



**HAL**  
open science

# De l'incertitude sur le dimensionnement probabiliste des systèmes de production

Carmen Martin, François Pérès

► **To cite this version:**

Carmen Martin, François Pérès. De l'incertitude sur le dimensionnement probabiliste des systèmes de production. 11ème Congrès International de Génie Industriel, Oct 2015, Québec, Canada. pp.0. hal-02487089

**HAL Id: hal-02487089**

**<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02487089>**

Submitted on 21 Feb 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.





## Open Archive Toulouse Archive Ouverte

OATAO is an open access repository that collects the work of Toulouse researchers and makes it freely available over the web where possible

This is an author's version published in: <http://oatao.univ-toulouse.fr/23603>

**To cite this version:**

Martin, Carmen  and Pérès, François  *De l'incertitude sur le dimensionnement probabiliste des systèmes de production.* (2015)  
In: 11ème Congrès International de Génie Industriel, 26 October 2015 - 28 October 2015 (Québec, Canada).

Any correspondence concerning this service should be sent to the repository administrator: [tech-oatao@listes-diff.inp-toulouse.fr](mailto:tech-oatao@listes-diff.inp-toulouse.fr)

# De l'incertitude sur le dimensionnement probabiliste des systèmes de production

CARMEN MARTIN<sup>1</sup>, FRANÇOIS PERES<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup> ENIT  
Laboratoire Génie de Production  
Institut National Polytechnique de Toulouse  
Université de Toulouse  
47, avenue d'Azereix  
65016 Tarbes Cedex  
France

<sup>1</sup> Equipe M2SP  
[carmen.martin@enit.fr](mailto:carmen.martin@enit.fr)

<sup>2</sup> Equipe SDC  
[francois.peres@enit.fr](mailto:francois.peres@enit.fr)

**Résumé** – Le dimensionnement d'un appareil de production se fait souvent dans un cadre incertain. Cela conduit le plus souvent à surdimensionner les moyens pour absorber des pics de charge susceptibles de varier et compenser des ressources machines dont la productivité peut être aléatoire. Les facteurs de sécurité retenus contribuent ainsi à alourdir sensiblement les budgets d'investissements. La connaissance et la prise en compte des incertitudes sur, d'une part, la sollicitation de la machine, qualifiée de charge et, d'autre part, son aptitude à traiter la demande, dénommée capacité, permettra d'optimiser le dimensionnement des moyens de production. Le papier présente une démarche d'évaluation permettant d'évaluer la probabilité d'être en mesure de produire ou, a contrario, le risque de se trouver dans une situation où la capacité de production est inférieure à la demande. Les développements sont basés sur des approches mécaniciennes de dimensionnement probabiliste et sur la caractérisation et la définition des paramètres incertains impliqués dans le dimensionnement d'un appareil de production. Ramené à des considérations économiques, intégrant en particulier les retards liés à ce sous-dimensionnement, la démarche permettra de définir dans un second temps, non traité ici, la taille et la quantité optimale des ressources nécessaires au traitement des flux.

**Abstract** - The design of a production system is often performed in an uncertain environment. This often leads to significant margins to absorb the peak of loads likely to vary and mitigate the means with a non-constant productivity. The selected safety factors contribute to raise significantly the investment budgets. The knowledge and the implementation of uncertainties related on the one hand to the sollicitation of the machine called the load and, on the other hand to its ability to process the request, called the capacity, will allow the optimization of the design of the production means. The paper presents an evaluation process to assess the likelihood of being able to produce or, conversely, the risk of being in a situation where the capacity is below demand. The developments are based on mechanical probabilistic approaches and deal with the characterization and definition of uncertain parameters involved in the design of a device production. Based on economic considerations, including in particular, the delays inferred by a bad design, the approach will enable the definition in a second time, not treated here, the size and the optimal amount of resources needed to process the input workflows.

**Mots clés** – dimensionnement probabiliste, incertitudes, système de production.

**Keywords** – probabilistic approaches, uncertainties, production systems.

## INTRODUCTION

Dans le but de dimensionner un appareil de production, le papier présente une démarche de prise en compte des incertitudes liées d'une part à la nature et à la taille des flux entrant sur un moyen de production et, d'autre part, à la capacité d'une entité à produire. L'article est divisé en cinq parties. Après avoir proposé une typologie des incertitudes et une classification en famille, nous montrons dans les deux premières parties comment elles peuvent être insérées dans la modélisation d'un processus. La démarche présentée utilisant les approches de

fiabilité mécanique, traditionnellement associées au dimensionnement des structures, une troisième partie s'attache à la description des techniques qui lui sont associées et en particulier, l'approche contrainte/résistance. Dans une quatrième partie, une analogie est faite avec les concepts de charge et capacité utiles au dimensionnement de l'outil de production. Les incertitudes de chacune des deux notions sont identifiées et caractérisées. La résolution du problème posé est présentée dans une cinquième et dernière partie.

