» [34]

Rappelons, en effet, qu'un dipôle de liaison étant le segment opposé au rayon d'une gerbe, le système des dipôles de liaison aboutit à une couche qu'on peut appeler *couche associée*. Autrement dit, si une couche est désignée par a, la couche associée est désignée par $-a$, quel que soit le signe de a. Par ailleurs, si P est un pôle, alors $-P$ est son pôle associé sur la couche associée, et cela, quel que soit le signe de P. On peut donc se représenter les choses comme sur la Fig. 9.

Pacotte va alors tirer la notion de «somme arithmétique» de cette conception.

«L'application de cette idée aux couches projectives est remarquable. De pareilles

34. J. Pacotte, *op.cit.*, p. 17-18.

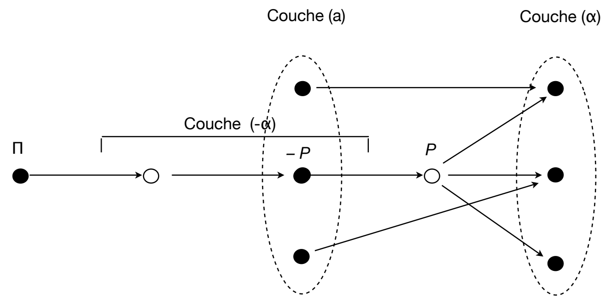


FIGURE 9 – Correspondance multi-univoque

couches appartiennent à des pôles perspectifs. Considérons alors une couche α commune à toutes les arborescences et située au-delà de toutes les couches envisagées (ou du moins non en-deçà). Comme chaque couche a est perspective à la couche α et la précède, il existe entre a et α une correspondance multi-univoque. Chaque couche a est alors appelée une *sommes de termes* (les termes sont les pôles constituants de la couche), la couche α un ensemble d'objets-unités. La projectivité des couches définit *l'égalité des sommes* : toutes les sommes a sont égales entre elles et égales à l'ensemble α» [35].

En principe, il n'y a pas d'ordre sur les termes d'une somme. Un ordre peut toutefois s'établir entre les pôles constituants d'une couche «lorsque l'arborescence ne présente que des diffluences à deux courants divergents, dont l'un ne difflue pas, tandis que l'autre difflue jusqu'à épuisement» [36]. En partant de la bifurcation finale, le domaine d'un pôle associé est une chaîne alternée, en fait une simple ligne qu'on nommera L, d'où partent des lignes allant aux différents pôles de la couche. L'ordre des branches correspond à l'ordre des pôles sur une couche. Quand on part de la bifurcation finale pour remonter au pôle dominant, on reconstitue l'arborescence à rebours de sa genèse : c'est très exactement, l'opération d'addition. «L'ordre d'addition est inverse de l'ordre naturel des termes, qui est défini par l'arborescence finale. Une somme est une couche : envisager deux ordres d'addition, c'est prendre en considération deux arborescences d'ordre, perspectives selon cette couche [37]. La *commutativité* de l'addition est simplement la possibilité de prendre une couche-somme comme couche

35. J. Pacotte, *op. cit.*, p. 18.
36. *Ibid.*
37. On pourrait mettre sans doute cette conception en relation avec la notation polonaise pré- ou post-fixée, qui se traduit, en effet, par une arborescence (voir, par exemple, M. Gondran, M. Minoux, *Graphes et Algorithmes*, Paris, Eyrolles, 1979, p. 114).

commune de deux arborescences d'ordre, établissant des ordres différents» [38].

En termes modernes, nous dirons donc que Pacotte ramène l'idée d'addition arithmétique à deux notions plus fondamentales qui sont :

1. Un graphe transitif de projectivité dont les éléments sont les couches.
2. Une application multi-univoque entre paires de couches.

Nous avons déjà défini la notion de graphe transitif tout comme celle d'application multi-univoque ou, comme on dit aujourd'hui, «multivoque» ou multivaluée, qui n'est pas très différente de la notion générale de «relation». Le graphe transitif de projectivité associé à la somme arithmétique telle que la reconstruit Pacotte est donc en fait, en termes modernes, un sous-graphe contenu dans le graphe associé au produit de composition d'applications multivoques.

Il resterait, cependant, à expliciter de manière plus mathématique les liens entre la projectivité et la somme. Constituer une véritable algèbre projective supposerait sans doute qu'on se place dans le cadre d'une géométrie projective finie exprimée en coordonnées homogènes, de telle sorte que l'opération d'addition, associant des éléments du fini à un point de projection situé à distance finie, permette d'établir une véritable isomorphie entre "projection" et "somme", laquelle pourrait être lue alors de façon réversible. Cette isomorphie, facile à retrouver, par exemple, dans le cas d'une algèbre de Boole et du fameux plan projectif à 7 points [39], serait sans doute plus difficile à établir dans le cas quelconque. Mais elle existe certainement. Il reste que la démarche de Pacotte, sur ce point, reste un peu métaphorique : la correspondance n'est pas vraiment mathématiquement établie entre l'idée de somme et celle de "projection".

