Analyse numérique de structures sandwichs viscoélastiques et modèle à dérivées fractionnaires

Michele d'Ottavio, Alina Krasnobrizha, Emmanuel Valot, Lorenzo Dozio, Olivier Polit

▶ **To cite this version:**

Michele d'Ottavio, Alina Krasnobrizha, Emmanuel Valot, Lorenzo Dozio, Olivier Polit. Analyse numérique de structures sandwichs viscoélastiques et modèle à dérivées fractionnaires. 21ème Journées Nationales sur les Composites, École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers (ENSAM) - Bordeaux, Jul 2019, Bordeaux, Talence, France. hal-02423019

HAL Id: hal-02423019
https://hal.science/hal-02423019

Submitted on 23 Dec 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Analyse numérique de structures sandwichs viscoélastiques et modèle à dérivées fractionnaires

Numerical analysis of viscoelastic sandwich structures by a fractional derivative model

Alina Krasnobrizha[1], Emmanuel Valot[1], Michele D'Ottavio[1], Lorenzo Dozio[2] et Olivier Polit[1]

1 : LEME, UPL, Univ. Paris Nanterre
50 rue de Sèvres, 92410 Ville d'Avray, France
e-mail : {akrasnob, evalot, mdottavi, opolit}@parisnanterre.fr

2 : Dipartimento di Scienze e Tecnologie Aerospaziali, Politecnico di Milano
Via La Masa 34, 20156 Milano, Italy
e-mail : lorenzo.dozio@polimi.it

Résumé

Ces travaux portent sur l'analyse numérique des vibrations libres des structures sandwichs avec un coeur viscoélastique. Le comportement viscoélastique est décrit par un modèle Zener à dérivées fractionnaires à quatre paramètres. La loi fractionnaire est implantée dans un outil numérique basé sur la méthode de Ritz et une approche à cinématique variable particulièrement adaptée à la modélisation de plaques sandwichs, la Sublaminate Generalized Unified Formulation (SGUF). Le problème aux valeurs propres non-linéaire issu de la dépendance aux fréquences des propriétés viscoélastiques est résolu en utilisant un algorithme itératif. L'approche est validée avec des exemples de poutre et plaque sandwichs viscoélastiques classiques ainsi qu'à coeurs multiples. L'influence des modèles cinématiques sur la réponse des structures est proposée.

Abstract

The work deals with the free vibration problem of sandwich structures with a viscoelastic core. Zener model with fractional derivatives with four parameters is used to describe the viscoelastic behaviour. The fractional law is implemented in a numerical tool based on the Ritz method and a variable kinematics approach which is particularly adapted for sandwich plate modelling, the Sublaminate Generalized Unified Formulation (SGUF). The non-linear eigenvalue problem that arises from the frequency dependence of the viscoelastic properties is solved using an iterative algorithm. The approach is validated on several examples consisting of viscoelastic sandwich beam and plate structures, including multi-core configurations. The influence of the kinematic models on the structural response has been assessed.

Mots Clés : viscoélasticité, vibration, dérivée fractionnaire, cinématique variable, méthode de Ritz
Keywords : viscoelasticity, vibration analysis, fractional derivative, variable kinematics, Ritz method

1. Introduction

De nos jours, les matériaux composites sont utilisés dans différents domaines industriels notamment en aéronautique ou automobile. Pour ces applications, le problème des vibrations sur la tenue mécanique ou l'isolation acoustique est primordial. Une des solutions couramment mises en oeuvre afin d'augmenter les propriétés amortissantes des structures consiste à intégrer des matériaux viscoélastiques. Ceci conduit naturellement à une structure composite, dont les différentes couches ont en général des propriétés mécaniques très différentes. La variété des matériaux permet de concevoir des structures "ad hoc" pour optimiser leur performance en fonction de l'application visée. Par conséquent, un outil numérique est nécessaire afin de prédire de manière fiable le comportement de ces structures composites avec précision et un temps de calcul le plus court possible.
Les matériaux viscoélastiques ont un comportement complexe qui dépend souvent des fréquences et de la température. Un tel comportement est typiquement formalisé par l'introduction du concept de module complexe [1]. Les modèles rhéologiques classiques, tels que le modèles de Maxwell généralisé, sont souvent associés à un grand nombre de paramètres difficiles à identifier. Bagley et Torvik ont été

