Actes du séminaire de didactique des mathématiques 2018

Julia Pilet, Céline Vendeira

ARDM

Actes du séminaire de didactique des mathématiques

Année 2018

Édités par

Julia Pilet & Céline Vendeira

Université de Paris

IREM PARIS

LDAR
LABORATOIRE DE DIDACTIQUE ANDRÉ REVUZ

IREM de Paris – Université Paris Diderot
Directeur de publication Christophe Hache
www.irem.univ-paris-diderot.fr
Dépôt légal : 2019 – ISBN : 978-2-86612-393-2

PRESENTATION

Le séminaire de didactique des mathématiques de l'ARDM, organisé par l'Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques (ARDM), a pour but de favoriser la mise en discussion et la diffusion des recherches en didactique des mathématiques. Il s'agit d'un outil que s'est donné l'ARDM pour soutenir la structuration d'une communauté de chercheur-e-s. Sous réserve de l'accord des intervenant-e-s, les présentations sont filmées et diffusées en ligne. Le travail de capture, de montage et d'hébergement des vidéos est assuré par l'IREM de Paris. Au fur et à mesure de la finalisation des textes, ceux-ci sont mis à disposition sur le site de l'ARDM. Ils sont ensuite regroupés en un volume. Le présent ouvrage regroupe les textes issus des séminaires de l'année 2018 et, à titre exceptionnel, un texte du séminaire de l'année 2017. Par ailleurs, depuis 2014, le groupe des jeunes chercheur-e-s de l'ARDM organise une session de poster durant les sessions du séminaire. Ces présentations affichées donnent lieu à des textes courts que vous trouvez également dans ce volume d'actes.

Le premier séminaire de l'année, celui de février 2018, a eu lieu à Paris. Le second, délocalisé, s'est déroulé sur le site de la MMI à Lyon avec le soutien l'ENS Lyon, de la Maison des Mathématiques et de l'Informatique, de Plaisir Maths et de l'IREM de Paris. Nous avons pu compter sur l'appui de Marie-Line Gardes et Nicolas Pelay pour l'organisation locale. Nous les en remercions. Le séminaire de novembre 2018, qui, comme nous en avons maintenant l'habitude, accueille sur une demi-journée le colloquium CFEM-ARDM, a eu lieu à Paris avec le soutien de l'Université Paris Diderot, du LDAR, de l'IREM de Paris et de la CFEM.
Nous remercions Simon Modeste pour sa contribution à la relecture d'une partie des textes du colloquium CFEM-ARDM, Christophe Hache et l'équipe des jeunes chercheur-e-s de l'ARDM pour leur aide dans l'organisation du séminaire.

Bonne lecture.

Julia Pilet et Céline Vendeira

Responsables du séminaire de l'ARDM
pour les années 2018 et 2019

SOMMAIRE

Séminaire des 2 et 3 février 2018

Travaux en cours *8*

Hamid Chaachoua

T4TEL un cadre de référence didactique pour la conception des EIAH.

Travaux en cours *26*

Fabien Emprin

Logiciel pour simuler les pratiques des enseignants : outil de formation réflexif et outil de recherche sur les savoirs de formation.

Travaux en cours *46*

Maha Abboud et Janine Rogalski

Les concepts et méthodes pour analyser l'activité de l'enseignant de mathématiques utilisant des technologies en classe.

Présentation de thèse *56*

Anne Voltolini

Duo d'artefacts numérique et matériel pour l'apprentissage de la géométrie au cycle 3.

Présentation de thèse *76*

Stéphane Sirejacob

Le travail hors la classe au collège : le cas des équations.

Travaux en cours *94*

Annick Fagnant

Des illustrations qui accompagnent les problèmes à la construction de représentations schématiques par les élèves : enjeux, complémentarités et opportunités pour les pratiques de classe.

Travaux en cours *114*

Catherine Houdement

Problèmes arithmétiques basiques : le cœur du problème ?

Travaux en cours *122*

Emmanuel Sander

Une approche interprétative de la résolution de problèmes.

Session de posters **142**

Sonia Maria Monteiro de Silva Burigato, José Luiz Magalhães de Freitas, Cécile Ouvrier-Buffet
Les étudiants et leurs choix pour la construction d'un nouveau concept : l'introduction du concept de limite de fonction.

Séminaire des 23 et 24 mars 2018

Travaux en cours **147**

Gilles Aldon
Diffusion des mathématiques, l'exemple de la Maison des Mathématiques et de l'Informatique.

Travaux en cours **159**

Alix Boissière et Nicolas Pelay
L'Atelier des potions : un jeu didactique & ludique.

Travaux en cours **172**

Virginie Deloustal-Jorrand et Simon Modeste
Les Situations de Recherche par Maths à Modeler : articuler recherche, formation et diffusion.

Travaux en cours **192**

Cécile Allard
Étude du processus d'institutionnalisation dans les pratiques effectives de fin d'école primaire: le cas de l'enseignement des fractions.

Présentation de thèse **209**

Audrey Daina

Usage des ressources dans les pratiques ordinaires: tensions entre la préparation d'une séquence et sa réalisation dans la classe de mathématiques.

Ouverture sur **232**

Flora Schwartz et Jérôme Prado

La dyscalculie développementale: bases cérébrales et cognitives.

Travaux en cours **251**

Thierry Dias
Difficultés d'apprentissage en mathématiques: un regard didactique.

Travaux en cours **260**

Gustavo Barallobres et Laurie Bergeron

Discours noosphériens dans le champ de l'adaptation scolaire au Québec : certains exemples dans l'enseignement des mathématiques.

Session de posters **285**

Nathalie Brasset

Conception d'un dispositif pour étudier les décisions didactiques d'un enseignant dans un EIAH.

Session de posters **287**

Ratha Loeng

Les fonctions sinus et cosinus dans le secondaire en France et au Cambodge.

Séminaire des 15 et 16 novembre 2018

Présentation d'habilitation à diriger des recherches **289**

Patrick Gibel
Élaboration et usages d'un modèle multidimensionnel d'analyse des raisonnements en classe de mathématiques.

Travaux en cours **313**

Thomas Barrier et Azzedine Hajji
Validation empirique, explication et démonstration.

Travaux en cours **314**

Luis Radford
Une théorie vygotskienne de l'enseignement-apprentissage : la théorie de l'objectivation.

Travaux en cours **333**

Berta Barquero Farràs et Ignasi Florensa Ferrando
Méthodologie pour le design et analyse de Parcours d'Étude et Recherche.

Présentation de thèse **342**

Karine Bernad
Une contribution à l'étude de conditions et de contraintes déterminant les pratiques enseignantes dans le cadre de mises en œuvre de parcours d'étude et de recherche en mathématiques au collège.

Session de posters **359**

Macarena Flores-Gonzalez
Complétude et structure algébrique de R au niveau secondaire.

Session de posters **364**

Rosamaria Crisci, Hamid Chaachou, Pierre Tchounikine
La transposition d'un dispositif de manipulation tangible dans un environnement de programmation au cycle 3.

Session de posters.. *367*

Nicolás LEÓN
Récurrence et récursivité : Des concepts indissociables à l'interface des mathématiques et de l'informatique.

Colloquium de mathématiques et enseignement des mathématiques CFEM et ARDM : Concret et abstrait dans l'apprentissage des mathématiques, de la maternelle à l'université 16 novembre 2018

Viviane Durand-Guerrier *370*
Penser et organiser les articulations entre abstrait et concret dans l'apprentissage des mathématiques, de la maternelle à l'université.

Emmanuel Beffara *383*
Les abstractions informatiques peuvent-elles concrétiser les mathématiques ?

Cécile Ouvrier-Buffet *391*
Quels outils pour analyser l'activité de preuve en mathématiques à l'école primaire ? Propositions à partir d'une situation de recherche en CM1/CM2.

Chantal Menini et Pascale Sénéchaud *409*
Les croquis et les représentations géométriques donnent-ils du sens ?

Séminaire des 17 et 18 novembre 2017

Nicolas Balacheff *423*
Contrôle, preuve et démonstration trois régimes de la validation.

T4TEL UN CADRE DE REFERENCE DIDACTIQUE POUR LA CONCEPTION DES EIAH

Hamid **CHAACHOUA**

Université Grenoble Alpes LIG

Hamid.Chaachoua@imag.fr

Résumé

Les recherches menées au sein de mon équipe s'inscrivent dans le domaine des Environnements Informatiques pour l'Apprentissage Humain (EIAH) où la modélisation des connaissances et des savoirs est une question centrale. En effet, elle est à la base des différents services proposés par les EIAH comme l'indexation et la gestion des ressources, la conception des scénarios d'apprentissage ou la production de diagnostics et de rétroactions vers l'élève ou vers l'enseignant.

C'est dans ce contexte et afin de disposer d'un modèle didactique pouvant être implémenté que nous avons développé le cadre de référence T4TEL.

Le cadre T4TEL s'inscrit dans la Théorie Anthropologique du Didactique et plus spécifiquement dans l'approche praxéologique : ce cadre représente une formalisation et une extension du modèle praxéologique. Deux extensions sont présentées : l'introduction de la notion de praxéologie personnelle et de la notion de variable.

Mots clés

Praxéologies, praxéologie personnelle, variables, générateur de types de tâches, T4TEL, EIAH

I. INTRODUCTION

Les recherches menées au sein de mon équipe MeTAH[1] s'inscrivent dans le domaine des Environnements Informatiques pour l'Apprentissage Humain (EIAH). C'est une équipe interdisciplinaire regroupant des chercheurs en didactique des mathématiques et des sciences et des chercheurs en informatique autour des problématiques sur la conception et l'usage des EIAH. Ce qui est central dans ces problématiques est la modélisation des connaissances et des savoirs et leurs représentations informatiques. En effet, elle est à la base des différents services proposés par les EIAH comme l'indexation et la gestion des ressources, la conception des scénarios d'apprentissage ou la production de diagnostics et de rétroactions vers l'élève ou vers l'enseignant. Dans ces problématiques nous avons voulu prendre en compte la relativité institutionnelle des savoirs aussi bien dans la modélisation des savoirs que dans les services EIAH. En effet, un savoir n'existe pas "in vacuo" dans un vide social : tout savoir apparaît, à

[1] Modèles et Technologies pour l'Apprentissage Humain.

un moment donné, dans une société donnée, comme ancré dans une ou des institutions. (Chevallard, 1989).

C'est dans ce contexte que nous avons éprouvé un besoin de disposer d'un modèle didactique pouvant être implémenté, permettant de produire différents services EIAH et prenant en compte les conditions et contraintes institutionnelles.

Plusieurs raisons nous ont motivé à se placer dans la Théorie Anthropologique du Didactique (Chevallard, 1992, 1999) :

- La relativité institutionnelle des savoirs. Elle est une des sensibilités clés de la TAD au sens d'Artigue (2011).
- Le modèle praxéologique permet de décrire l'organisation du savoir au sein d'une institution, les activités des sujets attendues par l'institution. Notre travail a consisté à intégrer dans cette approche les comportements non attendus par l'institution, en particulier les erreurs des élèves par l'introduction de la praxéologie personnelle (Chaachoua, 2010 ; Croset et Chaachoua, 2016).
- Le modèle praxéologique peut être formalisé pour une implémentation informatique et donc en une modélisation informatique des connaissances (Chaachoua, 2010).

Ces éléments sont donc à l'origine du développement du cadre de référence T4TEL[2] (Chaachoua et al. 2013, Chaachoua 2010). Soulignons tout d'abord que si ce cadre a été motivé par des besoins liés à des problématiques EIAH, il trouve aussi son intérêt et sa pertinence dans des recherches en didactique hors champ des EIAH.

Le cadre T4TEL s'inscrit complétement dans la TAD et plus spécifiquement dans l'approche praxéologique (Bosch et Chevallard, 1999). Il propose une formalisation du modèle praxéologique et deux extensions du modèle : l'introduction de la notion de praxéologie personnelle (Croset, Chaachoua, 2016) et de la notion de variable (Chaachoua, Bessot, 2018). Dans le prochain paragraphe, nous présentons les fondements de T4TEL. Ensuite, nous présenterons ses développements et sa mise en œuvre dans la conception des EIAH.

II. FONDEMENTS DE T4TEL

Nous partons du postulat de la TAD selon lequel toute activité humaine peut être modélisée par un quadruplet praxéologique $[T, \tau, \theta, \Theta]$ appelé aussi une organisation mathématique ponctuelle. Le type de tâches T regroupe les tâches pouvant être accomplies par une même technique τ, justifiée par une technologie θ, elle-même légitimée par une certaine théorie Θ. Pour rendre ce modèle calculable il nécessaire de disposer d'une description formelle des éléments d'une praxéologie ponctuelle et de rendre compte des relations entre ces éléments. A partir des praxéologies ponctuelles il faut définir et décrire une structuration entre les différentes praxéologies. Ensuite, il faut définir des processus permettant de structurer les praxéologies selon les différents niveaux de codétermination : ponctuelle, locale et régionale. Enfin, il faut construire des fonctions didactiques et des processus pouvant produire différents services cités plus haut : diagnostic, rétroactions, indexation de ressources…

[2] T4TEL : T4 renvoie au quadruplet praxéologique (Type de tâches, Technique, Technologie, Théorie) et TEL pour Technology Enhanced Learning.

1. Définition de type de tâches et de sous-types de tâches

Au préalable, soulignons que la notion de type de tâches est première, comme en TAD, dans la construction de T4TEL mais comme on verra plus loin qu'il y a une forme de dualité avec la notion de technique.

Nous rejoignons le point de vue adopté par Y. Chevallard (1999) :

> *Enfin, tâches, types de tâches, genres de tâches ne sont pas des donnés de la nature : ce sont des « artefacts », des « œuvres », des construits institutionnels, dont la reconstruction en telle institution, par exemple en telle classe, est un problème à part entière, qui est l'objet même de la didactique. (p. 224)*

Ainsi se pose une question méthodologique sur la construction des types de tâches. En effet, ce qu'observe un chercheur dans une institution donnée ce sont des tâches : comment peut-il définir un type de tâches ? Ou encore comment rattacher et organiser les tâches autour d'un même type de tâches ? Une première réponse est de les regrouper par genre de tâches comme « calculer », « démontrer » etc. On voit bien que ce critère n'est pas pertinent car on ne souhaite pas rattacher au même type de tâches les tâches « calculer 2 + 5 », « calculer la somme de deux vecteurs » et « calculer une intégrale donnée ». Ensuite, on peut les discriminer par rapport aux objets communs sur lesquels porte l'action et par rapport aux moyens communs d'accomplir les tâches.

Il s'agit bien d'un travail de modélisation qui renvoie à la définition du type de tâches.

Précisons que nous nous plaçons dans une institution d'enseignement et nous considèrerons que les types de tâches mis à l'étude possèdent au moins une technique.

Nous présentons ci-dessous une caractérisation de type de tâches selon T4TEL.

Définition 1. Type de tâches
Un *type de tâches T* est un ensemble de tâches tel que :
- Toute tâche est décrite par un verbe d'action donné et des compléments fixés, pris dans les objets d'une discipline ;
- Il existe au moins une technique τ qui accomplit au moins une tâche de *T* tel que soit la portée de la technique $P(\tau)$ est un sous-ensemble de *T,* soit *T* est un sous-ensemble de $P(\tau)$.

Nous reviendrons sur la notion de portée plus loin. La deuxième condition doit être vérifiée pour au moins une technique. Donc d'autres techniques accomplissant des tâches de T peuvent exister et dont la portée contient des tâches de T et des tâches extérieures.

Exemple 1. Au début du collège on rencontre le type de tâches institutionnel T_{eq1} (Résoudre une équation de degré 1 à coefficients entiers). Plusieurs techniques seront étudiées comme celles qu'on qualifie d'arithmétique qui consiste à utiliser les opérations inverses. La portée de cette technique est un sous-ensemble de T qui tend à échouer pour les équations du type $ax + b = cx + d$. Une autre technique consiste à utiliser les transformations algébriques sur les équations et dont la portée contient T, c'est-à-dire les équations de degré 1 à coefficient réels.

Maintenant que nous avons caractérisé la notion de type de tâches, nous définissons la notion de sous- type de tâches comme suit.

Définition 2. Sous-type de tâches
On dit que T' est un sous-type de tâches du type de tâches T si
- T' est un sous-ensemble de T ;
- T' est un type de tâches.

Exemple 2. Le type de tâches (Résoudre une équation de degré 1 à coefficient entiers du type $a + x = b$) est un sous-type de tâches de (Résoudre une équation de degré 1 à coefficients entiers) qui est lui-même un sous-type de tâches de (Résoudre une équation de degré 1).

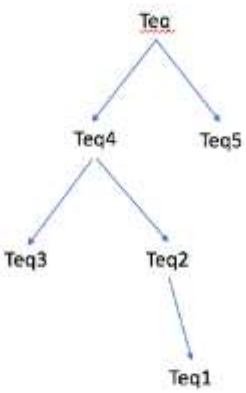
Nous venons de donner une caractérisation de type de tâches et de sous-type de tâches. Notre question est comment décrire un type de tâches.

> *Dans la plupart des cas, une tâche (et le type de tâches parent) s'exprime par un verbe : balayer la pièce, développer l'expression littérale donnée, diviser un entier par un autre, saluer un voisin, lire un mode d'emploi, monter l'escalier, intégrer la fonction… (Chevallard, 1999, p. 224)*

Ainsi, dans T4TEL nous décrivons un type de tâches T par un verbe d'action et un complément que nous représentons par T (Verbe d'action, Complément). Le verbe d'action caractérise le genre de tâches, comme « Calculer », « Comparer » ou « Intégrer ». Le complément précise sur quoi porte l'action. Cependant, le complément peut être défini selon différents niveaux de granularité, du spécifique au générique et, pour prendre en compte ces relations entre le générique et le spécifique, nous avons introduit les notions de système de variables et de générateur de types de tâches (Chaachoua & Bessot, 2018, sous presse).

Générateur de type de tâches et système de variables

Reprenons l'exemple ci-dessus sur la résolution des équations. Le type de tâches T_{eq1} (Résoudre une équation de degré 1 à coefficients entiers) est un sous-type de tâches de T_{eq2} (Résoudre une équation algébrique de degré 1). Si on considère un autre type de tâches T_{eq3} (Résoudre une équation algébrique de degré 2) alors T_{eq2} et T_{eq3} peuvent être considérés comme des sous-types de tâches du type de tâches T_{eq4} (Résoudre une équation de degré inférieur ou égal à 2) ou du type de tâches T_{eq} (Résoudre une équation algébrique). Un autre sous-type de tâche de T_{eq} est T_{eq5} (Résoudre une équation algébrique de degré supérieur à 2). On peut représenter les relations entre ces types de tâches par l'arbre :



Dans cette représentation on a une structuration des types de tâches par rapport à la relation « être sous-type de tâches de ».
Cette structuration rend compte d'un jeu sur le degré de l'équation mais aussi sur la nature des coefficients.
Cette structuration dépend donc des critères retenus.

Figure 1 : Exemple de structuration des types de tâches.

On peut dire aussi que le type de tâches T_{eq4} est plus générique que T_{eq2} ou encore que T_{eq2} est plus spécifique que T_{eq4}.

Nous introduisons la notion de générateur de types de tâches qui à partir d'un système de variables peut générer des types de tâches et des sous-types de tâches selon une certaine structuration rendant compte des relations « plus générique que » et « plus spécifique que ».

Définition 3. Générateur de types de tâches.
Nous définissons un générateur de types de tâches par :

GT = [Verbe d'action, Complément fixe ; Système de variables] où :

- Le couple (Verbe d'action, Complément fixe) est un type de tâches,
- Le système de variables est composé d'une liste de variables et de valeurs qu'elles peuvent prendre.

Notons qu'un générateur de type de tâches n'est pas un type de tâches mais il permet d'engendrer des types de tâches selon une structuration hiérarchique. Le niveau le plus générique est définit sans aucune instanciation du système de variables donc il s'agit du type de tâches définit par le verbe d'action et le complément fixe. Les différentes instanciations des variables permettent d'engendrer des types de tâches plus spécifiques.

Exemple 3. Si on reprend les types de tâches de l'exemple 2 on peut considérer le générateur de type de tâches GTeq = [Résoudre, une équation algébrique ; V1, V2][3] où V1 : le degré de l'équation et V2 : la nature des coefficients. La variable V1 peut prendre les valeurs : 1, inférieur ou égale à 2, supérieur à 2. La variable V2 peut prendre les valeurs : entiers naturels, entiers relatifs, rationnels, réels. On génère alors des types de tâches selon la structuration présentée dans la figure 1.

Cependant, le choix des variables et de leurs valeurs dépend de plusieurs points de vue que nous présenterons plus loin. Dans cet exemple, le choix de la valeur « inférieur ou égale à 2 » de la variable V1 est discutable. En effet, cela dépend si on veut traiter dans le même type de tâches les équations de degré 1 et de degré 2. Un des critères peut être les techniques ou encore le découpage institutionnel. Ainsi, un autre choix est de considérer comme valeurs de la variable V1 : 1, 2, supérieur à 2. Dans ce cas les valeurs sont disjointes et le générateur produit une structuration de types de tâches différente de celle de la figure 1. Donc, la structuration des types de tâches est dépendante de la structuration des valeurs des variables[4].

Exemple 4. Considérons le générateur de type de tâches GTs = [Calculer, la somme de deux nombres entiers ; V1, V2] où V1 : taille du premier nombre (nombre de chiffres) et V2 : taille du second nombre (nombre de chiffres).

Dans cet exemple le complément fixe est « la somme de deux nombres entiers ». Le type de tâches le plus générique est Ts = (Calculer la somme de deux nombres entiers).

Un autre choix était possible est de considérer le complément fixe « la somme de deux nombres » qui est plus générique et d'ajouter une autre variable sur la nature du nombre (entier, rationnel, réel…). Le choix de niveau de granularité est un point important dans la construction des générateurs de types de tâches et dépend d'au moins de 3 facteurs que nous considérons comme importants : questions de recherche, l'institution cible et les techniques. Notons d'abord que le facteur institution cible est en partie lié aux questions de recherche.

Pour le facteur « institution cible », le choix du système de variables pour GTs n'est pas le même si l'institution est le début de l'école élémentaire (6-8 ans) ou tout l'enseignement primaire (6-12 ans) ou encore le collège (12-15 ans), et donc le choix du générateur n'est pas le même. Par exemple, si l'institution cible est l'enseignement primaire (6-11 ans) on peut introduire une variable V3 sur la nature du nombre qui prend au moins deux valeurs : entiers et décimaux. On obtient alors comme générateur de types de tâches : GTs = [Calculer, la somme de deux nombres ; V1, V2, V3].

Pour le facteur « techniques », il s'agit de déterminer les techniques possibles et de caractériser leur portée, à l'aide des variables.

[3] Dans cette écriture, V1 et V2 désignent les variables mais aussi les valeurs qu'elles peuvent prendre.
[4] Pour une étude détaillée de cet exemple cf Chaachoua et Bessot (2018, sous presse).

Comme pour les types de tâches, les générateurs de types de tâches sont des construits du chercheur.

Fonctions des variables

Chaachoua et Bessot (2018, sous presse) ont présenté trois fonctions aux variables : générer des types de tâches, caractériser les portées des techniques et décrire les praxéologies personnelles que nous présentons ci-dessous.

1) Générer des types de tâches et sous-types de tâches en jouant sur les valeurs de cette variable.
Par instanciation des valeurs des variables on génère, selon une structure hiérarchique, les sous-types de tâches du type de tâches le plus générique.

Par exemple le type de tâches T_{S1} (calculer la somme de deux entiers de taille 1) et T_{S2} (Calculer la somme d'un entier de taille supérieure à 2 et d'un entier de taille 1) sont disjoints et sont des sous-types de tâches de T_{S3} (Calculer la somme de deux entiers de taille inférieures ou égales à 2).

Ces trois types de tâches peuvent être générés à partir de GTs = [Calculer, la somme de deux nombres ; V1, V2, V3] par instanciation uniquement des variables V1 et V2.

Cependant, une question se pose : quels sont les types de tâches qu'on souhaite générer ?

Bien que la réponse à cette question dépende des questions de recherche, nous pensons que deux raisons importantes peuvent motiver la génération de certains types de tâches et donc un choix de variables et de valeurs adéquates : les portées des techniques et les contraintes / conditions institutionnelles qu'on développera dans la suite.

2) Caractériser les portées des techniques
Revenons d'abord sur la notion de portée d'une technique τ définie par l'ensemble des tâches pouvant être accomplies par τ. Par exemple, pour le type de tâches T_{eq3} (Résoudre une équation de degré 2) la technique dite du discriminant a pour portée T_{eq3}. Il s'agit d'une portée théorique au sens où d'un point de vue mathématique la technique s'applique à toutes les tâches de T_{eq3}. Reprenons la définition donnée par Chevallard (1999) :

> *Tout d'abord, une technique – une « manière de faire » – ne réussit que sur une partie $P(\tau)$ des tâches du type T auquel elle est relative, partie qu'on nomme portée de la technique : elle tend à échouer sur $T \backslash P(\tau)$, de sorte qu'on peut dire que « l'on ne sait pas, en général, accomplir les tâches du type T ». (p.225)*

On voit que dans cette définition on se place dans le cas où la portée de la technique est une partie du type de tâches auquel elle est relative. Or, étant donné un type de tâches T on peut trouver une technique dont la portée contient T. Par exemple quand on étudie les techniques du type de tâches T_{eq1} (Résoudre une équation de degré 1 à coefficient entiers) on introduit une technique dont la portée est T_{eq2} (Résoudre une équation algébrique de degré 1). Cependant, à chaque technique on peut lui associer un type de tâches contenant sa portée. Nous y reviendrons.

Une deuxième remarque dans cette définition est qu'en dehors de sa portée la technique tend à échouer. Nous l'interprétons par le fait qu'elle peut ne pas s'appliquer ou elle peut s'appliquer mais avec un risque d'erreur.

Reprenons l'exemple 4. La technique dite de sur-comptage[5] peut s'appliquer sur Ts (Calculer la somme de deux nombres entiers). Mais, si on l'applique à des grands nombres, il y a de forte chance qu'elle échoue. Cependant, elle réussit sur T_{S2} (Calculer la somme d'un entier de taille supérieure à 2 et d'un entier de taille 1). On considère donc T_{S2} comme portée pragmatique de cette technique que nous définissons ci-après.

Pour nous la notion de portée pragmatique correspond à la définition de Chevallard. Et c'est bien cette portée qui est pertinente pour la vie des praxéologies et qui est au cœur des questions didactiques. Dans la suite, nous la nommerons portée d'une technique sans l'adjectif « pragmatique » et en reprenant la définition de la portée d'une technique.

Définition 4. La portée (pragmatique)
La *portée d'une technique*, est l'ensemble des tâches où la technique est fiable dans le sens où elle permet d'accomplir ces tâches avec peu de risque d'échec et un coût raisonnable. La technique réussit sur cette portée et tend à échouer en dehors.

Peut-on toujours caractériser les portées des techniques ? Cela n'est pas toujours possible pour la portée théorique d'une technique comme par exemple certaines techniques de calcul d'intégrales. Cependant, pour la portée d'une technique, au sens pragmatique définit ci-dessus, on peut la caractériser bien que cette caractérisation puisse être amenée à se préciser dans le temps.

Propriété
La portée d'une technique, théorique ou pragmatique, est un type de tâches.

Cette propriété découle directement de la définition 1.