Pour en finir avec la représentation de la somme dans le réseau polarisé de Pacotte, on notera la différence de traitement entre la propriété de *commutativité* (qui n'ap-

38. J. Pacotte, *op. cit.*., p. 19.

39. Sur les géométries projectives finies, on peut consulter l'ouvrage classique de P. Dembowski, *Finite Geometries*, Springer, New York, 1968. D. Dubarle l'a mis en pratique dans son interprétation de la logique de l'infini de Hegel, transformant son algèbre ultrabooléenne définie sur un ensemble booléen produit $\{0,1\}^2$ identifié à 4 constantes de structure (les 3 constantes hégéliennes (U, pour universel, P pour particulier, S pour singulier, augmenté du terme nul Λ) en une algèbre projective. Voir D. Dubarle, A. Doz, *Logique et dialectique*, Larousse, Paris, 1970. Voir également J. W. P. Hirschfeld, *Projective geometries over Finite Fields*, 2[e] édition, The Clarendon Press, Oxford, New York, 1998. Et, pour un point de vue plus historique, voir J.W.P. Hirschfeld, J.A. Thas, «Open problems in finite projective spaces», *Finite Fields and Their Applications*, 32, 2015, pp. 34-81.

partient pas aux transformations qu'on peut faire subir à une somme sans en changer sa valeur) et celle d'*associativité*, qui concerne la somme elle-même et est expliquée par Pacotte en termes de substitution et d'association. Les idées d'appartenance et de «contenance» (réciproque de l'inclusion) sont, de même, expliquées par Pacotte en termes d'appartenance de pôles à des couches ou d'appartenance de couches à d'autres couches, la transitivité de ces opérations fondant aussi, par là-même, les lois de la déduction logique (syllogismes et chaînes de syllogismes).

8 Conception rameuse du produit ordonné

Pour la compréhension, cette section doit s'accompagner des définitions suivantes :

Définition 8.1 (Système parallèle)**.** «Appelons *système parallèle*, écrit Pacotte, le réseau engendré par des chaînes alternées ne présentant pas de confluences mutuelles et réunies par une gerbe faisant pont en un endroit quelconque» [40].

Un système de pôles de mêmes signes (non nécessairement celui de la gerbe), où chaque chaîne est représentée, est une *couche du système parallèle*. Cette couche est, en même temps, une couche du domaine du centre de la gerbe.

Définition 8.2 (Égalité des couches)**.** Deux couches de même signe du système parallèle seront dites *perspectivement égales* ou, plus simplement, *égales*.

Définition 8.3 (Multiplication des couches)**.** «Considérons des systèmes parallèles perspectifs selon une couche positive a. Prenons un de ces systèmes et choisissons-y une couche positive a' : $a' = a$. Supposons positive la gerbe du système parallèle (centre G positif). De plus, supposons-là jetée entre a et a' de manière que le courant qui part de G aille vers a', non vers a. Faisons les mêmes suppositions et constructions pour les autres systèmes parallèles : nous définissons ainsi a'', a''',... Assemblons alors les centres G des gerbes des systèmes parallèles sous un pôle B, également positif (par dipôles de liaison et gerbe). Appelons b la couche des G, et r la couche suivante du domaine de B, celle où les pôles constituants de b se projettent suivant a', a''.... Alors, b comme couche-somme, représente la somme de b couches égales à a, et la couche r comme collection d'unités, la valeur de la somme. Ainsi, le réseau est celui de la multiplication de a par b» [41].

40. J. Pacotte, *op. cit.*, p. 22.
41. *Ibid.*, p. 23.

Nous tentons de représenter cette situation, difficile à imaginer, en deux schémas successifs. Sur le schéma de la Fig. 10, C_1, C_2 et C_3 forment des chaînes alternées composant le "système parallèle" (S). Elles sont réunies par un "pont" formé par la gerbe a (qui est aussi une "couche" du système, c'est-à-dire, comme expliqué plus haut, un système de pôles de même signe où chaque chaîne est représentée). Les couches a, a' et la couche intermédiaire i (gerbe positive de centre G) sont "perspectivement égales", et donc, ce système – "parallèle", puisque les couches sont perspectives – peut être conçu comme représenté par une seule couche (ce qui peut justifier l'expression un peu ambiguë de Pacotte : "autant de systèmes que de couches").

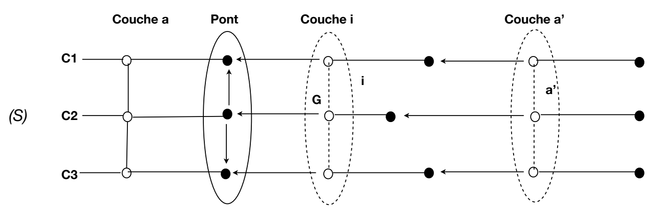


FIGURE 10 – La notion de *système parallèle*

Il faut maintenant imaginer (voir Fig. 11) d'autres systèmes $(S'), (S''), ...$ tels que (S), sur lesquels sont définis des couches $a'', a''', ...$ avec, chaque fois, des gerbes de centre $G_1, G_2, ...$ Pacotte suppose qu'il est toujours possible d'assembler ces centres sous un pôle B, également positif. Les G_i forment alors eux-mêmes une couche $b = a^{(k)}$. Soit alors r la couche $a^{(k+1)}$ du domaine de B. C'est la couche où les pôles constituants de b se projettent selon $a', a'', .., $ etc.. On arrive ainsi à la définition du produit :

Définition 8.4. La couche-somme b représente la somme de b couches égales à a, et la couche $r = a^{(k+1)}$ – ou collections d'unités – est la valeur de cette somme. Ainsi, ce réseau est celui de la multiplication de a par b.