les premiers à donner une interprétation thermodynamique de la viscoélasticité à travers les opérateurs des dérivées fractionnaires [2]. Notamment, le modèle de Zener à dérivées fractionnaires est capable de décrire de manière fiable le comportement viscoélastique sur une large bande de fréquences en n'utilisant que quatre paramètres [3, 4].
La définition d'un modèle cinématique pour une structure composée de couches de matériaux très différents nécessite également une attention particulière [5]. Les modèles à "couche équivalente" (Equivalent Single Layer, ESL), tels que la théorie classique des stratifiés (Classical Lamination Theory, CLT) ou la First-order Shear Deformation Theory (FSDT), ont l'avantage d'un faible coût de calcul mais ils comportent une homogénéisation au niveau de l'empilement qui ne permet pas de représenter correctement les changements abrupts des propriétés des couches. D'autre part, les modèles à "couches discrètes" (LayerWise, LW) permettent une représentation explicite de l'échelle mésoscopique, mais il sont souvent associés à des coûts de calcul très importants. L'ordre du modèle cinématique détermine également la capacité du modèle à résoudre les gradients de la réponse mécanique de la structure multicouche. Les approches à cinématique variable permettent d'optimiser les coûts de calcul par rapport à une application donnée [6, 7]. La Sublaminate Generalized Unified Formulation (SGUF) est une approche à cinématique variable qui permet d'appliquer des descriptions ESL à des groupes de couches (les "sublaminates") : ceci permet d'adapter le choix du modèle cinématique à la réponse mécanique des groupes des couches et d'avoir une réponse précise pour un coût optimal. Pour une configuration sandwich par exemple, il est possible d'utiliser un modèle cinématique riche pour les couches épaisses et/ou visqueuses du coeur, tout en gardant des modèles simples pour les couches minces et rigides des peaux [8]. Cette approche de modélisation a été implantée dans le cadre d'une solution basée sur la méthode de Ritz, ce qui fournit un outil numérique fiable et flexible pour calculer la réponse vibratoire de plaques sandwich [9, 10].
Ces travaux étudient pour la première fois les vibrations libres de plaques et poutres sandwichs avec des couches viscoélastiques représentées par un modèle de Zener fractionnaire par l'approche à cinématique variable SGUF-Ritz. Le problème aux valeurs propres est non-linéaire à cause de la dépendance aux fréquences de la matrice de rigidité. Le système algébrique complexe est ici résolu par une méthode iterative [11]. Cette méthode est validée à l'aide de configurations sandwichs classiques et à coeurs multiples proposées dans la littérature [4, 12, 13]. L'influence des modèles cinématiques sur la réponse vibratoire amortie de ces structures est enfin étudiée.

2. Modélisation

On présente par la suite la modélisation du comportement viscoélastique par les dérivés fractionnaires et une description succincte de l'approche Ritz-SGUF.

2.1. Modèle viscoélastique aux dérivées fractionnaires

Afin de décrire le comportement viscoélastique, un modèle rhéologique est nécessaire. Les modèles généralisés de type Kelvin-Voigt ou Maxwell sont couramment utilisés mais ils nécessitent un grand nombre de paramètres à identifier. Au cours des dernières années, les modèles fractionnaires sont devenus populaires car ils permettent de décrire le comportement viscoélastique sur une large gamme de fréquences avec peu de paramètres. La loi viscoélastique est une des premières applications du calcul fractionnaire [14] et la relation entre la contrainte et la déformation est définie comme suit :

$$\sigma(x,t) = E D^{\alpha} \varepsilon(x,t) \qquad \text{(Eq. 1)}$$

où E est le paramètre du matériau et le symbole D^{α} dénote la dérivée fractionnaire d'ordre α par rapport au temps. L'utilisation de la dérivée fractionnaire dans la loi de comportement nécessite l'introduction d'un élément rhéologique nommé spring-pot [15]. Cet élément correspond à une représentation asymptotique d'assemblage d'éléments élastiques (springs) et viscoélastiques traditionnels (dash-pots)

connectés en série et en parallèle, cf. Fig. 1. L'élément spring-pot permet ainsi de modéliser différents comportements mécaniques en changeant l'ordre de dérivation α. Si $\alpha \to 0$, le comportement de l'élément fractionnaire tend vers la réponse élastique ; dans le cas où $\alpha \to 1$, la viscosité prédomine.

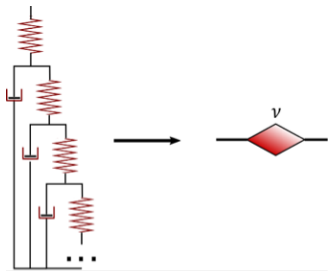

Fig. 1. Elément rhéologique fractionnaire "spring-pot"

Il y a plusieurs définitions mathématiques des opérateurs d'ordre non-entier [16]. Dans ce travail, la définition classique de dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est utilisée :

$$(D_a^\alpha f)_{RL}(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau, \quad t > 0 \quad \alpha \in \mathbb{R}_+ \tag{Eq. 2}$$

où Γ est la fonction Gamma. Le modèle de Zener fractionnaire utilisé dans ces travaux a quatre paramètres. Dans le cas unidimensionnel, l'équation constitutive est [3]

$$\sigma(t) + \tau^\alpha D^\alpha \sigma(t) = E_0 \varepsilon(t) + \tau^\alpha E_\infty D^\alpha \varepsilon(t) \tag{Eq. 3}$$

ou E_0 et E_∞ sont respectivement les modules relaxé et non-relaxé, α est l'ordre de la dérivée fractionnaire et τ est le temps de relaxation. Afin de respecter l'admissibilité thermodynamique, des conditions additionnelles sont imposées sur les paramètres du modèle [2] :

$$E_\infty > E_0 > 0, \quad \tau > 0, \quad 0 < \alpha \leq 1 \tag{Eq. 4}$$

Pour introduire la loi de comportement dans le modèle d'analyse dynamique des vibrations libres, on passe du domaine temporel au domaine fréquentiel par la transformée de Fourier de la loi constitutive Eq. 3 :

$$\sigma^*(\omega) = E^*(\omega)\varepsilon^*(\omega)$$

où E^* est le module complexe défini par

$$E^*(\omega) = \frac{E_0 + E_\infty (i\omega\tau)^\alpha}{1 + (i\omega\tau)^\alpha} \tag{Eq. 5}$$

Le module complexe est composé de la partie réelle et imaginaire :

$$E^*(\omega) = E'(\omega) + iE''(\omega) = E'(\omega)[1 + i\eta(\omega)] \tag{Eq. 6}$$

où E' est le module élastique et E'' represente la composante amortissante visqueuse. Le rapport entre ces modules définit le facteur de perte η :

$$\eta(\omega) = \frac{E''(\omega)}{E'(\omega)} \tag{Eq. 7}$$

qui mesure l'amortissement du matériau.