Comme la portée est un type de tâches, certaines variables et/ou valeurs sont choisies de sorte qu'on puisse générer les types de tâches qui sont des portées des techniques.

Nous considérons la caractérisation de la portée comme un objet d'étude didactique en soi.

3) Décrire les praxéologies personnelles.
Pour rendre compte des praxéologies personnelles des élèves (Croset, Chaachoua 2016) qu'elles soient valides ou non, nous enrichissons a posteriori les valeurs des variables. Ces valeurs permettent de générer des types de tâches susceptibles de mobiliser chez des élèves des praxéologies personnelles non valides. Par exemple, dans le cas des équations de degré 2, il important de pouvoir générer le type de tâches « Résoudre une équation du type $P_1(x)Q_1(x) = k$, où $P_1(x)$ et $Q_1(x)$ sont des polynômes de degré 1, k non nul ». En effet, une technique personnelle non valide possible est τ = {(Ecrire « $P_1(x) = k$ ou $Q_1(x) = k$ »)}[6].

Comme le précisent Chaachoua et Bessot (2018, sous presse) les deux premières fonctions :

> *« apparaissent comme particulièrement intéressantes pour conduire des analyses a priori (point de vue épistémologique et didactique) et calculer des parcours d'apprentissage à partir d'un jeu sur ces variables et leurs valeurs. En particulier, la construction d'un modèle de praxéologie de référence pour un domaine mathématique (au sens de l'échelle de codétermination) inclue de fait pour nous l'explicitation de variables et de ses valeurs possibles ».*

[5] Pour ajouter 7 à 23 on compte 24, 25…
[6] Cf. (Chaachoua et Bessot, 2018, sous presse) pour plus de détail sur les praxéologies personnelles et sur cet exemple.

Conditions et contraintes (institutionnelles)

Les contraintes et les conditions définies par une institution vont restreindre non seulement le type de tâches, mais aussi des variables ou des valeurs possibles d'une variable d'un type de tâches institutionnel. Par exemple, au début de l'école primaire (3-6 ans) on se limite aux nombres entiers inférieurs à 30.

Ainsi, « une variable et ses valeurs institutionnelles modélisent des conditions et des contraintes explicites ou implicites (relevant des niveaux de l'échelle de codétermination) sous lesquelles une praxéologie existe ou peut exister institutionnellement. » (ibid., 2018, sous presse). Kaspary (2018) dans sa méthodologie de recherche étudie des corrélations entre conditions/contraintes et variables pour décrire les rapports attendus par une institution noosphérienne.

Variable « Ostensifs »

Une des variables importantes est celle d'ostensifs car elle intervient dans tous les générateurs de types de tâches. Mais selon le générateur cette variable peut prendre des valeurs différentes. Elle joue un rôle au niveau des types de tâches et plus précisément au niveau des tâches mais aussi au niveau des techniques puisqu'ils sont les ingrédients premiers d'une technique.

Par exemple, dans sa thèse, Brasset (2017) considère le générateur de type de tâches GT = [Traduire, un nombre d'un ostensif de départ vers un ostensif d'arrivée ; V1.1, V1.2, V2.1, V2.2, V3.1, V3.2][7] où

V1.1 : Ordre de la plus grande unité de numération.
    Valeurs : 1, 2, 3, …
V1.2 : Absence d'au moins une unité de numération
    Valeurs : Oui, Non
V2.1 : Nature de l'ostensif de départ.
    Valeurs : Écriture chiffrée, Écriture en unité de numération, Écriture en matériel de numération, Écriture additive, ….
V2.2 : Forme de l'ostensif de départ.
    Valeurs : Canonique, Non canonique
V3.1 : Nature de l'ostensif d'arrivé.
    Valeurs : Écriture chiffrée, Écriture en unité de numération, Écriture en matériel de numération, Écriture additive, ….
V3.2 : Forme de l'ostensif d'arrivé.
    Valeurs : Canonique, Non canonique.

Par exemple le type de tâches T(Traduire un nombre de l'écriture en écriture en unité de numération non canonique vers l'écriture chiffrée) est obtenu à partir du générateur par les instanciations des variables suivantes :

V2.1 = Écriture en unité de numération

V2.2 = Non canonique

V3.1 = Écriture chiffrée

Une tâche de ce type de tâches est « Écris en chiffres le nombre 14 centaines et 235 dizaines ».

---

[7] D'autres variables ont été considérées dans Brasset (2017), comme l'organisation du matériel, que nous ne présentons pas ici.

Dans ce travail la considération des ostensifs dans les variables permet de structurer les types de tâches de traduction d'écritures de nombres. Cependant, il manque un véritable travail conceptuel sur l'intégration des ostensifs dans T4TEL. C'est ce qui est au cœur de la thèse de Kaspary (thèse en cours) où elle étudie le rôle des ostensifs dans les techniques et leurs évolutions. Cela est lié en partie aux portés des techniques. Par exemple pour le type de tâches « calculer la somme de deux entiers » la technique, qui mobilise les doigts pour compter de 1 en 1, a pour portée le type de tâches T_{S2}.

Description des techniques

Le problème de description des techniques a été soulevé dans (Chevallard, 1994) « … de quoi est faite une technique donnée ? De quels "ingrédients" se compose-t-elle ? Et encore : en quoi consiste la "mise en œuvre" d'une technique ? ». Si ce problème n'est pas posé explicitement dans les différents travaux qui font usage de l'analyse praxéologique, ces travaux en proposent des descriptions. Certains les décrivent sous forme d'actions plus ou moins structurées, d'autres les décrivent par des sous-tâches. Par exemple, Cirade & Matheron (1998) décrivent la technique utilisée pour le type de tâches T (Résoudre une équation du premier degré), par des sous-tâches : développer une expression algébrique, effectuer les produits, transposer les termes, réduire chacun des membres, résoudre une équation de la forme $ax = b$. Puis, les auteurs ajoutent que ce découpage est arbitraire, et qu'il s'agit d'un modèle dont l'objectif est de mettre en évidence l'organisation mathématique et de l'évaluer. L'intérêt de ce découpage est qu'il renvoie à des tâches reconnues institutionnellement et, pour chacune d'elles, il existe une praxéologie mathématique qui a été mise en place avant. D'ailleurs, les manuels adoptent ce mode de description des techniques. Nous voyons un intérêt dans ce découpage : il permet de mieux situer les difficultés des élèves dans la mise en œuvre d'une technique au niveau des sous-tâches qui composent la technique. Ce découpage a été aussi adopté par Castela (2008) où elle étudie comment une tâche peut intervenir dans la technique d'une autre tâche. Elle étudie la technique d'une tâche sous forme d'un enchaînement d'organisations mathématiques ponctuelles (Castela, 2008, p.129).

Définition 5. Description d'une technique
Une technique est décrite par un ensemble de types de tâches appelés ingrédients de la technique.

Pour pouvoir décrire les techniques par un ensemble de types de tâches nous avons distingué deux sortes de types de tâches pour intégrer dans la technique des types de tâches comme T (Transposer les termes) de l'exemple ci-dessus.

Définition 6. Types de tâches intrinsèque et extrinsèque
Nous distinguons deux sortes de types de tâches :

- les types de tâches qui n'existent qu'à travers la mise en œuvre des techniques de certains autres types de tâches, appelés types de tâches *intrinsèques* ;
- les types de tâches qui existent en dehors des techniques et peuvent être prescrits institutionnellement aux élèves, qualifiés de types de tâches *extrinsèques*.

Exemple 5. Pour le type de tâches T_{S2} (Calculer la somme d'un entier de taille 1 et d'un entier de taille supérieure à 2), de l'exemple 4, une des techniques est la technique dite algorithmique où il s'agit de poser l'addition. On peut la décrire par au moins deux types de tâches : TD (Disposer en colonne l'addition des deux nombres) et TS1 (Calculer la somme de deux entiers de taille 1). Le type de tâches TD est intrinsèque : il n'est pas prescrit par l'institution tout en ayant une praxéologie, en particulier une technique et une technologie. Le type de tâches TS1 est extrinsèque car il est prescrit au début de l'école primaire.

Les types de tâches intrinsèques ont eux aussi leurs propres praxéologies. Elles peuvent même être prescrites aux élèves pendant un moment sous des formes adaptées dans des organisations didactiques. Par exemple pour TD (Disposer en colonne l'addition des deux nombres) on trouve des tâches qui visent à travailler la disposition des nombres. Par exemple, on donne une opération en ligne et on demande de poser l'addition sans l'effectuer.

Exemple 6. Un autre exemple est autour de l'ostensif « tableau de variation » où l'institution crée des organisations didactiques autour des types de tâches comme (Compléter le tableau de variation), (Produire un tableau de variation) ou (Lire un tableau de variation). Ensuite, ces types de tâches ne vivent que comme ingrédients de techniques d'autres types de tâches.

Dans l'extrait ci-dessous (Figure 2), il s'agit d'une tâche qui vise à comprendre les règles de formation d'un tableau de variation à partir de certaines informations sur la fonction. Ce type de tâches, présent en classe de seconde en France, l'année où on introduit l'ostensif « tableau de variation », disparaît les années suivantes mais continue à vivre comme ingrédient des techniques de types de tâches, par exemple le type de tâches d'étude de fonctions.

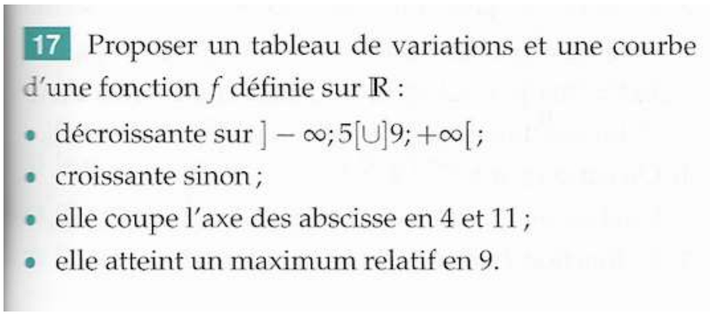

17 Proposer un tableau de variations et une courbe d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$:
- décroissante sur $]-\infty;5[\cup]9;+\infty[$;
- croissante sinon ;
- elle coupe l'axe des abscisse en 4 et 11 ;
- elle atteint un maximum relatif en 9.

Figure 2 : Extrait de Sésamath, Seconde, 2014, p.123.

Remarquons que chaque type de tâches qui est ingrédient d'une technique a lui-même une ou plusieurs techniques qui s'expriment à leur tour par un ensemble de types de tâches. Nous avons donc introduit la notion de type de tâches élémentaire pour exprimer qu'à un niveau donné de la description on arrête le processus.

Définition 7. Type de tâches élémentaire
Un type de tâches est *élémentaire* si l'institution ou le chercheur du domaine considère qu'il n'est pas nécessaire d'expliciter la ou les techniques pour ce type de tâches.

Au niveau de l'institution le statut élémentaire est souvent réglé au niveau du contrat didactique et qui évolue dans le temps : ce qui devait être explicité à un moment donné ne l'est plus à un autre moment. Par exemple T_S (Calculer la somme de deux nombres entiers) n'est pas élémentaire au niveau de l'école primaire mais qui devient élémentaire à partir du lycée (plus de 16 ans).

Au niveau du chercheur il peut désigner des types de tâches comme élémentaires dans la construction de son modèle. Ce choix est souvent lié aux questions de recherche.

Revenons sur la description des techniques par des types de tâches. Comme chaque type de tâches admet lui-même sa propre technique qui à son tour est décrite par un ensemble de types de tâches, une question de nature méthodologique se pose : quel est le niveau de granularité pour décrire une technique. Ce qui peut se traduire par la question : quels sont les critères de choix des types de tâches ingrédients d'une technique ?

Considérons la tâche suivante t_6 : résoudre l'équation $x(x + 1) = (3 - x)(2x + 2)$. C'est une tâche qui relève du type de tâches T_{eq3}(Résoudre une équation algébrique de degré 2). En classe de seconde, une mise en œuvre d'une technique attendue peut être transcrite comme suit :

$x(x + 1) = (3 - x)(2x + 2)$
$x(x + 1) - (3 - x)(2x + 2) = 0$
$x(x + 1) - 2(3 - x)(x + 1) = 0$
$(x + 1)[x - 2(3 - x)] = 0$
$(x + 1)(x - 6 + 2x) = 0$
$(x + 1)(3x - 6) = 0$
$x + 1 = 0$ ou $3x - 6 = 0$
$x = -1$ ou $3x = 6$
$x = -1$ ou $x = 2$

Comment peut-on décrire cette technique à l'aide de types de tâches ? On reconnaît dans ces étapes des types de tâches comme : (Factoriser une expression algébrique), (Réduire une expression algébrique), (Résoudre une équation produit nul), (Résoudre une équation de degré 1), (Regrouper les termes dans un seul membre).

Précisions qu'on ne peut pas considérer en même temps comme ingrédients (Résoudre une équation produit nul) et (Résoudre une équation de degré 1). En effet, le deuxième type de tâches est un ingrédient de la technique du premier.

Considérons le découpage suivant où la technique est être décrite par {(Regrouper les termes dans un seul membre), (Factoriser une expression algébrique), (Réduire une expression algébrique), (Appliquer la règle du produit nul), (Résoudre une équation de degré 1)}.

Regrouper les termes dans un seul membre

$x(x + 1) = (3 - x)(2x + 2)$
$x(x + 1) - (3 - x)(2x + 2) = 0$

Factoriser une expression algébrique

$x(x + 1) - 2(3 - x)(x + 1) = 0$
$(x + 1)[x - 2(3 - x)] = 0$

Réduire une expression algébrique

$(x + 1)(x - 6 + 2x) = 0$
$(x + 1)(3x - 6) = 0$

Appliquer la règle du produit nul

$(x + 1)(3x - 6) = 0$
$x + 1 = 0$ ou $3x - 6 = 0$

Résoudre une équation de degré 1

$x + 1 = 0$ ou $3x - 6 = 0$
$x = -1$ ou $3x = 6$
$x = -1$ ou $x = 2$

On peut considérer aussi un autre découpage où la technique est décrite par : {(Regrouper les termes dans un seul membre), (Factoriser une expression algébrique), (Résoudre une équation produit nul)}.

Regrouper les termes dans un seul membre

$x(x + 1) = (3 - x)(2x + 2)$
$x(x + 1) - (3 - x)(2x + 2) = 0$

Factoriser une expression algébrique

$x(x + 1) - 2(3 - x)(x + 1) = 0$
$(x + 1)[x - 2(3 - x)] = 0$
$(x + 1)(x - 6 + 2x) = 0$
$(x + 1)(3x - 6) = 0$

Résoudre une équation produit nul

$(x + 1)(3x - 6) = 0$
$x + 1 = 0$ ou $3x - 6 = 0$
$x = -1$ ou $3x = 6$
$x = -1$ ou $x = 2$

Nous faisons trois remarques concernant ce découpage. La première est que pour le type de tâches (Factoriser une expression algébrique) il est attendu des réductions des expressions factorisées.

Une deuxième remarque est qu'on aurait pu mettre comme ingrédient (Résoudre une équation de degré 2) à la place du type de tâches (Résoudre une équation produit nul). Mais, dans ce cas on aura le type de tâches (Résoudre une équation du degré 2) qui intervient dans sa propre technique et alors dans le processus de description il y aura une boucle qui ne s'arrête pas.

Une troisième remarque est qu'on aurait pu mettre comme ingrédient (Factoriser une expression de la forme $P(x)Q(x) + P(x)R(x) = 0$) à la place de (Factoriser une expression algébrique). Le premier est plus spécifique que le second. Cependant, il n'est pas toujours possible de connaître le niveau de spécification qui dépend de la forme de l'expression à factoriser.

Compte tenu de ces remarques nous avons retenu les critères suivant pour les ingrédients de la technique.

Définition 8. Les ingrédients d'une technique
Soit τ une technique d'un type de tâche T_0 d'un générateur GT. Les types de tâches qui composent la technique τ peuvent être :

(i) des types de tâches intrinsèques
(ii) des types de tâches extrinsèques T_e générés par GT et que T_0 ne soit pas un sous-type de tâches de T_e
(iii) des types de tâches extrinsèques générés par d'autres générateurs de types de tâches mais qui peut être du niveau le plus générique. C'est à dire le type de tâches obtenu par le verbe et par le complément fixe sans aucune instanciation de variables.

La condition (ii) permet d'éviter au processus de ne pas s'arrêter, donc d'éviter la situation « pour accomplir un type de tâches T on applique le type de tâches T ou un type de tâches plus générique ».

Dans la figure ci-dessous (Figure 3) nous avons représenté une structuration de types de tâches autour de deux générateurs GT et GT'. Les types de tâches pouvant être ingrédients de la technique τ du type de tâche T_0 sont :

- T4 : est sous-type de tâches de T_0
- T2 et T3 : ne sont pas des sous-types de tâches de T_0, sont du même générateur GT, T_0 n'est pas sous-type de tâches de T3 et de T2
- T' : est au niveau générique d'un autre générateur de types de tâches GT'.

Les types de tâches T et T1 ne peuvent pas être des ingrédients de la technique τ car T_0 est un sous-type de tâches de T et de T1.

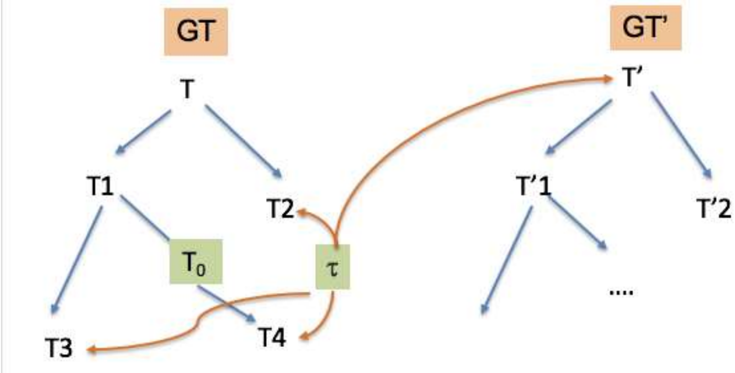


Figure 3 : Les ingrédients possibles d'une technique.

Exemple 6. Reprenons l'exemple ci-dessous. La tâche t_6 peut être considérée comme relevant du type de tâches Teq.6 (Résoudre une équation du second degré du type P1(x) Q1(x) = R1(x) S1(x) où P1, Q1, R1 et S1 sont des polynômes de degré 1 et R1(x) est un multiple de P1(x)). C'est un sous-type de tâches de Teq.3 de l'exemple 2 repris au début du paragraphe 2.2. Il peut être généré à partir du générateur GTeq. Une des techniques peut être décrite par les types de tâches : {TF (Factoriser une expression algébrique), Teq.7 (Résoudre une équation du type P1(x) Q1(x) = 0)}. Dans cette description le type de tâches TF n'est pas du même générateur que Teq.6 et donc il peut être exprimé au niveau le plus générique de son générateur. Alors que Teq.7 et Teq.6 sont du même générateur et Teq.7 peut être à un niveau plus bas de la structuration.

Description des technologies et théories

Dans la TAD une technologie est un discours rationnel qui permet de justifier, de produire, de rendre intelligible, de contrôler et d'adapter une technique (Chevallard, 1992).

Nous modélisons la technologie par un ensemble d'énoncés qui ont un statut et un domaine de validité. Le statut peut être : définition, propriété, règle, croyance… Le domaine de validité précise la validité de l'énoncé par rapport à un domaine de référence. Comme la théorie est pour la technologie ce qu'est la technologie est pour la technique nous adoptons la même modélisation pour la théorie.

III. MISES EN ŒUVRE DU CADRE T4TEL POUR LA CONCEPTION D'UN EIAH

Comme nous l'avons dit au début qu'une des motivations du développement du cadre T4TEL est de produire différents services EIAH avec des considérations didactiques. Mais, ce qui est en amont à la conception des différents services est la construction d'un modèle praxéologique de référence (MPR) selon le cadre T4TEL. Dans Chaachoua et al. (2013) nous avons indiqué les grandes lignes de la construction du modèle, sa représentation informatique et des exemples de mises en œuvre.

Nous présentons dans le paragraphe 3.1 quelques éléments de la représentation informatique du modèle, puis dans les paragraphes 3.2 et 3.3 deux exemples de mises en œuvre de T4TEL dans des recherches autour de la conception d'EIAH développées au sein de l'équipe MeTAH.

1. Représentation informatique des praxéologies

Un premier défi était la représentation informatique de ce modèle dans un EIAH. C'est ce que nous avons relevé d'abord dans le cadre du projet Cartographie des savoirs[8] puis dans d'autres projets en cours.

Dans ce projet nous avons représenté les référentiels de différents domaines de connaissance selon le cadre T4TEL avec un modèle ontologique Ontoprax (Chaachoua et al. 2013). L'objectif est de développer une ontologie des praxéologies qui réponde aux conditions suivantes : constituer une référence pour une communauté de praticiens, être complète et cohérente, être calculable et interopérable, être manipulable par des humains, et enfin fournir des services à des EIAH.

Le modèle Ontoprax repose sur la définition de 4 ensembles : Ensemble de types de tâche (ETT) ; Ensemble de techniques (Eτ) ; Ensemble de technologies (Eθ) ; Ensemble de théories (EΘ). Mais aussi sur des relations du type :

- Un type de tâche est accompli par une ou plusieurs techniques.
- Une technique est justifiée par une et une seule technologie.
- Une technologie justifie une ou plusieurs techniques.
- Une technologie est intégrée dans une théorie.
- Une théorie intègre une ou plusieurs technologies.

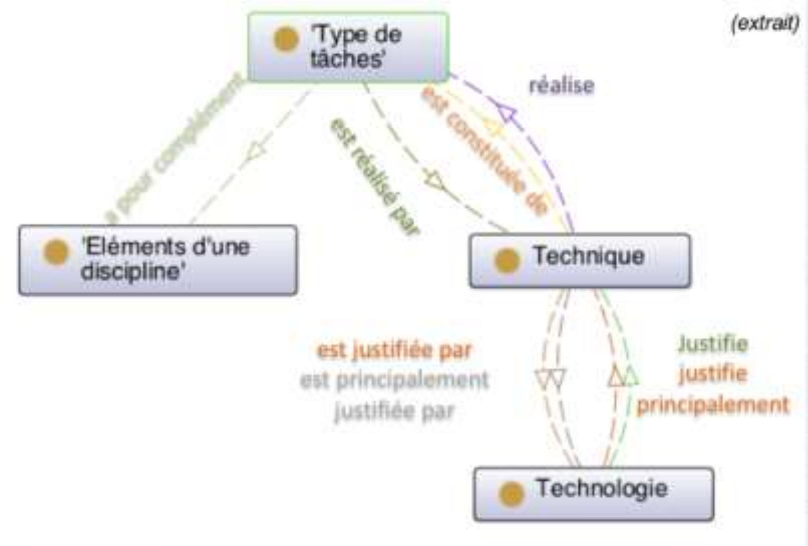


Figure 4 : Ontoprax - représentation ontologique des praxéologies.

Dans ce projet nous avons abouti à la représentation des praxéologies : 413 (resp. 712) types de tâches, et 1473 (resp. 2242) relations obtenues à partir des praxéologies pour les mathématiques en CM1 (resp. le français en CM1). Différents services (production de profils des élèves, production de tests de diagnostic, …) ont été produits par d'autres équipes de recherche, ce qui a montré que notre modèle Ontoprax est interopérable. Une expérimentation a été menée pour valider le modèle et les services produits à grande échelle (7500 élèves).

[8] « Cartographie des savoirs » (http://intranet.cartodessavoirs.fr). C'est un projet e-education 2 (2012-2014).

Indexation des ressources

Dans un travail de thèse en cours (S. Jolivet) qui vise à proposer un modèle de description de ressources de type « exercices et problèmes » de mathématiques basé sur des critères didactiques, la place de T4TEL est centrale pour au moins trois raisons :

- L'utilisation des variables permet une structuration d'un modèle praxéologique de référence permettant de rechercher des relations entre différents types de tâches présents dans une même ressource ;
- L'intégration en cours des ostensifs dans le modèle T4TEL permet de les prendre en compte dans la description des ressources ;
- La dimension calculable de la représentation permet de placer le travail dans une perspective EIAH avec d'une part un processus d'indexation adapté à un volume important de ressources pour un coût raisonnable et d'autre part une augmentation « automatisée » de la description à partir de calculs sur le MPR.

La description d'une ressource dans la modélisation de Jolivet repose sur cinq qualités

- Etre basée sur des critères didactiques ;
- Etre indépendante du descripteur ;
- Etre inscrite dans une perspective EIAH, pour sa réalisation et pour son exploitation ;
- Permettre de déterminer les adéquations institutionnelles d'une ressource ;
- Permettre de déterminer l'adéquation à un ou des projets d'étude d'une organisation mathématique.

Exploitation des praxéologies personnelles

Un premier travail sur les praxéologies personnelles en EIAH a été développé par Croset (2009) dans le micromonde d'algèbre Aplusix. Il s'agissait de diagnostiquer les techniques et les technologies des élèves à partir des traces de manipulations d'expressions algébriques. Le processus de diagnostic a été présenté dans Croset (2009) et Chaachoua (2010). Ici nous nous centrons sur l'exploitation des techniques diagnostiquées en vue de produire des rétroactions à l'élève, à l'enseignant ou au système.

Soit t une tâche que l'élève doit accomplir au sein d'une institution I. Elle relève d'un type de tâches T généré dans un MPR. On suppose qu'il y a une technique τ_I qui accomplit t et attendue par I[9]. Nous présentons quelques éléments du modèle de traitement d'une technique personnelle une fois diagnostiquée (Figure 5). On note τe la technique de l'élève pour le type de tâches T[10].

Si le diagnostic indique l'absence de la technique alors trois cas se présentent : (i) T est un type de tâches élémentaire pour l'institution I, auquel cas c'est normal qu'il ne soit pas nécessaire de produire une technique, (ii) l'élève considère que c'est un type de tâches élémentaire, (iii) il y a un manque d'équipement praxéologique pour l'élève.

Si une technique τe est diagnostiquée appartient au MPR deux cas se présentent : (i) elle est égale à τ_I et donc elle est correcte et conforme au rapport institutionnel ; (ii) elle est correcte et différente de τ_I alors il faut prendre en compte d'autres informations sur le type de tâches T.

[9] Il peut y en avoir plusieurs.

[10] Le diagnostic d'une technique à partir d'une tâche ne permet pas d'inférer au type de tâches institutionnel car cela suppose une stabilité sur un ensemble de tâches à caractériser et qui correspond au type de tâches personnel. Ce problème a été largement étudié par Croset (2009) où elle a développé des critères de stabilité inter et intra-élèves. Cependant, le coût de ce diagnostic est important et donc nous avons opté pour un choix de ne pas chercher la stabilité.

Si une technique τe diagnostiquée appartient au MPR alors deux cas se présentent : (i) l'erreur est au niveau des ingrédients de τe (cf. Figure 5 pour les différents sous cas) ; (ii) l'erreur est au niveau de la technique d'un ingrédient T de τe. Dans ce cas on itère le processus sur la technique de cet ingrédient.

