UNE PROPOSITION DE MODÉLISATION DE LA RÉVISION DES CROYANCES BASÉE SUR UN EMPLOI DE LA LOGIQUE QUANTIQUE
VERS UNE PLUS GRANDE PERTINENCE PSYCHOLOGIQUE DE LA RÉVISION DES CROYANCES

Yannis DELMAS-RIGOUTSOS

Laboratoire d'Informatique Fondamentale de Lille
Université des Sciences et Techniques de Lille Flandres – Artois
59650 Villeneuve d'Ascq
Yannis.Delmas-Rigoutsos@LIFL.Fr

RESUME

*Ce texte présente la Logique Quantique de façon sémantique en la comparant avec la sémantique de la Logique Classique propositionnelle. Un modèle de croyance est développé sur cette logique. Celui-ci admet une et une seule révision qui soit un opérateur continu disposant des propriétés de clôture, d'extensionnalité, d'idempotence et permettant le raisonnement par cas. Nous arguons que la propriété dite de consistance n'est pas psychologiquement plausible ; elle n'est pas satisfaite par cette révision. Nous montrons qu'à cette propriété près, cette révision satisfait une version quantique des axiomes de la rectification (*revising*, axiomatique évoluée de Alchourrón, Gärdenførs et Makinson) et de l'actualisation (*updating*, axiomes de Katsuno et Mendelzon). Cette révision est également compatible avec l'interprétation des conditionnels contrefactuels (modélisés par l'implication quantique) en termes de révision (test de Ramsey).*

1. Introduction

La révision des croyances est, elle aussi, étudiée sous les auspices de deux domaines d'investigation (principalement) : la théorie de la décision, qui s'intéresse principalement aux agents économiques, et l'intelligence artificielle, qui travaille sur des bases de connaissances informatisées. Dans les deux cas on se donne une base de connaissances, K, et un message A et on se demande ce que *doit* être la connaissance après intégration de la nouvelle information, K*A. En ce sens, la rectification (*revising*) ou l'actualisation (ou mise à jour, *updating*) sont abordées de façon normative. Les sujets psychologiques réels n'apparaissent, au mieux, que sous forme d'idéalisations parfois lointaines. L'objectif est plutôt de connaître des agents « parfaits ». Nous proposerons ici un modèle de révision des croyances élémentaire qui permet de se libérer de certaines de ces idéalisations pour gagner en pertinence psychologique.

L'émergence de la Logique Quantique est indissociable de celle de la Mécanique Quantique. Les premières explications rétrospectivement quantiques apparaissent au début du siècle : rayonnement du corps noir par Planck en 1900, effet photoélectrique par Einstein en 1905, atome de Bohr en 1913. Dans les années 1920, de Broglie, Schrödinger et Heisenberg posent les bases de la théorie. Celle-ci sera formalisée par von Neumann en 1930. Dès 1936, von Neumann, qui est (aussi) un logicien de premier plan, reconnaît avec Birkhoff [1936] l'aspect logique de ce formalisme. C'est l'acte de naissance de la Logique Quantique, même si la définition n'est plus aujourd'hui exactement la leur. De nombreux chercheurs ont depuis travaillé sur cette logique, qui garde malgré tout encore une saveur « exotique »[1].

2. Introduction à la Logique Quantique

Présentons d'abord, à la façon de Plutarque, les « vies parallèles » des calculs propositionnels de la Logique Classique et de la Logique Quantique.

2.1. Observables logiques et mondes possibles

Toute approche informationnelle du monde se base sur des observables : Quelle est la position de tel objet ? Est-il lisse ou rugueux ? Est-il en mouvement ? Etc. La Mécanique Quantique fonde sa définition des faits physiques sur cette approche : un fait élémentaire est la donnée de la valeur d'une observable. Un fait sera, plus largement, la donnée de domaines de valeurs pour diverses observables.

Une proposition logique apparaît alors comme une observation correspondant à une observable bipolaire, que nous appellerons « observable logique ». « Pleut-il ? » ou « La neige est-elle blanche ? » expriment de telles observables.

De ce point de vue, un monde possible se définit, en Logique Classique, comme une attribution cohérente de valeurs à toutes les observables logiques. Nous repren-

[1] Comme introduction technique sous l'angle physique, on peut se reporter à Jauch [1968]. Pour un résumé des travaux sur la Logique Quantique, en propre, on peut consulter Dalla Chiara [1986].

drons cette même définition des mondes possibles pour la Logique Quantique (dans ce cas, elle n'est plus équivalente à la donnée arbitraire d'une valeur à chaque observable logique élémentaire). Cette définition, comme celle des propositions, est purement sémantique (non syntaxique) et présente les propositions comme des ensembles cohérents de mondes possibles, convention commode commune en logique philosophique.

2.2. Diagrammes d'Euler–Venn et théorèmes de Stone et Piron

Par une technique développée par Venn mais qui remonte à Euler, les logiciens ont pris l'habitude de représenter les propositions par des zones d'un espace (en général le plan, fig. 1). Les mondes possibles sont alors représentés par des zones élémentaires (des « points ») et les propositions complexes par la réunion des zones représentant leurs éléments.

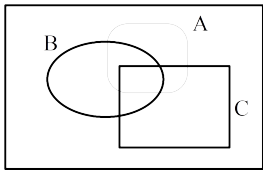


Figure 1 : diagramme de Venn

Ce type de représentation n'est pas seulement une aide graphique ; le théorème de Stone [1936] en fait une représentation au sens fort : toute algèbre de Boole est isomorphe à une algèbre de partie d'un ensemble E suffisamment grand. Le cas est similaire pour la Logique Quantique : un système de Logique Quantique peut être vu comme une algèbre de sous-espaces de Hilbert d'un espace de Hilbert[2] H suffisamment grand[3]. Dans un cas, les propositions élémentaires, ou les mondes possibles, sont les singletons de E, dans l'autre les droites de H (géométriquement, la logique quantique est donc projective)[4].