2.2. Description de la géométrie

On considère une plaque de volume $V = \Omega \times \left[-\frac{h}{2} \leq x_3 \leq \frac{h}{2}\right]$ d'épaisseur constante h et de surface $\Omega = [0, L_1] \times [0, L_2]$ définie dans le plan (x_1, x_2). Soit une plaque en composite composée de $p = 1, 2, \ldots N_p$ couches homogènes d'épaisseur h_p superposées suivant $x_3 \equiv z$, cf. Fig. 2. Dans l'approche SGUF, la plaque est divisée en $k = 1, 2, \ldots N_k$ "sublaminates", chacun d'épaisseur constante h_k et composé de N_p^k couches adjacentes. L'indice p est réservé aux plis physiques et l'indice k aux sublaminates. Les valeurs liées au pli p du sublaminate k sont notées par $()^{p,k}$. On introduit les coordonnées locales $z_p \in \left[-\frac{h_p}{2}, \frac{h_p}{2}\right]$ et $z_k \in \left[-\frac{h_k}{2}, \frac{h_k}{2}\right]$ sous forme adimensionnée :

$$\zeta_p = \frac{2z_p}{h_p}; \quad \zeta_k = \frac{2z_k}{h_k} \quad \text{où} \quad \zeta_p = \frac{h_k}{h_p}\zeta_k + \frac{2}{h_p}\left(z_{0k} - z_{0p}\right) \tag{Eq. 8}$$

et z_{0p} et z_{0k} sont respectivement les coordonnées z du plan moyen d'un pli et d'un sublaminate.

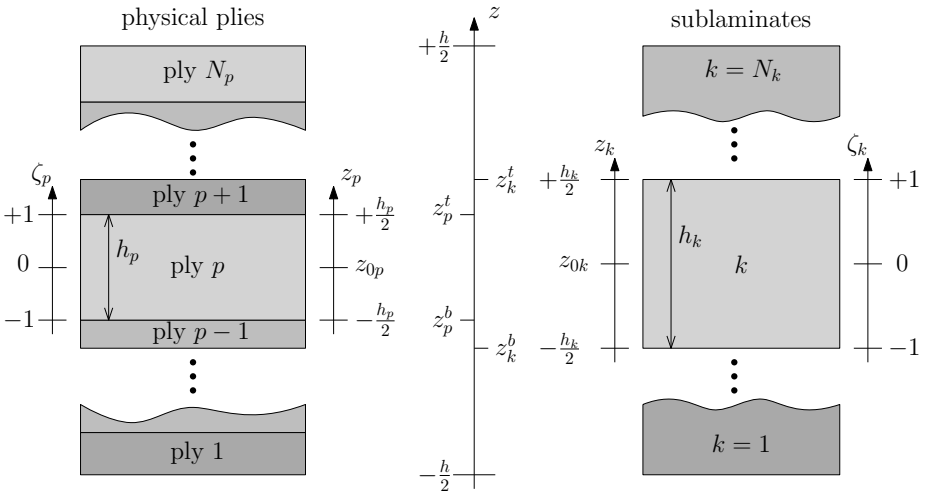

Fig. 2. SGUF : subdivision de la section stratifiée en sublaminates

2.3. L'approche SGUF-Ritz

Le modèle cinématique de plaque est formulé par le biais d'une expansion en ζ des déplacements u_i ($i \in \{1, 2, 3\}$) introduite *a priori* dans l'approche variationnelle. En adoptant la notation tensorielle et la convention de sommation d'Einstein, la forme faible des équations d'équilibre est exprimée par :

$$\int_V \delta\epsilon_{ij}\, \sigma_{ij} + \delta u_i\, \rho\, \ddot{u}_i\, dV = 0 \tag{Eq. 9}$$

où ϵ_{ij}, σ_{ij} sont respectivement les tenseurs des déformations et des contraintes, ρ est la masse volumique, δ indique la variation admissible. Le principe des travaux virtuels Eq. 9 peut-être réécrit en séparant les intégrales dans le plan et dans l'épaisseur et en introduisant la définition des sublaminates :

$$\sum_{k=1}^{N_k} \sum_{p=1}^{N_p^k} \int_\Omega \int_{h_p} \delta\epsilon_{ij}^{p,k} \sigma_{ij}^{p,k} + \delta u_i^{p,k} \rho^{p,k} \ddot{u}_i^{p,k}\, dz\, dx_\alpha = 0 \tag{Eq. 10}$$