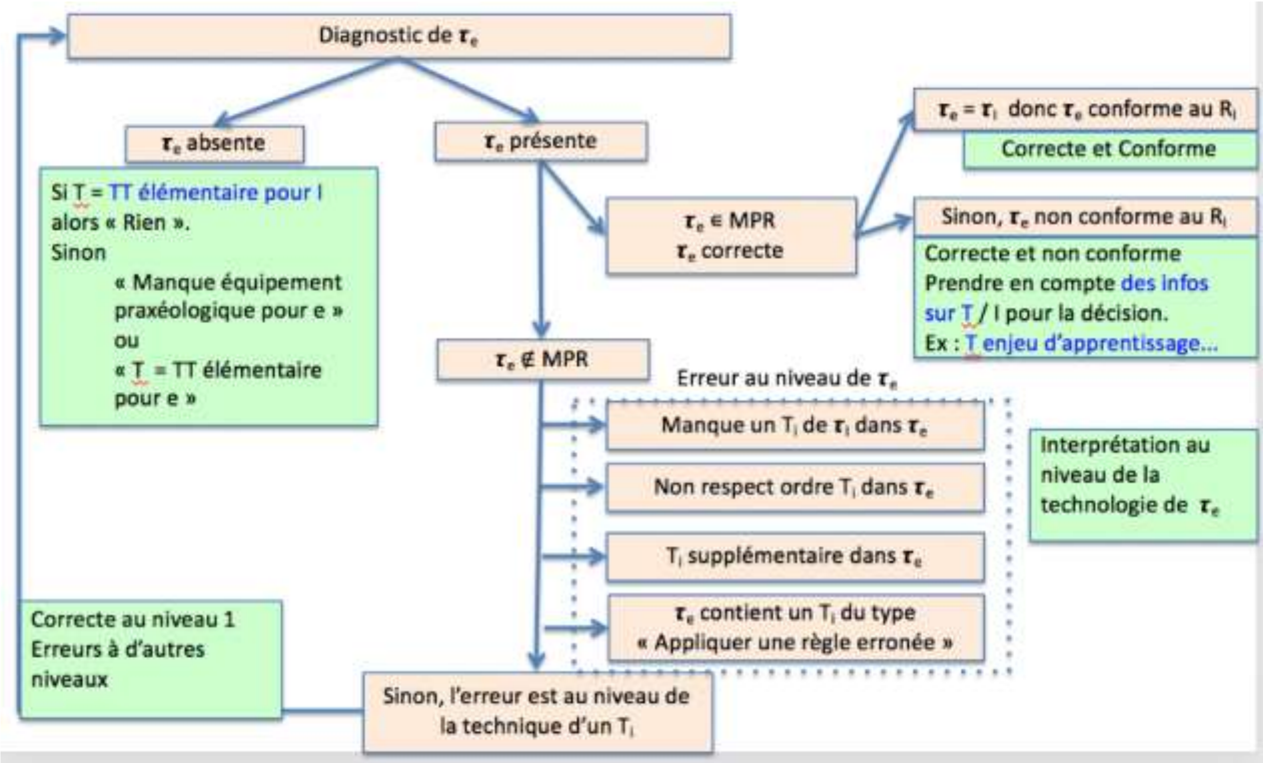


Figure 5 : Modèle de traitement d'une technique de l'élève diagnostiquée.

A partir de cette catégorisation on construit une fonction qui à chaque catégorie associe un type de rétroaction pour le système, pour l'élève ou l'enseignant. Cette fonction est en cours de construction.

Ce modèle a été utilisé dans la thèse de Bonnat (2017). L'étude porte sur une modélisation de l'erreur dans une situation de conception expérimentale en biologie proposée dans une plateforme informatique. Cela se traduit par une modélisation de praxéologies personnelles a priori qui s'appuie sur de possibles erreurs portant sur la technique du type de tâches ou bien sur la valeur de variable de la tâche. La modélisation a été enrichie par l'analyse de productions d'élèves et participera dans un second temps à l'évolution de la plateforme vers la mise en place d'un diagnostic automatique des erreurs.

IV. CONCLUSION

Dans les recherches en EIAH basées sur des modèles didactiques, la représentation informatique de ces modèles rend nécessaire leur transformation pour répondre à certains critères comme la calculabilité et la généricité. L'exigence de généricité signifie que le modèle ne doit pas être conçu de façon instanciée à un domaine de connaissances donné. Il a été mis en œuvre dans différentes disciplines, mathématiques, français, physique, chimie et biologie.

Le modèle T4TEL apporte une réponse à ces exigences. Nous avons représenté des structures praxéologiques avec des relations permettant de produire différents services EIAH en sciences expérimentales et en mathématiques autour des services : diagnostic et rétroactions, outil d'orchestration pour un professeur, indexation de ressources. Un exemple de mise en œuvre en sciences expérimentale est présenté par Girault et al. (2018) dans la conception d'un EIAH, TitrAB, dédié à la conception d'expériences de titrage en chimie, à la fois dans la sélection des tâches de l'activité travaillées dans TitrAB ainsi que dans la production de rétroactions automatiques.

Pour arriver à ces résultats des travaux en didactiques des mathématiques sont nécessaires. Par exemple, la thèse de Brasset (2017) porte sur la modélisation didactique et informatique de décisions didactiques fournit des résultats pour la conception d'un EIAH et plus précisément, pour produire un système capable d'accompagner l'enseignant dans sa pratique mais aussi un système tuteur capable de fournir à l'élève des feedbacks favorables à la construction d'une connaissance visée. Un autre exemple est le travail de thèse en cours de Jolivet sur l'indexation de ressources du type exercice.

Au-delà de la finalité EIAH, ces travaux contribuent également à faire avancer des recherches en didactique des mathématiques. En effet, la thèse de Brasset propose une modélisation des décisions didactique dans le cadre de la TAD. La thèse de Jolivet contribue à la modélisation de la notion de tâches et aussi la notion d'intentions didactiques.

Enfin, soulignons que le développement de T4TEL se fait aussi dans des champs hors EIAH comme dans les travaux de Tang (2014) sur l'analyse comparative des rapports institutionnels en France et au Vietnam à l'objet « représentation en perspectives » à partir un modèle praxéologique de référence pour construit dans le cadre de T4TEL.

Deux développements, hors champ EIAH, sont en cours dans la thèse Kaspary : intégration conceptuelle des ostensifs dans T4TEL et caractérisation des conditions et contraintes des rapports institutionnels à l'aide des variables. Un autre développement en cours concerne la construction des parcours d'étude et de recherche en s'appuyant en particulier sur le jeu des variables.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BONNAT, C. (2017). *Etayage de l'activité de conception expérimentale par un EIAH pour apprendre la notion de métabolisme cellulaire en terminale scientifique*. Thèse de doctorat, Université Grenoble Alpes.

BOSCH, M. & CHEVALLARD, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherche en Didactique des Mathématiques (19/1)*, 77-124.

BRASSET, N. (2017). *Les décisions didactiques d'un enseignant dans un EIAH Etude de facteurs de type histoire didactique*. Thèse de doctorat, Université Grenoble Alpes.

CASTELA, C. (2008). Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorées par les institutions d'enseignement. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 28 (2)*, 135-182.

CHAACHOUA, H. (2010). *La praxéologie comme modèle didactique pour la problématique EIAH. Etude de cas : la modélisation des connaissances des élèves.* Note de synthèse HDR, Grenoble : Université Joseph Fourier.

CHAACHOUA, H. & BESSOT, A. (2018, sous presse). Introduction de la notion de variable dans le modèle praxéologique. *Actes du 5e congrès pour la Théorie Anthropologique du Didactique*.

CHAACHOUA, H., FERRATON, G. & DESMOULINS, C. (2013). Utilisation du modèle praxéologique de référence dans un EIAH. *Actes du 4e congrès pour la Théorie Anthropologique du Didactique*, Toulouse.

CHEVALLARD, Y. (1989). Le concept de rapport au savoir, rapport personnel, rapport institutionnel. *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique 108.* Grenoble.

CHEVALLARD, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 12.1,* 73 - 112.

CHEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique de mathématiques, 19 (2),* 221-265.

CHEVALLARD, Y. (2002). Organiser l'étude 3. Écologie & régulation. In J. L. Dorier & al. (Eds.), *Actes de la 11e école de didactique des mathématiques*. (pp. 41-56) Grenoble : La Pensée Sauvage.

CIRADE, G. & MATHERON, Y. (1998). Équations du premier degré et modélisation algébrique. *Actes de l'université d'été de la Rochelle : Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques*. IREM de Clermont-Ferrand.

CROSET, M-C. (2009). *Modélisation des connaissances des élèves au sein d'un logiciel éducatif d'algèbre. Etude des erreurs stables inter-élèves et intra-élève en termes de praxis-en-acte*. Thèse de doctorat, Grenoble : Université Joseph Fourier.

CROSET, M-C., WAJEMAN, C. & D'HAM, C. (2018, sous presse). Modèle de construction d'un EIAH pour une activité de conception expérimentale. *Actes du 6e congrès pour la Théorie Anthropologique du Didactique*.

GIRAULT, I. & CHAACHOUA, H. (2013). How do students deal with the chemical knowledge during an experimental design in SCY-Lab? *Actes du 4e congrès pour la Théorie Anthropologique du Didactique*.

KASPARY, D. (2018, sous presse). Relations entre deux institutions noosphériennes : effets d'un système d'évaluation de manuels didactiques. *Actes du 6e congrès pour la Théorie Anthropologique du Didactique.*

TANG, M.D. (2014). *Une étude didactique des praxéologies de la représentation en perspective dans la géométrie de l'espace, en France et au Viêt Nam*. Thèse de doctorat, Grenoble : Université Joseph Fourier.

SIMULER LES PRATIQUES DES ENSEIGNANTS : OUTIL DE RECHERCHE

Fabien **EMPRIN**
URCA - CEREP EA 46 92
fabien.emprin@univ-reims.fr
ORCID : 0000-0002-0166-8489

Résumé
Nous avons fait le choix d'aborder la question de l'intérêt de l'usage de la simulation informatique en commençant par la replacer dans la problématique plus générale de l'importation des pratiques professionnelles dans la formation des enseignants.

Nous analysons ensuite le processus de conception de deux simulateurs développés et mis en œuvre à l'université de Reims. Cette analyse nous amène à questionner la nature et la place des savoirs et connaissances de formation.

Mots clés
Simulateur, formation des enseignants, savoirs professionnels, connaissances professionnelles

I. INTRODUCTION

1. La place des pratiques professionnelles dans la formation des enseignants

Nous prenons comme question de départ la place des pratiques professionnelles dans la formation des enseignants en France depuis la création des ESPE[1] (Écoles Supérieures du Professorat et de l'Éducation). Cette question était bien évidemment présente dans les dispositifs antérieurs de formation (IUFM[2] – Instituts Universitaires de Formation des Maîtres et école normale[3]), notre visée n'est pas de dresser un historique, mais plutôt de regarder un état actuel de la formation des enseignants. Les lauréats des concours de l'enseignement sont formés en ESPE et assurent un mi-temps dans un établissement scolaire en tant que fonctionnaires stagiaires, à l'exception des stagiaires ayant déjà une expérience d'enseignement d'au moins 18 mois durant les trois années avant leur obtention du concours. Ces fonctionnaires doivent suivre une formation, que ce soit dans le cadre d'un master 2 pour ceux qui n'en sont pas titulaires ou dans une formation adaptée pour les titulaires ou dispensés des titres requis, et assumer à mi-temps leur travail en responsabilité.

[1] Composante des universités en charge de la formation des enseignants du premier et du second degré dans le cadre de diplômes de Master Métiers de l'Enseignement l'Éducation et la Formation (MEEF).

[2] Instituts indépendants à l'origine des Universités chargés de préparer les enseignants du premier et second degré et de former les enseignants fonctionnaires stagiaires.

[3] Jusqu'en 1990 et 1991 les écoles normales d'instituteurs étaient chargées de la formation des enseignants du primaire.

La perception de la formation par les enseignants stagiaires

Les évaluations et les analyses des mentions de master dans le cadre des accréditations, par l'HCERES (Haut Conseil de l'Évaluation de la Recherche et de l'Enseignement Supérieur), la DGESIP (Direction Générale de l'Enseignement Supérieur et de l'Insertion Professionnelle), les rapports de l'IGAENR (Inspection Générale de l'Administration de l'Éducation Nationale et de la Recherche) ou les ESPE eux-mêmes mettent en évidence une séparation très importante entre la formation et les pratiques professionnelles « de terrain ». Prenons pour exemple quelques citations de propos de stagiaires lors de l'évaluation de formation par les stagiaires à l'ESPE de Lille Nord de France[4] : *« C'est une formation qui ne fait pas du tout le lien entre ce que l'on fait sur le terrain et la théorie des années précédentes. », « La formation ne correspond en aucun cas à la réalité du terrain. », « L'absence de cohérence terrain et ESPE. », « L'écart entre les cours et la réalité ! », « L'incompatibilité avec le terrain. »*. Ce ressenti peut être expliqué par les résultats de la recherche et notamment les difficultés de construction de l'identité professionnelle (Lanéelle & Perez-Roux, 2014) ainsi que la rupture entre le statut d'étudiant et celui de professionnel. Ces analyses portent un regard particulier sur la formation et concordant sur la difficulté de lier pratiques professionnelles et formation.

Une analyse des difficultés des stagiaires sur le terrain

Pour avoir un autre regard sur cette difficulté de mise en relation des contenus de formation et des pratiques de terrain nous avons effectué, au sein de l'ESPE de l'académie de Reims, une analyse des rapports de validation des fonctionnaires stagiaires. Notre corpus est constitué, pour l'instant, de 320 rapports permettant d'évaluer le stage du semestre 3 (premier semestre de l'année de Master 2 et donc de stage) pour les années 2016 et 2017. Ces rapports sont rédigés par les tuteurs terrain (professionnels de l'éducation nationale) et/ou les tuteurs ESPE (enseignants à l'université). Nous avons effectué un traitement de ce corpus par une analyse factorielle des correspondances sur les cooccurrences dans des segments de texte, méthode Reinert (2008) en utilisant le logiciel IRaMuTeQ (Ratinaud & Marchand, 2012). Cette méthode est basée sur le fait que segments de textes riches en cooccurrences permettent de définir de modes lexicaux stabilisés. Le logiciel a été paramétré de façon à permettre d'identifier si les segments de texte significatifs d'un point de vue statistique appartiennent à des rapports concernant des stagiaires du premier ou du second degré, et que leur conclusion propose de valider ou non l'unité d'enseignement « stage ». Les rapports non validés sont caractéristiques de formulations signalant, dans le premier degré, des difficultés dans la conception et la mise en œuvre des situations, des manques quant à la préparation des séances (pas de cahier journal, etc.) et des stagiaires ne parvenant pas à analyser leur pratique professionnelle. Pour le second degré, les difficultés concernent principalement la mise en œuvre des situations d'apprentissage en classe, la prise en compte des élèves ou l'évaluation formative et la non-maîtrise didactique et disciplinaire.

Un point remarquable dans ces rapports est que le discours sur les technologies numériques, quel que soit le degré ou le fait que le stagiaire soit validé ou non, est « isolé » des autres discours (les termes cooccurrents liées aux discours sur la mise en œuvre, la préparation de séances… sont donc significativement absent des parties traitant du numérique) et il porte sur des termes techniques. Cet isolement du discours nous amène à l'hypothèse que les technologies, dans l'accompagnement des stagiaires ne sont abordées que sous l'angle technique et non didactique ou pédagogique.

[4] LNF, enquête 2016 disponible en ligne : http://www.espe-lnf.fr/IMG/pdf/eqfef-rapport-evaluation_m1_m2_du-espe_lille_nord_de_france-2015-12-04-jh.pdf

Cette analyse montre que les difficultés des stagiaires sur le terrain relèvent en partie de contenus travaillés dans la formation : l'acquisition de connaissances didactiques leur permettant de préparer leur classe et d'analyser les travaux de leurs élèves. Une forme d'imperméabilité entre formation et pratique perçue par les institutions comme par les stagiaires est également révélée dans l'analyse des rapports de validation.

Une des pistes pour aider les stagiaires à faire le lien entre enseignements en formation et pratiques est de faire entrer les pratiques de terrain dans les formations pour les analyser, les accompagner… Cela est d'autant plus important dans le cadre des pratiques utilisant les outils numériques qui semblent relayées à des aspects techniques.

2. Comment faire entrer la pratique dans la formation et la formation dans la pratique ?

Les dispositifs s'appuyant sur les pratiques de terrain comme l'analyse de pratique, l'analyse de vidéo, la préparation accompagnée sont utilisés, mais ils sont coûteux en temps comme le soulignent Robert et Rogalski (2015) à propos d'une formation de formateurs utilisant l'analyse de pratiques :

> *« On voit la justification d'un temps long pour cette formation, dans la mesure où chaque analyse a un caractère opportuniste, dépendant de ce qui sort dans la séance. Sur la durée, l'aléatoire des apports des participants amène à rencontrer suffisamment de thèmes pour donner matière aux participants pour les adaptations dont ils auront besoin pour conduire leurs propres formations d'enseignants. » (Rogalski & Robert, 2015)*

Dans les temps de pratique, le tutorat, au travers du dispositif de tutorat mixte mis en place par l'arrêté du 27 aout 2013, associe un tuteur terrain et un tuteur ESPE. Il doit permettre d'aider le stagiaire à faire le lien entre les deux parties de la formation.

Nous choisissons de nous concentrer sur une partie de la formation sur laquelle la difficulté semble accrue : la formation des enseignants aux technologies. Par ailleurs nous nous intéressons spécifiquement à l'enseignement des mathématiques.

Pour répondre à cette difficulté, nous nous sommes intéressés à un outil de formation qui doit permettre de questionner les pratiques tout en limitant les aléas liés aux pratiques individuelles (et donc le temps) : la simulation.

II. LE CHOIX DE SCENARIOS DE FORMATION BASES SUR LA SIMULATION

Concernant les formations aux technologies, les recherches menées depuis plus de trente ans ont montré un fort ancrage sur l'homologie, au sens de Houdement & Kuzniak (1996). Abboud Blanchard (1994), à propos du plan IPT (Informatique Pour Tous)5, met en évidence des éléments similaires ainsi que la posture militante des formateurs. Cela a été à nouveau mis en évidence par Abboud-Blanchard & Emprin (2009) au début des années 2000. Ces travaux montrent de plus que, pour le formateur, la confrontation entre les stagiaires et l'ordinateur est considérée comme formatrice intrinsèquement, mais aussi qu'il y a une place importante

[5] Plan massif d'équipement des établissements en matériel informatique et de formation des enseignants lancé en 1985 en France.

réservée aux apports d'informations, de situations modèles du formateur et peu d'échanges entre stagiaires. Par ailleurs très peu de composantes des pratiques au sens de la double approche (Robert, 1999, 2005) sont questionnées, alors que les interventions des stagiaires révèlent ce besoin durant la formation. Cette organisation des séances de formation entraine une confusion entre les genèses instrumentales (Rabardel, 1995) de l'enseignant concepteur de ressources, de l'enseignant dans sa classe et de celle de élève ainsi qu'un décalage entre les attentes des enseignants et les potentialités des TICE présentées par le formateur (Ruthven & Hennessy, 2002 ; Lagrange & Caliskan-Dedeoglu, 2009). Nous proposons un scénario de formation tenant compte de ces résultats.

1. D'un premier scénario aux pratiques simulées

Ces travaux nous ont amenés à proposer l'introduction d'une composante d'analyse réflexive de pratiques ordinaires au travers de scénarios basés sur l'utilisation des vidéos comme outils. Il s'agit, en s'inspirant des scénarios de Pouyanne & Robert (2004) de mettre les stagiaires dans une posture de préparation à la mise en œuvre d'une séance, d'anticipation et de confrontation à ce qui s'est réellement passé dans une classe et enfin de recherche d'alternatives et d'identification d'une problématique.

La recherche sur cette démarche de formation (Emprin, 2007) a permis de montrer sa viabilité et le fait que les stagiaires mettent en évidence des problématiques qui touchent à plusieurs dimensions de leur pratique. Mais cette démarche est chronophage et elle dépend fortement du formateur. Nous nous sommes donc intéressés à d'autres dispositifs qui permettraient de faire entrer la pratique de classe dans la formation.

Dans le monde de la formation professionnelle, apprendre par la simulation (Pastré, 2005) est une démarche utilisée parce qu'elle présente moins de risques, qu'elle est moins coûteuse (temps, argent, humain…) et qu'elle permet d'accélérer le processus d'acquisition de l'expérience en confrontant les stagiaires à des situations contrôlées et plus nombreuses. Pastré (2005) met en évidence deux types de simulateurs : à échelle complète « Full scale simulators » où le travail se réalise à l'échelle 1:1, avec une recherche de réalisme et à échelle partielle « part scale simulators » où une partie de la réalité seulement est simulée et où le temps n'est pas le temps réel. Si le premier type de simulateur est bien adapté à la répétition de gestes en temps réel et de réaction à des imprévus le second est plus adapté à l'analyse de pratiques et à la réflexivité.

Par sa dimension résolution de problème, c'est le second type de simulation que nous avons retenu pour faire entrer les pratiques de classe dans les formations à la place des vidéos de pratiques, de l'homologie ou des narrations. Un second intérêt du travail sur simulateur à échelle partielle est de mettre à distance certains éléments affectifs qui pourraient gêner l'analyse de pratiques réelles. Lors de l'analyse de vidéo, que l'enseignant filmé soit présent ou non, il peut être difficile de formuler certaines critiques ou de se détacher d'aspects connus du contexte comme le fait que ce soit un formateur ou au contraire un débutant. Les pratiques simulées neutralisent ces effets et nous faisons l'hypothèse qu'elles peuvent faciliter la formulation d'éléments personnels. En effet le contexte étant relativement neutre, pour justifier leurs choix les enseignants doivent préciser leur point de vue et donc exprimer des éléments qui relèvent des composantes personnelles, sociales et institutionnelles de leurs pratiques.

Nous avons identifié deux situations de travail qui peuvent être simulées dans le cadre de la formation : la situation de classe où un enseignant travaille avec des élèves et la situation d'accompagnement où un formateur ou un pair échange avec un enseignant autour de sa pratique de classe. Nous avons construit et expérimenté ces deux types de simulateurs dans le cadre de la formation des enseignants.

2. Le simulateur informatique de classe

Le simulateur informatique de classe (SIC) a été conçu et programmé dans le cadre d'une première recherche de l'IREM de Reims (Emprin, 2011) qui nous a permis d'en vérifier l'acceptabilité puis reprogrammé dans le cadre d'un projet incitatif Amont – La Délégation Régionale à la Recherche et à la Technologie (DRRT) — Champagne Ardenne (Emprin & Sabra, 2014, 2015). Nous ne faisons ici qu'une présentation succincte du simulateur dont la conception et le fonctionnement ont déjà fait l'objet de plusieurs publications. SIC est accessible à l'adresse : http://cerep-sic.univ-reims.fr. Il permet à l'enseignant au moyen d'une interface (à droite figure 1 ci-dessous) de faire des choix dont il voit les effets sur les élèves (à gauche figure 1 ci-dessous). Les informations que l'utilisateur récupère sur l'activité des élèves sont de trois natures : la figure réalisée sur le logiciel de géométrie dynamique, les réponses des élèves quand l'enseignant choisit de les interroger et l'attention des élèves (caractérisée par une barre en dessous de chaque binôme).

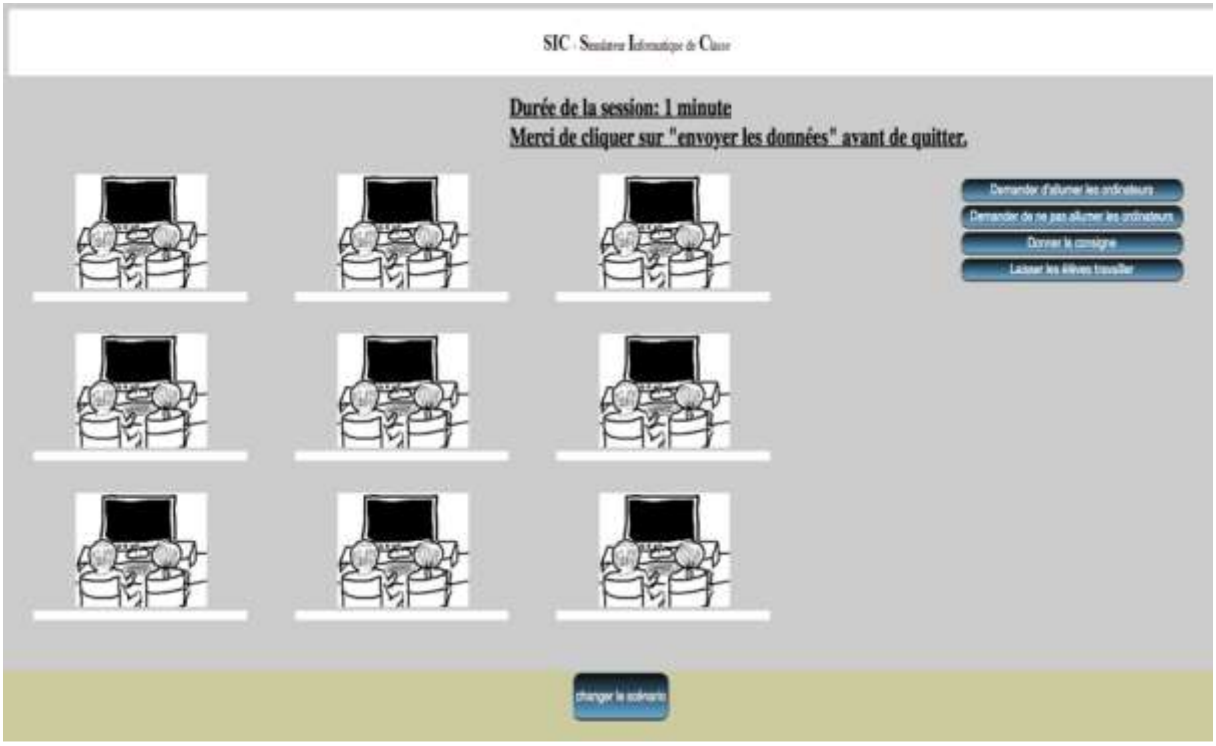


Figure 1 : Interface du logiciel SIC.

Ce simulateur a été expérimenté en troisième année de licence dans le cadre de modules de préprofessionnalisation, en deuxième année de master « Enseignement éducation et formation » mention second degré parcours mathématiques, avec des professeurs des écoles stagiaires en formation initiale et continue. Lors de ces formations, nous faisons passer un questionnaire auprès des utilisateurs, ce qui nous permet d'affirmer que le simulateur est reconnu comme un outil d'analyse de pratiques par les stagiaires. Lors des sessions de formation de deux heures, les enseignants réalisent en moyenne 4,8 essais ce qui montre bien le rôle d'accélérateur d'expérience qui était attendu. Les enseignants repèrent et formulent les contenus attendus pendant cette formation liés à la tâche spécifique proposée : le fait que la situation comporte en fait deux objectifs et deux tâches qui ne peuvent être menées en même temps, la problématique de la relation conjecture/démonstration, les éléments pédagogiques liés à la gestion des interactions individuelles et collectives, à l'usage du logiciel de géométrie dynamique (LGD) et les difficultés des élèves à s'approprier le système de contraintes du LGD.

Ce simulateur a déjà reçu 1840 visites dont 42 % sont des survols (une seule page vue). Cela signifie donc que plus de 1000 simulations ont été réellement initiées.