## 1 CARACTERISATION DES INCERTITUDES

L'étude des systèmes repose d'une part sur l'observation des réponses du système réel par rapport aux différentes actions maîtrisées susceptibles de lui être appliquées et, d'autre part, sur la construction d'une représentation de ce système appelée modèle [Tchangani et al, 2012], [Noyes et al, 2007]. Dans les deux approches, la prise en compte des comportements aléatoires permet d'affiner la compréhension et l'importance des phénomènes mis en jeu [Pérès, 1996], [Godichaud, 2012].

L'introduction de la notion d'aléa intervient alors à plusieurs niveaux entre ces deux approches fortement couplées [Bjerga et al, 2014] [Bedford et al, 2014] [Borg et al, 2014]. Les incertitudes, liées à la méconnaissance existantes sur une grandeur mesurable, peuvent être classées suivant trois grandes catégories.

Les incertitudes de mesure, d'origine expérimentale, sont propres aux conditions dans lesquelles l'identification de grandeurs physiques est effectuée. Elles portent sur :

- la précision de la mesure (résolution de l'instrument de mesure),
- la dispersion statistique (la mesure est entachée d'une erreur aléatoire fonction de l'erreur d'échantillonnage, de l'erreur de préparation et de la stabilité de l'appareil)
- l'erreur systématique (reprenant les erreurs d'échantillonnage et de préparation ainsi que les problèmes d'étalonnage provoquant l'apparition d'offset).

Les incertitudes naturelles sont associées au comportement aléatoire intrinsèque au système. Ces aléas peuvent être classés en deux groupes.

- le premier concerne les quantités dont la valeur est incertaine alors qu'elles ont été admises comme fixes. Les mesures de ces variables, qui peuvent être faites sur le système réel sous l'hypothèse d'une mesure exacte, auront alors des valeurs toujours différentes.
- le deuxième groupe représente les quantités dites variables (action du vent sur une structure métallique, sollicitation électrique dans un module IGBT, ...). On retrouve ces quantités pour les variables représentant les actions agissant sur le système.

Les incertitudes de modélisation sont liées à la connaissance humaine de la physique et des outils mathématiques qui les interprètent [Coppi, 2008]. Plusieurs simplifications du modèle apportent des incertitudes par rapport au comportement réel :

- Aléa du modèle : l'approximation peut par exemple porter aux endroits où une solution précise importe peu par rapport au phénomène étudié. Ces simplifications sont par ailleurs faites afin d'obtenir des calculs convergents dans des temps raisonnables. Des analyses de convergence sont entreprises dans le but d'étudier la robustesse de la sortie face aux incertitudes du modèle.
- Aléa des conditions aux limites : les conditions aux limites d'un système ont un impact sur la solution de la structure entière. Le choix d'un type de conditions aux limites peut être fait par souci de simplification et se répercute donc sur la précision de la solution.

L'approximation sur les conditions aux limites engendre des erreurs sur le comportement global du système.

- Aléa sur le chargement : la variation du chargement implique de grandes fluctuations sur la sortie d'un modèle et reste donc l'une des principales causes de défaillance d'un système.
- Aléa sur la résolution : la mise en place de modèles pour appréhender le comportement d'un système réel peut se faire par des formulations analytiques manipulant des valeurs algébriques. Mais dans de nombreux cas, seules les méthodes numériques itératives sont capables d'apporter une solution. La modélisation d'un comportement complexe non-linéaire spatial ou temporel par des comportements linéaires sur des pas réduits induit par exemple des incertitudes. Les méthodes numériques ont par ailleurs une limite, celle des outils informatiques utilisés qui ne peuvent manipuler des grandeurs réelles sans effectuer une troncature. Cette erreur est cependant évaluable dans les algorithmes retenus et la puissance des ordinateurs évoluant, le nombre de chiffres significatifs est tel que l'erreur sur la troncature est négligeable.

L'accumulation de ces erreurs peut cependant avoir des répercussions sur le résultat final [Tchangani et al, 2010]. Les algorithmes itératifs utilisés en méthodes numériques pour l'optimisation soulèvent aussi le problème de la condition d'arrêt. Par définition, l'optimum d'une fonction d'optimisation n'est jamais trouvé au sens exact et l'algorithme s'arrête lorsque l'ajout d'une itération n'apporte rien à la convergence.