Dans cette approche, les déformations sont déterminées sous l'hypothèse de petites perturbations par

$$\epsilon_{ij}^{p,k} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j}^{p,k} + u_{j,i}^{p,k}\right); \tag{Eq. 11}$$

où la notation $()_{,i}$ signifie la dérivée partielle par rapport à x_i. Le champ des contraintes est défini par la loi constitutive de chaque pli par

$$\sigma_{ij}^{p,k} = C_{ijlm}^{p,k}(\omega)\epsilon_{lm}^{p,k} \tag{Eq. 12}$$

où $C_{ijlm}(\omega)$ sont les coefficients de rigidité qui prennent en compte la dépendance aux fréquences. Le comportement des couches visqueuses est défini par la loi viscoélastique donnée en section 2.1.
L'approche SGUF permet d'introduire différentes approximations cinématiques dans chaque sublaminate. En utilisant la notation indicielle qui caractérise les Formulations Unifiées, on regroupe les composantes du vecteur déplacement de chaque pli au sein d'un sublaminate dans un seul vecteur :

$$\boldsymbol{\mathcal{U}}^{p,k} = \left\{u_1^{p,k}, u_2^{p,k}, u_3^{p,k}\right\} \tag{Eq. 13}$$

La variation suivant z de chaque fonction inconnue $\mathcal{U}_r^{p,k}$ $(r = 1, 2, 3)$ est définie par sublaminate par une expansion polynomiale d'ordre $N_{\mathcal{U}_r}^k$. Dans chaque sublaminate, cette approximation peut être appliquée indépendamment sur chacun des N_p^k plis (description LW) ou globalement sur toute l'épaisseur du sublaminate (description ESL). En utilisant la notation SGUF le modèle cinématique est exprimé comme suit :

$$\mathcal{U}_r^{p,k}(x_1, x_2, z_p) = \sum_{\alpha_{\mathcal{U}_r}=0}^{N_{\mathcal{U}_r}^k} F_{\alpha_{\mathcal{U}_r}}(z_p)\,\hat{\mathcal{U}}_{\alpha_{\mathcal{U}_r}}^{p,k}(x_1, x_2) \tag{Eq. 14}$$

Dans le cas d'une description LayerWise, $F_{\alpha_{\mathcal{U}_r}}$ est définie sur la coordonnée du pli z_p ; l'approximation pour tout le sublaminate est ensuite obtenue lors d'un assemblage de tous les plis en imposant la continuité des déplacements entre plis adjacents. Dans le cas d'une description ESL, la fonction $F_{\alpha_{\mathcal{U}_r}}$ est définie sur la coordonnée z_k et l'équation Eq. 14 ne dépend plus de l'indice du pli physique p. Pour une présentation plus détaillée des approximations on renvoie aux articles dédiés [8, 9].
Une fois le modèle cinématique de plaque spécifié, le problème initial 3D est transformé en un problème 2D dans le plan (x_1, x_2). Par la méthode de Ritz, on cherche la solution en forme faible du problème 2D dans l'espace défini par des fonctions d'approximation globale, notées $N(x_1, x_2)$:

$$\hat{\mathcal{U}}_{r_{\alpha_{\mathcal{U}_r}}}^{p,k}(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{M} N_{\mathcal{U}_r i}(x_1, x_2)\,\mathcal{U}_{r_{\alpha_{\mathcal{U}_r}} i}^{p,k} \tag{Eq. 15}$$

Les calculs se déroulent dans un domaine numérique (ξ_1, ξ_2) avec $\xi_\alpha \in [-1, 1]$ pour lequel une correspondance est établie avec le domaine physique (x_1, x_2) [17]. En outre, la $i-$ème fonction de Ritz est exprimée comme le produit de deux fonctions 1D :

$$N_{\mathcal{U}_r i}(\xi_1, \xi_2) = \phi_{\mathcal{U}_r m}(\xi_1)\,\psi_{\mathcal{U}_r n}(\xi_2) \tag{Eq. 16}$$

où $m = 1 \ldots R$, $n = 1 \ldots S$ (notons que les valeurs R et S peuvent être différentes) et la relation entre les indices i, m et n est donnée par $i = S(m-1) + n$. Différents types de fonctions d'approximation peuvent être utilisés. Dans ces travaux, on utilise les polynômes orthogonaux de Legendre multipliés par des fonctions frontières, afin de pouvoir vérifier différents types de conditions aux limites tout en assurant la stabilité numérique pour des valeurs de R, S élevées [10] :

$$\phi_{\mathcal{U}_r m}(\xi_1) = p_{\mathcal{U}_r m}(\xi_1)\,b_r(\xi_1); \qquad \psi_{\mathcal{U}_r n}(\xi_2) = p_{\mathcal{U}_r n}(\xi_2)\,b_r(\xi_2) \tag{Eq. 17a}$$

et les expressions des fonctions utilisées pour un ordre d'expansion l sont

$$p_{\mathcal{U}_r 0}(\xi_\alpha) = 1,\ p_{\mathcal{U}_r 1}(\xi_\alpha) = \xi_\alpha,\ p_{\mathcal{U}_r l}(\xi_\alpha) = \frac{(2l+1)\,\xi_\alpha\,p_{\mathcal{U}_r l} - l\,p_{\mathcal{U}_r (l-1)}}{l+1} \quad (l = m, n) \tag{Eq. 17b}$$

$$b_r(\xi_\alpha) = (1+\xi_\alpha)^{e_{1r}}(1-\xi_\alpha)^{e_{2r}} \quad \text{où} \quad \begin{cases} e_{1r}, e_{2r} = 1 & \text{si } \mathcal{U}_r(\xi_\alpha = \pm 1) = 0 \\ e_{1r}, e_{2r} = 0 & \text{si } \mathcal{U}_r(\xi_\alpha = \pm 1) \text{ libre} \end{cases} \tag{Eq. 17c}$$