L'ensemble de ces éléments nous permettent de conclure que ce type de dispositif, par simulation, peut exister dans le système de formation : nous avons en quelque sorte obtenu « une preuve de concept ». L'investissement dans ce type d'outil est donc pertinent et nous invite à en continuer le développement pour l'amener à dépasser l'état de prototype. En effet notre simulateur ne contient actuellement qu'un seul scénario de classe et il nécessite, à chaque nouveau scénario, une reprogrammation quasi complète.

Les pistes de développement de l'outil concernent la mise en place d'un générateur de scénario qui permettrait à des formateurs d'implémenter leurs scénarios, de les utiliser dans leur formation et de les partager.

La relation pratiques professionnelles/formation didactique et disciplinaire ne se limite pas aux cours en présentiel, elle est également en jeu dans la situation d'accompagnement, c'est cette dimension que nous avons travaillée grâce à un logiciel spécifique.

3. Le simulateur d'entretien professionnel

Pour comprendre la situation de conseils, nous nous appuyons sur le travail de Brau-Antony & Mieusset (2013) qui se base sur dix-huit instructions au sosie dans le cadre de la clinique de l'activité (Clot, 2001). Leur analyse permet de dégager neuf facettes de ce travail :

1) accueil, intégration de l'enseignant stagiaire ;
2) travail avec l'enseignant stagiaire sur la conception de l'acte d'enseignement ;
3) observation du travail de l'enseignant stagiaire ;
4) analyse de la pratique professionnelle de l'enseignant stagiaire ;
5) travail avec d'autres professionnels avec et pour l'enseignant stagiaire ;
6) accueil de l'enseignant stagiaire dans la classe du maître de stage ;
7) travail avec l'enseignant stagiaire sur d'autres activités que l'acte d'enseignement ;
8) évaluation de l'enseignant stagiaire ;
9) accès à la fonction de maître de stage et formation à cette fonction.

Parmi ces facettes, le travail avec l'enseignant stagiaire sur la conception de l'acte d'enseignement (facette 2) et l'analyse de la pratique professionnelle de l'enseignant stagiaire (facette 4) relient directement le terrain et la formation didactique/disciplinaire. Par ailleurs ce sont deux facettes qui peuvent être simulées dans la mesure où elles se jouent dans une interaction entre le professeur stagiaire et le maître de stage. Nous avons choisi de simuler d'abord la facette 4 en l'appuyant sur la facette 3, c'est-à-dire l'observation de l'enseignant stagiaire.

Matteï-Mieusset (2013) identifie quatre dilemmes associés à cette facette du travail qu'est l'analyse de pratique :

Transmettre le métier ou faire réfléchir pour permettre à l'ES de construire sa réponse qui est caractérisé par des discours du type :

> « […] quelles difficultés il a rencontrées, quelles difficultés, ça peut être gestion du groupe, ou pour faire passer tel contenu mathématique, comment d'abord il l'a vécue Parce que sinon la réflexion forcément elle s'arrête quoi, il va pas réfléchir si déjà tu lui

donnes la solution Euh tu peux lui demander ce qu'il a pensé de sa séance, comment il l'a vécue ».

Pointer les erreurs et les réussites de l'ES ou l'aider à les faire émerger qui est caractérisé par des discours du type :

> « Je vais essayer de pas lui dire voilà ce que j'ai vu, je vais plutôt l'interroger, tiens j'ai constaté ça, qu'est-ce que tu en penses, comment ça se fait que, est-ce que toi tu as constaté alors je fais quoi là, je lui donne mes solutions ? Après on peut lui donner un éventail de solutions ».

Soutenir l'ES ou l'évaluer qui est caractérisé par des discours du type :

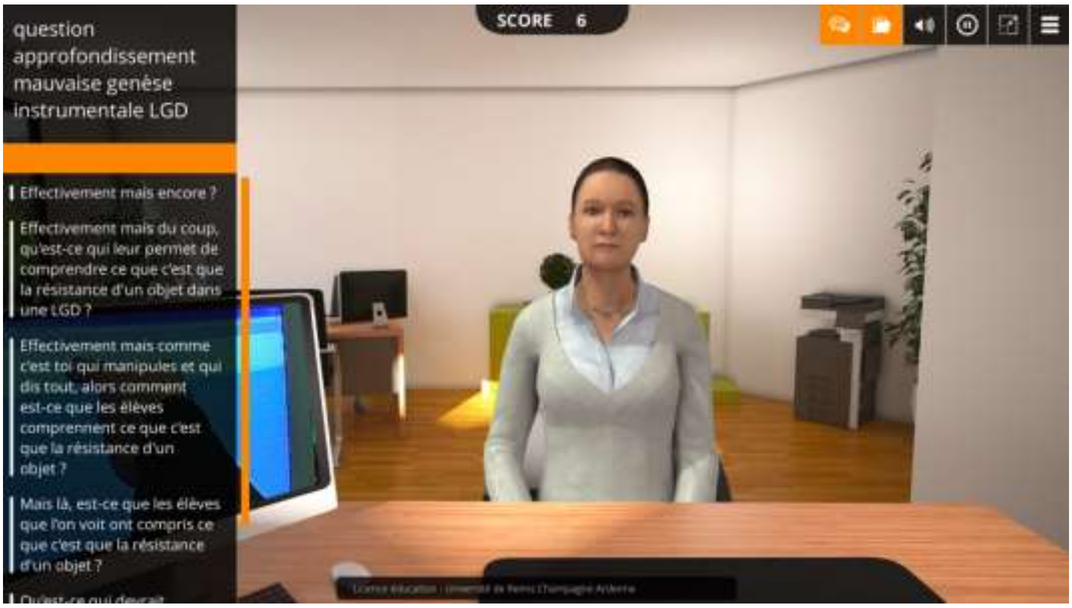
> « Parce que encore une fois, j'évalue, et ils ont peur qu'on dise qu'ils s'en sortent pas, moi je veux dire, je le comprends bien ça. Psychologiquement, c'est-à-dire que, l'affectif, même si on peut trouver quelqu'un agréable, il faut aussi qu'on garde, c'est pas une distance, je suis le maître […], mais il faut être bienveillant ».

Guider, imposer un cadre, des outils à l'ES ou le laisser libre de ses choix qui est caractérisé par des discours du type :

> « Mais dans ce que tu dois transmettre à un futur enseignant, jusqu'à quel point tu dois poser un regard par rapport à ce que toi tu ne tolères pas ou ce que tu tolères, et ça je trouve, ça me pose toujours un problème ».

Un simulateur d'analyse de pratique (SAP) a donc été programmé. Il doit permettre à l'utilisateur de prendre conscience et de se positionner par rapport aux dilemmes liés à l'analyse de pratiques : est-ce que ma pratique de l'entretien me situe bien où je pense être ? Comme le SIC, cet outil de simulation n'a pas été pensé pour être utilisé seul, mais au cœur d'un dispositif de formation permettant une réflexion collective sur les contenus transmis lors des temps d'analyse de pratique.

Pour cela nous avons utilisé le logiciel Virtual Training Software[6] qui permet de simuler une situation d'entretien. L'utilisateur choisit parmi une liste, les interventions et les actions qu'il veut faire. Cette liste peut être, par exemple, sur la gauche comme sur la figure 2 qui est une capture d'écran.



[6] https://www.seriousfactory.com/virtual-training-suite/, licence accordé à l'université de Reims Champagne Ardenne (URCA).

Figure 2 : Capture d'écran de la simulation d'analyse de pratique.

Le contexte de l'entretien a été choisi pour correspondre aux usages de maîtres de stages qui indiquent s'installer dans un lieu isolé au calme avec leur stagiaire (Matteï-Mieusset, 2013).

Les questions et les réponses sont entendues par l'utilisateur, les avatars présents sont animés et peuvent exprimer différents sentiments par la voix, mais aussi par les attitudes faciales comme sur la figure 3 ci-dessous :

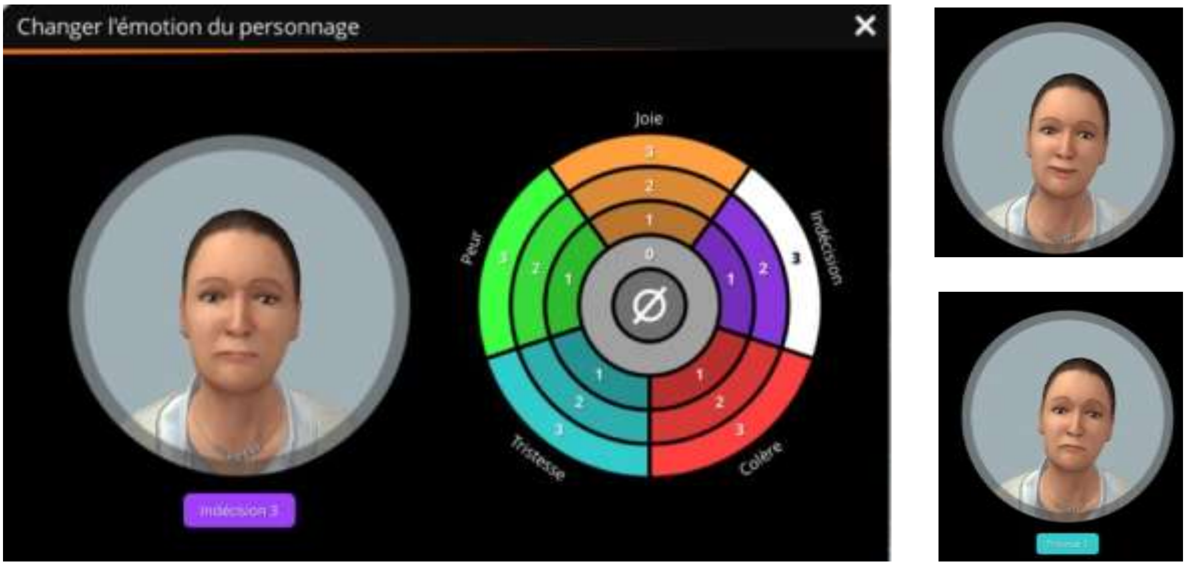


Figure 3 : Attitudes faciles dans le logiciel VTS.

À la fin du scénario, les utilisateurs reçoivent des informations sur les effets de leur entretien. D'abord par un temps de questions-réponses ils doivent dire s'ils pensent que leur stagiaire a repéré différents éléments qui pouvaient être en jeu lors de l'entretien, comme indiqué dans la capture d'écran figure 4. La stagiaire répond pour dire si c'est vrai ou non.

Figure 4 : Questionnaire final, identifier ce que la stagiaire a repéré ou non.

Une fois le travail terminé le logiciel renvoie à l'utilisateur son positionnement, tiré de ses choix, par rapport aux différents dilemmes. Par exemple pour « transmettre » ou « faire réfléchir », « transmettre » est au centre du diagramme radar et « faire réfléchir » à l'extérieur. Dans la figure 5 ci-dessous on voit clairement que l'utilisateur est du côté de « transmettre », « pointer les erreurs », « guider » et plutôt vers « évaluer ». Le dernier score concerne l'appropriation des contenus didactiques possibles dans la séance. Le score de 2 sur 60 possible montre que la stagiaire n'a quasiment pas travaillé sur les concepts didactiques lors de cet entretien.

Figure 5 : Diagramme final : positionnement dans les différents dilemmes.

Il est clair pour nous que ce positionnement final est discutable, chaque choix pouvant être interprété en fonction du contexte, mais c'est justement l'intérêt de ce travail qui doit permettre lors d'une formation d'engager une discussion entre stagiaire et avec le formateur. Ces échanges doivent prendre en compte les composantes institutionnelle, personnelle et sociale des pratiques. Notre choix est donc de susciter des discussions qui mettent en jeu réellement ces composantes et qui nécessitent donc de la part des stagiaires de formuler des éléments personnels, liés à leur contexte d'enseignement, leur représentation du métier, des mathématiques, etc.

En travaillant avec un avatar et non une personne réelle, la simulation réduit les éléments affectifs à la perception des émotions programmées dans le logiciel. Elle permet ainsi de se centrer sur les éléments professionnels.

Notre hypothèse peut sembler paradoxale, mais en travaillant dans un contexte neutre et dépersonnalisé nous pensons que les utilisateurs sont plus amenés à préciser des composantes personnelles qui ont guidé leur choix.

Un scénario de formation remplaçant l'analyse de pratiques filmées par le travail sur ce simulateur a été mis en place après de master 2 MEEF mathématique. Il est en cours d'analyse. D'autres scénarios de formation, avec des formateurs d'enseignants cette fois sont en cours de mise en œuvre. Pour mener ces analyses, nous nous basons sur une méthodologie inspirée par l'ingénierie didactique (Artigue, 1988) en émettant des hypothèses sur les processus d'apprentissage et de formation a priori et en vérifiant a posteriori. Ce processus de validation interne est au cœur du travail que nous menons depuis plusieurs années sur les simulateurs et il soulève des questions liées aux connaissances et aux savoirs en jeu dans la formation.

III. LES QUESTIONS POSEES PAR LA SIMULATION DE PRATIQUE

Tout d'abord nous avons fait le choix de faire la distinction entre connaissances et savoirs en nous appuyant sur les travaux de (Margolinas, 2012) :

> *« Ce que l'on peut retenir schématiquement de ces distinctions, c'est déjà que la connaissance vit dans une situation, alors que le savoir vit dans une institution. » (p. 8)*

Comme tout simulateur, les simulateurs de pratiques sont programmés avec des règles de fonctionnement. C'est en analysant les réactions du simulateur que les apprentissages potentiels des utilisateurs se réalisent puisque l'outil que nous utilisons est centré sur la réflexivité. En programmant, le concepteur embarque donc des connaissances et des savoirs potentiels qui pourront ou non être acquis lors de la formation.

Cela veut dire que d'une part le concepteur, mais également le formateur doivent identifier les savoirs et les connaissances qu'ils veulent faire travailler. Nous analysons maintenant l'approche des connaissances et des savoirs dans nos deux simulateurs.

1. SIC : Une approche heuristique pour identifier des savoirs de formation

Pour concevoir SIC nous nous sommes basés sur la captation, la transcription, l'analyse de la même situation de classe à plusieurs reprises et dans plusieurs contextes. Nous avons également mené des entretiens avec les enseignants. Nous avons enregistré, transcrit et analyser des séances de formation utilisant les captations des situations de classe comme support pour en dégager des choix et des informations sur les différentes dimensions des pratiques.

L'ensemble de ce travail préalable nous a permis de construire un modèle d'interactions basé sur des connaissances et des savoirs issus de la didactique, d'aspects plus liés à la gestion de la classe et aux gestes professionnels (Bucheton & Soulé, 2009). En mettant en place les formations utilisant le simulateur nous avons pu observer l'émergence d'un corpus de connaissances et de savoirs qui recouvre et dépasse les corpus que nous avions pu observer lors des sessions utilisant la vidéo.

Nous appelons ce corpus : les connaissances de formation pour celles qui sont spécifiquement attachées à la situation et les savoirs de formation pour ceux qui sont formulés par les stagiaires et dépassent le cadre de la situation dans laquelle ils ont émergé.

Les connaissances de formation

Dans la situation analysée, il y a, en fait, deux situations avec deux objectifs différents qu'il faut identifier et ne pas confondre : la construction sur Logiciel de Géométrie Dynamique (LGD) et son utilisation pour la conjecture.

Il est impossible de mener les deux objectifs à terme dans le cadre d'une séance de classe de 55 minutes. Plusieurs stratégies sont alors possibles :

Faire deux séances : une pour la construction, une pour la conjecture et la démonstration. Dans ce cas la première séance peut se faire sur ordinateur ou tablette, la seconde peut nécessiter un aller-retour entre support informatique et papier-crayon.

Diminuer la pression sur la tâche de construction en donnant des fichiers partiellement réalisés pour permettre à tous les élèves de travailler sur une figure correcte ou donner le début de la construction déjà réalisée

Donner la construction géométrique déjà réalisée et se centrer sur la tâche de conjecture et de démonstration.

Le travail sur la conjecture nécessite pour l'élève de voir une sous-figure dans la figure construite. Elle permet de prendre conscience ou de réutiliser des propriétés du rectangle, notamment le fait que les diagonales du rectangle sont isométriques.

Les savoirs de formation

Nous listons maintenant ce qui est formulé par les stagiaires lors d'une formation utilisant le simulateur et qui a un statut indépendant de la situation. Tout d'abord les stagiaires formulent que : dans une situation il faut clairement identifier l'objectif visé ; leur expérience sur simulateur leur a montré qu'ils n'avaient pas une idée suffisamment précise des enjeux ; la construction dans un LGD nécessite l'utilisation de primitives qui traduisent des propriétés mathématiques ; l'usage du LGD permet l'appropriation de la figure, travaille la rigueur dans l'expression ; la résistance des objets est spécifique au LGD et elle est un critère de validation de la construction (cette dernière crée une rétroaction spécifique de la situation qui permet de garantir qu'une construction résistante a été construite en utilisant les propriétés de la figure) ; cette « façon de dessiner » nécessite une appropriation que nous pouvons analyser grâce au cadre des genèses instrumentales (Rabardel, 1995) ; le concept de sous-figure et de sur-figure apparaît dans l'analyse du travail.

L'usage du LGD pose donc la question du statut du dessin dans un tel environnement : cette figure résistante correspond à une sorte de « classe d'équivalence » de toutes les figures ayant les mêmes propriétés, la figure à un moment donné étant un représentant.

Ce travail dans un environnement spécifique pose aussi la question de la preuve : conviction vs preuve. En effet le LGD comme d'autres outils numériques comme la calculatrice algébrique symbolique (CAS) permet d'acquérir la quasi-certitude de la véracité de la conjecture, comment justifier alors l'importance de la démonstration.

Les stagiaires formulent, sur le plan des gestes professionnels, le fait que le travail avec les outils numériques nécessite une attention particulière dans la phase de consigne. Cette affirmation est transférable à tout usage de matériel.

Enfin, toujours autour de gestes professionnels, ils mettent en évidence le fait que les interactions collectives sont plus rapides, mais peuvent avoir une forte déperdition alors que le fait d'intervenir de façon individuelle auprès d'une élève est plus efficace, mais chronophage. Ils concluent qu'il faut gérer l'alternance entre les deux modes d'interaction en fonction de l'enjeu de l'intervention.

En basant le travail de conception du simulateur sur l'analyse de séance de classe et de formation, nous avons obtenu un corpus stable de connaissance et savoirs travaillés par la formation. Nous évoquons l'idée de stabilité, car à chaque fois que nous menons ces formations ce sont bien ces savoirs qui sont énoncés et ces connaissances qui apparaissent. Il nous reste à regarder si ce corpus est également robuste, c'est-à-dire qu'il émerge indépendamment du formateur. Pour cela nous devons analyser des formations s'appuyant sur notre simulateur, mais menées par d'autres formateurs que nous.

2. Une approche par un ingénierie

Pour la construction du SAP (Simulateur d'Analyse de Pratiques), nous avons adopté une démarche différente basée sur un processus d'ingénierie au sens de Le Boterf (2011). Nous sommes partis de l'analyse des représentations des étudiants et des formateurs sur les pratiques utilisant les technologies puis nous avons analysé les savoirs et connaissances de formation en nous appuyant sur nos recherches antérieures et sur les recherches existantes. Nous avons ensuite implémenté le logiciel de façon à faire apparaître ces connaissances et savoirs dans les réponses possibles de l'utilisateur et dans les rétroactions du logiciel. Une phase d'expérimentation permet de revenir sur les hypothèses de départ et de modifier le logiciel. En l'état actuel de notre travail, nous sommes en phase d'analyse des expérimentations. Nous illustrons ce processus par le schéma, figure 6 ci-dessous.

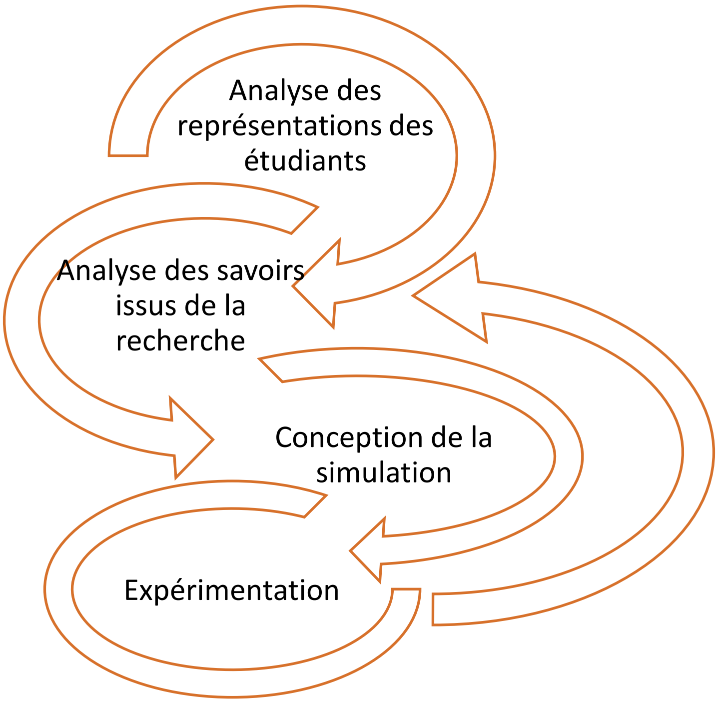


Figure 6 : Processus d'ingénierie pour la création de SAP.

L'analyse des représentations initiales des étudiants

Pour analyser les besoins des étudiants et des tuteurs en termes de formation nous avons d'une part utilisé les travaux existants tels que ceux de (Matteï-Mieusset, 2013) que nous avons souhaité compléter par un recueil des représentations de nos étudiants spécifiquement sur les usages de technologies. Pour cela nous avons utilisé un dispositif de formation que nous appelons « par la contraposée » (Emprin & Jourdain, 2010). Nous demandons aux étudiants de trouver les différentes façons de « faire échouer une séance avec les technologies ». L'intérêt de ce dispositif est de pouvoir accéder de façon moins biaisée aux représentations des étudiants. En effet si la question avait été : « comment utiliser les technologies pour faire réussir les élèves » ils auraient utilisé pour répondre non seulement ce qu'ils savent, mais aussi ce qu'ils pensent que l'on attend, en tant que formateur, comme réponse. L'effet de surprise lié à la question et le fait que les enseignants ne savent pas ce qui est attendu provoquent des réponses plus libres et plus proches de leurs représentations. La fin du dispositif de formation consiste à faire catégoriser puis inverser les réponses pour obtenir un état des lieux, à un temps « t », des stratégies pour faire réussir les élèves avec les technologies. Cela peut amener le formateur à identifier des manques c'est-à-dire des éléments qui ne sont pas relevés par les étudiants et donc orienter sa formation en conséquence.

Nous avons réalisé, deux années de suite, ce travail avec deux promotions d'étudiants en master MEEF 2[d] degré, mathématiques et obtenus les catégories suivantes :

Ne pas préparer sa séance (pas suffisamment) ;
Ne rien préparer/Contenus mal adaptés ;
Faire une séance où le numérique n'est pas adapté ;
Pas d'intérêt : transformer la séance en jeu/ne pas la transformer en jeu ;
Être confronté à un impondérable extérieur/logistique ;
Ne pas s'y être préparé ;
Ne pas assurer la gestion de la classe ;
Ne pas maîtriser la technologie.

Nous avons reproduit ci-dessous le document final obtenu lors d'une formation, après classification des idées.

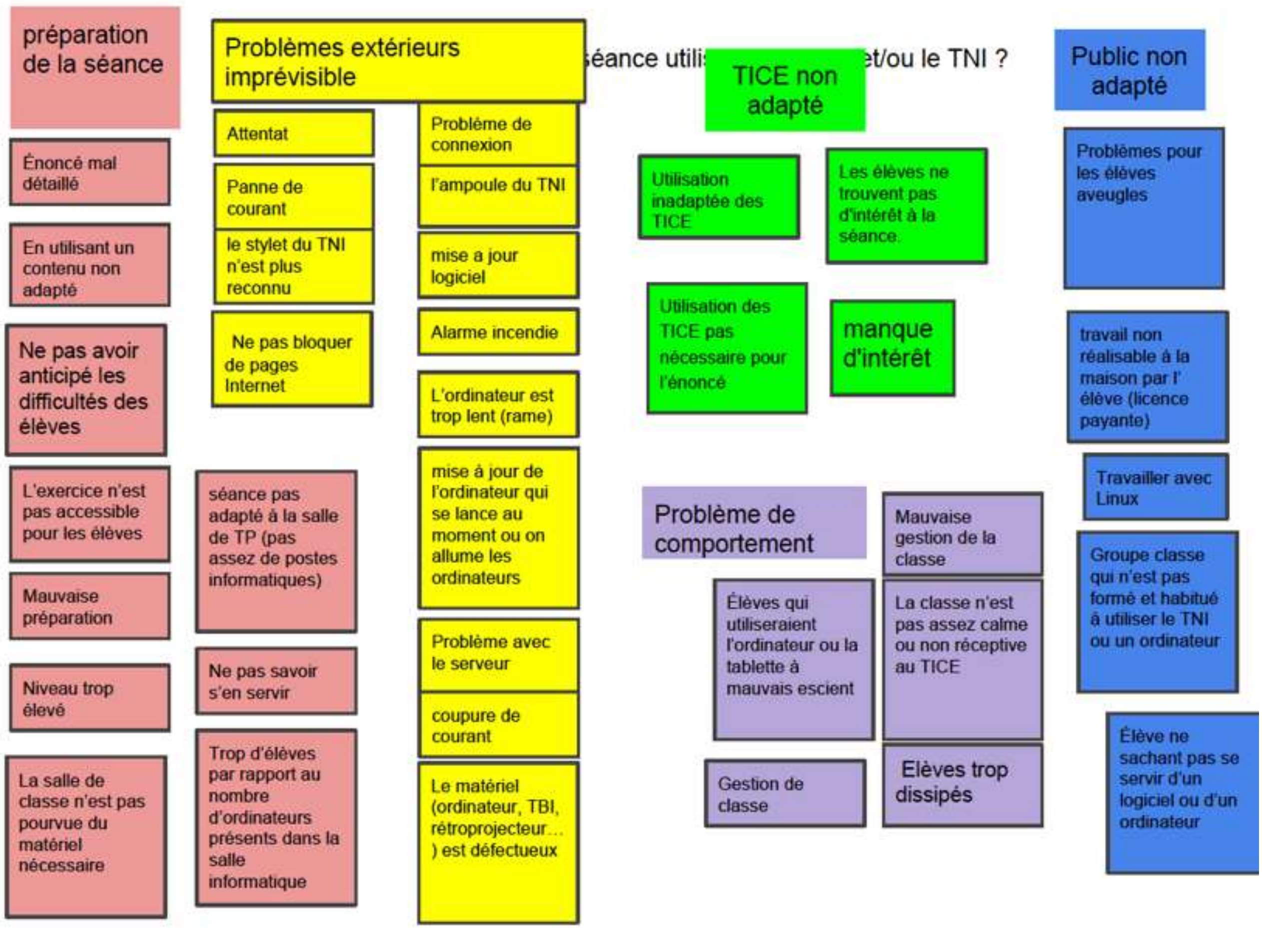


Figure 7 : Tableau de contraposée après classification.

L'analyse de ce dispositif montre une prédominance des facteurs liés à la préparation de la classe, aux impondérables, à la gestion de classe et aux aspects techniques (connaissances techniques de l'enseignant et problèmes techniques). L'adaptation de l'usage des technologies à la séance apparaît également, mais de façon moins importante que les autres facteurs.