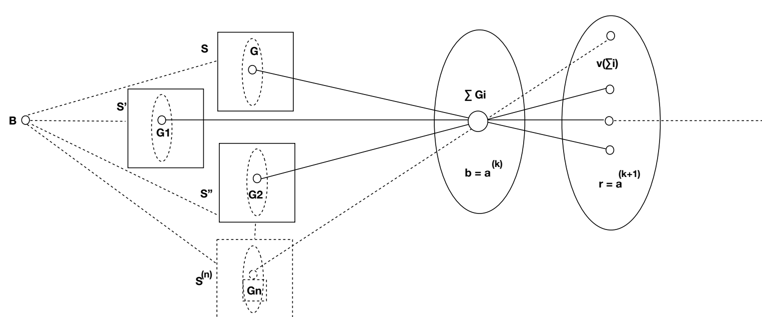


FIGURE 11 – La notion de *produit ordonné*

Pour une théorie privilégiant la polarité, c'est-à-dire l'asymétrie ou antisymétrie et les relations d'ordre, ce sont les questions d'équivalence, de symétrie et de réciprocité qui sont difficiles à exprimer. Pacotte fait des prodiges, dans la suite, pour tenter d'expliquer la commutativité du produit de deux facteurs en introduisant, d'une manière qui n'est pas vraiment limpide – c'est le moins qu'on puisse dire –, la notion de *couche réciproque*.

Mais l'introduction d'un troisième facteur fait disparaître la symétrie de sorte que, dans son fond, le réseau du produit ordonné de n facteurs $a, b, c, ...$ ne manifeste, dans le cas général, ni associativité, ni commutativité. Les déclarations de Pacotte sont ici assez inhabituelles. Il faut comprendre d'une part que les facteurs sont assemblés dans un certain ordre, $ab, abc, abcd...$ (une indétermination subsistant dans l'ordre des pôles de la couche finale), et que, d'autre part, l'ordre d'addition et l'ordre d'arborescence sont inverses. Dans ce contexte, on a :

$$(ba)c = bac,$$

car, comme $ba = ab$ (commutativité du produit de 2 facteurs), l'ordre d'assemblage est respecté. En revanche :

$$c(ab) \neq cab,$$

car l'ordre, ici, même en supposant la commutativité, n'est pas respecté. Par ailleurs, la question de la commutativité, dans le cas d'un produit de n facteurs, ne sera résolue que plus tard, avec l'examen de la «genèse rameuse du multidimensionnel».

Parmi les propriétés de la multiplication, il y a encore la question de la distributivité par rapport à l'addition. Comment l'exprimer en géométrie rameuse ? Pacotte se donne ici une arborescence dont la couche finale est a, ainsi qu'une couche quelconque α, de sorte que la couche-somme α soit égale à a. Même construction avec une deuxième couche finale b et une couche quelconque β. α_μ et β_ν étant alors les pôles constituants de α et β, il nomme $\alpha(\mu)$ et $\beta(\nu)$ leurs projections respectives sur α et β. Pacotte forme alors successivement :

— Des systèmes parallèles issus de $a(\mu)$ et de $b(\nu)$;
— Des couches égales à ces couches données, en nombre suffisant ;
— Des produits $a(\mu)b(\nu)$ sur ces couches distinctes, pour toutes les valeurs de μ et de ν.

Pacotte groupe chaque fois les $a(\mu)b(\nu)$ au moyen d'une gerbe de sommet $-A(\mu)B(\nu)$. La couche des sommets devient alors, comme somme, égale à la couche des $-a(\mu)b(\nu)$. Les couches $A(\mu)B(\mu)$ et $a(\mu)b(\nu)$ étant des couches de réciprocité, respectivement pour α et β et pour a et b, on peut donc dire simplement qu'on passe de la couche $\alpha\beta$ à la couche ab par substitution. On va ainsi de chaque pôle $\alpha(\mu)\beta(\nu)$ ou $A(\mu)B(\nu)$ au produit des couches $a(\mu)$ et $b(\nu)$. Ce qui vient d'être exposé constitue le réseau de la distributivité du produit dans le cas de 2 facteurs et d'un partage de chaque facteur. Mais – si l'on n'a pas peur des complications – on peut évidemment généraliser la construction.

9 La genèse rameuse de la combinatoire, de l'algèbre multilinéaire et de la logique

La suite de la construction de Pacotte concerne la combinatoire, l'ordre multidimensionnel et la logique.

9.1 La combinatoire

Comment d'abord engendrer l'*analyse combinatoire* à partir d'un réseau arborescent ? Il convient de partir du réseau ordonné de n facteurs, précédemment décrit. Ce réseau présente une *arborescence principale* dont la couche r_p, de rang p, figure les produits ordonnés de p facteurs. Pacotte suppose que cette arborescence a un sommet A, identifié au sommet de la gerbe de couche a. Comme on a une racine et une suite de couches normales, il existe un ordre total sur les couches. "La couche de rang 1 est le facteur a écrit Pacotte ; celle de rang 2, le produit ab ; celle de rang 3, le produit abc ; et ainsi de suite" [42]. Les couches précédentes ont évidemment leurs opposées $(-a, -b, ..., -r_p)$ et les produits la totalité des arrangements $a_k, b_j, c_i...$, où l'on prend les p premières lettres. L'ordre est constitué par l'arborescence d'ordre constituant le domaine de chaque pôle, de $-r_p$ à $-r_2$ (diffluence). Même pour des valeurs négatives des couches, on désignera conventionnellement les arrangements par $a_i, b_j...$, etc. Le réseau de la n-ème puissance d'une couche a jouera le rôle de réseau des arrangements $a_i, a_j, a_k...$, etc. Les arrangements étant relatifs à m types d'objets, et chacun d'eux étant un arrangement de p objets, on désignera ces arrangements par $A'(m, p)$.