2.4. Système matriciel et solution du problème aux valeurs propres

En introduisant les équations Eq. 14 et Eq. 15 dans l'équation d'équilibre Eq. 10 on obtient le système matriciel suivant :

$$[\boldsymbol{K}(\omega) - \lambda^2 \boldsymbol{M}]\,\boldsymbol{\mathcal{U}} = 0 \qquad \text{(Eq. 18)}$$

où $\boldsymbol{K}$ est la matrice de rigidité globale qui dépend des fréquences, $\boldsymbol{M}$ est la matrice de masse globale et $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ est le vecteur de déplacement global. Suite à la présence de matériaux viscoélastiques, la matrice de rigidité est complexe.
Plusieurs méthodes dédiées à la résolution du problème aux valeurs propres Eq. 18 sont synthétisées dans [18]. Ici on utilise la méthode itérative basée sur la solution aux valeurs propres complexes (Iterative Complex Eigensolution method, ICE) [11]. La valeur propre associée au problème Eq. 18 est exprimée par

$$\lambda = \omega\,(1 + i\,\eta) \quad \text{où} \quad i = \sqrt{-1} \qquad \text{(Eq. 19)}$$

avec ω est la pulsation amortie et η le facteur de perte. La solution de la première itération s'obtient pour une matrice de rigidité indépendante de la fréquence et correspond ainsi au problème à élasticité différée, pour lequel la valeur propre est réelle $\lambda = \omega_0$:

$$[\boldsymbol{K}(0) - \lambda^2 \boldsymbol{M}]\,\boldsymbol{\mathcal{U}} = 0 \quad \longrightarrow \quad \lambda = \omega_0 \qquad \text{(Eq. 20)}$$

On indiquera par η_0 le facteur de perte associé à ω_0, c-à-d :

$$[\boldsymbol{K}(\omega_0) - \lambda^2 \boldsymbol{M}]\,\boldsymbol{\mathcal{U}} = 0 \quad \longrightarrow \quad \lambda = \omega\,(1 + i\,\eta_0) \qquad \text{(Eq. 21)}$$

Des itérations successives sont calculées jusqu'à convergence de la valeur propre λ par rapport à une tolérance fixée à 10^{-6} : pour toutes les configurations examinées, la convergence a été atteinte en moins de 6 itérations.

3. Resultats

3.1. Convergence de la méthode de Ritz

On s'intéresse d'abord à établir la convergence de la méthode numérique proposée en considérant les quatre premiers modes de vibration d'une plaque sandwich encastrée [12]. Le problème aux valeurs propres Eq. 18 est résolu pour un modèle cinématique fixé et différents ordres de l'approximation de Ritz $R = S$, cf Eq. 16. Tab. 1 reporte les pulsations propres ω_0 du système linéaire (élasticité différée), ainsi que les pulsations propres ω et les facteurs de perte η du système viscoélastique. A partir de ces résultats on peut conclure qu'une expansion de Ritz avec $R = S = 10$ est suffisante pour atteindre la convergence de la méthode Ritz.

3.2. Poutre sandwich avec coeur viscoélastique

On considère ici une poutre sandwich à 3 et 5 couches, traité dans [4] en utilisant le modèle de Zener fractionnaire. D'abord on étudie une poutre encastrée-libre (cantilever) de longueur 0.2m à 3 couches avec un coeur viscoélastique d'épaisseur 0.002m et les peaux en aluminium d'épaisseur 0.001m. L'aluminium est isotrope avec les caractéristiques suivantes : module d'Young E_{al} = 70.3GPa, coefficient de Poisson $\nu_{al} = 0.3$, masse volumique ρ_{al} = 2690kg/m^3. Le modèle viscoélastique de Zener fractionnaire Eq. 3 est utilisé et définit le module de cisaillement du matériau du coeur (isotrope, $\nu_c = 0.5$) avec ces paramètres [4] : G_0 = 1.5MPa, G_∞ = 69.95MPa, $\tau = 1.4052 \cdot 10^{-5} s$ et $\alpha = 0.79$. La masse volumique de la couche viscoélastique est ρ_{ve} = 1600kg/m^3. Lewandowski et Baum [4] utilisent le modèle d'Euler-Bernoulli pour les peaux et le modèle de Timoshenko (Timo) pour le coeur viscoélastique, et leur résolution est basée sur la méthode des éléments finis (MEF).

		mode 1	mode 2	mode 3	mode 4
R=S=5	ω_0 (rad/s)	481.20	841.55	970.37	1286.11
	ω (rad/s)	520.34	922.39	1063.03	1422.31
	η	0.241	0.269	0.267	0.283
R=S=10	ω_0 (rad/s)	481.10	838.74	964.57	1283.92
	ω (rad/s)	520.25	921.39	1060.20	1422.20
	η	0.241	0.272	0.272	0.284
R=S=20	ω_0 (rad/s)	481.10	838.74	964.56	1283.92
	ω (rad/s)	520.25	921.39	1060.20	1422.20
	η	0.241	0.272	0.272	0.284

Tab. 1. Convergence par rapport aux fonctions de Ritz des pulsations propres et facteurs de perte pour les 4 premiers modes d'une plaque sandwich encastrée