Ce travail, certes exploratoire, nous amène à identifier plusieurs aspects à prendre en compte dans la formation pour qu'elle réponde aux besoins :

Les aspects « gestion de la classe » avec les technologies ;

Les aspects logistiques et techniques : maîtrise suffisante de l'environnement et des outils pour travailler sereinement ;

Le fait d'adapter l'usage des outils aux besoins en termes d'apprentissage des élèves.

Ce dernier aspect apparaît en creux dans les catégories « préparation de la classe » « adaptation des technologies », car si la séance n'est pas préparée, l'enseignant n'a pas anticipé la façon de provoquer des apprentissages en utilisant des technologies.

SAP est donc programmé pour que l'utilisateur prenne conscience des facettes et des dilemmes liés à l'activité d'entretien d'analyse de pratique et qu'il identifie des savoirs qui permettent de mettre en évidence le rôle des technologies dans les apprentissages des élèves. Nous avons fait le choix de nous centrer sur l'usage d'un LGD dans le cadre d'une conjecture puis d'une démonstration.

L'usage des technologies pour enseigner la géométrie

Nous nous appuyons sur la littérature de recherche pour identifier les connaissances et savoirs qui pourraient être transmis lors d'une formation.

Concernant la géométrie dynamique, un point central apparaît : la résistance des objets (Laborde, 2000 ; Restrepo, 2008). En effet l'espace dans lequel les élèves travaillent au sens de Berthelot & Salin (1992) est spécifique puisqu'il apporte un système de contraintes inédit. Une construction correcte est une construction qui résiste au déplacement. Ce système de contraintes nécessite d'ailleurs une appropriation par l'élève que l'on peut analyser en termes de genèses instrumentales (Rabardel, 1995). Le travail de Restrepo (2008) met en évidence ces processus de genèses instrumentales.

L'analyse du travail des élèves peut également se faire en regardant le LGD comme un milieu résistant permettant les apprentissages (Laborde & Capponi, 1994). Un LGD peut également permettre des constructions molles (qui s'opposent aux constructions résistantes) (Laborde, 2000). Ces constructions permettent à l'élève de conjecturer des propriétés. Les tracés géométriques obtenus dans le logiciel nécessitent, pour être analysés, de mobiliser un cadre permettant de les distinguer des dessins papier-crayon et des objets mathématiques idéaux. Nous proposons d'utiliser la distinction dessin/figures et les représentations sémiotiques (Duval, 1994).

Pour comprendre les usages du LGD nous proposons de le différencier des autres outils numériques qui permettent de faire de la géométrie :

les instruments virtuels comme ceux qui sont présents dans « instrument en poche »[7] ou les logiciels pour tableaux numériques interactifs (TNI) tels que Activinspire®, Smart note® ou open Sankoré. Ces instruments simulent la manipulation d'objets réels ;

les interpréteurs de langage comme Rédigeo, tiré de la suite « les langagiciels [8]» et qui permet de mesurer la différence entre ce que l'élève dit et ce que ce qu'il dit veut dire. Le logiciel interprète un discours écrit réalisé par l'élève ;

les logiciels qui travaillent sur la démonstration comme GeometriX[9]. Ce logiciel s'appuie sur une construction géométrique pour ensuite travailler sur la mise en relation entre hypothèses, théorème et conclusion.

[7] https://instrumenpoche.sesamath.net
[8] https://www.langagiciels.com
[9] http://geometrix.free.fr/site/index.php

La problématique sous-jacente à ce travail peut être celle de l'impact de l'usage d'un LGD sur la conjecture et sur la preuve. En effet les élèves peuvent être convaincus par la manipulation sur le logiciel. Est-ce que cette conviction modifie leur relation à la démonstration ?

La programmation de SAP

La simulation est donc programmée pour faire apparaitre des propositions d'interactions qui mettent en évidence les différents dilemmes et les savoirs didactiques en jeu. Par exemple l'intervention : « *Je te propose de lancer la vidéo de ta séance, on la regarde ensemble et tu arrêtes quand tu veux, à un moment qui te semble intéressant.* » se situe plutôt dans l'idée de faire émerger les représentations de l'enseignant, de ne pas trop le guider alors que celle-ci : « *Je vais te montrer des extraits de ta séance et je vais te poser des questions sur tes choix.* » est plus guidante et cette dernière : « *Je peux te dire ce que j'ai vu, en fait tu as demandé à tes élèves la définition de la médiatrice, ils t'ont dit on construit une médiatrice et tu leur as expliqué que l'on ne disait pas UNE médiatrice, mais LA médiatrice.* » est réellement guidante.

Les choix donnés à l'utilisateur fournissent des éléments de connaissances didactiques ou liés à la gestion de classe par exemple :

> « Pour moi c'est clair que les élèves qui bougent un sommet du triangle et s'étonnent que l'une des médiatrices ne bouge pas, ces élèves-là ne se sont pas suffisamment approprié et la figure, et le fonctionnement du LGD. Ça veut dire que tu n'as pas passé assez de temps sur la construction, parce que, là, tu passes à la conjecture sur un truc qui n'est pas du tout clair pour les élèves. Si tu décides de faire faire la figure aux élèves, il faut que tu ailles au bout du processus. »

Ou

> « Tout d'abord, j'ai remarqué que tu fais à la place de l'élève. Pour certains de tes élèves, la résistance des objets n'est pas comprise. Ils ne la prennent pas comme un critère de vérification du dessin. Enfin tu n'utilises pas assez le fait de faire bouger les points de base du dessin, justement comme critère. Enfin, tes dernières interventions sur l'unicité de la médiatrice changent de sujet alors que les élèves sont en pleine construction. »

Ainsi la programmation du logiciel utilise des connaissances et des savoirs visés dans la formation.

La conception et l'usage des simulateurs font donc apparaître le besoin d'identifier et de définir des connaissances et des savoirs de formation, mais quel est leur statut ? Leur nature ? La façon dont le formateur peut les identifier et les choisir ? Quelle est l'épistémologie de ces savoirs et quels sont les cadres théoriques qui permettent d'y accéder ?

IV. LA PLACE DES CONNAISSANCES ET DES SAVOIRS DANS LE TRAVAIL SUR LA SIMULATION

Une des spécificités du simulateur est qu'il met au cœur du travail du concepteur et du formateur la question des connaissances et des savoirs de formation. Pour le concepteur, la programmation des outils nécessite qu'il identifie des « lois » qui régissent le fonctionnement du logiciel. Ce sont ces lois qui seront perçues, analysées voire discutées par l'utilisateur de la simulation et donc qui feront l'objet du travail de formation. La simulation rend donc publics les connaissances et les savoirs de formation que les concepteurs ont embarqués au sein du simulateur. Le formateur quant à lui doit concevoir un dispositif de formation qui permette de faire émerger les connaissances de formation et de faire formuler les savoirs. Définir et comprendre les connaissances et les savoirs de formation est donc crucial dans le travail sur la simulation.

1. Quelle épistémologie des savoirs de formation ?

Nous prenons comme définition de l'épistémologie celle de (Piaget, 1967) qui amène à poser trois questions : la question gnoséologique : qu'est-ce que la connaissance ? ; la question méthodologique : comment est-elle constituée ou engendrée ? ; Comment est appréciée la valeur ou la validité de cette connaissance ? Cela amène la caractérisation de l'enquête épistémologique par les questions suivantes :

Qu'est-ce qu'une connaissance ?
Comment est-elle produite ?
Comment est-elle validée ?
Sur quoi se fonde-t-elle ?
Comment les connaissances sont-elles organisées ?
Comment progressent-elles ?

Concernant les connaissances et les savoirs de formation, il nous semble que nombre de ces questions n'ont pas encore trouvé de réponses. Prenons par exemple quelques-unes des connaissances issues de notre travail et essayons d'émettre des hypothèses sur leur épistémologie :

C1 : s'assurer de l'attention des élèves durant la phase de consigne avec du matériel demande des stratégies spécifiques

Elle est liée à la gestion de la classe, elle semble fournir un point de vigilance qui permet à l'enseignant de prendre des décisions à chaud ou en amont de la séance pour assurer la bonne transmission de la consigne. Elle n'apparaît pas comme clairement formulée et certains enseignants l'utilisent de façon implicite, en acte. Elle pourrait être produite, validée et se fonder sur l'expérience individuelle ou celle d'une communauté. Il semble que la validité de ce type de geste professionnel ne soit pas de portée générale, en effet à de nombreuses reprises les enseignants nous ont dit faire différemment, avoir d'autres habitudes avec leurs classes, dans leur établissement ou ne pas pouvoir mettre en place certaines stratégies avec leurs élèves. Si les stratégies semblent avoir une valeur locale, l'attention à porter à ce moment, elle, semble générale. Le concept de geste professionnel semble propice pour analyser l'organisation et l'évolution de cette connaissance.

C2 : l'intersection des médiatrices d'un triangle est le centre du cercle circonscrit à ce triangle et connaissance d'au moins une démonstration.

Cette connaissance semble plus simple à analyser dans la mesure où elle appartient à une science : les mathématiques ont une épistémologie propre. Néanmoins, le fait que cette connaissance soit également une connaissance professionnelle amène que sa valeur et son fondement ne dépendent pas que de la science mathématique, mais également des mathématiques enseignées. L'intérêt de cette connaissance dans l'enseignement au collège, le fait qu'elles apparaissent ou non dans les programmes nous amène à émettre l'hypothèse qu'en tant que savoir de formation elle a une épistémologie propre.

C3 : La connaissance de la résistance des objets dans un LGD

Cette connaissance est issue des recherches en didactique, elle est validée par les travaux de recherche qui ont été menés et publiés. Elle se fonde sur des cadres théoriques déjà explicités : milieu (Douady, 1994), types d'espaces (Berthelot & Salin, 1992) qui permettent d'analyser son fonctionnement.

C4 : connaître et comprendre des dilemmes inhérents au travail d'analyse de pratique professionnelle lors d'un entretien de formation.

Cette connaissance porte sur le travail du tuteur. Elle est issue de la recherche sur la formation et l'analyse du travail. Elle se fonde sur des cadres théoriques comme la clinique de l'activité (Clot, 2001).

Ce premier travail, sur quelques exemples, d'émission d'hypothèses montre la complexité et la diversité de l'épistémologie des savoirs de formation.

2. Identifier les connaissances et savoirs de formation et analyser leurs épistémologies

Pour déterminer l'épistémologie des savoirs de formation, il faut d'abord les identifier. Le rapport « Vers un nouveau modèle de formation tout au long de la vie » (Filâtre, 2016) place en recommandation n° 1 :

> *« Considérer la formation à partir de l'exercice du métier et du développement professionnel.*
>
> *- Recommandation 1 – Expliciter les attendus de la profession au-delà des principales compétences professionnelles décrites dans le référentiel des métiers du professorat et de l'éducation. »*

Cela confirme notre hypothèse de savoirs et connaissances de formation en grande partie impensés, tout du moins explicités.

Les formations actuelles des enseignants visent bien l'acquisition de connaissances et de savoirs, mais lesquels ? En faisant un premier travail de recueil, mais aussi de compréhension de la façon dont ces connaissances et savoirs sont déterminés par les formateurs nous pourrons mieux appréhender leur épistémologie spécifique. Au regard des analyses des travaux sur le simulateur plusieurs questions se posent :

Quelle est la place de la recherche et de ses résultats ?

Quelle est la place des communautés de formateurs (collègues, circonscription, COPIRELEM, IREM, APMEP, AGEEM..) ?

Quelle est l'influence des ressources disponibles (Grand N, petit X, ERMEL…) ?

Pour mener ce travail, nous envisageons de mener des entretiens avec des formateurs et d'analyser en détail les programmes de formation initiale et continue des enseignants. Ce travail nous permettrait de caractériser et catégoriser les savoirs et connaissances de formation actuellement développés.

Une question théorique va alors se poser, celle des cadres permettant d'appréhender la nature de ces connaissances. Puisque ces savoirs sont liés à la pratique professionnelle, est-ce que les cadres d'analyse des pratiques pourraient permettre, en identifiant sur quelles dimensions des pratiques ces savoirs jouent, une première catégorisation. Dans ce cas, la double approche (Robert, 1999), la structuration du milieu (Margolinas, 2002), la théorie de l'action conjointe (Sensevy, 2008 ; Schubauer, Leutenegger, Ligozat, & Fluckiger, 2007), *the four parameters* (Saxe, 1991), le praticien réflexif (Schon, 1983), la clinique de l'activité (Clot, 2001), la didactique professionnelle (Pastré, 2011) et la théorie de l'activité (Engestrom, 2000) sont des cadres à considérer au regard des savoirs que nous allons identifier. Par ailleurs au moins un cadre spécifique, PCK : pedagocical content knwolegde (Hill, Ball, & Schilling, 2008) aborde explicitement une typologie de connaissances à et pour enseigner. Ce cadre devra donc également être analysé. Enfin, notre travail porte sur les pratiques d'enseignement des mathématiques utilisant les technologies et le cadre PCK a été étendu en incluant ces usages : Technological Pedagogical Content Knowledge TPCK (Koehler & Mishra, 2008). Là encore il nous faudra explorer les potentialités de ce cadre.

V. CONCLUSION

En partant de l'analyse des pratiques de formation et de celle des difficultés des enseignants, nous avons identifié le besoin de faire, de façon plus étroite, le lien entre la pratique professionnelle et la formation disciplinaire/didactique. Cela nous a conduits à proposer des dispositifs permettant d'importer la pratique professionnelle dans la formation didactique. Ces dispositifs sont centrés sur l'analyse a priori, la confrontation à une pratique par l'usage de la vidéo, l'analyse de pratiques, le recherche d'alternatives et l'identification de problématiques générales (Pouyanne & Robert, 2004). Robert et Rogalski (2015) alors même qu'elles travaillent avec ce modèle de formation pour un public de formateurs, identifient la problématique de la nécessité d'un temps long.

Ce type de formation repose également sur la capacité du formateur à saisir les apports des participants pour faire émerger les problématiques générales. Comment alors importer ce type de dispositifs dont les caractéristiques nous permettent de répondre aux besoins de formation des enseignants, dans une formation initiale (master MEEF) ou continue, contrainte en temps ? Comment rendre ce type de formation moins dépendante du formateur et des enseignants ? Pour répondre à ces questions, l'usage de la simulation en lieu et place de la vidéo nous permet de contrôler les situations, d'augmenter le nombre de confrontations possibles et d'anticiper sur les connaissances et les savoirs de formation.

Nous avons donc construit deux simulateurs : un simulateur informatique de classe (SIC) et un simulateur d'analyse de pratiques (SAP). L'expérimentation de ces deux outils nous a permis d'abord de vérifier leur acceptabilité par les stagiaires et les étudiants et de montrer la stabilité des connaissances et savoirs qui émergent par un processus de validation interne : ce sont bien ceux que nous avions anticipés et ils apparaissent indépendamment du public. Ce travail ouvre de nombreuses pistes. Après avoir vérifié la stabilité des connaissances et savoirs, il nous faut tester ce que nous appellerons leur robustesse c'est-à-dire le fait qu'ils puissent émerger indépendamment du formateur. Il nous faut également développer des scénarios de formation sur les autres aspects identifiés comme besoins de formation. Si pour cela nous avons un outil adapté aux conditions de l'analyse de pratiques, il nous faut encore trouver un logiciel permettant de programmer des simulations informatiques de classe.

La simulation, en offrant au chercheur une situation intégralement contrôlée permet de déployer des méthodologies qui sont impossibles sinon. Nous avons par exemple recueilli les choix de plusieurs centaines d'enseignants sur le SIC ce qui nous permet de tester des hypothèses comme la relation entre l'ancienneté du formateur, son niveau d'étude, son sexe et ses choix didactiques. La grande quantité de données recueillies et le fait que les situations soient strictement identiques permettent cette analyse. Avec le SAP, il est possible de jouer sur l'aspect de l'avatar : un homme, une femme, une personne jeune, une personne qui semble plus expérimentée ainsi que ses attitudes faciales joie, tristesse, colère, indécision… Est-ce que ces paramètres ont une influence sur les choix opérés par l'utilisateur ? Il est vrai que ce type de question nécessite un travail avec d'autres disciplines comme la sociologie ou la psychologie et qu'il porte sur les pratiques simulées et non réelles, mais il permettrait d'émettre des hypothèses qui pourraient être testées avec d'autres méthodologies.

En travaillant à la conception et à l'utilisation des simulateurs, nous avons été amenés à identifier et instancier dans les logiciels des connaissances et des savoirs professionnels. Or ces derniers semblent peu apparents dans les formations et leur épistémologie mal connue. Ce travail d'identification et d'enquête épistémologique est pour nous un enjeu important à venir.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ABBOUD-BLANCHARD, M. (1994). *L'intégration de l'outil informatique à l'enseignement secondaire des mathématiques : symptômes d'un malaise : Un exemple : l'enseignement de la symétrie orthogonale au collège. Histoire et perspectives sur les mathématiques.* Thèse de doctorat, Université Denis Diderot Paris VII.

ABBOUD-BLANCHARD, M. & EMPRIN, F. (2009). Pour mieux comprendre les pratiques des formateurs et de formations TICE. *Recherche & formation, 62 (3)*, 125-140.

ARTIGUE, M. (1988). Ingénierie didactique. Recherches en didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques, 9(3)*, 281-308.

BERTHELOT, R. & SALIN, M.-H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*. Thèse de doctorat, Université Sciences et Technologies - Bordeaux I. Consulté à l'adresse https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00414065/document

BRAU-ANTONY, S. & MIEUSSET, C. (2013). Accompagner les enseignants stagiaires : une activité sans véritables repères professionnels. *Recherche et formation*, *72*, 27-40.

BUCHETON, D. & SOULE, Y. (2009). Les gestes professionnels et le jeu des postures de l'enseignant dans la classe : un multi-agenda de préoccupations enchâssées. *Éducation & didactique*, 3(3), 29-48.

CLOT, Y. (2001). Méthodologie en clinique de l'activité. L'exemple du sosie. *Les méthodes qualitatives en psychologie*, 125-147.

DOUADY, R. (1994). Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir, *Repères-IREM*, *15*, 37-61.

DUVAL, R. (1994). Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. *Repères IREM*, *17*, 121-138.

EMPRIN, F. (2007). *Formation initiale et continue pour l'enseignement des mathématiques avec les TICE : cadre d'analyse des formations et ingénierie didactique*. Thèse de doctorat, Université Paris-Diderot - Paris VII. Consulté à l'adresse http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00199005

EMPRIN, F. (2011). Construction d'un Simulateur Informatique de Classe (SIC) pour la formation des enseignants. *In* M. BETRANCOURT, C. DEPOVER, V. LUENGO, B. DE LIEVRE & G. TEMPERMAN. (EDS), *Actes du colloque EIAH 2010* (pp.409-422). MONS : Éditions de l'UMONS - ATIEF (Association des Technologies de l'information pour l'Education et la Formation).

EMPRIN, F. & JOURDAIN, C. (2010). Les représentations des enseignants sur l'échec scolaire : étude à partir d'une question contraposée. *In L.* Mottier Lopez, C. Martinet, & V. Lussi (Eds), *Actes du congrès international AREF (Actualité de la recherche en éducation et en formation)*. (pp.1-9). Genève.

EMPRIN, F., & SABRA, H. (2014). Classroom Simulator, a new instrument for teacher training. The case of mathematical teaching. *in* FUTSCHEK, G. & KYNIGOS, C. (EDS), *Proceedings of the 3rd international constructionism conference,* Vienna, Vol. 1, 247-257.

EMPRIN, F. & SABRA, H. (2015). Simulateur informatique de classe pour la formation des enseignants : l'enseignement de la résolution de problèmes. *Actes du XLIIe colloque COPIRELEM.* Besançon : Association pour l'élaboration et la diffusion de ressources pédagogiques sur l'enseignement des mathématiques à l'école (ARPEME). Paris.

ENGESTROM, Y. (2000). Activity theory as a framework for analyzing and redesigning work. *Ergonomics, 43(7)*, 960-974.

FILATRE, D. (2016). Rapport sur la formation continue : vers un nouveau modèle de formation tout au long de la vie. *Comité national de suivi de la réforme de la formation des enseignants et personnels d'éducation*, 32.

HILL, H. C., BALL, D. L. & SCHILLING, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for research in mathematics education*, 372-400.

HOUDEMENT, C. & KUZNIAK, A. (1996). Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 16(3), 289-322.

KOEHLER, M. J. & MISHRA, P. (2008). *Introducing tpck. Handbook of technological pedagogical content knowledge (TPCK) for educators*, 3-29.

LABORDE, C. (2000). Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving. *Educational Studies in Mathematics, 44(1-2)*, 151-161.

LABORDE, C. & CAPPONI, B. (1994). Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14(1)*, 165-210.

LAGRANGE, J.-B. & CALISKAN-DEDEOGLU, N. (2009). Usages de la technologie dans des conditions ordinaires : le cas de la géométrie dynamique au collège. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 29(2), 189-226.

LANEELLE, X. & PEREZ-ROUX, T. (2014). Entrée dans le métier des enseignants et transition professionnelle : impact des contextes de professionnalisation et dynamiques d'acteurs. *L'orientation scolaire et professionnelle*, *43(4)*, 1-19. https://journals.openedition.org/osp/pdf/4488

LE BOTERF, G. (2011). *L'ingénierie de la formation : quelles définitions et quelles évolutions* ? Dunod.

MARGOLINAS, C. (2002). Situations, milieux, connaissances : analyse de l'activité du professeur, In J.-L. DORIER, M. ARTAUD, M. ARTIGUE, R. BERTHELOT & R. FLORIS (Eds.), *Actes de la 11e École d'Eté de Didactique des Mathématiques* (pp. 141-156). Grenoble La Pensée Sauvage.

MARGOLINAS, C. (2012). Connaissance et savoir. Des distinctions frontalières ? *Acte du colloque Sociologie et didactiques : vers une transgression des frontières*, Haute Ecole pédagogique de Vaud, 17-44.

MATTEÏ-MIEUSSET, C. (2013). *Les dilemmes d'une pratique d'accompagnement et de conseil en formation. Analyse de l'activité réelle du maître de stage dans l'enseignement secondaire*. Thèse de doctorat, REIMS.

PASTRE, P. (2005). *Apprendre par la simulation : de l'analyse du travail aux apprentissages professionnels*. Octarès.

PASTRE, P. (2011). La didactique professionnelle. *Éducation Sciences & Society*, 2(1), 83.

PIAGET, J. (1967). Logique et connaissance scientifique. *In Encyclopédie de la Pléiade.* Gallimard, coll.

POUYANNE, N. & ROBERT, A. (2004). Formation d'enseignants de mathématiques du second degré : élément pour une formation, Document pour la formation des enseignants. *Cahier bleu de DIDIREM*.

RABARDEL, P. (1995). *Les hommes et les technologies ; approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin.

RATINAUD, P. & MARCHAND, P. (2012). Application de la méthode ALCESTE à de « gros » corpus et stabilité des « mondes lexicaux » : analyse du « CableGate » avec IRaMuTeQ. *Actes des 11eme Journées internationales d'Analyse statistique des Données Textuelles,* 835-844.

REINERT, M. (2008). Mondes lexicaux stabilisés et analyse statistique de discours. *Actes de la JADT 2008*, 981-993.

RESTREPO, A. M. (2008). Genèse instrumentale du déplacement en géométrie dynamique chez des élèves de 6e. Thèse de doctorat, Université J. Fourrier.

ROBERT, A. (1999). Recherches didactiques sur la formation professionnelle des enseignants de mathématiques du second degré et leurs pratiques en classe. *Didaskalia*, *15*, 123-157.

ROBERT, A. (2005). Sur la formation des pratiques des enseignants du second degré. *Recherches et Formation*, *50*, 75-90.

ROGALSKI, J. & ROBERT, A. (2015). De l'analyse de l'activité de l'enseignant à la formation des formateurs. Le cas de l'enseignement des mathématiques dans le secondaire. In V. Lussi Borer, M. Durand & F. Yvon. *Analyse du travail et formation dans les métiers de l'éducation* (pp.93-113). Louvain-la-Neuve : De Boeck Supérieur. Consulté à l'adresse https://www.cairn.info/analyse-du-travail-et-formation-dans-les-metiers--9782804194079-p-93.htm

RUTHVEN, K., & HENNESSY, S. (2002). A practitioner model of the use of computer-based tools and resources to support mathematics teaching and learning. *Educational studies in mathematics, 49(1)*, 47-88.

SAXE, G. (1991). *Culture and Cognitive Development: Studies in Mathematical Understanding*, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, NJ.

SCHON, D. (1983). *The reflective practitioner*. London : Routledge.

SCHUBAUER, M.-L., LEUTENEGGER, F., LIGOZAT, F. & FLUCKIGER, A. (2007). Un modèle de l'action conjointe professeur-élèves : les phénomènes didactiques qu'il peut/doit traiter. In G. Sensevy & A. Mercier. *Agir ensemble. L'action didactique conjointe du professeur et des élèves* (pp.51-91). Rennes : Presses Universitaires de Rennes.

SENSEVY, G. (2008). Le travail du professeur pour la théorie de l'action conjointe en didactique. *Recherche & formation, 1*, 39-50.

CADRES THEORIQUES POUR ANALYSER L'ACTIVITE INSTRUMENTEE DE L'ENSEIGNANT DE MATHEMATIQUES

Maha **ABBOUD**

Maha.abboud-blanchard@univ-paris-diderot.fr

Janine **ROGALSKI**

rogalski.muret@gmail.com

Laboratoire de Didactique André Revuz

Résumé

L'utilisation des technologies numériques en classe de mathématiques continue à se développer. Cependant, cette utilisation reste complexe et demeure régie par des incertitudes lors des mises en place avec les élèves même quand les séances sont bien préparées en amont. Cet article présente des cadres et des outils théoriques pour analyser l'activité d'enseignants lors de séances intégrant des logiciels de mathématiques. Nous présentons d'abord notre cadre théorique et nous le comparons ensuite à un autre, proche, anglais. Nous montrons ensuite que malgré la différence des contextes, des notions mathématiques en jeu et des choix méthodologiques, les résultats en termes d'analyse des pratiques enseignantes sont très proches. Ils participent à la compréhension de la complexité de l'intégration des technologies dans les pratiques ordinaires des enseignants et des décisions qu'ils sont amenés à prendre in situ et sur le long terme.

Mots clés

Technologies, enseignants, activité, tensions, perturbations, hiccups

Préambule

Ce texte ne reprend pas exactement l'exposé fait lors du séminaire national de février 2018. La recherche qui a été présentée lors du séminaire a déjà fait l'objet d'un article détaillé publié dans le n° 37 de la revue RDM (Abboud & Rogalski, 2017) auquel nous renvoyons le lecteur. Nous choisissons pour le texte présent de discuter d'une comparaison avec un cadre théorique anglais portant sur la même thématique de recherche et que nous avions évoqué, sans le détailler, dans notre exposé oral. Cette comparaison a été faite conjointement avec les collègues anglais au sein d'un projet commun franco-anglais, dont les résultats feront l'objet d'un numéro spécial de la revue Annales de didactique et de sciences cognitives (Abboud & Coles (Ed.), 2018).