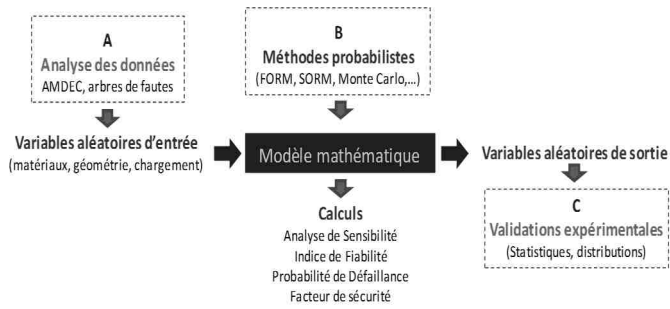
Il existe donc une distance entre l'optimum théorique et l'optimum évalué. Cette distance formule l'aléa de la limite numérique en optimisation. Parmi ces différents types d'aléa, certains sont contrôlables et peuvent être minimisés, d'autres non. Généralement, les aléas naturels ne peuvent être minimisés bien que certains processus peuvent être optimisés afin d'en réduire les variabilités.

Les erreurs de mesures ainsi que les incertitudes dues à la limite numérique sont quant à elles contrôlables et donc a priori minimisées. L'aléa de modélisation irréductible porte donc sur la vision que l'on a sur le modèle et tendrait donc à se réduire lorsque la théorie des phénomènes physiques s'enrichit. La minimisation des aléas contrôlables passe cependant inévitablement par des coûts, que ce soit en temps de calcul pour les méthodes numériques ou financier pour les erreurs de mesures. Il revient alors à se poser la question essentielle de savoir s'il est judicieux de vouloir minimiser l'aléa s'il est connu et correctement intégré dans la démarche de décision [Pérès et al, 1999].

## 2 APPROCHE FIABILISTE

L'intégration de l'incertitude dans la modélisation a été surtout déployée par les mécaniciens, donnant naissance à une discipline aujourd'hui reconnue, la fiabilité mécanique dont le schéma du principe de mise en œuvre est donné en Figure 1 [Pérès, 2005].

Dans l'optique de les déployer sur une problématique de génie industriel, nous explicitons à la suite les principes de cette approche.



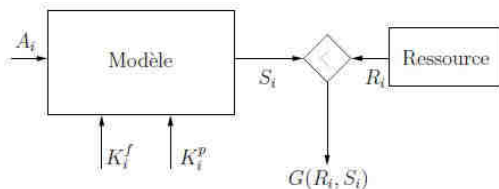
**Figure 1 : Démarche de fiabilité mécanique**

La fiabilité prédictive qui consiste à calculer la probabilité de défaillance d'un composant d'une structure n'étudie généralement pas le composant réel. Une représentation ou un modèle est utilisé pour évaluer cette défaillance pour un mode de défaillance donné. Nous apportons ici les définitions utiles pour la suite de cette étude.

## 2.1 Eléments de base

### 2.1.1 Le modèle

Le modèle représente la structure mécanique réelle comme un système comportant une entrée, un état et une sortie (**Figure 2**).



**Figure 2 : Modèle Résistance-Sollicitation [Lemaire, 1997].**

On peut ainsi définir :

- $A_i(t)$  : données d'entrée du système mécanique, fonction du temps  $t$ , qui sont en général le chargement et les actions,
- $K_i(t)$  : données d'état du système mécanique, séparées en deux catégories :  $K_f^i$  (données imposées par le cahier des charges) et  $K_p^i$  (données à la disposition du concepteur). Elles contiennent les caractéristiques géométriques, celles des matériaux et les conditions aux limites.
- $R_i(t)$  : variables de la ressource disponible : résistances, déplacements admissibles, nombre de cycles avant défaillance, ...

Le modèle mécanique permet de simuler une réalisation des besoins (sollicitations) qui constitue la sortie du modèle, notée  $S_i$ . Si  $F(\dots)$  est l'opérateur du modèle mécanique, il existe une relation du type :

$$F(t, A_i, K_f^i, K_p^i, S_i) = 0 \quad (1)$$

### 2.1.2 La fonction d'état

La fonction d'état du système traduit le succès d'un dimensionnement par la vérification d'une inégalité du type :

$$G(S_i(t), R_i(t)) \geq 0, \forall t \in [0, T] \quad (2)$$

où  $[0, T]$  est la durée de vie exigée ou période de référence pour laquelle le dimensionnement est étudié.