La négation, $\neg A$, d'une proposition A est représentée par la zone complémentaire dans le cas classique (fig. 2a) ou orthogonale dans le cas quantique (fig. 2b)[5].

Dans les deux cas, un monde w satisfait la proposition A, $w \Vdash A$, si et seulement si sa représentation est incluse dans celle de A (on trouve souvent « $w \in A$ »). Au niveau des propositions, cette relation s'étend en la relation de satisfaction : $A \vdash B$ si et seulement si la représentation de A est incluse dans celle de B (en termes algébriques « $A \leqslant B$ » et ensemblistes « $A \subseteq B$ »).

2.3. Les connecteurs logiques

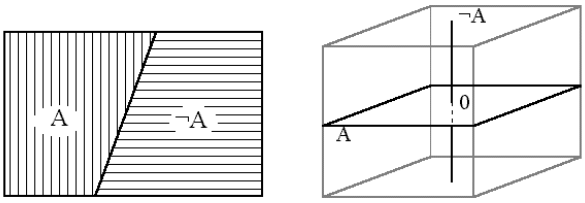


Figure 2 : représentations de la négation

Dans cette vision sémantique, les connecteurs logiques sont vus comme des opérateurs sur les observables logiques.

La représentation de la conjonction de A et B, $A \wedge B$, est dans les deux cas l'intersection de leur représentation (fig. 3).

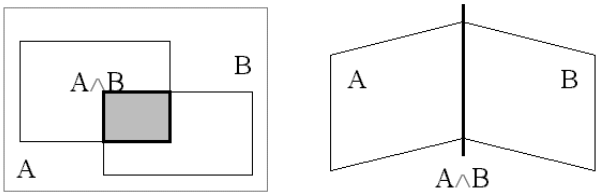


Figure 3 : représentations de la conjonction

La disjonction de A et B, $A \vee B$, est la plus petite proposition qui les contienne, ses représentations classique et quantique seront donc respectivement la réunion des représentations et le hilbert qu'elles engendrent[6] (fig. 4).

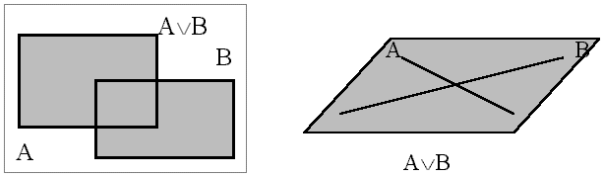


Figure 4 : représentations de la disjonction

De même, la relation de conséquence logique peut être simplement représentée par l'inclusion des représentations. Nous laisserons pour l'instant de côté le cas, très particulier, de l'implication.

---

2 Un espace de Hilbert (ou hilbert), H, est un espace vectoriel (sur **R** ou **C**) muni d'un produit scalaire séparant (forme hermitienne strictement positive) qui est complet pour la topologie associée. Un sous-espace de Hilbert (ou sous-hilbert) de H est un sous-espace vectoriel fermé de H ; c'est lui-même un hilbert.

3 Il doit en fait satisfaire certaines conditions, cf. Piron [1964]. Celles-ci ne présentent pas de difficulté pour notre propos.

4 Logiquement, une droite (un monde possible) est une proposition D telle que $D \wedge A$ vaut D ou 0, pour toute proposition A.

5 On notera $A \perp B$ l'orthogonalité de A et B.

6 Il s'agit, en général du complété (de l'adhérence) de leur somme. En dimension finie, il s'agit simplement de celle-ci.

2.4. Distances entre mondes et propositions

Les sémantiques classiques disposent d'une notion de distance entre mondes et propositions mesurant la satisfaction par les uns des autres : le complément à un de la valuation[7] ; toutefois, celle-ci est trop grossière pour la Logique Quantique dans la mesure où il existe de nombreuses manières de ne pas satisfaire une proposition (fig. 5). Par contre, la sémantique hilbertienne enrichit naturellement cette notion de distance : si θ est l'angle entre la droite w et le sous-espace A[8], $\frac{2}{\pi}$ θ vaut 0 quand w∈A, 1 quand w est orthogonal à A et une valeur intermédiaire dans les autres cas (fig. 5)[9, 10].

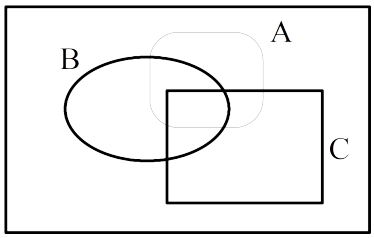


Figure 5 : distance d'un monde à une proposition

3. États de croyance

3.1. Modélisation élémentaire

Si l'on se restreint à un point de vue opératoire, un ensemble de croyances est d'abord un ensemble de propositions qui peuvent être reconnues comme crues par tel agent de décision ou système cognitif. En général, un tel état peut donc être modélisé par une théorie. Dans une démarche sémantique où les propositions sont définies comme des ensembles de mondes possibles, une théorie ne se distingue guère de la conjonction de ses éléments et un ensemble de croyances peut donc simplement être modélisé par une proposition[11].