I. INTRODUCTION

L'intégration de la technologie dans le travail de classe est un processus complexe pour les enseignants (Hoyles & Lagrange, 2005 ; Clark-Wilson, Robuti & Sinclair, 2014). Des études qui ont déjà exploré la nature de cette complexité (Abboud-Blanchard, 2013 ; Clark-Wilson,

2010) ont montré le besoin de cadres théoriques et d'outils méthodologiques qui permettraient à la fois aux chercheurs de comprendre la complexité des pratiques enseignantes et aux formateurs d'aider les enseignants à développer ces pratiques en conséquence.

En Angleterre comme en France, les enseignants de mathématiques ont introduit dans leurs pratiques des environnements numériques en vue d'aider les élèves à s'engager dans l'étude des notions mathématiques et de leur donner du sens (Ruthven, Hennessy & Deaney, 2008). Les enseignants, suivant souvent en cela les recommandations du curriculum, conçoivent des tâches basées sur l'utilisation d'environnements numériques où les élèves travaillent sur le mode de l'investigation, impliquant d'abord l'émission de conjectures visant ensuite la généralisation. Toutefois, cette ouverture à l'exploration des élèves conduit les enseignants à rencontrer le défi pédagogique de gérer les réponses multiples des élèves et leurs interactions avec ces environnements. Dans ce papier, nous présentons et comparons deux cadrages théoriques différents visant à analyser l'activité de l'enseignant dans ces environnements.

Le premier cadre (le contexte français) s'appuie à la fois sur la Double Approche (Robert & Rogalski, 2005) étendue aux environnements technologiques (Abboud-Blanchard, 2013) et sur l'Approche Instrumentée (Rabardel, 1995). Ce cadre, considère l'utilisation de la technologie par l'enseignant comme une gestion d'un environnement dynamique 'ouvert' (qui accroît les incertitudes de l'enseignant dans la classe). Y sont introduites, les notions de tensions et de perturbations de l'itinéraire cognitif prévu pour les élèves qui permettent d'analyser finement l'activité des enseignants en classe (Abboud & Rogalski, 2017).

Le second cadre (le contexte anglais) s'appuie sur la théorie de Vérillon et Rabardel (1995) de l'activité instrumentée du sujet dans des environnements avec médiation technologique. Il introduit la notion théorique de '*hiccup'*,[1] qui décrit la rupture épistémologique que rencontre l'enseignant lorsqu'il développe sa connaissance professionnelle à travers sa pratique, développement stimulé par l'utilisation que font les élèves des technologies (Clark-Wilson, 2010).

Les deux cadres relèvent tous les deux de la théorie de l'activité instrumentée (Rabardel, 1995). Nous explorons leurs différences en ce qui concerne la relation entre chercheurs et enseignants dont l'activité est étudiée. En particulier, deux points de vue différents sont utilisés dans la manière dont chacun 'entre' dans la classe de mathématiques pour essayer de comprendre les aspects de la connaissance des enseignants (et celle des élèves) qui sont en jeu dans l'utilisation de la technologie. Alors que le contexte, les objectifs de la recherche et les outils théoriques et méthodologiques diffèrent, il apparaît que les résultats (en termes de pratiques des enseignants) sont proches dans les deux cadres. Cela soulève la question de savoir si on peut connecter les deux perspectives théoriques et, si oui, comment.

II. CADRE ET CONTEXTE FRANÇAIS

Comme précisé plus haut, le texte de cette partie est basé sur des extraits d'un article paru dans RDM (Abboud & Rogalski, 2018)

[1] En anglais, le mot « hiccup » (hoquet en français) a un sens supplémentaire : petit problème ou difficulté qui ne dure pas longtemps.

L’objectif de cette recherche est de comprendre ce qu’expérimente un enseignant "ordinaire" utilisant un outil technologique d’une façon non régulière mais en essayant de l’intégrer dans la pratique habituelle de la classe. D’une part, nous cherchons à identifier ce qui détermine le choix des tâches/activités prévues de l’élève et leur devenir pendant le déroulement de la séance. D’autre part, nous visons à analyser l’activité de l’enseignant pendant le déroulement de la séance en étudiant les caractéristiques de la gestion qu’il met en place pour maintenir les élèves dans l’itinéraire cognitif prévu (Robert et Rogalski, 2005), les incertitudes qu’il éprouve et qui sont inhérentes à ce type d’environnement dynamique ouvert (Rogalski, 2003).

Nous situons notre travail dans le cadre de la double approche ergonomique et didactique (Robert et Rogalski, 2002, 2005) et l’adaptation qui en avait été faite pour l’étude de l’activité de l’enseignant utilisant les technologies par Abboud-Blanchard (2013, 2015). La double approche est inscrite dans la théorie de l’activité au sens où ce sont les activités des sujets en situation (enseignants, élèves) qui organisent les observations et les analyses. En nous plaçant dans le cadre de la théorie de l’activité, nous reprenons aussi à notre compte l’idée développée par Beguin et Rabardel (2000) que la relation entre le sujet (pour nous : l’enseignant) et l’objet de son activité (le rapport entre savoir mathématique et élève) passe par la médiation de l’instrument et que ce dernier n’est pas neutre.

Nous introduisons une notion centrale pour les analyses que nous effectuons : il s’agit de la notion de tensions. Ce sont des manifestations de conflits entre la visée de l’enseignant de maintenir l’itinéraire cognitif voulu et la nécessité de s’adapter aux phénomènes qui surgissent et qui sont dus à la dynamique de la situation de classe. Ces tensions, lorsqu’elles ne sont pas gérées ou le sont de façon inappropriée conduisent à des perturbations qui éloignent le travail mathématique en classe de l’itinéraire prévu.

Dans notre approche, nous nous séparons de la manière dont Kaptelin et Nardi, (2012) utilisent les termes de tensions et de perturbations, dans leur sens commun, quand ils présentent le concept de contradictions qui est central dans le cadre théorique d’Engeström pour étudier comment les systèmes d’activité se développent (Engeström, 2008). La contradiction comme moteur de développement du système d’activité enseignant concernerait éventuellement le long terme de la vie professionnelle, mais nous considérons ici le court terme de la situation de classe.

Dans notre approche, la notion de tension relève non pas d’une contradiction mais est liée à une "compétition" entre les buts de l’enseignant. Un exemple typique en est celui de la tension entre poursuivre l'itinéraire cognitif prévu pour la séance et traiter une erreur qui peut être largement partagée et nécessiterait un retour en arrière (remise à niveau). Nous considérons dans cet article des tensions et perturbations relatives au niveau local d’une séance de classe ; néanmoins il existe des tensions à un niveau plus global de l’activité de l’enseignant. Un exemple classique en est la tension entre « finir le programme » et assurer des acquisitions conceptuelles chez tous les élèves.

En reprenant le schéma de l’activité instrumentée de Beguin et Rabardel (2000) dans le contexte d’un enseignant préparant sa séance avec un outil technologique puis en la menant avec sa classe, nous pouvons illustrer notre propre utilisation des notions de tensions et perturbations comme suit :

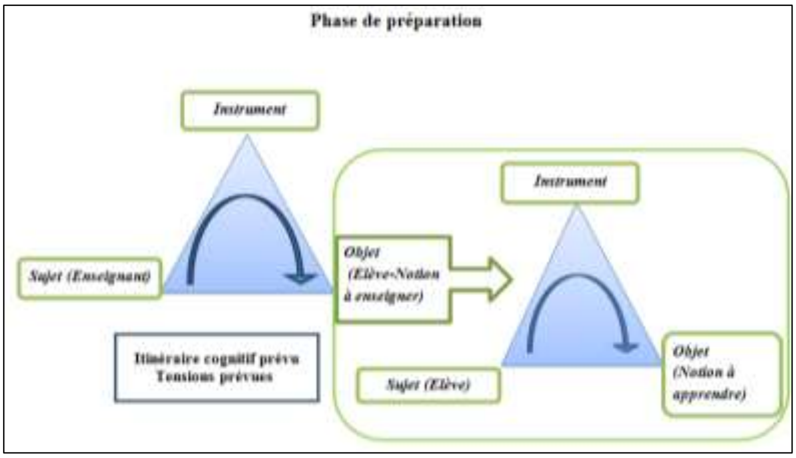


Figure 1 : Activité instrumentée de l'enseignant en phase de préparation.

Lors de la phase de préparation, l'objet de l'activité de l'enseignant est le rapport élève-notion à enseigner, la relation avec cet objet étant médiée par un instrument technologique, voire par un ensemble d'instruments (technologique et papier/crayon). Il y envisage un itinéraire cognitif prenant en compte l'activité instrumentée supposée de l'élève. Sa genèse d'usages, personnel et professionnel, des technologies (Abboud-Blanchard, 2013) y joue un grand rôle. Il peut ainsi prévoir des tensions qui peuvent survenir et les façons de les gérer. Un exemple fréquent en est lorsque les élèves partent dans une stratégie d'essais-erreurs qui se déroulent très rapidement, sans réelle analyse de la rétroaction de la machine. On a observé plusieurs fois que dans ces cas, l'enseignant prévoit de demander aux élèves de mettre par écrit (sur papier) les essais qu'ils ont faits ainsi que leurs issues (Abboud-Blanchard, Cazes &Vandebrouck, 2013).

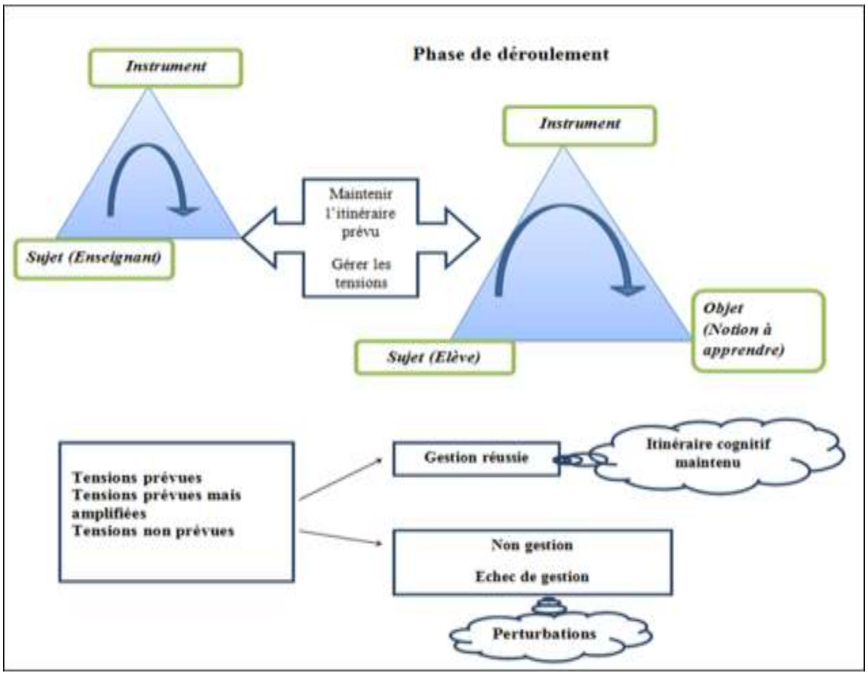


Figure 2 : Tensions et perturbations dans l'activité instrumentée de l'enseignant dans la *phase de déroulement.*

Pendant la phase de déroulement en classe, l'activité de l'enseignant entre en interaction avec l'activité de l'élève et sa relation avec la notion à apprendre, médiée par les instruments de l'élève (prévus ou non par l'enseignant). Dans le cas de l'utilisation d'un instrument technologique, l'enseignant est souvent confronté à des tensions dues au rôle que l'environnement technologique joue dans l'activité de l'élève. Certaines de ces tensions surgissent comme prévu lors de la préparation et l'enseignant en a anticipé la gestion, qu'il met en œuvre. Elles peuvent également avoir été prévues mais apparaître d'une façon amplifiée non attendue. D'autres enfin n'ont pas été prévues. Dans les deux derniers cas, deux issues sont possibles. Soit, l'enseignant arrive à maintenir l'itinéraire prévu en gérant la tension a minima ou a maxima. Cette gestion de l'imprévu est souvent due à des routines de sa pratique et/ou à une genèse avancée d'usage professionnel des technologies. Soit, l'enseignant n'arrive pas, ou gère mal, la tension ce qui conduit à des perturbations faisant dévier l'itinéraire cognitif prévu des élèves. Notons que les tensions peuvent concerner les différents pôles du système et présenter différentes formes (cognitive, pragmatique, temporelle ou relative au contrat didactique).

Dans la dynamique de l'activité de l'enseignant, des tensions peuvent avoir été anticipées, avec des réponses préparées ; elles peuvent être non prévues, et dans ce cas soit être traitées en temps réel par l'enseignant qui met en œuvre des routines, soit identifiées mais sans que l'enseignant ait les moyens d'y faire face immédiatement, soit non perçues sur le moment. Dans les deux derniers cas, il va se produire des perturbations, au sens où le déroulement va diverger de l'itinéraire cognitif prévu.

Une tension prévue par l'enseignant dans l'activité instrumentée des élèves peut être un déterminant de l'itinéraire cognitif prévu et des formes de déroulement.

Certaines des tensions non prévues par l'enseignant l'amènent à prendre des décisions in situ qui vont réorienter son activité effective par rapport à l'activité didactique qu'il avait prévue. Il peut réagir en se focalisant sur le traitement de la tension, en perdant de vue son objectif didactique principal. Moins l'enseignant est familier avec l'instrument utilisé, plus le nombre des tensions non prévues est important et plus le traitement de ces tensions risque de se traduire par des perturbations dans l'activité prévue (aussi bien de l'enseignant que de l'élève).

Nous faisons l'hypothèse que comprendre et qualifier ces tensions et ces perturbations est essentiel pour décrire la dynamique des relations entre les différents éléments du système de l'activité et appréhender les difficultés des enseignants lors de l'intégration d'un instrument technologique. Ceci nous permettra aussi de comprendre les facteurs déterminant le développement professionnel de l'enseignant relativement à l'usage des technologies.

1. Des choix méthodologiques

Nous nous sommes refusées à formater les modes d'observation du travail des enseignants, au risque sinon de le perturber ou même de dénaturer- ce qui serait particulièrement problématique pour la recherche : nous n'aurions plus l'activité "naturelle" de l'enseignant, mais une activité sous contrainte. Nous avons donc laissé une large latitude aux enseignants sur les modes d'enregistrement et sur le choix des séances. Pour la constitution des données, nous avons choisi de partir d'enregistrements ne faisant pas intervenir les chercheurs dans la classe. Les enseignants s'enregistrent (vidéos) eux-mêmes ou se font enregistrer par un collègue, en choisissant leur séance : il s'agit de réduire au maximum l'influence d'un observateur chercheur sur les activités (enseignant / élèves) dans la classe. Les enseignants fournissent également des documents de préparation de la séance, et d'autres utilisés au cours de la séance (les leurs et parfois des documents "élèves"). Des entretiens différés (pour éviter des interventions sur la séance étudiée) peuvent spécifiquement concerner ou non les séances, mais visent l'accès à des déterminants personnels et sociaux de l'activité de l'enseignant.

III. CADRE ET CONTEXTE ANGLAIS

Nous traduisons ici librement des extraits d'un article écrit conjointement avec Alison Clark-Wilson (Abboud et al., 2018)

Le but de ce travail de recherche est d'étudier la manière dont les enseignants de mathématiques de l'enseignement secondaire apprennent de leurs expériences de classe pour s'approprier de nouveaux outils technologiques dans leur enseignement (Clark-Wilson 2010 ; Clark-Wilson & Noss, 2015). Au point de départ se trouve la théorie de l'Activité Instrumentée de Vérillon et Rabardel (1995) qui a été adoptée pour avoir des idées sur la nature des interactions entre le Sujet (ici, le focus a été fortement mis sur l'enseignant), l'Instrument (l'outil technologique choisi dans la classe) et l'Objet de l'activité (l'enseignement d'un contenu de mathématique en classe).

Le développement professionnel des enseignants est conceptualisé comme un « apprentissage situé », l'enseignant développant sa connaissance professionnelle 'dans et à travers' sa pratique de classe (Lave 1988). Cette connaissance professionnelle concerne les notions mathématiques en jeu, comment elles sont enseignées et apprises, quelles ressources peuvent être utilisées en plus de la connaissance institutionnelle du curriculum.

Les analyses de soixante-six leçons d'une cohorte de quinze enseignants sur la période d'une année scolaire ont montré que les enseignants rapportaient régulièrement (dans leurs réflexions d'après séance) qu'ils avaient rencontré dans leur classe des incidents qu'ils n'avaient pas anticipé dans la préparation de la séance. Ces '*hiccups*' ont été définis comme les perturbations vécues par les enseignants pendant la séance, qui sont déclenchées par l'utilisation de la technologie, et qui semblaient éclairer des discontinuités dans leur connaissance et ouvrir des opportunités pour leur développement épistémologique (Clark-Wilson, 2010). L'idée principale de ce nouveau concept théorique est que l'enseignant doit avoir repéré le hiccup pour pouvoir développer sa pratique. En effet, on peut interpréter les hiccups comme des éléments contribuant de manière cruciale d'un apprentissage professionnel situé de l'enseignant.

1. Des choix méthodologiques

Le point central de la méthodologie utilisée dans la recherche a été d'utiliser une approche ethnographique pour observer de près les mises en œuvre en classe, les réflexions sur les tâches et le développement des enseignants. Pour cela, il a fallu développer avec les enseignants une relation professionnelle assez proche pour qu'ils se sentent suffisamment en confiance avec le chercheur pour qu'il observe et enregistre leur enseignement, et pour qu'ils s'expriment librement dans des entretiens et échanges après les séances de classe. De plus, les enseignants ont partagé avant les séances les éléments de préparation (les fichiers informatiques, les transparents de présentation, le plan écrit de la séance, le travail des élèves). Arès les séances, ils ont rédigé une réflexion sur leur enseignement, qui a souvent inclus une tâche redéfinie.

IV. CONTRASTE ET COMPARAISON DES DEUX CADRES

Si on contraste les études anglaise et française, une différence majeure est relative au positionnement des chercheurs. Dans l'étude anglaise, c'est une relation 'd'intériorité' qui est établie entre le chercheur et l'enseignant participant, ce qui appelé « un processus itératif de conception, innovant, appuyé sur une base théorique – pour obtenir des résultats développementaux fiables » (Jaworski, 2004 – notre traduction). Dans l'étude française, les chercheurs travaillent à partir de vidéos d'une séance choisie par l'enseignant, et identifient les tensions et perturbations d'un point de vue 'extérieur'. Même si des interactions entre les chercheurs et l'enseignant peuvent avoir lieu ultérieurement, l'enseignant n'est pas impliqué dans le processus de recherche, et est considéré comme un enseignant 'ordinaire'. Le processus de recherche vise une certaine généralisation pour l'analyse de l'activité de l'enseignant et pour la formation.

Un second contraste concerne la manière dont les incidents de classe sont identifiés et situés dans un cadre théorique. Dans la recherche anglaise, les hiccups sont considérés comme un 'construit' épistémologique permettant d'identifier des aspects de l'apprentissage professionnel (mathématique) de l'enseignant. En comparaison, l'étude française considère l'existence de tensions (et de perturbations possibles) comme inhérente aux caractéristiques de la situation de l'enseignement impliquant des environnements technologiques – comme outils à la fois pour l'enseignant et pour ses élèves. La recherche n'est pas centrée sur l'évolution de la connaissance professionnelle de l'enseignant mais sur la dynamique de la gestion des tensions, et sur les facteurs influençant cette dynamique : d'une part, elle dépend des 'contingences' de la vie mathématique de la classe, et d'autre part, elle est orientée par plusieurs types de déterminants de l'activité de l'enseignant (des déterminants institutionneles à des déterminants personnels).

De la comparaison entre les analyses relatives aux deux cadres plusieurs thèmes emergent qui concernent les perspectives théoriques respectives, les approches méthodologiques, l'unité pertinente d'analyse, les issues de la recherche et les visées à long terme. La discussion va ici aborder chacun de ces thèmes.

En termes de perspectives théoriques, dans la recherche anglaise, la notion de 'hiccup' est employée pour mettre en relation l'apprentissage professionnel des enseignants au cours du temps lorsqu'ils intègrent la technologie numérique dans leurs séances de mathématiques. Dans la recherche française, l'idée des tensions et perturbations vise une compréhension meilleure des questions impliquées dans l'intégration de la technologie dynamique mathématique dans les séances conduites par des enseignants 'ordinaires'.

La méthodologie de la recherche française comporte l'analyse de cours basée sur un enregistrement vidéo de la séance, avec un entretien post-séance avec l'enseignant (offrant des informations sur les déterminants de ses pratiques), l'analyse des tâches proposées aux élèves et de la manière dont il les met en œuvre dans la classe. Dans la recherche anglaise, la méthodologie implique des entretiens avant et après la séance, l'observation de la séance (enregistrée par ailleurs par vidéo), avec l'analyse des artefacts tels que le plan de l'enseignant pour la séance, les fichiers informatiques, les productions des élèves, etc.

Étant donnée la perspective théorique de la recherche anglaise, l'unité d'analyse est l'apprentissage professionnel individuel de l'enseignant. Ici, la 'granularité' est à la fois 'micro' en termes d'analyse détaillée de chaque 'hiccup' et 'macro' en cherchant à identifier les trajectoires d'apprentissage des enseignants au cours du temps relatives à leur connaissance mathématique, technologique et pédagogique. Dans la recherche française, étant donnée la perspective théorique, l'unité d'analyse est l'anticipation et l'adaptation dans la mise en œuvre de la leçon de la part de l'enseignant observé. La granularité est 'micro' quant à l'analyse détaillée des tensions et des perturbations, 'meso' en termes d'analyse des adaptations par l'enseignant durant la séance elle-même et dans une séance ultérieure, et 'macro' en termes d'inférences sur les déterminants de l'activité de l'enseignant.

L'intention à long terme de chacun des projets est de produire une compréhension plus profonde des moyens par lesquels les enseignants utilisent les outils mathématiques technologiques, de sorte à outiller la conception et la mise en œuvre d'activités orientées vers le développement professionnel. Du côté anglais, l'hypothèse est qu'il pourrait être possible de traiter des types de 'hiccups' courants dans les tâches professionnelles des enseignants en formation initiale ou continue pour encourager la réflexion sur et par la pratique de classe. Du côté français, un but supplémentaire est de produire des outils théoriques et méthodologiques qui puissent être utilisés par les formateurs de manière à améliorer leur compréhension de la complexité des pratiques d'enseignants ordinaires relatives à la technologie et d'adapter en conséquence leur pratiques de formation. Les entreprises communes aux deux approches contribuent à répondre à l'appel fait par Sinclair et al. (2016, p. 704) à « poursuivre les recherches sur la préparation que font les enseignants [dans l'usage de la technologie] pour les aider à assurer à leurs élèves une meilleure compréhension des notions et de la théorie géométriques » (notre traduction[2]).

V. CONCLUSION

En conclusion, comme le montrent les éléments de discussion présentés ci-dessus, les études française et anglaise éclairent les deux faces d'une même pièce, celle des pratiques d'enseignants avec la technologie numériques en classe. En effet, l'analyse française est plus particulièrement orientée vers les raisons qui produisent des tensions et des perturbations, alors que l'analyse anglaise met l'accent sur les conséquences de 'hiccup' pour l'apprentissage professionnel de l'enseignant.

Alors que le contexte (des 'classes ordinaires') et les intentions à long terme des deux études (contribuer aux cadres théoriques à propos de l'intégration de la technologie) sont convergentes, les complexités de l'intégration de la technologie dans les classes de mathématiques sont éclairées de manière qui explique les décisions de l'enseignant en classe et au cours du temps. En contrastant les deux études nous avons mis en lumière les nombreux défis auxquels les enseignants sont confrontés pour intégrer la technologie dans leur classe.

Dans ce texte, nous avons montré comment les hiccups, tensions et perturbations qui ont lieu lors de l'intégration des technologies numériques dans la classe de mathématique conduit à un apprentissage pour l'enseignant. Cependant, ces mêmes hiccups, tensions et perturbations peuvent potentiellement éloigner définitivement l'enseignant de l'utilisation de cette technologie ou le conduire à une utilisation a minima. Jones (2011, p. 44) a proposé le notion de 'canalisation', un terme utilisé pour indiquer qu'il y a une voie normale de développement, pour rendre compte de l'idée que quand les complexités de l'introduction de la technologie

[2] Develop « further research on the preparation of teachers [in the use of technology] to help them ensure that students gain deeper understanding of geometrical concepts and theory ».

dans la classe de mathématiques sont mieux connues , alors l'utilisation de cette technologie « *a plus de chance d'atteindre un point de non-retour et de conduire l'enseignement sur une voie radicalement nouvelle* » [notre traduction[3]]. Notre recherche contribue à une meilleure compréhension des complexités d'une telle intégration de la technologie dans la classe de mathématiques vers ce qui pourrait être un tel point de non-retour.

La théorisation que montrent les études française et anglaise est issue de l'analyse de séances utilisant des technologies numériques Toutefois, les notions théoriques élaborées (hiccups, tensions, perturbations) peuvent tout à fait être utiles pour analyser des séances de classe dans lesquelles les technologies numériques ne sont pas utilisées. Cela appelle une validation par des études ultérieures.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ABBOUD-BLANCHARD, M. (2013). *Les technologies dans l'enseignement des mathématiques. Etudes des pratiques et de la formation des enseignants. Synthèses et nouvelles perspectives.* Note de synthèse pour l'Habilitation à Diriger des Recherches. Université Paris Diderot.

ABBOUD, M., CLARK-WILSON, A., JONES, K. & ROGALSKI, J. (2018). Analysing teachers' classroom experiences of teaching with dynamic geometry environments: Comparing and Contrasting two approaches. *Annales de didactique et de sciences cognitives,* Special English-French issue, 93-118.

ABBOUD, M. & COLES, A. (EDS.) (2018). Anglo-French use of theory in mathematics teaching, teaching development and teacher education. *Annales de didactique et de sciences cognitives,* Special English-french issue.

ABBOUD-BLANCHARD, M., CAZES, C. & VANDEBROUCK, F. (2013). Théorie de l'activité et double approche : genèses d'usage de bases d'exercices en ligne. In J.B. Lagrange (Ed.), *Les technologies numériques pour l'enseignement : usages dispositifs et* genèses (pp. 37-54). Toulouse : Octarès.

ABBOUD, M. & ROGALSKI, J. (2017). Des outils conceptuels pour analyser l'activité de l'enseignant "ordinaire" utilisant des technologies en classe. *Recherches en didactique des mathématiques, 37 (2/3)*, 161-216.

BEGUIN, P. & RABARDEL, P. (2000). Concevoir pour les activités instrumentées. *Revue d'intelligence artificielle, 14(1-2)*, 35–54.

CLARK-WILSON, A. (2010). Emergent pedagogies and the changing role of the teacher in the handheld mathematics classroom. *ZDM mathematics education*, *42(7)*, 747-761.

CLARK-WILSON, A. & NOSS, R. (2015). Hiccups within technology mediated lessons: a catalyst for mathematics teachers' epistemological development. *Research in Mathematics Education*, *17(2)*, 92-109.

CLARK-WILSON, A., ROBUTTI, O. & SINCLAIR, N. (EDS.) (2014). *The Mathematics Teacher in the Digital Era: An International Perspective on Technology Focused Professional Development*. London: Springer.

ENGESTRÖM, Y. (2008). Quand le centre se dérobe : la notion de knotworking et ses promesses. (When the center does not hold: The concept and prospects of knotworking). *Sociologie du travail*, *50*, 303–330.