En général, le modèle Résistance-Sollicitation est choisi pour sa simplicité où la fonction  $g(\dots)$ , représentant le scénario des défaillances, est donnée par l'inégalité :

$$S_i(t) \leq R_i(t), \forall t \in [0, T] \quad (3)$$

Le système est alors dans le domaine de sûreté lorsque la sollicitation calculée (sortie du modèle mécanique) reste inférieure à la ressource disponible.

### 2.1.3 Les variables de base

Soit  $\{X\}$  le vecteur aléatoire constitué des variables aléatoires  $x_j$  introduisant l'incertitude dans le modèle mécanique. La fonction  $G(x_j)$ , définie par les équations (2) et (3), représente la surface d'état limite lorsqu'elle s'annule.  $G(x_j) < 0$  définit le domaine de défaillance;  $G(x_j) > 0$  le domaine de sûreté.

L'ensemble de définition des variables aléatoires, constituant le domaine  $D$ , est alors divisé en deux sous-domaines par la surface  $G(x_j) = 0$  où  $D_f$  représente le domaine de défaillance et  $D_s$  le domaine de sûreté.

### 2.1.4 La probabilité de défaillance

La probabilité de défaillance du système est alors définie par :

$$P_f = \int_{g(\{x\}) \leq 0} f_{\{x\}}(\{x\}) dx_1 \dots dx_n \quad (4)$$

où  $f_{\{x\}}(\{x\})$  est la densité de probabilité du vecteur  $X$ .

## 2.2 Démarche de résolution

Le principe des méthodes fiabilistes est donc de trouver la valeur de l'intégrale (5) capable d'offrir une notion quantitative de la fiabilité d'un système.

Les différentes méthodes de fiabilité peuvent être classées en catégories en fonction de la sophistication dans l'évaluation de la fiabilité [Der Kiureghian et al, 2009][Sudret et al, 2000].

Les méthodes de niveau I caractérisent les variables aléatoires par une valeur unique enveloppe, évaluée par l'appréciation du concepteur généralement en queue de distribution du paramètre (ces valeurs sont appelées valeurs caractéristiques correspondant à une valeur nominale, à l'espérance mathématique ou à un p-fractil.

Un facteur de sécurité est alors introduit afin de conserver une marge entre ces valeurs caractéristiques. Ces études correspondent à la démarche déterministe traditionnelle.

Les méthodes de niveau II sont basées sur des méthodes fiabilistes où chaque paramètre se caractérise par les deux premiers moments de sa distribution : sa valeur moyenne et son écart-type.

La distribution des variables de base est en général supposée de type normal.

Cornell [Cornell, 1982], [Karamchandani, 1992] fut le premier à fournir un indice de la fiabilité pour ce type de problème caractérisant la marge normale implicite entre résistance  $R$  et sollicitation  $S$  :

$$\beta_c = \frac{E[R] - E[S]}{\sqrt{Var[R] + Var[S]}} \quad (5)$$

### 3 DIMENSIONNEMENT PROBABILISTE

#### 3.1 Cas d'étude

Le cas traité dans cet article concerne le dimensionnement simple d'un système de production. Ce système est représenté sur la Figure 3 sous la forme d'un schéma de type SADT. L'ensemble des composantes contribue au fonctionnement du système :

- qui a pour fonction principale de fournir une valeur ajoutée consécutivement à une activité de production,
- qui s'appuie sur des moyens représentés par des ressources humaines et matérielles
- qui est influencé par des contraintes d'activité réparties en :
  - o contrainte énergétique,
  - o contrainte de configuration,
  - o contrainte de réglage,
  - o contrainte d'exploitation.



Figure 3 : représentation d'un système de production

#### 3.2 Caractérisation des incertitudes

Chaque source d'influence : flux entrant (charge), moyens et contraintes (capacité) contribue à la performance du système ; mesurée par son aptitude à délivrer la matière d'œuvre incrémentée d'une valeur ajoutée conformément aux critères de délai, qualité et quantité spécifiés dans le cahier des charges [Chiou, 2015]. La prise en compte des dispersions possibles sur chaque source permettra de définir les incertitudes susceptibles d'affecter le dimensionnement du système pour qu'il soit en mesure d'accomplir sa mission [Rezvan et al, 2013], [Ierapetritou, 1995]. Ces incertitudes sont recensées à la suite.