A partir des données présentées, on valide la méthode SGUF-Ritz avec deux approches LayerWise (LW) : (i) modèle Timoshenko (Timo) pour chaque couche ; (ii) modèle Timoshenko pour les peaux, et un modèle raffiné avec une expansion d'ordre 2 du déplacement transverse pour les couches visqueuses. Il est important de souligner que le modèle raffiné utilise la loi constitutive 3D, contrairement aux modèles Euler-Bernoulli et Timoshenko qui reposent sur l'hypothèse de contrainte plane $\sigma_{33} = 0$. Les résultats (pulsation ω et coefficient d'amortissement γ) sont présentés dans le Tab. 3.2. On rappelle que le coefficient d'amortissement γ et le facteur de perte sont liés par la relation : $\gamma = 2\eta$. A partir des résultas obtenus, on constate que pour la poutre cantilever à trois couches les deux méthodes (MEF et Ritz) donnent pratiquement les mêmes résultats et le modèle cinématique raffiné n'a pas d'influence sur la solution.
Une fois la méthode SGUF-Ritz validée, on propose la modélisation de la poutre cantilever à 5 couches (Al/visco/Al/visco/Al) [4]. Les caractéristiques des matériaux sont identiques à ceux de la poutre à 3 couches. La géométrie de la structure est la suivante : l'épaisseur des couches d'aluminium aux extrémités est 0.001m, l'épaisseur de la couche d'aluminium au milieu de la structure est 0.005m, l'épaisseur des couches visqueuses est 0.002m. La longueur de la poutre est 0.2m. Les résultats (pulsation ω et coefficient d'amortissement γ) sont présentés dans le tableau 3. On compare toujours deux approches LayerWise : (i) modèle Timoshenko (Timo) pour chaque couche ; (ii) modèle Timoshenko pour les couches Al et modèle raffiné avec prise en compte de la loi constitutive 3D pour les couches viscoélastiques. Notre approche Timo donne des résultats du même ordre que ceux obtenus par Lewandowski et Baum. Par contre le modèle raffiné donne des résultats différents à partir du troisième mode, ce qui montre l'importance de prendre en compte la déformation normale transversale pour les couches viscoélastiques.

MEF+ Timo [4]		Ritz + Timo		Ritz raffiné	
$\omega(rad/s)$	γ	$\omega(rad/s)$	γ	$\omega(rad/s)$	γ
194.82	0.104	194.22	0.100	194.20	0.100
851.20	0.159	843.72	0.149	843.59	0.150
2086.02	0.147	2070.66	0.139	2070.40	0.139
3914.96	0.124	3889.28	0.117	3888.87	0.117

Tab. 2. Poutre cantilever 3 couches - pulsations propres ω et coefficients d'amortissement adimensionnés γ.

MEF+ Timo [4]		Ritz + Timo		Ritz raffiné	
$\omega(rad/s)$	γ	$\omega(rad/s)$	γ	$\omega(rad/s)$	γ
548.54	0.074	547.47	0.072	547.33	0.072
3163.64	0.061	3150.66	0.059	3146.75	0.061
8658.20	0.043	8593.99	0.042	8556.65	0.048
16861.00	0.031	16639.59	0.030	16451.64	0.045

Tab. 3. Poutre cantilever 5 couches - pulsations propres ω et coefficients d'amortissement adimensionnés γ.

3.3. Plaque sandwich avec coeur viscoélastique

Dans cette section nous considérons une structure plaque sandwich à trois couches avec un coeur viscoélastique, en suivant un cas test proposé par Bilasse *et al.* [12]. Cette plaque est encastrée en ces 4 cotés. La plaque a une longueur L = 348mm et une largeur l = 304.8mm ; l'épaisseur de chaque peau élastique est H = 0.726mm, celle du coeur viscoélastique est h = 0.254mm. Les couches élastiques sont isotropes avec E_f = 68.9GPa, ρ_f = 2730kg/m^3 et ν_f = 0.3. Le coeur est composé de 3M ISD112 à 27ºC, un matériau isotrope (ν_c = 0.5, ρ_c = 1600kg/m^3) dont le comportement viscoélastique a été décrit dans [19] par le modèle de Maxwell généralisé à 7 paramètres présenté en Eq. 22 et un module G_0 = 0.5MPa. Le modèle classique de Kirchhoff-Love est utilisé pour les couches élastiques et le modèle de Reissner-Mindlin (FSDT) pour le coeur viscoélastique.
On propose ici de remplacer le modèle de Maxwell généralisé par le modèle de Zener fractionnaire afin de diminuer le nombre de paramètres. Pour cela, une identification inverse des paramètres est effectuée en utilisant les deux courbes du module de cisaillement complexe $G^*(\omega)$ (partie réelle et partie imaginaire) définies par le modèle de Maxwell Eq. 22. L'optimisation par essaims particulaires [20] a été choisie car cette méthode stochastique permet de prendre en compte l'hétérogénéité des valeurs dans la loi de Zener fractionnaire. Grâce à cette optimisation, les valeurs suivantes sont obtenues : le module relaxé G_0 = 0.5MPa, le module non-relaxé G_∞ = 14.52MPa, le temps de relaxation $\tau = 2.563 \cdot 10^{-5} s$ et l'ordre de dérivée fractionnaire α = 0.75.
Tab. 4 permet la comparaison entre les résultats de Bilasse *et al.* [12] et ceux obtenus par la méthode de Ritz avec une cinématique FSDT par couche et le modèle fractionnaire ainsi identifié. Suite à l'approximation $\omega \approx \omega_0$ postulée dans [12], on reporte les valeurs de la pulsation propre de l'élasticité différée ω_0 et les facteurs de perte associés η_0, cf. Eq. 21. Nous confirmons que la méthode SGUF-Ritz avec le modèle fractionnaire est cohérent par rapport aux travaux [12]. Il est précisé que nos résultats sont obtenus en incluant la déformation de cisaillement transverse aussi dans les peaux du sandwich, contrairement au modèle utilisé par Bilasse *et al.* qui utilise la CLT pour les peaux.