HOYLES, C. & LAGRANGE, J.B. (EDS.) (2010). *Digital technologies and mathematics education. Rethinking the terrain. The 17th ICMI Study*. New York: Springer.

JAWORSKI, B. (2004). Insiders and outsiders in mathematics teaching development: the design and study of classroom activity. *Research in Mathematics Education, 6*, 3-22.

JONES, K. (2011). The value of learning geometry with ICT: lessons from innovative educational research. In A. Oldknow & C. Knights (Eds), *Mathematics Education with Digital Technology* (pp. 39-45). London: Continuum.

KAPTELIN, V. & NARDI, B. (2012). *Activity Theory in HCI: Fundamentals and reflections*. Morgan and Claypool.

LAVE, J. (1988). *Cognition in practice: mind, mathematics and culture in everyday life.* New York: Cambridge University Press.

RABARDEL P. (1995). *Les hommes et les technologies. Approche cognitive des instruments contemporains*. Paris : Armand Colin.

RUTHVEN, K., HENNESSY, S.,

& DEANEY, R. (2008). Constructions of dynamic geometry: A study of the interpretative flexibility of educational software in classroom practice. *Computers and Education*, *51(1)*, 297-317.

ROBERT, A. & ROGALSKI, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *La Revue Canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies (RCESMT / CJSMTE)*, *2(4)*, 505-528.

ROBERT, A. & ROGALSKI, J. (2005). A cross-analysis of the mathematics teacher's activity. An example in a French 10th grade class. *Educational Studies in Mathematics*, *59*, 269-298.

---

[3] Technology use « may be more likely to reach a 'pipping point' and move the pathway of education to a radically new route ».

ROGALSKI, J. (2003). Y a-t-il un pilote dans la classe ? Une analyse de l'activité de l'enseignant comme gestion d'un environnement dynamique ouvert. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 23(3)*, 343-388.

SINCLAIR, N., BUSSI, M. G. B., DE VILLIERS, M., JONES, K., KORTENKAMP, U., LEUNG, A. & OWENS, K. (2016). Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report. *ZDM: Mathematics Education, 48(5)*, 691-719

VERILLON, P. & RABARDEL, P. (1995). Cognition and artefacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education, 10(1)*, 77-102.

DUO D'ARTEFACTS NUMERIQUE ET MATERIEL POUR L'APPRENTISSAGE DE LA GEOMETRIE AU CYCLE 3

Anne **VOLTOLINI**

IFE, Ens Lyon, laboratoire S2HEP

Anne.voltolini@ac-grenoble.fr

Résumé

La recherche présentée ici porte sur l'introduction des technologies numériques pour l'apprentissage de la géométrie au cycle 3, spécifiquement lorsque celles-ci sont utilisées conjointement à des activités papier-crayon. Le premier objectif est de caractériser la notion de duo d'artefacts numérique et matériel tirée des travaux de Maschietto et Soury-Lavergne (2013). L'approche instrumentale de Rabardel (1995) permet d'établir les critères d'une articulation fructueuse, entre un artefact numérique et un artefact matériel, favorisant les conditions d'un apprentissage au sens de Brousseau (1998). L'enjeu suivant est alors d'élaborer un duo d'artefacts incluant le compas matériel en vue de la conceptualisation du triangle à partir du problème de sa construction à la règle et au compas. Des expérimentations en classe ont été le moyen de valider deux hypothèses : le duo en situation provoque l'élaboration d'un nouvel instrument compas pour faire pivoter un segment et induit une déconstruction dimensionnelle 1D du triangle. En outre, la mise en cohérence du modèle des conceptions de Balacheff (1995) et la notion d'instrument de Rabardel (1995) permet d'identifier l'évolution des conceptions des élèves sur le triangle au fil de la situation, en particulier, l'apparition d'une vision 1D du triangle comme une ligne brisée fermée.

Mots clés

Situation didactique, duo d'artefacts, genèses instrumentales, conceptions, géométrie, déconstruction dimensionnelle, manipulation, EIAH (Environnements Informatiques pour l'apprentissage humain), école primaire

I. LE PROBLEME ETUDIE ET LES OBJECTIFS DE CE TRAVAIL

Dans cette recherche (Voltolini, 2017), je me suis interrogée sur la possibilité d'élaborer des situations didactiques (Brousseau 1998), intégrant les technologies numériques, pour l'apprentissage de la géométrie au cycle 3 (fin de l'école primaire, début du collège). L'idée de départ, est d'introduire le numérique dans des pratiques ordinaires de classe, sans qu'il vienne se substituer aux activités de manipulation dans l'espace sensible ou aux activités papier-crayon déjà pratiquées. Mon expérience d'enseignante m'a convaincue que la différence de résolution d'une même tâche dans les deux environnements, numérique et papier-crayon, pouvait être une potentialité à exploiter. C'est donc dans la perspective d'une mobilisation conjointe des deux environnements, numérique et papier-crayon, que s'est inscrit ce travail. L'objectif de cette recherche est donc d'étudier l'introduction des technologies numériques comme environnement complémentaire à des activités papier-crayon afin de proposer des situations didactiques qui engagent les élèves dans l'acquisition de connaissances géométriques sur les figures. Mon hypothèse est que des manipulations de représentations d'objets mathématiques à l'interface de l'ordinateur peuvent être une aide, un intermédiaire au saut cognitif que constitue le passage entre des manipulations d'objets matériels et des tracés géométriques aux instruments.

Dans un premier temps, ce texte explicitera les points clés sur lesquels se focaliser pour élaborer une situation didactique, d'enseignement de la géométrie au cycle 3, incluant les technologies numériques. La deuxième partie de ce texte exposera les caractéristiques établies pour définir le concept de duo d'artefact numérique et matériel. Dans sa troisième partie, le texte présentera un duo d'artefacts particulier dédié à la conceptualisation du triangle à partir du problème de sa construction à la règle et au compas. Enfin, la quatrième partie sera consacrée aux expérimentations et à l'analyse de l'effet du duo d'artefacts sur les apprentissages.

1. Apprendre la géométrie au cycle 3

Elaborer des situations d'enseignement de la géométrie au cycle 3, réclame d'analyser ce que signifie faire de la géométrie à la fin de l'école primaire. Duval (2005) précise que faire de la géométrie nécessite de décomposer toute forme en une configuration d'autres unités figurales du même nombre de dimensions ou d'un nombre inférieur de dimensions. Mettre en œuvre la déconstruction dimensionnelle des formes est selon Duval un processus indispensable pour permettre un travail géométrique sur les figures. La vision « surfaces » est la vision première des figures chez les enfants. Dans les premières années de la scolarité, la figure est la trace d'un objet matériel, une surface avec un bord. L'apprentissage de la géométrie aura pour objectif d'ajouter à cette vision initiale une vision « lignes » et une vision « points » (Perrin-Glorian & Godin, 2014). Par exemple au cours de la scolarité un triangle est successivement : une forme de bois ou plastique que l'on peut déplacer et manipuler (Cycle 1, école maternelle) ; une surface que l'on peut tracer sur papier avec un gabarit ou un pochoir (Cycle 2) ; une figure à trois côtés que l'on construit à l'aide d'instruments (Cycle 3) ; enfin un réseau de trois droites, un ensemble de trois points, des relations entre segments, droites et points, des propriétés caractéristiques. *« Le rapport des élèves aux figures est l'un des points clé de leur entrée dans la géométrie »* (Duval & Godin, 2005 p 7). Il s'agit donc d'amener les élèves à changer de regard sur la figure et de les accompagner à passer d'une vision « surfaces » d'une figure à une vision faisant apparaître des unités figurales 1D et 0D.

Duval (2005) estime que la construction de figures est l'entrée nécessaire dans la géométrie. En effet les figures géométriques euclidiennes ont la particularité d'être constructibles à l'aide d'instruments. Parmi les instruments permettant des tracés graphiques certains produisent des formes 2D, par exemple les gabarits ou les pochoirs. D'autres produisent des formes 1D comme la règle, le compas, certains gabarits. Les outils usuels de géométries, incluant les logiciels de géométrie dynamique, sont essentiellement producteurs de tracés 1D. Ainsi la construction d'une figure s'appuie sur sa déconstruction en tracés 1D et 0D constructibles à l'aide d'un instrument. Saisir la procédure de tracé d'une figure aux instruments est une chose mais comprendre pourquoi les instruments utilisés sont adéquats pour réaliser cette construction en est une autre. L'usage d'un instrument ne va pas de soi, il doit être élaboré (Perrin-Glorian, Mathe & Leclercq, 2013) et l'enseignement de la géométrie doit contribuer à cette élaboration. Rabardel (1995) distingue l'artefact qui est l'objet donné à un sujet et l'instrument qui est construit au cours du processus de genèse instrumentale. Un instrument est une entité mixte constituée de l'artefact mobilisé par l'individu et d'une composante psychologique, les schèmes personnels d'utilisation pour un type de tâche donnée. L'artefact devient un instrument quand le sujet se l'est approprié et l'a intégré dans son activité. En géométrie cohabitent deux types d'artefacts : les artefacts tangibles (la règle, le compas, les gabarits… ainsi que les outils de géométrie dynamique) et les artefacts théoriques (les objets mathématiques, les théorèmes) (Houdement, 2007). L'utilisation d'un instrument plutôt qu'un autre pour produire une figure peut induire une vision différente de la figure. L'objectif est donc de proposer des problèmes de construction mobilisant différents types d'artefacts conduisant à de nouveaux instruments et permettant d'intégrer des visions géométriques différentes sur les figures.

Un problème du cycle 3 : la construction du triangle à la règle et au compas

Le choix de cet apprentissage, la construction du triangle à la règle et au compas, résulte des programmes du cycle 3, et d'une analyse théorique du triangle reposant sur sa déconstruction dimensionnelle. Dans l'enseignement, cette construction (Figure 1) n'est souvent associée qu'à une procédure de tracé et non à la conceptualisation du triangle.

La règle graduée, un obstacle à franchir
La construction du triangle à la règle et au compas est un apprentissage qui résiste au sens où les élèves tracent spontanément le triangle à la règle graduée uniquement. Tant que, dans leur scolarité les élèves n'ont mobilisé que la règle graduée pour tracer des segments de longueurs données et donc pour tracer les côtés d'un polygone, la règle graduée est alors l'instrument naturellement associé au tracé du triangle ; elle permet de tracer ses trois côtés de mesures données. L'utilisation de la règle graduée pour construire un triangle de longueurs des côtés données peut être vue comme un obstacle. La résistance de cet obstacle tient à une vision 2D du triangle comme « une surface délimitée par trois côtés » ; elle tient aussi au fait que souvent les longueurs des côtés sont données par leur mesure.

Une construction qui repose sur la conceptualisation du point
Construire un triangle à partir de trois longueurs fixées, c'est montrer que le triangle existe théoriquement et produire un tracé de ce triangle, ou montrer que le triangle n'existe pas théoriquement, c'est-à-dire que les trois longueurs données ne vérifient pas l'inégalité triangulaire. La construction attendue (Figure 1) consiste à tracer à la règle un segment d'une des trois longueurs souhaitées, puis à tracer avec le compas deux cercles (arcs de cercle) centrés sur les extrémités de ce segment avec pour rayon chacune des deux autres longueurs. Le compas en produisant un cercle, produit tous les points qui sont à distance fixe de son centre. Les intersections des deux cercles permettent de trouver deux points situés à des distances données de chaque extrémité du premier segment tracé. Ces deux points, s'ils existent, sont les sommets de deux triangles symétriques construits de part et d'autre du segment initial. Construire un triangle nécessite donc de décomposer le triangle en tracés constructibles, en particulier il s'agit de construire le 3ème sommet du triangle comme intersection de deux cercles (arcs de cercle) à tracer.

Figure 1 : Illustration de la construction du triangle à la règle et au compas.

La construction du triangle à la règle et au compas présente donc plusieurs difficultés. D'une part, cette construction repose sur une déconstruction du triangle 2D en un triangle déterminé par un côté, objet géométrique 1D, et le troisième sommet, objet géométrique 0D obtenu comme intersection de deux lignes, difficilement appréhendé par les élèves de l'école primaire. D'autre part le compas ne produit pas le contour du triangle mais produit des tracés auxiliaires, des cercles (arcs de cercle) n'appartenant pas au triangle et il doit être vu comme un instrument permettant de réaliser des égalités de longueurs.

Trois enjeux pour l'élaboration d'une situation didactique

A la lumière des travaux de Duval, Perrin-Glorian et Godin (Duval & Godin, 2005; Perrin-Glorian & Godin, 2014), trois idées directrices soutiennent l'élaboration d'une situation.

Occasionner une déconstruction dimensionnelle du triangle sans aller jusqu'au point
Le premier enjeu est d'adopter une démarche qui tienne compte du développement cognitif des élèves. Mettre un accent particulier sur la déconstruction dimensionnelle du triangle sans aller jusqu'au point, difficilement appréhendable par les élèves, est au cœur de cette démarche. Il s'agit donc d'élaborer une situation favorisant l'émergence d'une déconstruction dimensionnelle 1D du triangle.

Amener la pertinence géométrique du compas dans la construction du triangle
Le deuxième enjeu est de dépasser la procédure d'utilisation du compas et d'induire sa pertinence géométrique dans la construction du triangle. Il s'agit de faire prendre conscience à l'élève de la nécessité d'un nouvel instrument, autre que la règle graduée, pour réaliser cette construction. La situation doit donc provoquer une nouvelle genèse instrumentale du compas.

Caractériser le cercle, objet mathématique, pour identifier une distance
Faire évoluer les connaissances des élèves sur le cercle, est le troisième enjeu. La situation doit donc aussi permettre d'amener le cercle, objet mathématique, comme instrument pour identifier une distance dans la construction du triangle.

2. Rôle des technologies numériques

De nombreuses études issues de la recherche en didactique reflètent un optimisme pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques avec les technologies numériques (Hoyles & Lagrange, 2010; Sinclair & Baccaglini-Franck, 2015; Drijvers et al., 2016; Moyer-Packenham, 2016). Les environnements, sensible et papier-crayon, ne sont pas pour autant négligés mais il apparaît que majoritairement, les technologies numériques sont utilisées pour remplacer une activité de manipulations d'objets matériels ou une activité papier-crayon. Si les deux environnements, numérique et matériel, sont mobilisés, les tâches proposées dans les différents environnements, sensible, papier-crayon, numérique, sont la plupart du temps disjointes. Des études comme par exemple celle de Gueudet, Bueno-Ravel et Poisard (2014) relatent une utilisation simultanée d'un outil matériel et d'un outil numérique. Dans ces travaux, ni la cohérence entre l'utilisation de chaque outil, numérique et matériel, ni l'élaboration de l'artefact numérique étant donné l'artefact matériel ne sont interrogées. De plus, à ma connaissance, aucune recherche n'a été réalisée sur la façon dont les élèves adaptent leurs connaissances de l'environnement papier-crayon à un environnement numérique ou réciproquement. C'est donc dans la perspective d'une utilisation conjointe des environnements, numérique et matériel ou papier-crayon, et de leur complémentarité que cette étude se fait. L'utilisation conjointe d'un environnement numérique et d'un environnement papier-crayon dans une même situation didactique peut-elle être une plus-value pour les apprentissages ?

Avant d'étudier la valeur ajoutée d'une utilisation conjointe des environnements numérique et papier-crayon il est important de rappeler le potentiel et la plus-value des environnements de géométrie dynamique pour l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie.

Potentialités de la géométrie dynamique dans l'enseignement de la géométrie

L'utilisation des environnements de géométrie dynamique induit pour les élèves de nouvelles façons d'apprendre et de comprendre les concepts mathématiques (Laborde et al., 2006). Souvent, les élèves se contentent d'appliquer des procédures pour résoudre un problème, sans donner de sens à celles-ci. La géométrie dynamique permet de créer des représentations dynamiques d'objets mathématiques qui peuvent être facilement manipulées et ainsi peut engendrer des pratiques pédagogiques qui favorisent l'expérimentation et l'étude des objets mathématiques et pas uniquement l'apprentissage de procédures de résolution. Les environnements de géométrie dynamique, sont des outils de visualisation, de réification, et de manipulation directe de représentations d'objets mathématiques et de certaines de leurs propriétés (Artigue, 2008). Les logiciels de géométrie dynamique qui permettent la manipulation directe proposent à l'utilisateur d'agir directement sur les objets mathématiques et ainsi transforment la façon habituelle (dans l'environnement papier-crayon) d'agir sur ceux-ci (Laborde & Laborde, 2014). Avant d'entreprendre une action, les élèves ont à prendre des décisions qui sont influencées par leurs connaissances sur les objets en jeu. Les représentations dynamiques d'objets mathématiques offrent donc aux élèves une nouvelle fenêtre pour la conceptualisation et peuvent être un moyen de favoriser la transition d'une appréhension perceptive des figures vers une appréhension géométrique.

Les environnements numériques sont donc favorables à la création de milieux (Brousseau, 1998) et conduisent à l'élaboration de nouveaux types de tâches, engageant l'élève à interagir avec l'environnement, qui ne peuvent exister dans l'environnement papier-crayon (ibid). Le fait que ce soit l'environnement qui réagit, indépendamment de l'enseignant, contribue à une meilleure appropriation du problème par les élèves ; un environnement de géométrie dynamique permet à l'utilisateur d'invalider les stratégies erronées et d'être soutenu dans la recherche d'une stratégie.

La géométrie dynamique en complément et en interaction avec l'utilisation des instruments usuels de géométrie : question de recherche

L'objet de ce travail est d'utiliser les potentialités d'un environnement de géométrie dynamique pour organiser un milieu qui permette d'explorer le triangle au travers d'une analyse visuelle différente de celle induite par la règle graduée et le compas. Les technologies numériques peuvent-elles être un moyen pour accompagner la conceptualisation 1D du triangle ? L'élaboration d'un artefact numérique qui permet de travailler hors de l'environnement papier-crayon et donc hors de l'utilisation des instruments usuels de géométrie peut-il être un moyen de franchir l'obstacle de la règle graduée et d'amener la nécessité de l'usage d'un nouvel instrument compas autre que la règle graduée pour réaliser la construction d'un triangle de longueurs des côtés données ?

L'enjeu est donc d'introduire la géométrie dynamique articulée à l'usage du compas matériel. Il s'agit de développer un environnement numérique, qui inclut une approche expérimentale sur la base de manipulations directes de représentant dynamiques d'objets mathématiques, articulé à l'usage du compas matériel. La question sous jacente est alors d'étudier les conditions d'une articulation entre un artefact numérique et un artefact matériel qui soit une plus-value pour les apprentissages. Comment une telle articulation peut-elle influencer la conceptualisation ? Ce qui conduit à définir la notion de duo d'artefacts numérique et matériel.

II. LE CONCEPT DE DUO D'ARTEFACTS NUMERIQUE ET MATERIEL

L'objectif ici, est de caractériser ce qui fait duo : à quelles conditions la mobilisation conjointe de deux artefacts, numérique et matériel, dans une situation peut-elle être qualifiée de duo d'artefacts ?

1. Une proposition de définition d'un duo d'artefacts

Dans un premier temps, il est utile de justifier les choix de vocabulaire, matériel et numérique. L'adjectif matériel est préféré à l'adjectif tangible, au sens où les objets et/ou les outils considérés sont réels, faits de matière. Ces objets et/ou outils matériels, peuvent être manipulés, touchés, ils sont donc aussi tangibles. Cependant, des objets numériques peuvent aussi être tangibles. En particulier lors de l'usage de technologies tactiles, les doigts sont directement en contact avec l'écran, les interactions se font par le toucher. Laborde et Laborde (2014) parlent aussi de représentations dynamiques et tangibles à l'interface d'un logiciel de géométrie dynamique. L'adjectif numérique est choisi même si en mathématiques le terme numérique se rapporte aussi aux nombres et peut donc, dans certaines situations, prêter à confusion. Le mot virtuel est rejeté car il se rapporte à ce qui n'est qu'en puissance, qu'en état de simple possibilité par opposition à ce qui est en acte. Or justement, comme il a été dit précédemment, les environnements numériques permettent de re-matérialiser les objets mathématiques abstraits, qui sont invisibles et virtuels.

Dans le prolongement des travaux de Machietto et Soury-Lavergne (2013, 2015) un duo d'artefacts est défini comme l'articulation fructueuse d'un artefact numérique et d'un artefact matériel au sein d'une même situation didactique. Les travaux de ces auteures se font dans la perspective d'une articulation, avec une recherche de continuités et de ruptures, entre les deux artefacts, numérique et matériel. Elles montrent que la complémentarité et les ruptures entre les deux artefacts, numérique et matériel, peuvent être favorables à la conceptualisation. La clé d'une utilisation enrichissante des potentialités d'une technologie numérique consiste à y créer un artefact articulé à un artefact matériel donné, de manière à ce que cette articulation induise une valeur ajoutée pour la conceptualisation. Cette articulation, pour être un réel gain didactique, doit répondre à des critères précisés dans les deux prochains paragraphes.

Une situation didactique pour faire exister le duo

« Les outils n'ayant de sens que par rapport aux situations dans lesquelles ils sont mis en œuvre » (Bruillard & Vivet, 1994), l'utilisation d'artefacts, numérique et matériel, ne permet l'apprentissage que lorsqu'ils sont mobilisés dans une situation didactique. Composer un duo d'artefacts c'est donc organiser un milieu, en lien avec l'apprentissage visé, comprenant les deux artefacts et susceptible de rétroactions favorables à cet apprentissage. La situation didactique problématise le recours aux artefacts numérique et matériel, éléments essentiels du milieu et met en œuvre l'articulation entre les manipulations avec chaque artefact. Dans un duo d'artefacts la façon dont l'outil numérique est conçu et exploité conjointement à un outil matériel donné est primordiale. L'élaboration de l'outil numérique et des tâches qui le mobilisent doit permettre de tirer profit du potentiel didactique d'un environnement numérique afin de favoriser certaines trajectoires d'apprentissage. Le cœur d'un duo repose sur la plus-value que peut apporter l'artefact numérique pour la conceptualisation. L'objectif est que chaque artefact enrichisse l'autre, en particulier que l'artefact numérique sollicite de

nouvelles stratégies de résolution; il est primordial que les stratégies suscitées par un artefact complètent celles suscitées par l'autre. Ainsi, dans l'élaboration d'un duo d'artefacts et de la situation qui lui permet d'exister, il s'agit de faire en sorte que l'artefact numérique soit une simulation qui offre une gamme de stratégies et d'interactions, contrôlées par l'utilisateur, qui enrichissent celles avec l'artefact matériel.

Des genèses instrumentales associées

Une analyse des genèses instrumentales et des schèmes d'utilisation (Rabardel, 1995) de l'artefact matériel participe à l'élaboration d'un artefact numérique en termes de continuité et discontinuité entre les deux artefacts. L'approche instrumentale fournit le cadre théorique pour élaborer l'artefact numérique et l'articulation entre les deux artefacts numérique et matériel. Dans une situation mobilisant un duo d'artefacts, numérique et matériel, chaque artefact entraine le développement de schèmes et par conséquent les deux genèses instrumentales s'entremêlent. Dans un duo d'artefacts, le projet est que chaque artefact enrichisse l'autre afin que les instruments construits en bénéficient. Articuler les artefacts c'est donc les mettre en relation tant en continuité qu'avec certaines discontinuités judicieusement choisies. L'articulation des artefacts doit autoriser, dans un premier temps, des tentatives d'assimilation des schèmes d'utilisation de manière à ce que les éléments qui font l'objet de l'apprentissage soient reliés à ce que le sujet connaît déjà. Dans un second temps, il faut qu'un déséquilibre apparaisse afin que des processus d'accommodation des schèmes soient mis en œuvre pour retrouver un nouvel équilibre et induire un apprentissage (Figure 2). De tels déséquilibres sont provoqués par une discontinuité entre les deux artefacts ; l'artefact numérique doit inclure des éléments supplémentaires relativement à l'artefact matériel. La continuité entre les deux artefacts participera quant à elle à ce que les schèmes d'utilisation construits soient plus puissants, plus polyvalents ; ils pourront ainsi être mobilisés dans un plus grand nombre de tâches. Les instruments fondés par le sujet lors de la mobilisation d'un duo ne sont pas simplement deux instruments juxtaposés ; l'instrument 2 incorpore l'instrument 1. Ce qui conduit à formuler une première hypothèse de recherche : Un duo d'artefacts, numérique et matériel, provoque des genèses instrumentales associées qui conduisent, en particulier, à une genèse instrumentale relative à l'artefact matériel.

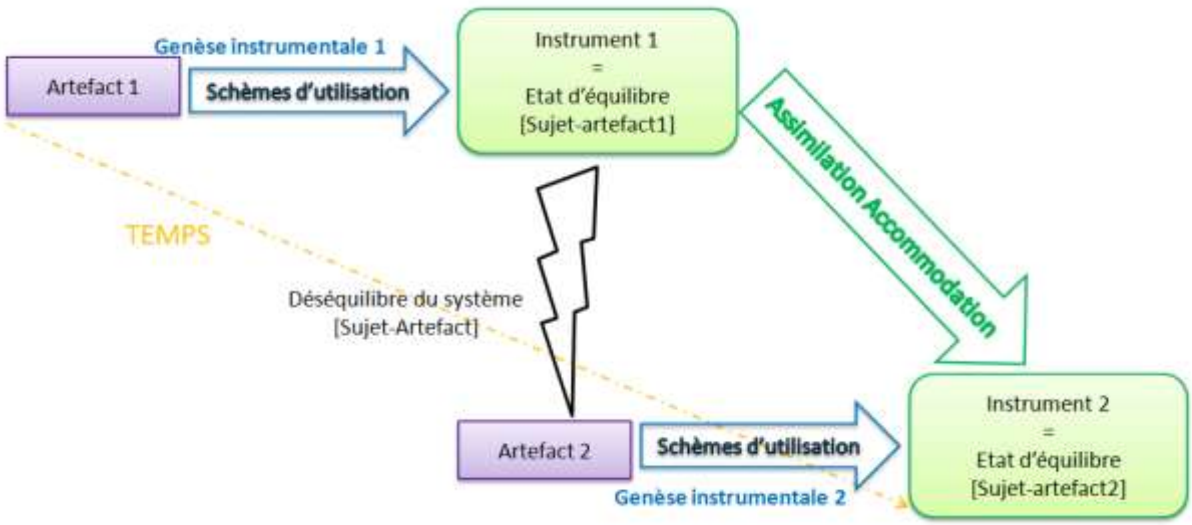


Figure 2 : Un duo d'artefacts engendre des processus d'assimilation et d'accommodation des schèmes d'utilisation d'un instrument à l'autre.

2. Dualité instrument-conception

Au-delà de la caractérisation d'un duo d'artefacts numérique et matériel, il s'agit d'étudier les processus d'apprentissage engagés dans la mobilisation d'un duo d'artefacts dans une situation. Dans cette étude, la notion d'instrument de Rabardel (1995) et la notion de conception de Balacheff (1995) sont mises en cohérence.