Soit maintenant un pôle N_p associé à M_p par un dipôle de liaison. Son domaine est un arborescence contenue dans l'arborescence principale du réseau. Soit une

42. J. Pacotte, *op.cit.*, p. 27.

couche $r_{p'}$ de rang $p' > p$ et un système de pôles $N_{p'}$ associés à $M_{p'}$. La totalité des $A'(m,p,p')$ constituera les arrangements de m objets pris p' à p', en commençant par $A'(m,p)$. «Nous dirons que M_p représente la *compréhension* de $A'(m,p)$ et N_p son *extension*, idées auxquelles correspondront, dans le réseau des combinaisons (et notamment dans le réseau des prédicats), la compréhension et l'extension de la logique classique. Avec quelques complications supplémentaires, Pacotte arrive alors à représenter géométriquement le produit logique (formé des $A'(m,p)$ "diagonaux", i.e dont le domaine entier conflue en un seul pôle de la couche a), ainsi que les combinaisons du type $C(m,p)$. Le réseau des $C(m,p)$ permet alors d'engendrer le *multidimensionnel*[43].

Nous ne pouvons suivre la reconstruction de Pacotte dans le détail. Il suffit d'ailleurs peut-être d'en comprendre le sens, qui se trouve très bien résumé par l'auteur à ce point de sa construction : pour lui, il ne fait pas de doute que la démarche usuelle de fondation des mathématiques consiste – vu le rôle de la multiplication commutative dans cette discipline (qui permet d'engendrer facilement un réseau multidimensionnel de points alignés dans n directions) – à prendre ce réseau même comme fondement, et à se donner la logique formelle de façon totalement indépendante.

9.2 Le produit logique et L'ordre multidimensionnel

«En opposition à cette attitude, notre doctrine, écrit Pacotte, peut être caractérisée comme suit : partir de l'espace rameux, démontrer la genèse rameuse du multidimensionnel et tirer de l'espace rameux, particulièrement du réseau polarisé des $C(m,p)$ et du réseau polarisé du multidimensionnel, la logique des prédicats présents ou absents, puis la logique des propositions.» [44].

Dans le *produit logique*, par exemple, les n ensembles dont il s'agit de définir le produit seront "les projections rameuses de n pôles sur une couche fondamentale telle que a pour laquelle on a construit le réseau des m^n arrangements $A'(m,n)$ et dégagé le système des m arrangements diagonaux $D(m,n)$, un pour chaque pôle constituant de a» [45]. Pacotte s'efforce alors d'expliquer mathématiquement les propriétés du produit logique, notamment sa distributivité, et comment l'extension d'un produit logique peut être égale au produit des extensions particulières de ses composantes.

43. J. Pacotte, *op. cit.*, p. 32-33.
44. *Ibid.*, p. 34.
45. *Ibid.*, p. 36.

9.3 Le réseau des prédicats présents et absents

Dans ce contexte, ce que les logiciens appellent *prédicat* est un pôle constituant a_i d'une couche a du réseau polarisé, sur laquelle est construit le réseau des $C(m,p)$, autrement dit le réseau des combinaisons. L'extension au rang p' d'un objet assemblant p prédicats est donc l'extension $\Xi_{p'}C(m,p)$, autrement dit, la *classe* des objets possédant p' prédicats et présentant les p prédicat de l'objet considéré. Les prédicats sont alors des a_i dont on affirme la présence ou l'absence dans un $C(m,p)$, cette affirmation étant nécessairement pensée dans un réseau multidimensionnel dont les dimensions ne présentent, chacune, que deux éléments auxquels correspondent la présence et l'absence [46]. On a donc des représentations du genre ;

$$[(a_1)_i(a_2)_j(a_3)_k...]_p,$$

avec des indices i, j, k qui ne prennent que les valeurs 0 et 1. On simplifie alors la notation en posant :

$$a_i \text{ pour } (a_i)_1; \quad \dot{a}_i \text{ pour } (a_i)_0.$$

Il en résulte que l'ensemble des combinaisons possibles, au lieu d'être une puissance de 2, comme dans la logique ordinaire, est ici une puissance de 3. Dans cette géométrisation de la logique, il y a $C_{m,p}$ plans à p dimensions, 2^p complexions de caractéristique p pour p dimensions déterminées, et 3^m complexions totales, d'où la formule :

$$\sum_{p=0}^{m} 2^p\ C_{m,p} = 3^m.$$

Pacotte parvient alors à donner sens à l'idée de *proposition* logique. Si les prédicats sont des pôles, les propositions sont des figures dans l'espace, correspondant à des expressions obtenues "en composant des extensions par les opérations de complémentarité, de produit et de somme logiques" [47]. Même si le formalisme paraît lourd, leur sens usuel se reconstitue aisément. Selon qu'on prend ou non certaines de ces complexions, on obtient telle ou telle expression. Ainsi, les figures de l'espace des prédicats sont représentées par des expressions du type :

46. J. Pacotte, *op. cit.*, p. 41.
47. *Ibid.*, p. 45.

$$\overline{\Xi_1 \Xi_2} \quad , \quad \overline{\Xi_1 \overline{\Xi_2}}, \ldots$$

où l'on a, par exemple :

$$\Xi_1 = \Xi_m(\dot{a}_1, a_2),\ \Xi_2 = \Xi_m(a_2, \dot{a}_3),$$

et ainsi de suite. On aura des expressions telles que :

$$\Xi_1 + \overline{\Xi_1} \qquad \text{(somme de deux propositions complémentaires).}$$

$$\overline{\Xi}(a_1) = \Xi(\dot{a}_1),$$

(la négation de Ξ pour a_1 vrai est égale à l'affirmation de Ξ pour a_1 faux).