Un état de croyance est, le plus souvent, supposé déterminer toute proposition, c'est à dire que l'on ne peut simultanément croire A et ¬A ou ne croire ni A ni ¬A (en termes logiques, la théorie est consistante et complète). Dans les systèmes de Logique Quantique, si B est une proposition élémentaire orthogonale ni à A ni à ¬A (comme sur la fig. 5), même la proposition élémentaire A ne peut être complète dans ce sens. L'équivalent des théories complètes seront ici les mondes possibles : ce sont les objets qui permettent de définir une satisfaction pour toute proposition (à l'aide de la notion de distance vue plus haut). L'état de croyance apparaît donc comme une représentation logique de l'image du monde qu'a l'agent économique ou le système cognitif.

En Mécanique Quantique la distance (telle que nous la définissons ici) d'une observation A à un état w est la probabilité, étant dans l'état w, de faire cette observation en mesurant l'observable correspondante. Cette vision s'applique à notre cas : la distance d'une proposition A à un état de croyance w peut modéliser la probabilité subjective de la proposition A pour un système ou agent dans l'état w.

3.2. *Desiderata* usuels sur la révision des croyances

Les systèmes usuels de révision (de rectification ou d'actualisation), en théorie de la décision comme en Intelligence Artificielle, considèrent en général comme fondamentales les propriétés suivantes : la clôture, l'extensionalité, la consistance (ou cohérence) et le succès.

3.2.1. La clôture et l'extensionnalité

Le principe de clôture énonce que si K est un ensemble de croyances et A une proposition, K*A, la révision de K par A, est un ensemble de croyances. L'extensionnalité affirme que le résultat de la révision de la croyance K par A, K*A, ou par B, K*B, est le même si A et B sont équivalentes. Ensemble, ils permettent de considérer la révision comme une opération associant une croyance à la donnée d'une croyance et d'une proposition.

3.2.2. La consistance

Le principe de révision le plus élémentaire, l'« ajout », consiste simplement à prendre la conjonction de la croyance K par le message A, K+A. Il peut alors arriver, si les deux sont incompatibles, que K+A = ∅ (ou 0). Ceci est inadmissible pour des théories normatives de la révision, qui veulent toujours pouvoir désigner le « meilleur » état de croyance consécutif à une information. Autrement dit, la proposition *falsum* (0) n'est pas une croyance admissible.

3.2.3. Le succès

Ce dernier principe dispose que le message est réellement une information : K*A ⊢ A. Une révision par A induit toujours la croyance que A.

---

7 Cette valuation, en tout ou rien, est $||A||_w = \chi_A(w)$ = «1 si w∈A, 0 sinon».

8 Pour définir cet angle on peut prendre un vecteur unitaire x sur w qui se projettera en x_0 sur A et x_1 sur ¬A (l'orthogonal de A). On a alors $\cos(\theta)=|x_0|$ et $\sin(\theta)=|x_1|$.

9 Il s'agit bien d'une distance. Elle s'étend de la façon habituelle en une distance d'ensembles entre les propositions. Voir l'appendice.

10 Cette notion de degré de satisfaction fait de ces modèles quantiques *une* logique floue, disposant tout à la fois d'une base sémantique et algébrique, mais également de systèmes de déduction [Delmas, 1997]. A ce titre, elle permet de modéliser logiquement les concepts tels qu'ils sont vus par la théorie linguistique des prototypes [Delmas, 1993], dans une interprétation cohérente avec celle que nous développons ici.

11 En se plaçant dans le cas fini, en travaillant purement sémantiquement sur des ensembles de mondes possibles ou en admettant les conjonctions illimitées. Ces trois moyens sont possibles en Logique Quantique.

3.3. Révision et naturalité algébrique

Sans nous y attarder, nous relèverons que l'essentiel des systèmes actuels de rectification ne se place pas dans un cadre algébrique, local : contrairement à l'actualisation (ou mise à jour), tout l'état de croyance peut intervenir sur sa révision. Dans ces systèmes, on ne peut donc pas, en général, appliquer le raisonnement par cas (ou raisonnement *ceteris paribus*). En général, il est faux que $(K \vee K')*A = K*A \vee K'*A$.

3.4. Révision et naturalité psychologique

L'extensionnalité et la clôture sont une simplification omniprésente en logique ; nous ne nous y attarderons pas. Nous admettrons également le principe de succès : son incompatibilité manifeste avec la réalité psychologique peut être levée en supposant l'existence, dans la chaîne d'appropriation d'un message, d'une phase préliminaire de sélection des informations ou en associant au message un degré d'appropriation. Nous nous concentrerons sur le principe de consistance.

La consistance, ou la cohérence, des théories est une question majeure des théories de la décision ou de gestion des connaissances dans la mesure où leur optique est essentiellement normative (au sens évoqué ci-dessus). Deux stratégies sont développées qui permettent d'en circonvenir les problèmes. La première consiste à développer des logiques permettant de modéliser des théories admettant un certain degré d'inconsistance. Cette voie a été abondamment étudiée en Intelligence Artificielle, dans plusieurs directions[12]. Les chercheurs en théorie de la décision ont privilégié une seconde voie qui conserve la Logique Classique et développe des stratégies d'évitement de l'inconsistance.

Si l'on observe la réalité psychologique, cette pluralité se retrouve : les sujets humains, devant certaines inconsistances semblent pouvoir n'être pas gênés outre mesure ou, inversement, tomber dans de graves états d'immobilisation psychologique. Comme le résume Watzlawick [1978] : *« L'expérience clinique nous apprend que la soudaine confrontation avec des informations d'une dimension insoutenable a l'un ou l'autre de deux effets : ou bien la victime ferme son esprit à la nouvelle réalité et se conduit comme si elle n'existait pas, ou bien elle prend congé de la réalité tout entière.* » (p.197)[13]. Nous suivrons ici la seconde voie de modélisation et proposerons d'intégrer aux modèles de révision des croyances ces états psychologiques de « confusion ».