##### 1. Incertitudes sur la charge

- Type : *imprécision sur les prévisions*
  - o Nature : incertitudes de modélisation
  - o Commentaires : Une prévision est par nature incertaine. Pour l'établissement d'une prévision, deux conditions sont à remplir : (1) une certaine régularité dans le phénomène observé (2) une méthode capable de reproduire cette régularité et d'exclure au maximum le « bruit » ou les irrégularités passés. La première condition est inhérente au système économique, la deuxième est spécifique à la méthode de prévision.
- Type : *imprécision sur les fluctuations*
  - o Nature : incertitudes naturelle
  - o Commentaires : Les fluctuations de la charge peuvent être d'origines externe (variation de la

demande du marché) ou interne (redéploiement de flux entrant vers d'autres machines ou au contraire prise en compte de la charge initialement prévue sur des ressources voisines). Dans le deuxième cas de figure il peut paraître abusif de parler d'incertitude naturelle dans la mesure où le décideur est aux manettes et a la possibilité de choix sur l'engagement des moyens à mettre en œuvre. Ceci conduirait alors à dissocier les incertitudes naturelles maîtrisables (au moins partiellement) et celles purement aléatoires sur lesquelles il n'y pas de possibilité d'intervention.

##### 2. Incertitudes sur la capacité

- Type : *imprécision sur le régime nominal*
  - o Nature : incertitudes de mesure ou de modélisation
  - o Commentaires : L'établissement du régime nominal peut être théorique auquel cas l'incertitude à ce niveau est de type modélisation. La caractérisation de cet indicateur peut être également pratique, sur la base de l'observation, auquel cas l'incertitude inhérente est de type mesure.
- Type : *imprécision sur la productivité*
  - o Nature : incertitude naturelle
  - o Commentaires : Trois sources principales de dispersion peuvent être à l'origine de cette incertitude. Il s'agit de la productivité des ressources matérielles qui peut être ralentie par l'occurrence de pannes (problème de disponibilité) ou la baisse de performance (problème de rendement ou de cadence). L'opérateur peut également être une source d'improductivité en cas d'absence ou de ralentissement de son rythme de travail. Enfin les contraintes d'environnement sont également susceptibles d'affecter le fonctionnement du système (problèmes d'approvisionnement en énergie, mauvais réglages, contraintes d'exploitations contextuelles, ...)

### 4 RESOLUTION

Les détails de l'approche contrainte/résistance se retrouvent dans divers ouvrages, dont [Haldar & Mahadevan, 2000] ou [Lemaire, 1997]. Cette approche considère la contrainte et la résistance comme deux variables qui peuvent prendre des valeurs aléatoires (Figure 4). Ces variables sont alors définies par leur fonction de densité de probabilité (ou pdf pour probability density function), respectivement  $f_L(\bullet)$  et  $f_S(\bullet)$ . La fiabilité n'est autre que la probabilité que la contrainte reste inférieure à la résistance du produit.

Nous appliquons cette approche au dimensionnement d'une ressource [Yadav et al, 2003], [Bryan et al, 2006]. Ainsi la contrainte est assimilable à la charge que devra absorber l'unité de production et la sollicitation pourra être considérée comme la capacité de cette même unité à accepter le flux entrant [Braatz et al, 1996]. Nous définirons par « Productibilité » la probabilité d'être en mesure de produire c'est-à-dire d'avoir une capacité au moins égale à la charge.

Nous utiliserons la symbolique suivante :

- CH : charge
- CA : capacité
- $\Gamma$  : productivité

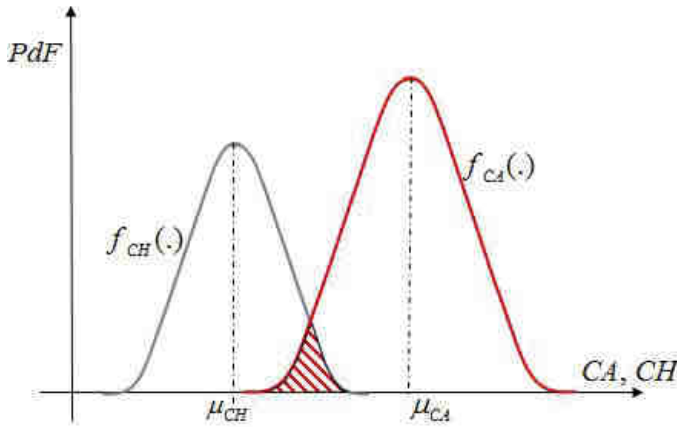


Figure 4 : Distributions de charges et de capacité

Dans la zone d'interférences CHCA la probabilité que la Charge CH soit supérieure à la Capacité CA est non nulle. Connaissant les deux fonctions de densité  $f_{CH}(\bullet)$  et  $f_{CA}(\bullet)$ , il est alors possible de calculer la probabilité que le système soit capable de traiter la demande. La productivité peut alors être définie ainsi :

$$\Gamma = \Pr(CH < CA) = \int_0^{\infty} f_{CA}(y) \cdot \left[ \int_0^y f_{CH}(x) dx \right] dy \quad (6)$$

ou bien :

$$\Gamma = \Pr(CA > CH) = \int_0^{\infty} f_{CH}(x) \cdot \left[ \int_x^{\infty} f_{CA}(y) dy \right] dx \quad (7)$$

Il existe un certain nombre de cas où cette probabilité peut être calculée sans approximation numérique [Nicolas et al, 1996]. Certaines hypothèses doivent alors être posées pour valider les formules suivantes. En l'absence de connaissances précises sur les formes de distributions de chacune des variables incertaines, l'hypothèse de charges et capacité gaussiennes prévaut.