L'implication est plus subtile à représenter. Si on a :

$$\Lambda_1 = \overline{\Xi_1 \Xi_2}, \quad \Lambda_2 = \overline{\Xi_3 \overline{\Xi_1}},$$

avec :

$$\Xi_1 = \Xi(a_1),\ \Xi_2 = \Xi(a_2),\ \Xi_3 = \Xi(a_3),$$

prendre Λ_1 équivaut à exclure $\Xi_1 \Xi_2$, donc $\Xi_1(a_1, a_2)$. De même, prendre Λ_2 c'est exclure :

$$\Xi_3 \overline{\Xi_1} = \Xi(a_3)\overline{\Xi(a_1)} = \Xi(a_3, \dot{a}_1).$$

Il résulte de cela qu'on exclut les complexions qui présentent a_3 sans présenter a_1. En d'autres termes, la présence de a_3 entraîne ou «implique» celle de a_1.

Soit maintenant le nouvel exemple suivant :

$$\Xi(a_1 \dot{a}_2, \dot{a}_3) + \Xi(\dot{a}_1 a_2, \dot{a}_3) + \Xi(a_1 \dot{a}_2 a_3),$$

où les indices 1, 2, 3 sont quelques valeurs de l'indice i de a. Les complexions n'ayant pas d'éléments communs, le produit logique de leurs extensions est nul. Les Ξ n'ont pas de complexion commune et on ne retient que les complexions qui présentent un des trois prédicats et un seul. On exprime cette situation en langage ordinaire en disant qu'on a ou bien a_1 ou bien a_2 ou bien a_3. La figure exprime donc une disjonction des prédicats a_1, a_2 et a_3 [48].

48. Voir J. Pacotte, *op. cit.*, p. 45-46. Cette situation fait un peu penser à l'idée de forme normale disjonctive dans la logique formelle habituelle.

En se servant de figures exprimant des incompatibilités, Pacotte en vient alors à pouvoir représenter géométriquement la notion de *déduction*.

9.4 Le réseau de la logique des propositions

La logique des propositions, qui est la plus simple en logique formelle habituelle est, du point de vue du réseau polarisé, la plus difficile à reconstituer. En effet, autant les propositions prédicatives complètes correspondaient à des figures *déterminées*, autant les propositions abstraites du calcul des propositions, du type p, q, r, ici nommées plutôt $\Phi_1, \Phi_2, ...$ correspondent à des figures *indéterminées*. Chacune de ces figures est l'une des $2^{(2^m)}$ figures possibles, et on est donc amené à envisager les figures variables $\Phi_1, \Phi_2, ...$ comme des variables prenant, chacune, $2^{(2^m)}$ valeurs. «Une proposition admet donc une latitude, non plus dans l'espace à 2^m points (complexions de prédicats présents ou absents), mais dans un espace E discret dont le nombre de points est exprimé par :

$$|E| = (2^{(2^m)})^N.$$

Pour former le réseau de cet espace, le point de départ est nécessairement le réseau des prédicats présents et absents. On y remplace alors les figures singulières, individualisées et concrètes $\Phi_1, \Phi_2, ...$ par des figures ou complexions variables. Sachant qu'il y aura autant de couches dans le réseau que de variables Φ, soit N, le réseau du produit commutatif des N couches fait apparaître des expressions dont la forme maximale sera :

$$\Phi_1(\sigma_1), \Phi_2(\sigma_2), ..., \Phi_N(\sigma_N),$$

où l'indice σ varie, pour chaque Φ séparément, de 0 à 2^{2^m}.

Si l'on a alors :

$$\Phi_1(\sigma_1').\Phi_2(\sigma_2') = 0,$$

on aura aussi $\Phi_1\ \Phi_2 = 0$ pour un système :

$$\Phi_1(\sigma_1'), \Phi_2(\sigma_2'), ..., \Phi_N(\sigma_N'),$$

et pour tout système conservant ces valeurs σ_1' et σ_2', autrement dit, pour tout système

$$\Xi_N\ [\Phi_1(\sigma_1'), \Phi_2(\sigma_2')],$$

où Ξ désigne un extension dans l'espace des variables Φ. Réciproquement, pour tout système de valeurs des deux variables Φ_1 et Φ_2, on a un Ξ_N particulier. Tous ces Ξ_N étant mutuellement extérieurs les uns aux autres (une coordonnée au moins varie de l'un à l'autre), leur somme est la figure :

$$R(\Phi_1\ \Phi_2) = 0.$$

Autrement dit, en chaque point de R, $\Phi_1\ \Phi_2$ est nul, tandis que son complément $\overline{R}(\Phi_1\ \Phi_2)$ est non nul.

Les propositions du type Φ_α est dans Φ_β seront mises sous la forme $\Phi_1\ \Phi_2 = 0$ (qu'on appellera des propositions du type p) et l'espace entier E_Φ des N variables Φ admettra des expressions telles que :

$$R(p_1) + \overline{R}(p_1) = R(p_2) + \overline{R}(p_2) = ... \tag{1}$$

$$= [R(p_1) + \overline{R}(p_1)][R(p_2) + \overline{R}(p_2)] = ... \tag{2}$$

$$= \sum R(p_1)\ \overline{R}(p_1)\ \overline{R}(p_3)\ R(p_4) = ... \tag{3}$$

où p_1, p_2... sont des propositions du type p ci-dessus.