Reprenons maintenant le principe de consistance. Celui-ci est, bien entendu, une idéalisation d'une réalité. Qu'exprime-t-il sur celle-ci ? Si nous recevons une information (A) résolument contradictoire avec nos conceptions (K), nous sommes néanmoins capables d'en tirer parti et de bâtir un nouvel état de croyance cohérent. Son contre-pied, à l'inverse, nous dit que dans ce cas, nous ne savons plus quoi penser ($K*A = 0$). A l'idéalisation près, si nous disposons d'une logique permettant de modéliser des degré de croyance ou de satisfaction (p. e. la Logique Quantique), cette dernière supposition nous dit que plus une croyance est opposée à ce que nous croyons, moins nous sommes susceptibles de bâtir une révision cohérente. C'est ce que nous demanderons à notre opérateur de révision de modéliser. C'est en ce sens, en décidant d'intégrer la confusion induite par un message, qu'il proposera une nouvelle voie de modélisation allant dans la direction d'une plus grande naturalité psychologique.

3.4. Une révision en Logique Quantique

Si l'on se place en Logique Quantique, les contraintes ci-dessus peuvent trouver leur incarnation dans un opérateur logique.

3.4.1. Les projections orthogonales

Nous nous reposerons sur un nouvel opérateur logique, $\circ$, défini de la manière suivante : $A \circ B = A \wedge (\neg A \vee B)$ (introduit par Delmas [1993]). Quand A et B sont des sous-espaces de Hilbert, $A \circ B$ est la projection orthogonale de B sur A[14].

Des propositions quantiques sont dites compatibles si elles forment une algèbre de Boole (i.e. un système de Logique Classique). En particulier, si A est orthogonal à B ($A \perp B$, soit $A \leqslant \neg B$ ou $A \vdash \neg B$) ou satisfait B ($A \vdash B$ ou $A \leqslant B$), A et B sont compatibles.

A et B sont compatibles si et seulement si $A \circ B = A \wedge B$ ou si et seulement si $A \circ B = B \circ A$ (les observables logiques A et B commutent). Par ailleurs, « A et B compatibles » équivaut à « $\neg$A et B compatibles » (Delmas [1997], théorème 3).

3.4.2. Projection et révision

De surcroît au succès, nous demanderons que l'opération de révision soit idempotente : si l'on révise deux fois par la même information, on obtient les mêmes croyances. Si l'on ajoute le raisonnement par cas, la clôture et l'extensionalité, seuls les projections orthogonales conviennent comme opérateur de révision.

Les projections orthogonales, ϖ, sont les seuls opérateurs continus linéaires ($\varpi(A \vee B) = \varpi(A) \vee \varpi(B)$) qui

12 On pourra se reporter au double numéro spécial du *Journal of Applied Non-Classical Logics*, intitulé « *Handling Inconsistency in Knowledge Systems* » (vol. 7, 1997).

13 Les travaux d'Erickson constatent aussi abondamment ce fait. Certaines de ses techniques d'induction hypnotique sont également fondées sur des désorientations similaires.

14 La notation se justifie par le fait que $\circ$ correspond à la composition des projecteurs orthogonaux ou à la composition des observables en Mécanique Quantique.

soient idempotents ($\varpi(\varpi(A)) = \varpi(A)$)[15]. Une proposition leur est automatiquement attachée : $\varpi(P) = \varpi(1) = P$, $\varpi(\neg P) = 0$ (i.e. $P = \neg \mathrm{Ker}\ \varpi = \mathrm{Im}\ \varpi$). On peut voir que $X \mapsto A \circ X$ est le projecteur orthogonal associé à A, ϖ_A.

Par contre cet opérateur ne satisfait pas le principe de consistance : si A est orthogonal à K, alors $A \circ K = 0$.

3.4.3. Axiomatique AGM de rectification

Pour explorer les propriétés élémentaires de notre révision, nous nous proposons de suivre l'axiomatique de Gärdenførs, Alchourrón et Makinson (dite AGM, Alchourrón [1985]). Les axiomes K*1, K*6 et K*2 sont respectivement la clôture, l'extensionalité et le succès, nous n'y reviendrons pas.

L'inclusion, K*3, stipule que $K+A \vdash K*A$ où K+A est l'ensemble de croyance obtenu en ajoutant A à K. Dans notre formalisme, K*3 s'exprime de la façon suivante : $A \wedge K \leqslant A \circ K$ (ou $A \wedge K \vdash A \circ K$). Ceci est bien le cas. En effet, $K \leqslant K \vee \neg A$, donc $A \wedge K \leqslant A \wedge (K \vee \neg A) = A \circ K$.

La vacuité, K*4, stipule que si $K\ (;/\neg A$, alors $K*A \vdash K+A$ (on a l'équivalence en conjoignant K*3). Autrement dit, si K est consistant avec A, la révision s'obtient par simple ajout. Dans le cas de la révision quantique l'antécédent le plus faible permettant d'obtenir le conséquent est la compatibilité de A et K (il y a même équivalence). Ce qui nous donne la propriété $K*4^Q$: si A est *compatible* avec K, alors $A \wedge K = A \circ K$. ([16])

K*5, le principe de consistance, n'est, lui, pas satisfait par notre révision, conformément à nos demandes psychologiques. Au contraire : $A \circ K = 0$ si et seulement si $A \perp K$ (A orthogonal à K).