FSDT+Maxwell [12]		Ritz+FD Model	
ω_0 (rad/s)	η_0	ω_0 (rad/s)	η_0
481.58	0.246	481.10	0.231
839.07	0.258	838.73	0.259
967.88	0.257	964.56	0.260
1285.48	0.270	1283.92	0.271

Tab. 4. Pulsations propres ω_0 et facteurs de perte η_0 pour les 4 premiers modes d'une plaque sandwich encastrée

$$G^* = G_0\left(1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{1 + \Delta_j \omega}{\omega - i\Omega_j}\right) \quad \text{avec} \quad \begin{array}{ccc} j & \Delta_i & \Omega_j \\ 1 & 0.746 & 468.7 \\ 2 & 3.265 & 4742.4 \\ 3 & 43.284 & 71532.5 \end{array} \qquad \text{(Eq. 22)}$$

3.4. Comparaison des modèles cinématiques

On propose ici de comparer différents modèles cinématiques pour le même problème traité dans la section 3.3. On considère 2 modèles LW et 2 modèles ESL : (i) modèle LD4 : expansion par couche d'ordre 4 pour les 3 composantes des déplacements ; (ii) modèle FSDT par couche ; (iii) modèle EDZ1 : description ESL, expansion linéaire avec superposition de la fonction ZigZag ; (iv) modèle ED4 : description ESL avec une expansion d'ordre 4.
Les fréquences et les coefficients de perte sont présentés dans le tableau 5 pour quatre conditions limites différentes. Le modèle LD4 peut être considéré comme une référence. On constate que l'approche LW est beaucoup plus fiable que l'approche ESL : la structure sandwich nécessite un modèle capable de représenter les interfaces entre les peaux et le coeur, composés de matériaux dont la rigidité est très différente. En comparant les modèles LW, on observe qu'un ordre d'expansion linéaire est suffisant pour cette configuration, et qu'une expansion au 4ième ordre n'introduite que de légères différences. Parmi les modèles ESL, nous remarquons que le modèle EDZ1 (9 fonctions inconnues) donne des résultats nettement meilleurs que ED4 (15 fonctions inconnues), même en utilisant un nombre d'inconnues inférieur : pour un sandwich il est souvent préférable de rajouter la fonction ZigZag permettant de représenter l'interface entre peaux et couches, plutôt qu'augmenter l'ordre d'expansion. ED4 est incapable de capter un quelconque amortissement. On remarque finalement que le modèle EDZ1 utilise la loi constitutive 3D avec une déformation normale transversale constante, et donc sujet au verrouillage de Poisson : ceci entraîne une rigidité numérique supplémentaire et des fréquences plus élevées par rapport à la référence.

	LD4		FSDT x3		EDZ1		ED4	
	Ω(Hz)	η	Ω(Hz)	η	Ω(Hz)	η	Ω(Hz)	η
CFCF	47.21	0.196	46.97	0.195	49.61	0.194	80.94	3.20e-07
	58.61	0.192	58.37	0.192	60.51	0.189	100.55	2.90e-07
	112.00	0.247	111.81	0.247	117.87	0.253	183.05	4.90e-07
	117.67	0.257	117.17	0.256	124.53	0.247	223.26	6.75e-07
SSSS	55.60	0.220	55.60	0.220	58.99	0.231	82.99	3.48e-07
	111.37	0.298	111.37	0.298	118.41	0.297	191.04	6.38e-07
	127.38	0.308	127.38	0.308	135.59	0.304	223.83	7.15e-07
	178.76	0.324	178.76	0.324	190.99	0.313	331.82	9.44e-07
CSCS	67.30	0.226	67.10	0.226	71.46	0.227	114.27	4.48e-07
	133.89	0.301	133.73	0.301	142.63	0.295	241.11	7.60e-07
	138.16	0.273	137.65	0.273	147.52	0.264	262.10	8.19e-07
	199.18	0.303	198.71	0.303	213.16	0.290	384.77	1.06e-06
CCCC	83.22	0.241	82.80	0.241	88.44	0.235	152.20	5.57e-07
	147.33	0.272	146.64	0.272	157.37	0.260	284.72	8.73e-07
	169.53	0.272	168.73	0.272	181.44	0.259	334.13	9.78e-07
	227.39	0.283	226.35	0.280	243.80	0.268	456.33	1.22e-06

Tab. 5. Fréquences et facteurs de perte pour les 4 premiers modes d'une plaque sandwich avec un coeur viscoélastique 3M ISD112 à 27C^o – comparaison entre différents modèles cinématiques pour différentes conditions aux limites