Ces expressions rappellent évidemment les expressions de l'espace total des complexions de prédicats.

Donnons maintenant, pour finir, deux exemples de figures représentant des propositions connues :

La figure :

$$R_1\overline{R}_2\overline{R}_3 + \overline{R}_1R_2R_3 + \overline{R}_1\overline{R}_2R_3,$$

où R désigne $R(p_i)$, correspond à une proposition qui, exprimée en langage ordinaire, est du type : "ou bien p_1 est vraie, ou bien p_2 est vraie, ou bien p_3 est vraie".

Autre exemple : l'implication du type "p_1 implique p_2" correspond à la situation géométrique du réseau polarisé : R_1 est une partie de R_2, relation qui ne s'exprime pas par une région de R mais par un rapport entre deux figures. Une disjonction et une implication sont donc, du point de vue du réseau polarisé, des propositions très différentes[49]. Mais le syllogisme fonctionne, puisque, du fait de la transitivité du rapport de contenance (ou d'inclusion), si R_1 est une partie de R_2 et R_2 est une partie de R_3, alors R_1 est une partie de R_3, ce qui signifie que p_1 implique p_3.

Bien entendu, la négation d'une proposition p, autrement dit $\Phi_1\Phi_2 \neq 0$ (Φ_1 et Φ_2 ont une partie commune) et la disjonction de plusieurs propositions p_1, p_2... s'expriment également par une figure R. Le réseau permet donc de traiter toutes les propositions du calcul classique[50].

10 Conclusion générale

Un reviewer du livre de Pacotte sur *La physique théorique nouvelle* (1921) notait la solidité de celui-ci. Il déclarait, en outre, ne pas voir où le livre manquait d'équipement mathématique, alors même que, dans la plupart des cas, l'auteur utilisait les équations mathématiques «écrites avec des mots». Pour les intéressés, observait-il toutefois,«les équations écrites en symboles» auraient facilité la lecture[51]. On pourrait faire les même remarques à propos du *Réseau Arborescent*. À ceci près qu'écrire avec des mots a dû être un parti-pris théorique de Julien Pacotte. Théorique et non pas seulement pédagogique : pour lui, les mathématiques devaient être fondées sur autre chose qu'elles-mêmes. Or, quoi de plus près de l'empirie que la langue naturelle ? En ce sens, notre essai consistant à retraduire la langue de Pacotte en langage mathématique pourrait passer pour un contresens ou, en tout cas une infidélité, vis à vis du projet de l'auteur. En même temps, il fallait bien expliquer. Et quand la matière se fait complexe, le choix d'écrire en langue naturelle devient difficile à tenir. Dans *Le réseau arborescent*, on voit d'ailleurs réapparaître les symboles vers la fin du livre. On regrette alors qu'ils n'aient pas fait retour plus tôt : cela aurait clarifié le discours et supprimé quelques ambiguités.

Malgré nos efforts pour comprendre, reformuler mathématiquement, illustrer de schémas le texte de Pacotte, nous ne cachons pas que celui-ci demeure parfois un peu énigmatique, à l'image de son auteur, du reste qui, à part ses livres, n'aura guère laissé de trace derrière lui. Raison de plus, évidemment, pour tenter de le tirer de

49. Au lieu qu'on a, comme on sait, en logique ordinaire, une définition de l'implication en terme de disjonction, puisque $p \supset q = \neg p \vee q$.

50. Pour des exemples, voir J. Pacotte, *op.cit.*, p. 53-54.

51. Reviewed Work(s) : J. R.,*La Physique Théorique Nouvelle* by Julien Pacotte, *Science Progress in the Twentieth Century (1919-1933)*, Vol. 17, No. 67 Janvier 1923), p. 485.

l'oubli. C'était une belle tentative, en effet, que partir du devenir bergsonien, formaliser ce concept par la notion de «réseau arborescent», puis, les propriétés de réseau étant décrites, essayer de reconstruire à partir de là par voie rameuse l'ensemble de la pensée mathématique – c'est-à-dire, finalement, la forme de tout ce qui est. Pierre de la Ramée lui-même n'était pas allé aussi loin [52]. Et, jusqu'au logicien Léo Apostel [53], puis aux travaux que nous avons pu mener nous-mêmes récemment sur la théorie des classifications, personne n'avait lancé projet aussi audacieux.

Si l'essai de Pacotte n'est pas pleinement convaincant, ce n'est pas seulement parce que les mathématiques se sont tellement amplifiées depuis son époque que la tâche consistant à ramener des structures sophistiquées à la forme du réseau arborescent pourrait s'avérer aujourd'hui difficile, voire impossible à réaliser. C'est aussi parce que les moyens dont disposait l'auteur pour cette reconstruction étaient sans doute un peu trop limités : Pacotte écrit en un temps où la théorie des graphes est encore sur le point de naître. C'est en 1936, année où paraît *Le Réseau Arborescent*, que le mathématicien hongrois Dénes König publie sa *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen* [54] et ce n'est que dans les années d'après guerre que la théorie des graphes