3.5. Principes évolués de rectification

Notre révision dépasse l'axiomatique AGM élémentaire et satisfait également une version des axiomes de super-expansion et de sub-expansion.

La super-expansion, K*7, est le fait que $(K*A) + B \vdash K*(A \wedge B)$; c'est une généralisation de l'inclusion (K*3). Notre révision quantique donne bien que $B \wedge (A \circ K) \leqslant (B \wedge A) \circ K$. En effet, $K \leqslant \neg B \vee K$, donc $\neg A \vee K \leqslant \neg A \vee \neg B \vee K$, d'où $A \circ K \leqslant A \wedge (\neg(B \wedge A) \vee K)$, puis $B \wedge (A \circ K) \leqslant (B \wedge A) \wedge (\neg(B \wedge A) \vee K) = (B \wedge A) \circ K$.

La sub-expansion, K*8, est une généralisation de la vacuité (K*4) : si $K*A\ (;/\neg B$, alors $K*(A \wedge B) \vdash (K*A)+B$ (on a une équivalence en conjoignant K*7). Ce principe sera valide en révision quantique sous la forme suivante : si $A \circ K$ et B sont compatibles, alors $(B \wedge A) \circ K \leqslant B \wedge (A \circ K)$, ce qui peut également s'écrire $(B \wedge A) \circ K \leqslant B \circ (A \circ K)$. La démonstration, technique, de ce fait est rejetée en appendice (proposition 1).

3.6. Actualisation selon Katsuno & Mendelzon

Là où la rectification (*revising*) sert typiquement à incorporer des informations successives, éventuellement peu fiables, sur un monde constant dans le temps, l'actualisation (*updating*) sert typiquement à mettre à jour une base de connaissance sur un monde fiable mais variable. Son axiomatisation par Katsuno & Mendelzon [1992] reprend les axiomes fondamentaux K*1, K*6 et K*2. Elle admet également la consistance (K*5), sur laquelle nous ne reviendrons pas.

Comme pour la rectification, on souhaite perdre le moins de données possible (s'éloigner au minimum des mondes possibles précédemment tenus pour « vrais »). Ceci est assuré par le principe dit « d'économie faible », K*iv[17] : $K*A = K$ dès que $K \vdash A$. C'est précisément l'axiome d'orthomodularité de la Logique Quantique (voir, par exemple, Delmas [1993, 1997]).

Nous retrouvons ensuite K*7 (super-expansion), dont nous avons vu qu'il est valide.

K*8a, « si $K*A \vdash B$ et $K*B \vdash A$, alors $K*A = K*B$ », vaut également. En effet, si $A \circ K \leqslant B$, comme nous avons vu que $(A \wedge B) \circ K = B \circ (A \circ K)$, alors $(A \wedge B) \circ K = A \circ K$, d'où le résultat par symétrie.

L'axiome suivant, K*8b, demande une traduction. En Logique Classique, il dit que si K est complète, alors $K*A+K*B \vdash K*(A \vee B)$. Une théorie complète correspondant à un monde possible (si l'on convient qu'il n'existe pas de mondes indiscernables), son homologue quantique est une droite du hilbert de référence (un ensemble de croyances maximal). L'axiome K*8b se traduit donc en : si K est une droite, alors $A \circ K \wedge B \circ K \leqslant (A \vee B) \circ K$. Ceci est vrai. En effet, $A \circ K$ et $B \circ K$ sont des droites donc, $A \circ K \wedge B \circ K$ vaut 0 ou $A \circ K = B \circ K$. On applique alors la proposition 3 de l'appendice. Notons que, dans ce cas, on a aussi bien $A \circ K \wedge B \circ K \leqslant (A \wedge B) \circ K$.

Enfin, K*8c est le raisonnement par cas : $(K \vee K')*A = K*A \vee K'*A$. Nous avons noté qu'il était satisfait par notre révision : c'est la propriété de linéarité des projecteurs orthogonaux (lemme 1 de Delmas [1997]).

3.7. Révision et conditionnels

Un des intérêts majeurs de la révision quantique est qu'elle respecte les liens entre actualisation et conditionnels contrefactuels sous la forme du raisonnement hypothétique (ou test de Ramsey) :

> (RH) *«Si A, alors B» est vraie sous les prémisses P si et seulement si B est vraie sous la plus petite révision de P par A, P*A.*

---

15 Voir Bourbaki [1981], EVT V.13-15 et V.63 ex. 16.

16 Les axiomes classique et quantique sont, en fait, plus différents qu'il n'y paraît. Nous nous proposons, dans un article ultérieur, d'employer les outils quantiques pour explorer sur des cas concrets cet aspect des principaux systèmes de révision.

17 Nous suivons la présentation de Lévy [1994].

Si l'on modélise le conditionnel contrefactuel « si A, alors B » par l'implication quantique $A \rightarrow B = \neg A \vee (A \wedge B) = \neg(A \circ \neg B)$, et que la révision de P par A est la révision quantique, $A \circ P$, alors (RH) est vraie en Logique Quantique (proposition 2 en appendice).[18]

Par ailleurs, notre révision est proche des modèles de révisions et contrefactuels de Stalnaker (cf. [1968, 1970]) et Lewis [1976] : la révision de K par A est l'ensemble des mondes possibles (les droites vectorielles de l'espace de Hilbert de référence) de A les plus proches de K. La projection orthogonale hilbertienne est également la projection au sens de la distance décrite ci-dessus.

