Résolution du problème de suites binaires avec faible autocorrélation à l'aide d'une reformulation quadratique convexe

Amélie Lambert, Sourour Elloumi, Arnaud Lazare

Résolution du problème de suites binaires avec faible autocorrélation à l'aide d'une reformulation quadratique convexe

Sourour Elloumi[1], Amélie Lambert[2], Arnaud Lazare[1]

[1] UMA-CEDRIC, ENSTA, Palaiseau, France
{sourour.elloumi,arnaud.lazare}@ensta-paristech.fr

[2] CEDRIC, CNAM, Paris, France
amelie.lambert@cnam.fr

Mots-clés : *Optimisation polynomiale en variables binaires, reformulation quadratique convexe, programmation semi-définie positive*

1 Introduction

Les suites binaires avec faible autocorrélation jouent un rôle important dans plusieurs problèmes de communication. Trouver de telles suites revient à trouver des configurations de faible énergie dans un modèle particulier de spin avec interactions à 4 spins de longue portée. De nombreuses méthodes ont été proposées ([3],[5]) pour résoudre ce problème en s'appuyant sur les symétries inhérentes à celui-ci. Mais les algorithmes implémentés sont très spécifiques aux instances et ont un temps de calcul important. Ce problème peut s'écrire sous la forme d'un problème d'optimisation polynomiale non contraint en variables binaires :

$$(P) \begin{cases} \min f(x) \\ \text{s.t.} \\ \quad x_i \in \{0,1\} \qquad i = 1, ..., n \end{cases}$$

Où f est un polynôme de degré 4. Dans la suite nous présentons une méthode de résolution de (P) utilisant la programmation semi-définie positive (SDP).

2 Reformulation de (P) en un programme quadratique (QP)

Pour pouvoir écrire une reformulation quadratique de (P) nous allons ajouter des variables additionnelles pour reformuler un produit de deux variables binaires jusqu'à obtenir un polynôme de degré 2.

Définition 1 *On définit l'ensemble $\mathcal{E}_i$ des indices des variables dont le produit est modélisé par x_i par induction de la manière suivante :*
- $\{i\}$ *si x_i est une variable initiale*
- $\mathcal{E}_j \cup \mathcal{E}_k$ *si x_i est la variable additionnelle reformulant le produit $x_j x_k$*

Pour tout i, j, k tels que $\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_j \cup \mathcal{E}_k$, l'égalité $x_i = x_j x_k$ (ou de manière équivalente $x_i = \prod_{p \in \mathcal{E}_j} x_p \prod_{q \in \mathcal{E}_k} x_q$) est linéarisée par les contraintes issues de [4] :

$$(F) \begin{cases} x_i \leq x_j \\ x_i \leq x_k \\ x_i \geq x_j + x_k - 1 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

Grâce à ces contraintes nous obtenons une reformulation quadratique (QP) de (P) :

$$(QP) \begin{cases} \min f'(x) = \displaystyle\sum_{\substack{\text{monômes p} \\ \text{tels que} \\ \mathcal{M}_p = \mathcal{E}_j \cup \mathcal{E}_k}} c_p x_j x_k \\ \text{s.t.} \\ \quad (F) \\ \quad x_i \in \{0,1\} \qquad\qquad\qquad i = 1, ..., N \end{cases}$$

Où N est le nombre total de variables après reformulation et $\mathcal{M}_p$ l'ensemble des indices des variables du monôme p.

3 Reformulation quadratique convexe de (QP)

Une fois que nous avons trouvé une reformulation quadratique (QP) de (P), nous voulons calculer une reformulation convexe de (QP). Le problème polynomial (P) reformulé en quadratique possède une structure très particulière que nous allons exploiter. En effet, il est possible de trouver des égalités quadratiques valides pour (QP). Nous utilisons ensuite l'algorithme issu de [2] pour convexifier le programme quadratique (QP) à l'aide de ces égalités valides.

4 Résultats et perspectives

Nous avons proposé une nouvelle approche pour résoudre le problème de suites binaires à faible autocorrélation. Notre méthode se base sur une reformulation quadratique convexe du polynôme de départ en utilisant une relaxation SDP à laquelle nous rajoutons des égalités valides. Malgré le grand nombre de variables ajoutées, la relaxation SDP nous donne une excellente borne et permet de résoudre un grand nombre d'instances du problème recensé dans [1], et ce plus rapidement que les autres méthodes de la littérature. Un des axes d'amélioration possible serait l'étude exhaustive des reformulations quadratiques et de l'influence de chaque quadratisation sur la borne obtenue par le programme SDP.

Références

[1] Polip, library for polynomially constrained mixed-integer programming, 2014.

[2] S. Elloumi A. Billionnet and A.Lambert. Exact quadratic convex reformulations of mixed-integer quadratically constrained problems. *Mathematical Programming*, 158 :235–266, 2016.

[3] J. Bernasconi. Low autocorrelation binary sequences : statistical mechanics and configuration space analysis. *J. Physique*, 141(48) :559–567, 1987.

[4] R. Fortet. L'algebre de boole et ses applications en recherche operationelle. *Cahier du Centre d'Etudes de Recherche Operationnelle*, 4 :5–36, 1959.

[5] Frauke Liers, Enzo Marinari, Ulrike Pagacz, Federico Ricci-Tersenghi, and Vera Schmitz. A non-disordered glassy model with a tunable interaction range. *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, page L05003, 2010.