52. Notons d'ailleurs que l'arbre, limité à un principe de spécification, est déjà un héritage chez Ramus. D'abord, c'est à partir du XI^e siècle que le motif de l'arbre se déploie dans la culture occidentale, notamment dans l'art religieux, à travers l'arbre de Jessé, qui représente la généalogie du Christ. Il se propage ensuite rapidement et apparaît dans des enluminures, des fresques, des vitraux, des sculptures, et se met à symboliser avec les arbres abstraits issus de la réflexion logique. Comme l'écrit Jean Lecointe, «la fin du Moyen-Âge et le début de la Renaissance ont fait un triomphe à l'arbre, de plus en plus proliférant. Le plus ancien est sans doute l'arbre de Porphyre, du IV^e siècle, qui représente sous cette forme les subdivisions des genres de l'être, depuis l'être indéterminé jusqu'à l'être rationnel. Car l'arbre, aussi bien l'arbre logique que celui de Jessé, c'est l'ordre de la *spécification*; le rapport est le même, les logiciens anciens ne cessent de le souligner, de la race à l'individu, et du genre à l'espèce, pour reprendre la terminologie aristotélicienne». Cf. J. Lecointe, *L'idéal et la différence : la perception de la personnalité littéraire à la Renaissance*, Droz, Genève,1993, pp.27-28. L'arbre de Porphyre a donc une postérité foisonnante. On le retrouve chez Rodolphe Agricola, à la fin du XV^e, pour unifier la logique et la rhétorique, et Erasme et Ramus ne feront, au fond, qu'en vulgariser l'usage. Pendant ce temps, sur les voûtes des monuments, l'art flamboyant déploie le même mouvement de ramification, à partir des éléments de division de l'espace, encore élémentaire, du premier gothique avec des croisées d'ogive démultipliées à l'infini par les nervures ou les contre-courbes et les fleurons. «Le goût effréné que Pierre de la Ramée, dit Ramus, hérite de ses prédécesseurs pour les ramifications arborescentes, tellement en harmonie avec son nom, doit sans doute être mis en rapport avec sa reconnaissance de l'individu comme *species* à part entière», conclut J. Lecointe (*op. cit.*, p. 28). Voir aussi : R. Dumas, *Traité de l'arbre - essai d'une philosophie occidentale*, éd. Actes Sud, 2002.

53. L. Apostel, «Le problème formel des classifications empiriques», in *La Classification dans les Sciences*, 157-230, Duculot, Gembloux, 1963.

54. D. König, *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen : kombinatorische Topologie der*

(avec Tutte, Berge et d'autres) ainsi que la théorie des réseaux de transport (avec Ford et Fulkerson) va se développer vraiment. L'usage de la géométrie projective, quant à elle, reste également, dans tout le texte de Pacotte, un peu métaphorique et imprécis. On peut se demander pourquoi. Que la géométrie projective pût fonder les notions de somme et de produit algébriques était pourtant une idée déjà présente chez von Staudt dès 1856-57, notamment dans le deuxième volume des *Beitrage*[55]. Par ailleurs, le mathématicien italien Gino Fano[56] avait proposé un traitement axiomatique de la géométrie projective finie en 1892. On peut également mentionner, sur le même sujet, l'article remarquable d'Oswald Veblen datant de 1906[57]. Mais il est vrai que l'utilisation de ces outils formels contrevenait au projet de Pacotte, une des dernières tentatives pour suspendre la mathématique à ce qui n'était pas elle. Une version affaiblie (et donc plus raisonnable) de ce projet – fonder la mathématique sur des démarches constructives – qui se développera, avec le succès qu'on sait, via Brouwer et Heyting, allait sans doute contribuer à enterrer définitivement sa tentative. Il était tout de même intéressant de montrer ce qu'était, dans son fond, cet essai, dût-il passer pour le témoin d'une époque révolue.

11 Bibliographie

Apostel, L.., «Le problème formel des classifications empiriques», in *La Classification dans les Sciences*, 157-230, Duculot, Gembloux, 1963.

Bachelard, G., *La Formation de l'esprit scientifique* (1934), Paris, Vrin, 1967, 5e ed.

Biggs, N., Keith Lloyd, E., Wilson, R. J., *Graph Theory*, 1736-1936, Clarendon Press, Oxford, 1986.

Berge, C., *Graphes et Hypergraphes*, Paris, Dunod, 1970.

Bouvier, R., «Julien Pacotte, Le Réseau Arborescent, schème primordial de la pensée», *Revue de Synthèse*, 57, 14, 1937, p. 124.

Streckenkomplexe, Akademische Verlagsgesellschaft m. b. h., Leipzig, 1936.

55. K. G. C von Staudt, *Beitrage zur Geometrie der Lage* (Volume 2), Fr. Korn, Nuremberg, 1856.

56. G. Fano, "Sui postulati fondamentali della geometria proiettiva", *Giornale di Matematiche*, 30 : 106-132, 1892.

57. O. Veblen, «Finite Projective Geometries», *Transactions of the American Mathematical Society* 7 : 241-59, 1906.

Bradley, R., *Understanding Computer Science (for Advanced Level) : The Study Guide*, Nelson Thornes, Cheltenham, 2016.

Canguilhem, G., *La connaissance de la vie* (1952), Paris, Vrin, 2006.

Corson, F., «Fluctuations and Redundancy in Optimal Transport Networks», *Phys. Rev. Lett.* 104, 048703, 29 January 2010.

Deleuze, G., Guattari, F., *Capitalisme et Schizophrénie, Mille plateaux*, Paris, Minuit, 1980.

Dembowski, P., *Finite Geometries*, Springer, New York, 1968.

Dubarle D., Doz, A., *Logique et dialectique*, Larousse, Paris, 1970.