Lorsque les variations de la charge ou de la capacité sont la somme de plusieurs effets dont aucun n'est prépondérant, ce choix d'utiliser des fonctions de distributions normales semble approprié. La distribution gaussienne peut alors être utilisée pour modéliser des charges et capacités (équations 9 et 10), respectivement), particulièrement quand les variations dans la détermination du régime nominal ou l'évaluation de la productivité sont faibles et que la charge ne peut être déterminée précisément.

$$f_{CH}(ch) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_{CH}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \frac{(CH - \mu_{CH})^2}{\sigma_{CH}^2}} \quad (8)$$

$$f_{CA}(ca) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_{CA}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \frac{(CA - \mu_{CA})^2}{\sigma_{CA}^2}} \quad (9)$$

où les valeurs moyennes de la charge et de la capacité sont notées  $\mu_L$  et  $\mu_S$  et les écarts types correspondant  $\sigma_L$  et  $\sigma_S$ . En substituant ces expressions dans les équations (7) ou (8), la productivité devient :

$$\Gamma = \Pr(CH < CA) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_{CA}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \frac{(CA - \mu_{CA})^2}{\sigma_{CA}^2}} \cdot \left[ \int_{-\infty}^{ca} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_{CH}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \frac{(CH - \mu_{CH})^2}{\sigma_{CH}^2}} \cdot dch \right] dca \quad (10)$$

Une forme plus simple avec une seule intégrale permet de réduire cette expression en effectuant des changements de variables qui transforment les variables CH et CA en variables sans dimensions :

$$x = \frac{(ca - \mu_{CA})}{\sigma_{CA}} \quad (11)$$

$$y = \frac{(ch - \mu_{CH})}{\sigma_{CH}} \quad (12)$$

L'équation (11) devient alors :

$$\Gamma = \Pr(CH < CA) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{(\sigma_{CA} \cdot x + \mu_{CA} - \mu_{CH}) / \sigma_{CH}} e^{-\frac{x^2 + y^2}{2}} \cdot dy \right] dx \quad (13)$$

Sur un plan géométrique, cette double intégrale équivaut à l'aire située sous la droite qui peut être définie par l'équation (14) qui représente la borne supérieure de l'intégrale.

$$y = (\sigma_{CA} x + \mu_{CA} - \mu_{CH}) / \sigma_{CH} \quad (14)$$

Il est possible d'exprimer la productivité sous la forme d'une simple loi normale standard, dans un nouveau système  $\{x', y'\}$  en effectuant un changement de repère purement géométrique. La zone hachurée de la Figure 5 présente le domaine d'intégration lorsque la charge et la capacité sont distribuées normalement. Elle correspond au risque de sous-dimensionnement de l'appareil de production. C'est donc le complément à 1 de la productivité.

A partir du changement de variables :

$$x' = x \cdot \cos \theta + y \cdot \sin \theta \quad (15)$$

$$y' = -x \cdot \sin \theta + y \cdot \cos \theta \quad (16)$$

Il est possible de montrer que :

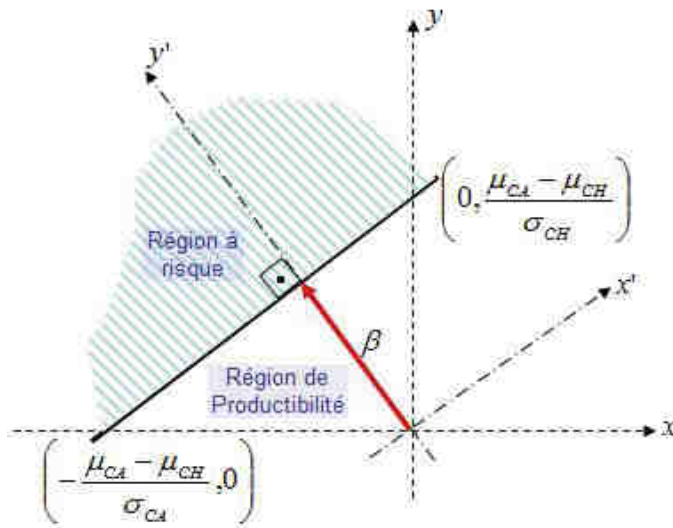
$$x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2 \quad (17)$$

$$dx \cdot dy = dx' \cdot dy' \quad (18)$$

Finalement la productivité peut s'écrire :

$$\Gamma = \Pr(CH < CA) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\beta} e^{-\frac{x'^2 + y'^2}{2}} \cdot dy' \right] dx' \quad (19)$$