Notons que par (RH) l'axiome d'extensionnalité apparaît comme un cas particulier de K*8a, qui s'exprime maintenant ainsi : si $K \vdash A \leftrightarrow B$, alors $A \circ K = B \circ K$. L'extensionnalité peut donc être relativisée à l'état de connaissance de l'agent ou du système cognitif.

3.8. Récapitulatif des propriétés de la révision quantique

Nous avons donc montré que les propositions suivantes s'appliquent à notre révision en Logique Quantique.

K*1 : $\circ$ est un opérateur logique (clôture)

K*2 : $A \circ K \vdash A$ (succès)

K*2' : $A \circ (A \circ K) = A \circ K$ (*idempotence*)

K*3 : $A \wedge K \vdash A \circ K$ (inclusion)

K*4^Q : si A et K sont compatibles, alors $A \wedge K = A \circ K$ (*compatibilité*)

K*iv : si $K \vdash A$, alors $A \circ K = K$ (économie faible)

K*5' : $A \circ K = 0$ si et seulement si $A \perp K$ (*inconsistance*)

K*7 : $B \wedge (A \circ K) \vdash (B \wedge A) \circ K$ (super-expansion)

K*8^Q : si $A \circ K$ et B sont compatibles, alors $(B \wedge A) \circ K \vdash B \wedge (A \circ K)$ (*sub-expansion quantique*)

K*6 : si $\vdash A \leftrightarrow B$, alors $A \circ K = B \circ K$ (*extensionnalité*)

K*8a : si $K \vdash A \leftrightarrow B$ (i.e. $A \circ K \vdash B$ et $B \circ K \vdash A$), alors $A \circ K = B \circ K$ (*extensionnalité contextuelle*)

K*8b^Q : si K est une droite, $A \circ K \wedge B \circ K \vdash (A \vee B) \circ K$ (*états de croyance*)

K*8c : $A \circ (K_1 \vee K_2) = A \circ K_1 \vee A \circ K_2$ (raisonnement par cas)

RH : $P \vdash A \rightarrow B$ si et seulement si $A \circ P \vdash B$ (raisonnement hypothétique)

5. En guise de conclusion

La logique sous-jacente aux faits du monde tel qu'il est décrit par la Mécanique Quantique abrite donc une notion techniquement simple de révision des croyances à la fois compatible avec les principes usuels de la rectification (*revising*) et de l'actualisation (*updating*) à l'exception du principe de consistance, dont le contre-pied peut être pris sur la base de l'expérience clinique de psychologie. Cette révision apparaît donc comme un système universel permettant de prendre en compte une réalité à la fois changeante et connue par des moyens peu fiables. Les divers affaiblissements que nous proposons ici des systèmes de rectification et d'actualisation (principalement l'affaiblissement de la consistance) sont donc suffisant pour les rendre compatibles. Ceci ne surprendra pas qui conçoit ces systèmes comme des raffinements de l'ajout (révision par simple conjonction) : chacun tente de modifier minimalement cette procédure de révision afin d'obtenir un principe de consistance, essentiel pour les principales démarches concernant la révision. Dans notre révision, la démarche est différente ; l'incohérence dans certains cas n'est pas écartée mais marginalisée : dans la mesure où la satisfaction admet de nombreux degrés, le cas où l'on révise par une proposition exactement opposée aux croyances devient rare (et même de probabilité nulle dans un espace de Hilbert).

Si l'on suit Delmas [1993], cette logique permet également de modéliser l'état de connaissance de réseaux de neurones réels et formels, de même qu'elle permet de donner une modélisation simple des prédicats à prototype. Si l'on ajoute que les espaces de Hilbert sont simples à traiter formellement (et par informatique), cette logique munie de notre révision, offre un modèle privilégié de révision des croyances.

Un autre intérêt majeur de la Logique Quantique est que ses modèles hilbertiens sont naturellement probabilisés. Or on sait que les systèmes de révision (rectification et actualisation) existent aussi bien en termes logiques qu'en termes probabilistes. Nous nous proposons maintenant d'évaluer l'extension des résultats classiques à ce système de probabilités. Dans un article en préparation nous nous proposons également d'indiquer des

[18] L'implication quantique est une implication : elle est compatible avec la satisfaction ($A \vdash B$ si et seulement si $\vdash A \rightarrow B$) et, en particulier, vérifie le *modus ponens* (si $\vdash A \wedge (A \rightarrow B)$, alors $\vdash B$).
Depuis la rédaction de cet article, nous avons eu connaissance de Hardegree [1975] qui synthétise plusieurs liens entre Logique Quantique et conditionnels contrefactuels. La proposition 2 y est mentionnée sans démonstration (l'auteur renvoie à un article antérieur que nous n'avons pu consulter). L'auteur développe une utilisation de la Logique Quantique comme logique de la Mécanique Quantique proche de la nôtre mais distincte : ses mondes possibles sont les vecteurs d'état (non normalisés) alors que les nôtres sont les droites du hilbert. Nous choisissons de négliger la norme et la phase de ces vecteurs dans la mesure où elles n'apparaissent pas dans la logique des faits.

défauts (des points contre-intuitifs) des révisions classiques sur la base de considérations quantiques[19].

Nous clorons notre propos en soulignant que notre modèle est encore fort loin de la réalité psychologique. Nous l'entendons seulement comme *une* proposition visant à éclairer les modèles précédents (et à les unifier) tout en proposant un moyen de s'approcher un peu plus de la réalité psychologique en admettant la possibilité d'une inconsistance de type classique.