Dumas, R., *Traité de l'arbre - essai d'une philosophie occidentale*, éd. Actes Sud, 2002.

Fano, G., "Sui postulati fondamentali della geometria proiettiva", *Giornale di Matematiche*, 30 : 106-132, 1892.

Gondran, M., Minoux, M., *Graphes et Algorithmes*, Paris, Eyrolles, 1979, rééd. 1995.

Hirschfeld, J. W. P., *Projective geometries over Finite Fields*, 2e édition, The Clarendon Press, Oxford, New York, 1998.

Hirschfeld, J. W. P., Thas, J. A., «Open problems in finite projective spaces», *Finite Fields and Their Applications*, 32, 34-81, 2015.

Katifory, E., Szöllösi, G. J., et Magnasco, M. O., «Damage and Fluctuations Induce Loops in Optimal Transport», *Phys. Rev. Lett.* 104, 048704, 29 January 2010.

König, D., *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen : kombinatorische Topologie der Streckenkomplexe*, Akademische Verlagsgesellschaft m. b. h., Leipzig, 1936.

Kromer, J., Khaledi-Nasab, A, Schimansky-Geier, L., Neiman, A. B., "Emergent stochastic oscillations and signal detection in tree networks of excitable elements", *Scientific Reports* 7, arXiv :1701.01693, 2017.

Lecointe, J., *L'idéal et la différence : la perception de la personnalité littéraire à la Renaissance*, Droz, Genève,1993.

Pacotte, J., *Les méthodes nouvelles en analyse quantique (Mécanique quantique. Mécanique ondulatoire)*, Paris, A. Blanchard, 1920.

Pacotte, J., *La physique théorique nouvelle*, préface de M. Émile Borel, Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1921.

Pacotte, J., *La pensée mathématique contemporaine*, Paris, Librairie Félix Alcan, 1925.

Pacotte, J., *La pensée technique*, Paris, F. Alcan, 1931.

Pacotte, J., *La connaissance : mathématique, technique, humanisme, métaphysique*, Paris, Alcan, 1934.

Pacotte, J., *La logique et l'empirisme intégral*, Paris, Hermann et Cie, 1935.

Pacotte, J., *Le physicalisme dans le cadre de l'empirisme intégral*, Paris, Hermann, 1936.

Pacotte, J. *Le Réseau Arborescent : schème primordial de la pensée*, Paris, Hermann, 1936.

Pacotte, J., *L'espace hermitien quantique*, Paris, Hermann, 1938.

Pacotte, J., *Le champ pétrographique : Les concepts fondamentaux de la science structurale des corps*, Paris, Hermann, 1939.

Pacotte, J., "La temporalité du rationnel (premier article)", *Revue Philosophique de la France et de l'Étranger*, T. 129, No. 3/4, 161-182, Mars-Avril 1940.

Pacotte, J., "La temporalité du rationnel (Suite)" *Revue Philosophique de la France et de l'Étranger*, T. 129, No. 5/6, 336-361, Mai-Juin 1940 ;

Pacotte, J., "L'objet formel", Travaux du IXe Congrès International de Philosophie, Volume 6, Logique et Mathématiques, 46-51,1937.

Parrochia, D., *Mathématiques et Existence, ordres, fragments, empiétements*, Champ Vallon, Seyssel, 1991.

Parrochia, D., *Philosophie des réseaux*, P.U.F., Paris, 1993.

Parrochia, D., "La rationalité réticulaire", in D. Parrochia (ed.), *Penser les réseaux*, 7-23, Champ Vallon, Seyssel, 2001.

Parrochia,D., Neuville, P., *Towards a general theory of classifications*, Birkhaüser, Bâle, 2013.

Pasquinelli, M., "The Arborescent Mind : The Intelligence of an Inverted Tree", in Khadija von Zinnenburg Carroll (ed.) *Botanical Drift : Protagonists of the Invasive*

Herbarium, Berlin : Stenberg Press, 2018.

Pinte, E., "The arborescent network, primordial Scheme of thought", (Actualités Scientifiques et Industrielles, N° 429) by J. Pacotte,*Archives de Philosophie*, vol. 14, 1938, 14.

Reviewed Work(s) : *La Physique Théorique Nouvelle* by Julien Pacotte Review by : J. R., *Science Progress in the Twentieth Century (1919-1933)*, Vol. 17, No. 67 Janvier 1923), p. 485.

Schrecker, P., "Le réseau arborescent, scheme primordial de la pensée" (Actualités Scientifiques et Industrielles, N° 429) par Julien Pacotte, *Thalès*, Vol. 3, 188,1936.

Sigaut, F., «Technocratie et al.», *Mélanges, Hommage en l'honneur d'Hélène Vrin*, Droz, http ://www.francois-sigaut.com/index.php/publications-diverses/publications/12-articles-fond/325-2013c.

Sosinsky, B. A., "Network Basics", *Networking Bible*, Wiley Pub. Co.. Indianapolis, 2009.

Staudt (von), K. G. C., *Beitrage zur Geometrie der Lage* (Volume 2), Fr. Korn, Nuremberg, 1856.

Ullmo, J., «Le Réseau Arborescent, schème primordial de la pensée», *Revue philosophique de la France et de l'Etranger*, 126, 11,1938, 376.

Veblen, O., «Finite Projective Geometries», *Transactions of the American Mathematical Society* 7 : 241-59, 1906.

Wampole,C., *Rootedeness, the ramification of a metaphor*, the University of Chicaco Press, Chicago & London, 2016.