**Figure 5 : Domaine d'intégration dans un repère standardisé**

Dans cette équation, la limite supérieure de l'intégrale sur  $y'$  correspond à la distance  $\beta$  de la Figure 5. Cette constante, appelée l'indice de sûreté, est calculée par simple trigonométrie. La connaissance de cet indice permet de redonner du sens au calcul en permettant d'exprimer une approximation de la productivité en fonction des variables physiques de départ.

$$\beta = \frac{\mu_{CA} - \mu_{CH}}{\sqrt{\sigma_{CA}^2 + \sigma_{CH}^2}} \quad (20)$$

L'ordre d'intégration peut être inversé, car  $\beta$  est une constante. On peut alors dissocier les intégrales en  $x'$  et  $y'$ . L'intégrale en  $x'$  correspondant à  $\Phi(\infty) = 1$ , il ne reste que l'intégrale en  $y'$ . La productivité s'exprime pour une charge et une capacité distribuées selon une loi normale par :

$$\Gamma = \Phi(\beta) = \Phi\left(\frac{\mu_{CA} - \mu_{CH}}{\sqrt{\sigma_{CA}^2 + \sigma_{CH}^2}}\right) \quad (21)$$

$\Phi(\bullet)$  est la fonction cumulative de probabilité de la loi normale standard.

Il arrive que pour l'appréciation de probabilités de défaillance très faibles (chimie, nucléaire,...), la distribution normale ne soit plus adaptée pour la caractérisation des variables étant donnée la forte influence de la modélisation des queues de distribution des paramètres incertains sur les résultats de calcul. Les méthodes de niveau III prennent alors en considération des variables aléatoires quelconques. Des transformations sont alors effectuées pour passer dans un espace normal standard afin de pouvoir évaluer la fiabilité par des méthodes d'approximation (FORM/SORM) [Low, 2014] ou de simulation (Intégration numérique, Monte-Carlo) [Zuev, 2015].

Les méthodes de niveau IV font l'objet de l'étude du système dans son ensemble afin d'optimiser sa fiabilité par rapport au dimensionnement, à sa maintenance, aux inspections sous des contraintes économiques.

Des fonctions de pénalités peuvent être alors incorporées dans la caractérisation des variables aléatoires.

## CONCLUSION

Cet article a présenté une démarche de dimensionnement d'une entité de production constituée de moyens matériels et humains dans un environnement incertain. Après avoir introduit la notion d'incertitudes et montré comment celles-ci pouvaient s'intégrer à la modélisation de processus, nous avons proposé une analogie entre, d'une part, les notions de résistance et contraintes utilisées en mécanique et, d'autre part, les concepts de charge et capacité impliqués dans la conception d'un moyen de production. Le déploiement des techniques de fiabilité des structures adaptées au contexte du dimensionnement d'un process a été décrit. Ces méthodes sont particulièrement appropriées dans la mesure où la nature des paramètres mis en jeu permet de considérer des incertitudes sur la charge ou la capacité distribuées selon des lois normales. Les perspectives de ce travail visent à élargir la problématique à d'autres types de distributions et au développement de modèles économiques pour l'optimisation du ratio productivité/coût d'industrialisation.