Appendice

Distance angulaire entre droites hilbertiennes

Vérifions d'abord que les angles de droites constituent bien une distance. On a bien que d(A,A) = 0, et d(A,B) = d(B,A), reste à vérifier l'inégalité triangulaire. Soient trois droites A, B et C formant les angles α (entre B et C), β (entre C et A) et γ (entre A et B), et soient a, b et c des vecteurs unitaires sur ces droites. Ces points sont coplanaires et forment un triangle de côtés 2.sin(α/2), 2.sin(β/2) et 2.sin(γ/2), donc $2.\sin(\gamma/2) \leqslant 2.\sin(\alpha/2) + 2.\sin(\beta/2)$. Or la fonction sinus est concave donc $2.\sin(\alpha/2) \leqslant \sin(\alpha)$ et $(\sin(\alpha) + \sin(\beta))/2 \leqslant \sin((\alpha+\beta)/2)$. Finalement, $2.\sin(\gamma/2) \leqslant 2.\sin((\alpha+\beta)/2)$. Or la fonction qui à *x* associe 2.sin(*x*/2) est strictement croissante sur l'intervalle considéré, donc $\gamma \leqslant \alpha+\beta$. CQFD

Cette distance entre points s'étend en une distance entre ensemble par la méthode habituelle (cf. Bourbaki [1974], TG IX.13) : d(A,B) est l'infimum des distance d(w,w') où w est une droite dans A et w' une droite dans B. Cet infimum est un minimum : il est atteint par les projections orthogonales.

Notons que cette distance d'ensembles ne vérifie plus que d(A,B) + d(¬A,B) = 1. A titre de contre-exemple, en dimension 3, considérer pour B un plan et pour A une droite ni orthogonale ni incluse (fig. 6) : d(¬A,B) = 0 mais d(A,B) ≠ 1.

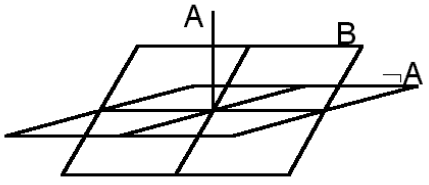


Figure 6 : distance et négations

Résultats techniques de Logique Quantique

Soient A et B deux propositions quantiques, on sait que $A \vee B = B \vee \neg B \circ A$ (¬ précède ○ qui précède ∨, lemme 1, Delmas [1997]). Nous aurons ici besoin d'une adaptation de ce lemme (où ⦶ note la somme orthogonale[20]) :

> ***Lemme 2 :*** *Pour toutes propositions quantiques* A *et* B, $A = (A \wedge B) \oplus (A \circ \neg B)$.

En particulier, quand A et B sont compatibles, A se décompose orthogonalement par simple conjonction : $A = A \wedge B \oplus A \wedge \neg B$.

Le lemme 2 découle du lemme 1. En effet, par celui-ci, $A = A \vee (A \wedge B) = A \wedge B \vee (\neg B \vee \neg A) \circ A$; or $\neg A \leqslant \neg B \vee \neg A$, donc ¬A (et A) et $\neg B \vee \neg A$ sont compatibles et $A = A \wedge B \vee (\neg B \vee \neg A) \wedge A = A \wedge B \vee A \circ \neg B$. Comme $\neg(A \wedge B)$ est orthogonal à B, tous ses sous-espaces (dont $A \wedge \neg(A \wedge B)$) aussi. CQFD

A l'aide de ces lemmes, nous pouvons montrer la

> ***Proposition 1 :*** *Si* $A \circ K$ *et* B *sont compatibles, alors* $(A \wedge B) \circ K = B \circ (A \circ K)$.

La super-expansion (vue dans le corps du texte) donne que $(A \wedge B) \circ K \geqslant B \circ (A \circ K)$, il reste donc à montrer que $(A \wedge B) \circ K \leqslant B \circ (A \circ K)$.

En effet, décomposons A orthogonalement en utilisant le lemme 2 : $A=(A \wedge B) \oplus A_0$ en posant $A_0=A \circ \neg B$; de même, $A_0=A_1 \oplus A_2$ où $A_1=A_0 \wedge \neg B$ et $A_2=A_0 \circ B$. Comme, par hypothèse, $A \circ K$ est compatible avec B, $A \circ K$ se décompose orthogonalement en $A \circ K = X_i \oplus X_1$ où X_i est dans B, donc dans $A \wedge B$, et X_1 dans ¬B (lemme 2). Or $A \circ K$ est dans A, donc X_1 est dans l'orthogonal de $A \wedge B$ dans A, A_0, donc dans $A_0 \wedge \neg B$, soit A_1.

Alors $K \leqslant \neg A \oplus X_i \oplus X_1$; il n'a pas de projection sur A_2. De là, $(B \wedge A) \circ K \leqslant (B \wedge A) \circ \neg A \vee (B \wedge A) \circ X_i \vee (B \wedge A) \circ X_1$ (lemme 1), soit $(B \wedge A) \circ K \leqslant 0 \vee X_i \vee 0 = B \circ (A \circ K)$. CQFD

Voyons maintenant la

> ***Proposition 2 :*** $P \vdash A \rightarrow B$ *si et seulement si* $A \circ P \vdash B$.