4. Conclusion

Cet article a présenté pour la première fois une analyse des vibrations libres de plaques sandwich viscoélastiques sur la base de l'approche à cinématique variable SGUF et d'un modèle de Zener fractionnaire pour le comportement viscoélastique. L'outil numérique utilise la méthode de Ritz pour

construire le système algébrique complexe associé au problème aux valeurs propres non-linéaire qui permet de déterminer les fréquences propres et les facteurs de perte de la plaque sous différentes conditions aux limites. Trois avantages principaux de cet outil peuvent être identifiés : la méthode de Ritz est particulièrement adaptée pour étudier la réponse vibratoire des structures ; l'approche SGUF permet de formuler des modèles de structures composites sandwichs quelconques avec une précision et un nombre d'inconnues cinématiques arbitraires ; l'adoption des dérivées fractionnaires permet de réduire le nombre de paramètres nécessaire pour décrire le comportement viscoélastique sur une large gamme de fréquences. Les 4 paramètres du modèle de Zener fractionnaire peuvent être identifiés à partir d'un modèle de Maxwell généralisé à travers un algorithme d'optimisation stochastique (essaims particulaires). La comparaison avec des résultats de poutres et plaques sandwichs classiques ou multi-coeurs disponibles en littérature a permis de valider l'outil numérique. Par la suite, nous envisageons des études sur différentes configurations de type "constrained layer damping" ainsi que d'analyser la réponse vibratoire forcée.

Références

[1] S. Neumark « Concept of complex stiffness applied to problems of oscillations with viscous and hysteretic damping », Reports and Memoranda 3269, Aeronautical Reseach Council, 1962.

[2] R. L. Bagley, P. J. Torvik « On the Fractional Calculus Model of Viscoelastic Behavior », *Rheology* Vol. 30 n° 11, pp. 133–155, 1986.

[3] A. C. Galucio, J.-F. Deu, R. Ohayon « Finite element formulation of viscoelastic sandwich beams using fractional derivative operators », *Comput. Mech.* Vol. 33, pp. 282–291, 2004.

[4] R. Lewandowski, M. Baum « Dynamic characteristics of multilayered beams with viscoelastic layers described by the fractional Zener model », *Arch Appl Mech* Vol. 85, pp. 1793–1814, 2015.

[5] N. Reddy, Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells : Theory and Analysis, Second Edition, CRC Press, 2003.

[6] E. Carrera « Theories and Finite Elements for Multilayered Plates and Shells : A Unified Compact Formulation with Numerical Assessment and Benchmarking », *Arch. Comput. Meth. Engng.* Vol. 10, pp. 215–296, 2003.

[7] M. Petrolo, A. Lamberti « Axiomatic/asymptotic analysis of refined layer-wise theories for composite and sandwich plates », *Mech. Adv. Mater. Struct.* Vol. 23, pp. 28–42, 2015.

[8] M. D'Ottavio « A Sublaminate Generalized Unified Formulation for the analysis of composite structures and its application to sandwich plates bending », *Compos. Struct.* Vol. 142, pp. 187–199, 2016.

[9] M. D'Ottavio, L. Dozio, R. Vescovini, O. Polit « Bending analysis of composite laminated and sandwich structures using sublaminate variable-kinematic Ritz models », *Compos. Struct.* Vol. 155, pp. 45–62, 2016.

[10] R. Vescovini, L. Dozio, M. D'Ottavio, O. Polit « On the Application of the Ritz Method to Free Vibration and Buckling Analysis of Highly Anisotropic Plates », *Compos. Struct.* Vol. 192, pp. 460–474, 2018.

[11] R. M. Lin, M. K. Lim « Complex eigensensitivity-based characterization of structures with viscoelastic damping », *J. Acoustical Soc. Am.* Vol. 100, pp. 3182 – 3191, 1996.

[12] M. Bilasse, L. Azrar, E. Daya « Complex modes based numerical analysis of viscoelastic sandwich plates vibrations », *Compos. Struct.* Vol. 89, pp. 539–555, 2011.

[13] S. Kapuria, J. K. Nath « Coupled global-local and zigzag-local laminate theories for dynamic analysis of piezoelectric laminated plates », *Compos. Struct.* Vol. 95, pp. 163–172, 2013.

[14] P. G. Nutting « A general stress-strain time formula », *J. Franklin Institute* Vol. 285, pp. 513–524, 1943.

[15] R. Koeller « Applications of fractional calculus to the theory of viscoelasticity », *J. Appl. Mech.* Vol. 51 n° 12, pp. 299–307, 1984.

[16] S. Samko, A. A. Kilbas, O. Marichev, Fractional Integrals and derivatives : Theory and Applications, Gordon and Breach Science, Yverdon, 1993.

[17] L. Dozio, E. Carrera « Ritz analysis of vibrating rectangular and skew multilayered plates based on advanced variable-kinematics models », *Compos. Struct.* Vol. 94, pp. 2118–2128, 2012.

[18] L. Rouleau, J.-F. Deü, A. Legay « Review of reduction methods based on modal projection for highly damped structures », in : 11th World Congress on Computational Mechanics (WCCM XI), 2014.

[19] M. Trindade, A. Benjeddou, R. Ohayon « Modeling of Frequency-Dependent Viscoelastic Materials for Active-Passive Vibration Damping », *J. Vib. Acoustics* Vol. 122 n° 2, pp. 169–174, 2000.

[20] J. Kennedy, R. Eberhart « Particle Swarm Optimization », in : Proc. IEEE Internat. Conf. Neural Networks, pp. 1942–1948, 1995.