## RÉFÉRENCES

- Bedford T., Wilson, K., J., Daneshkhah, A., (2014) *Assessing parameter uncertainty on coupled models using minimum information methods*, Reliability Engineering & System Safety, Volume 125, pp. 3-12, ISSN 0951-8320.
- Bjerga, T., Aven, T., Zio, E., (2014) *An illustration of the use of an approach for treating model uncertainties in risk assessment*, Reliability Engineering & System Safety, Volume 125, pp. 46-53, ISSN 0951-8320.
- Borg, A., Husted, B., P., Njå, O., (2014) *The concept of validation of numerical models for consequence analysis*, Reliability Engineering & System Safety, Volume 125, pp. 36-45, ISSN 0951-8320.
- Braatz, R., D., Lee, J., H., Morari, M., (1996) *Screening plant designs and control structures for uncertain systems*, Computers & Chemical Engineering, Volume 20, Issue 4, pp. 463-468, ISSN 0098-1354.
- Chiou, S.-W., (2015) *A bi-level decision support system for uncertain network design with equilibrium flow*, Decision Support Systems, Volume 69, pp. 50-58, ISSN 0167-9236.
- Coppi, R., (2008) *Management of uncertainty in Statistical Reasoning: The case of Regression Analysis*, International Journal of Approximate Reasoning, Volume 47, Issue 3, pp. 284-305, ISSN 0888-613X.
- Cornell, C.A., (1982) *Some thoughts on systems and structural reliability*, Nuclear Engineering and Design, Volume 71, Issue 3, 2, pp. 345-348, ISSN 0029-5493.
- Der Kiureghian, A., Ditlevsen O., (2009) *Aleatory or epistemic? Does it matter?*, Structural Safety, Volume 31, Issue 2, pp. 105-112, ISSN 0167-4730.
- Haldar, A., Mahadevan, S., (2000) *Probability, Reliability and Statistical Methods in Engineering Design*, John Wiley & Sons, New York.
- Godichaud, M., Tchangani, A., Pérès, F., Iung, B., (2012), *Sustainable management of end-of-life systems*, Production Planning & Control, 23, 2-3, 216-236, Taylor & Francis
- Ierapetritou, M., G., Pistikopoulos, E., N., (1995) *Design of multiproduct batch plants with uncertain demands*, Computers & Chemical Engineering, Volume 19, Supplement 1, 11-14, pp. 627-632, ISSN 0098-1354.
- Karamchandani, A., Cornell, C.A., (1992) *Sensitivity estimation within first and second order reliability methods*, Structural Safety, Volume 11, Issue 2, pp. 95-107, ISSN 0167-4730.



- Lemaire, M., (1997) *Reliability and mechanical design, Reliability Engineering & System Safety*, Volume 55, Issue 2, pp. 163-170, ISSN 0951-8320.
- Low, B.K., (2014) *Form, Sorm, and spatial modeling in geotechnical engineering, Structural Safety*, Volume 49, pp. 56-64, ISSN 0167-4730.
- Nicolas, G., Rotstein, G.,E., Barbosa-Póvoa A.,P.,F.,D., Macchietto, S., (1996) *A branch and bound procedure for the design of multipurpose batch plants with uncertain demands*, *Computers & Chemical Engineering*, Volume 20, Supplement 2, pp. S1179-S1184, ISSN 0098-1354.
- Norman, B.,A., Smith, A.,E., (2006) *A continuous approach to considering uncertainty in facility design*, *Computers & Operations Research*, Volume 33, Issue 6, pp. 1760-1775, ISSN 0305-0548.
- Noyes, D., Pérès, F., (2007) *Analyse des systèmes - Sûreté de fonctionnement*, Editions Techniques de l'ingénieur.
- Pérès, F., *Outils d'analyse de performance pour stratégies de maintenance dans les systèmes de production*, PhD Bordeaux University.
- Pérès, F., Martin, C., (1999) *Design methods applied to the selection of a rapid prototyping resource*, "Emerging Technologies and Factory Automation, Proceedings. '99. 7th IEEE ETFA International Conference.
- Pérès, F., (2005) *Apport du soutien logistique et de la maintenance à l'optimisation du couple Disponibilité Opérationnelle/Coût Global de Possession*, Habilitation à Diriger des Recherches, INP Toulouse.
- Rezvan, A., T., Gharnah, N., S., Gharehpetian, G.,B., (2013) *Optimization of distributed generation capacities in buildings under uncertainty in load demand*, *Energy and Buildings*, Volume 57, pp. 58-64, ISSN 0378-7788.
- Sudret, B., Kiureghian, A. D., (2000) *Stochastic finite element methods and reliability, a state-of-the-art report*. Rapport technique, Department of Civil and Environmental Engineering, Univerisity of California, Berkeley.
- Tchangani, A.P., Pérès, F., (2010) *BOCR framework for decision analysis*, *Large Scale Complex Systems Theory and Applications*, 9,1, pp. 507-513,
- Tchangani, A., P., Bouzarour-Amokrane, Y., Pérès, F., (2012) *Evaluation model in decision analysis: bipolar approach*, *Informatica*, 23, 3, pp.461-485.
- Yadav, O. P., Singh, N., Chinnam, R. B., Goel, P. S., (2003) *A fuzzy logic based approach to reliability improvement estimation during product development*. *Reliability Engineering & System Safety*, 80(1) pp. 63–74.
- Zuev, K.,M., Wu, S., Beck, J., L., (2015) *General network reliability problem and its efficient solution by Subset Simulation*, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Volume 40, pp. 25-35, ISSN 0266-8920.