Posons $I = A \rightarrow B = \neg A \vee (A \wedge B)$ et supposons que $A \circ P \vdash B$, soit $A \wedge (\neg A \vee P) \vdash B$, donc $A \wedge (\neg A \vee P) \vdash A \wedge B$. De là $\neg A \vee (A \wedge (\neg A \vee P)) \vdash \neg A \vee (A \wedge B)$, i.e. $\neg(A \circ (A \wedge \neg P)) \vdash I$. Or $A \wedge \neg P$ est plus petit que A, ce qui simplifie le premier terme : $\neg A \vee P \vdash I$, et en particulier $P \vdash I$. Inversement, si l'on suppose que $P \vdash I$, il faut voir que $A \circ P \vdash B$; pour cela, il suffit de vérifier que $A \circ I \vdash B$ (la projection est croissante à droite). Or $A \circ I$ vaut $A \circ (\neg A \vee (A \wedge B))$, soit $A \wedge (\neg A \vee \neg A \vee (A \wedge B))$, soit encore $A \circ (A \wedge B)$, soit, finalement, $A \wedge B$, qui implique bien B. CQFD

> ***Proposition 3 :*** *Si* $A \circ K = B \circ K$, *alors* $A \circ K = B \circ K = (A \wedge B) \circ K = (A \vee B) \circ K$.

Voyons d'abord le

> ***Lemme 3 :*** *Si* $A = X \oplus Y$, $A \circ K = X \circ K$ *si et seulement si* $Y \perp K$.

19 Nous avons exposé ces points oralement lors d'un séminaire CALC du LIFL à Lille en 1997.

20 On a donc $C = A \oplus B$ si $A \perp B$ et $C = A \vee B$.

Si $A = X \oplus Y$ et $A \circ K = X \circ K$, alors $A \circ K$ est dans X, donc compatible avec Y, donc $Y \circ K = Y \circ (A \circ K)$ (proposition 1). Ainsi $Y \circ K = Y \circ (X \circ K) = 0$, soit bien $Y \perp K$. Inversement si $Y \perp K$, $K \leqslant \neg Y = X \oplus \neg A$, donc $A \circ K \leqslant A \circ X \oplus A \circ \neg A = X \oplus 0$. Enfin, comme $X \circ K = X \circ (A \circ K)$ (proposition 1), $X \circ K = A \circ K$. CQFD

Pour la proposition, si $A \circ K = B \circ K$, alors $A \circ K \leqslant B$, donc $A \circ K$ et B sont compatibles, donc $(A \wedge B) \circ K = B \circ (A \circ K) = A \circ K$ (sub-expansion quantique), d'où la première égalité par symétrie. Ensuite, $A = A \wedge B \oplus A'$ et $B = A \wedge B \oplus B'$ par le lemme 2. Comme $A \circ K = (A \wedge B) \circ K$, $K \perp A'$ par le lemme 3 (de même, $K \perp B'$). Donc $A \vee B = A \wedge B \oplus Y$ où $Y \perp K$ (en posant $Y = A' \oplus B'$), d'où la seconde égalité par le lemme 3. CQFD

Références bibliographiques

[Alchourrón, 1985] C. A. Alchourrón, P. Gärdenførs, D. Makinson, *On the logic of theory change: partial meet contraction and revision functions*, Journal of Symbolic Logic. Vol. 50, 510-530.

[Birkhoff, 1936] G. Birkhoff, J. von Neumann, *The Logic of Quantum Mechanics*, Annals of Mathematics. Vol. 37, 823-843.

[Bourbaki, 1974] N. Bourbaki, *Topologie générale*, diffusion CCLS, Paris.

[Bourbaki, 1981] N. Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques*, Masson, Paris.

[Dalla Chiara, 1986] M. L. Dalla Chiara, *Quantum Logic*, in D. Gabbay, F. Günthner (éd.), *Alternatives to Classical Logic*, *Handbook of Philosophical Logic*, vol. 3, Reidel, 1986, 427-469.

[Delmas, 1993] Y. Delmas-Rigoutsos, *Applications de la Logique Quantique aux Sciences Cognitives*, Mémoire de DEA, Ecole Polytechnique.

[Delmas, 1997] Y. Delmas-Rigoutsos, *A Double Deduction System for Quantum Logic Based on Natural Deduction*, Journal of Philosophical Logic. Vol. 26, 57-67.

[Hardegree, 1975] G. M. Hardegree, *Stalnaker Conditionals and Quantum Logic*, Journal of Philosophical Logic. Vol. 4, 399-421.

[Jauch, 1968] J. M. Jauch, *Foundation of Quantum Mechanics*, Addison Wesley.

[Katsuno, 1992] H. Katsuno, A. O. Mendelzon, *On the difference between updating a knowledge base and revising it*, in *Belief revision*, P. Gärdenførs éd., Cambridge tracts in theoretical computer science. Vol. 29, 183-203. Cambridge University Press.

[Lévy, 1994] Fr. Lévy, *A Survey of Belief Revision and Updating in Classical Logic*, International Journal of Intelligent Systems. Vol. 9, 29-59.

[Lewis, 1976] D. K. Lewis, *Probabilities of conditionals and conditional probabilities*, Philosophical Review. Vol. 85, 297-315.

[Piron, 1964] Ch. Piron, *Axiomatique Quantique*, Helvetica Physica Acta. Vol. 37, 439-468.

[Stalnaker, 1968] R. Stalnaker, *A Theory of Conditional*, in *Studies in Logical Theory*, N. Rescher éd., Blackwell.

[Stalnaker, 1970] R. Stalnaker, *Probability and Conditional*, Philosophy of science. Vol. 37, 64-80.

[Stone, 1936] M. H. Stone, *The Theory of Representation for Boolean Algebras*, Transactions of the American Mathematical Society. Vol. 40, 37-111.

[Watzlawick, 1978] P. Watzlawick, *La réalité de la réalité*. *Confusion, désinformation, communication*. Points essais. Traduit de l'américain, *How real is real ? Communication, disinformation, confusion* (1976).