Caractériser les connaissances liées à l'émergence d'un instrument

C'est au fond de l'action que se trouve la conceptualisation (Vergnaud, 1996). C'est donc au travers des actions avec les artefacts, numérique et matériel, que la conceptualisation est regardée. Rabardel explique que pour un type donné de tâches, réalisées à l'aide d'un artefact, l'utilisateur développe des structures cognitives, les schèmes d'utilisation, et ainsi élabore un instrument. Les schèmes d'utilisation développés par le sujet en activité ont une fonction épistémique qui traduit la conceptualisation (Rabardel, 1995). Vergnaud (1990) précise lui aussi que c'est dans les schèmes qu'il faut rechercher les connaissances en acte du sujet, c'est-à-dire les éléments cognitifs qui permettent à l'action du sujet d'être opératoire. *« Les schèmes reposent toujours sur une conceptualisation implicite »* (ibid, p. 139). Ainsi un instrument constitué par un sujet est une connaissance du sujet. La mobilisation de cet instrument dans une tâche est donc une instanciation de cette connaissance-instrument par une situation. Le modèle cK¢ de Balacheff (1995) est un moyen de caractériser les connaissances implicites du sujet liées à la constitution d'un instrument. Ce modèle permet d'expliciter des indicateurs pour identifier les conceptions d'un sujet en situation. Balacheff distingue le concept abstrait, de la connaissance d'un sujet ou d'une institution et d'une conception qui est une instanciation de la connaissance d'un sujet par une situation. Dans le modèle cK¢, une conception C est définie par un quadruplet (P, R, L, Σ) dans lequel P est un ensemble de problèmes sur lequel C est opératoire ; R est un ensemble d'opérateurs qui permettent la transformation des problèmes ; L est un système de représentation qui permet d'exprimer les éléments de P et de R ; Σ est une structure de contrôle, elle assure la non contradiction de C. Les éléments cognitifs qui permettent à l'action du sujet d'être opératoire sont situés dans les opérateurs et les contrôles. Un opérateur permet l'action, caractérisée comme la conséquence d'un prédicat. Un contrôle, contient les éléments de décision sur le bien-fondé de l'emploi d'un opérateur ou sur l'état de résolution d'un problème. Un instrument, dans sa partie schèmes d'utilisation, intègre donc des opérateurs qui mobilisent l'artefact et des contrôles : d'une part des contrôles permettant de juger de la validité et des modalités de son utilisation et d'autre part, des contrôles relatifs aux représentations des concepts en jeu. C'est pourquoi dans cette étude, les schèmes d'utilisation sont identifiés à partir d'opérateurs et de contrôles, ce qui permet de caractériser les connaissances liées à l'émergence d'un instrument. Les genèses instrumentales résultent donc de combinaisons d'opérateurs et de contrôles.

Le système [sujet-milieu] enrichi grâce au duo

Les ressorts de la conceptualisation apparaissent comme l'interaction du sujet avec le milieu (Brousseau, 1998). La mobilisation d'un duo d'artefacts dans une situation, à travers l'articulation des artefacts, augmente les occasions de rencontre sujet-milieu ; différents milieux se confrontent. Le duo en situation rend possible la réitération d'expériences en faisant varier les contraintes au cours de l'alternance entre actions instrumentées numériques et actions à l'aide des instruments matériels, et ainsi favorise l'émergence et la transformation des connaissances. Grâce au duo, le système [sujet-milieu] est enrichi et multiplie les occasions d'émergence et de transformation des conceptions au cours de la situation. Un duo est favorable à la mise en œuvre d'un parcours de conceptions d'un état initial supposé à un état final attendu du système [sujet-milieu] au cours de l'alternance entre les actions instrumentées avec les instruments numériques et celles utilisant les instruments matériels. Cela conduit à la formulation d'une seconde hypothèse de recherche : Un duo d'artefacts numérique et matériel, mobilisé dans une situation, favorise l'évolution des conceptions du sujet et l'acquisition de connaissances.

III. UN DUO D'ARTEFACTS ET UNE SITUATION POUR LA CONCEPTUALISATION DU TRIANGLE

L'enjeu est de composer un duo d'artefacts dédié à la conceptualisation du triangle à partir du problème de sa construction à la règle et au compas. L'artefact matériel du duo est le compas. Il s'agit alors de développer conjointement un artefact numérique articulé au compas matériel et une situation qui mobilise le duo. L'objectif est de donner du sens à l'usage du compas dans ce problème de construction et simultanément de favoriser la conceptualisation du triangle.

L'apprentissage est un processus permettant le passage d'une conception à une autre. Modéliser l'apprentissage nécessite donc d'organiser les conceptions relatives à une connaissance et de définir une problématique d'évolution. Ceci nous amène à caractériser, a priori, les conceptions du triangle et leur évolution.

1. Une problématique d'évolution des conceptions du triangle

L'idée est de définir une problématique d'évolution des conceptions du triangle qui mette en œuvre une déconstruction dimensionnelle du triangle 2D au triangle 1D jusqu'au 0D. La construction du triangle à la règle et au compas nécessite de passer d'une conception triangle-2D, une surface à trois côtés qui est l'appréhension première du triangle pour les enfants, à une conception qui nécessite l'appréhension du 0D pour identifier le troisième sommet comme intersection de lignes. Le projet est donc d'étudier la possibilité de faire exister une conception triangle-1D qui mobilise des opérateurs et des contrôles qui relèvent de la dimension 1. Un parcours de conceptions du triangle est ainsi envisagé (Figure 3).

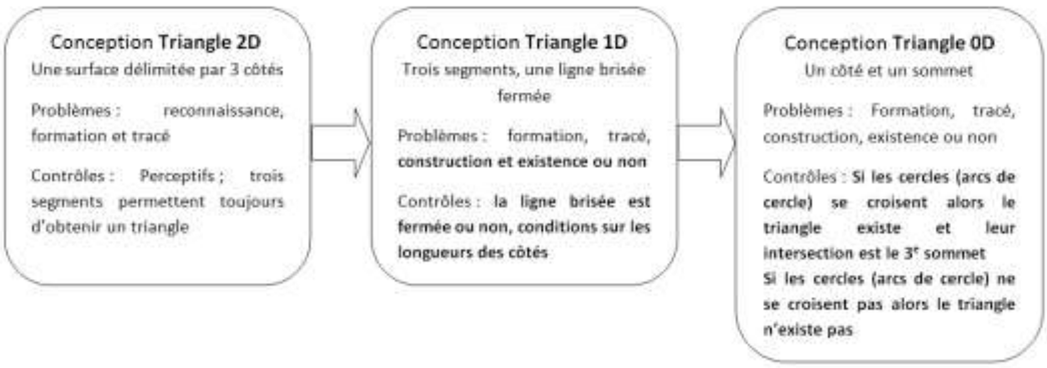


Figure 3 : Parcours de conceptions du triangle.

Chaque conception permet la résolution de nouveaux problèmes et induit un apprentissage. La conception triangle-2D permet de résoudre des problèmes de reconnaissance et de formation de triangles et même des problèmes de tracés de triangles sans contrainte sur les longueurs. Cette conception triangle-2D qui engage des contrôles perceptifs ne permet pas de construire un triangle à la règle et au compas. La conception triangle-1D permet de résoudre des problèmes de construction de triangles et des problèmes d'existence ou non du triangle. De nouveaux contrôles sur l'existence ou non du triangle sont introduits ; ces contrôles étant inexistants dans la conception triangle-2D. Le passage de la conception triangle-1D à la conception triangle-0D amène le cercle pour identifier une distance. Elle introduit des contrôles sur les cercles caractérisés comme ensemble de points équidistants d'un autre et leur intersection qui détermine ou non le troisième sommet du triangle. Dans cette conception le cercle objet mathématique devient un artefact.

2. Méthodologie de composition du duo d'artefacts et analyse de ses effets

L'objectif est d'élaborer une situation didactique engageant l'utilisation d'un duo d'artefacts, l'artefact matériel compas et un artefact numérique associé, permettant l'évolution des connaissances relatives au triangle et au cercle. Dans ce travail deux autres visées sont aussi en jeu. D'une part la situation mobilisant le duo d'artefacts doit pouvoir être intégrée dans de réelles pratiques de classe. D'autre part, il s'agit d'amener la géométrie dynamique à l'école primaire. Ces deux dernières visées interviennent également dans les choix faits au cours de l'élaboration de la situation et de la composition du duo.

Une ingénierie didactique collaborative

Le duo d'artefacts et la situation en quatre phases (Figure 4), sont élaborés lors d'un travail collaboratif entre chercheurs et enseignants. Ce travail, se réalise au cours d'un processus itératif qui articule des phases d'élaboration de la situation et de composition du duo et des phases d'expérimentations en classe. Ces expérimentations conduites en conditions réelles de classe visent à mettre à l'épreuve de l'expérimentation le duo d'artefacts et la situation et ainsi à les faire évoluer au fil du temps. La prise en compte des observations et résultats des expérimentations alimente, par rétroaction, le processus de composition du duo et conduit à modifier la situation. Les choix de composition du duo sont constamment révisés en se basant sur l'expérience et l'analyse des données recueillies, jusqu'à l'obtention d'une version considérée comme optimale (Collins, Joseph, & Bielaczyc, 2004).

Phase 1 Phase 2 Phase 3 Phase 4

Figure 4 : Une situation en quatre phases qui alterne cahiers informatisés et activités papier-crayon.

Associer des enseignants à la composition du duo semble bénéfique dans la mesure où, dans ce travail, les hypothèses de recherche concernent l'effet du duo sur les apprentissages des élèves. Tester ces hypothèses dans de réelles conditions de classe est donc primordial. En outre, la composition du duo concerne la fonction pragmatique des instruments. Cette fonction est visible pour les enseignants qui peuvent intervenir dans l'élaboration des artefacts et leur articulation dans une situation. En effet, dans leur classe les enseignants observent les actions des élèves et leurs productions à l'aide des différents instruments. La fonction épistémique des instruments, le développement de schèmes et donc de connaissances est moins évidente pour les enseignants. C'est pourquoi, dans le cadre de ce travail, les enseignants n'ont plus été associés à la phase d'évaluation de l'ingénierie didactique. L'évaluation de la confrontation analyse a priori, analyse a posteriori a été faite uniquement par la chercheuse.

Une orchestration (Trouche, 2005) du duo d'artefacts numérique et matériel est pensée a priori dans le processus d'élaboration. Le choix est fait d'alterner les activités dans l'environnement numérique et dans l'environnement papier-crayon. Chaque phase, cahier informatisé ou activité papier-crayon, est traitée individuellement par les élèves et après chaque phase une synthèse en classe entière est faite par les enseignants. Ces synthèses conduisent à discuter les propositions des élèves et à faire un bilan des apprentissages de la phase. L'appropriation de la situation par d'autres enseignants et donc la mise en œuvre d'autres orchestrations n'est pas étudiée dans ce travail.

Des expérimentations en condition réelle de classe trois années consécutives

La situation est élaborée sur trois années consécutives, ainsi plus de 130 élèves ont testé le duo d'artefacts au cours de son évolution. Les expérimentations ont toutes été réalisées dans des classes de CM2 (deux classes par année) de la même école élémentaire. Elles ont été réalisées en condition réelle de classe ; les consignes et les synthèses étaient conduites par les enseignants. Des captures vidéo du travail de chaque élève dans les cahiers informatisés ont été réalisées les trois années. Les deux premières années, seuls trois élèves par classe étaient filmés dans les activités papier-crayon. Toutes les productions étaient ramassées. Ces productions finales ne rendent pas compte du déroulement des actions des élèves, des étapes intermédiaires misent en œuvre et sont donc insuffisantes pour extraire des informations pertinentes relativement à l'évolution des conceptions des élèves sur le triangle et relativement aux instruments compas élaborés. La troisième année, trois élèves sur quatre ont donc été filmés dans les activités papiers-crayon.

Des analyses a priori et a postériori en termes d'opérateurs et de contrôles

L'évaluation des effets du duo d'artefacts en situation est fondée sur la confrontation entre analyse a priori et analyse a posteriori. Le modèle cK¢ (Balacheff, 2013) permet de déterminer des observables, décrits à l'aide d'opérateurs et de contrôles, pour d'une part, construire l'analyse a priori et d'autre part, interpréter les observations et proposer une explication des actions des élèves en termes d'instrumentation et de conceptualisation. Le modèle cK¢ est utilisé d'une part, pour décrire par des quadruplets (P, R, L, Σ) différentes conceptions du triangle, et d'autre part, pour décrire a priori des stratégies de résolution des différentes tâches proposées par la situation dans chaque environnement numérique ou papier-crayon. Les stratégies ainsi décrites, par un enchainement d'opérateurs et de contrôles, peuvent être confrontées aux observations. L'analyse consiste alors à étudier les opérateurs et les contrôles effectivement engagés par les élèves pour caractériser, au fil des quatre phases de la situation, des stratégies de résolution réellement mises en œuvre, les différents instruments élaborés, des conceptions révélées sur le triangle, ainsi que des parcours de conceptions.

3. Une situation qui articule compas matériel et cahiers informatisés

Soutenue par la caractérisation de l'apprentissage par adaptation à un milieu (Brousseau, 1998), l'élaboration d'une situation didactique consiste à organiser un milieu représentant les savoirs à acquérir. L'enjeu est de provoquer la conceptualisation 1D du triangle ainsi qu'une nouvelle genèse instrumentale du compas, grâce à des actions sur les segments côtés du triangle, unités visuelles 1D. Notre intention est de proposer des tâches qui détachent les côtés du triangle de la surface qu'ils délimitent et qui permettent d'identifier des relations entre les côtés. Le but est de coordonner des manipulations de segments dynamiques de longueurs fixes données à des activités à partir de segments tracés dans l'environnement papier-crayon. Les choix de variables didactiques ainsi que les problèmes à résoudre, au fur et à mesure de la situation, doivent permettre l'élaboration de stratégies et donc l'acquisition et l'évolution des connaissances des élèves. Trois variables didactiques sont en jeu. La première est la longueur des segments proposés. S'intéresser à la construction d'un triangle de longueurs des côtés données amène à se poser la question de l'existence ou non du triangle. Souhaitant prendre en compte cette question dans la situation, les longueurs des segments proposées vérifient ou non l'inégalité triangulaire. Une potentialité d'un environnement de géométrie dynamique étant le déplacement des objets, la deuxième variable didactique en jeu est le déplacement des segments proposés. Enfin, la construction de figures se faisant aux instruments la troisième variable didactique concerne les artefacts disponibles aussi bien dans l'environnement papier-crayon que dans l'environnement numérique. Quatre types de problèmes sont à résoudre au fil des quatre phases de la situation (Figure 4): des problèmes de formation de triangle, des problèmes de tracés de triangles, des problèmes de construction de triangles et des problèmes d'existence ou non du triangle.

Des segments numériques d'apparence et de comportement asymétriques

La technologie qui, dans cette recherche, permet de développer des environnements informatisés est le logiciel Cabri Elem[1]. Le compas de géométrie dynamique est proposé par cet environnement, cependant l'artefact numérique instrumenté dans le duo est le déplacement d'un point par rotation. En effet, l'environnement numérique développé inclut une approche expérimentale basée sur des manipulations directes de représentations dynamiques de segments. Le premier cahier d'activités informatisé nommé « A la découverte des triangles » comprend cinq pages d'activités numérotées de 1 à 5 (Figure 5).

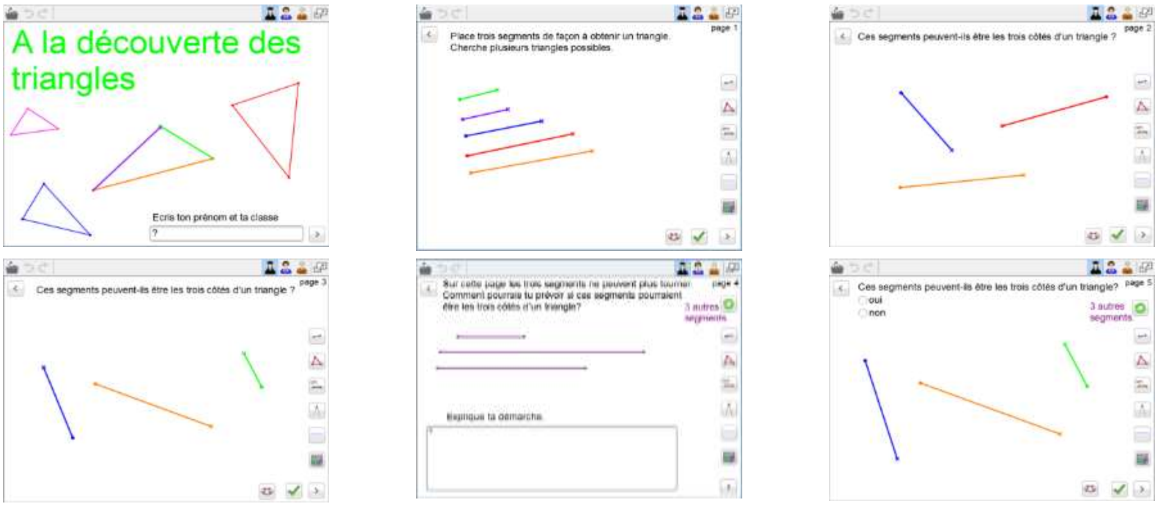


Figure 5 : Les différentes pages du premier cahier informatisé.

Ce cahier informatisé, amène à traiter deux tâches : former des triangles par manipulations directes de segments de longueurs fixes donnés (page 1), et déterminer si trois segments

[1] Le logiciel Cabri Elem est développé par la société Cabrilog et utilisé dans mon travail dans le cadre d'une collaboration scientifique entre l'entreprise Cabrilog et l'Institut Français de l'Éducation.

donnés peuvent être les trois côtés d'un triangle (page 2, 3, 4 et 5). La deuxième tâche à propos de l'existence ou non d'un triangle est une question mathématique qui problématise la recherche et la formation d'un triangle et donc le recours aux déplacements des segments.

L'environnement numérique permet de contraindre deux déplacements différents pour un segment. Les segments proposés sur les pages 1, 2, 3 et 5 sont donc asymétriques à l'écran dans leur représentation et au cours de leur mouvement. Deux déplacements sont possibles pour un segment : déplacer le segment entier par translation en attrapant le segment ou son extrémité ronde ; faire pivoter le segment autour de l'extrémité ronde qui reste fixe en attrapant le segment par son extrémité cruciforme (Figure 6).

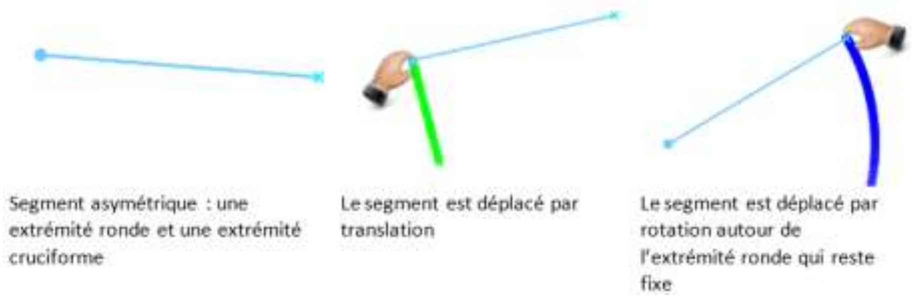
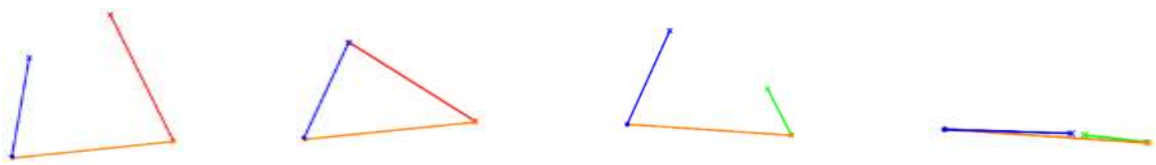


Figure 6 : Des segments asymétriques à l'écran et dans leur comportement.

La distinction graphique des extrémités, ronde ou cruciforme, permet à l'utilisateur d'anticiper le mouvement avant de bouger le segment. Cette asymétrie de déplacement des segments participe à la dynamique de la situation et à la mise en place de stratégies porteuses de savoirs et de sens. Le fait que les deux extrémités d'un segment ne pivotent pas oblige la dissociation des deux déplacements, par translation ou par rotation autour d'une extrémité qui reste fixe, et induit la mise en valeur de la rotation indispensable pour former un triangle à partir des segments numériques. Ceci n'est pas le cas avec des manipulations d'objets matériels comme des pailles ou des baguettes lors desquelles les deux déplacements sont réalisés conjointement. Cette contrainte de double déplacement provoque donc la genèse instrumentale d'un instrument déplacement par rotation pour pivoter un segment numérique autour d'une extrémité qui reste fixe. De plus cette asymétrie de mouvement des segments induit une stratégie gagnante efficace pour former un triangle dans l'environnement numérique. Le fait que les deux extrémités d'un segment ne pivotent pas rend fastidieuse la stratégie par ajustement qui consiste à positionner successivement trois segments et à les ajuster progressivement pour former le triangle. Les ajustements efficients sont les ajustements par rotation. Une stratégie efficace pour former un triangle consiste donc à former, avec trois segments, une ligne brisée dont les extrémités sont cruciformes. Le triangle est ensuite obtenu en faisant pivoter les deux segments extrêmes de la ligne brisée (Figure 7).



Un triangle est une ligne brisée fermée

La ligne brisée ne peut être fermée pour obtenir un triangle

Figure 7 : La stratégie ligne brisée pour former un triangle ou constater que le triangle n'existe pas.

L'environnement numérique permet donc de créer un milieu dont les segments d'apparence et de comportement asymétriques sont des éléments essentiels qui provoquent l'élaboration d'un instrument déplacement par rotation pour pivoter un segment autour d'une extrémité qui reste fixe et qui conduisent à la mise en œuvre d'une stratégie ligne brisée. Cette stratégie ligne brisée amène à penser la ligne brisée que l'on ne peut fermer pour obtenir un triangle et donc l'inexistence du triangle (Figure 7).

Un duo déplacement par rotation et compas matériel

Dans la construction du triangle à la règle et au compas, le compas ne rend pas visibles les segments côtés du triangle. La technologie numérique permet de les rendre visibles dans le premier cahier informatisé. Dans l'environnement papier-crayon, il s'agit pour les élèves de poursuivre l'exploration du triangle à partir de ses trois côtés. Une des caractéristiques d'un duo, mobilisé dans une situation, est que l'articulation des artefacts se fasse dans une certaine continuité. C'est pour cette raison que sont intégrés dans le milieu constitué par la première activité papier-crayon les objets sur lesquels la stratégie ligne brisée fonctionne dans le cahier informatisé : la ligne brisée et les segments côtés. La première activité papier-crayon consiste à tracer des triangles dont les côtés sont donnés sous forme de segments tracés sur la feuille. Les segments proposés sont soit disposés en ligne brisée soit parallèles les uns aux autres. Plusieurs configurations de trois segments sont proposées (Figure 8). Dans un souci de continuité avec les manipulations des segments dynamiques dans le cahier informatisé, la consigne est encore formulée en termes de segment et non en termes de longueurs. Dans chaque cas, la consigne est la même : « Peut-on obtenir un triangle avec les segments proposés ? Si oui, le tracer ». Dans le prolongement du premier cahier informatisé, dans cette première activité papier-crayon des triplets de longueurs vérifient l'inégalité triangulaire et d'autres ne la vérifient pas. Pour réaliser ces tâches, une boîte à outils de géométrie contenant, le crayon, la règle graduée, l'équerre et le compas, est disponible.

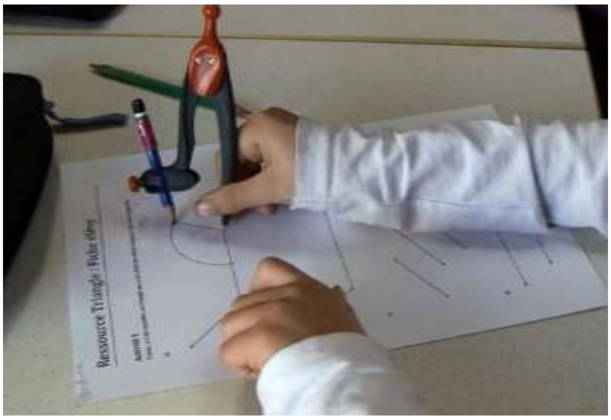


Figure 8 : Illustration de la première activité papier-crayon.

La ligne brisée est l'élément de continuité du duo ; c'est elle qui va permettre de passer du déplacement par rotation au compas matériel (Voltolini, 2014). Les manipulations directes et continues des segments n'étant plus possibles, les outils de géométrie vont être mobilisés pour remplacer les déplacements par translation et rotation de l'environnement numérique. Un nouvel instrument compas est élaboré : le compas pour pivoter un segment. Pivoter le compas revient à pivoter un segment entre ses branches. Dans l'environnement numérique c'est le même segment qui se déplace mais dans l'environnement papier-crayon le compas produit un cercle (arc de cercle) qui est la trace de l'extrémité du segment pivoté. Le segment résultat du pivotement doit donc être tracé de même longueur que le segment initial (Figure 9).

Figure 9 : Un nouvel instrument compas pour pivoter un segment dans la construction du triangle.

La mobilisation du compas matériel est ainsi coordonnée au déplacement par rotation autour d’une extrémité d’un segment numérique dans le premier cahier informatisé. D’une part, le segment numérique asymétrique dans sa représentation à l’écran et dans ses déplacements rappelle le compas matériel : une pointe qui reste fixe et une mine qui tourne. D’autre part, l’instrumentation du déplacement par rotation pour pivoter un segment numérique produit des schèmes d’utilisations qui peuvent s’étendre par assimilation et accommodation à des schèmes d’utilisation du compas matériel. On peut décrire par un enchainement d’opérateurs (r) et de contrôles (Σ) un schème d’utilisation pour pivoter un segment numérique : distinguer les deux extrémités du segment (ΣExtr) puis attraper l’extrémité cruciforme et déplacer par rotation le point extrémité (rRot+ ΣRot). On peut décrire un schème d’utilisation pour pivoter un segment à l’aide du compas matériel : distinguer les deux branches du compas et piquer la pointe sur l’extrémité du segment qui reste fixe (ΣPointe), écarter les branches pour poser la mine sur l’extrémité à pivoter (ΣMine), puis pivoter le compas en maintenant l’écartement fixe et produire une trace visible (rPi1), enfin tracer le segment résultat du pivotement (rPi2 + ΣS). On identifie des assimilations et des accommodations entre les schèmes d’utilisation d’un instrument à l’autre. Dans chaque schème d’utilisation pour pivoter un segment, dans l’environnement numérique ou dans l’environnement papier-crayon, il faut distinguer : les extrémités du segment ; les branches du compas. Dans chaque schème il faut pivoter : le segment ; le compas. Lors de l’utilisation du compas matériel des accommodations sont nécessaires : il est essentiel de maintenir l’écartement du compas matériel fixe (la permanence des longueurs n’est pas automatique); le compas produit une trace visible, trace de l’extrémité du segment qui pivote ; le segment initial ne pivotant pas il faut tracer le segment résultat du pivotement.

Une conception 1D du triangle incluse dans la stratégie gagnante

La stratégie ligne brisée, stratégie gagnante de l’environnement numérique, est encore une stratégie efficace pour construire un triangle dans l’environnement papier-crayon. Tracer une ligne brisée constituée des trois segments puis pivoter les segments extrêmes de la ligne brisée à l’aide du compas (Figure 9) permet d’apprendre la construction du triangle à la règle et au compas sans aller jusqu’à la conceptualisation du point. Cette stratégie, d’une part provoque une nouvelle genèse instrumentale du compas pour pivoter un segment entre ses branches et, d’autre part, induit une conception 1D du triangle. La conception triangle-1D-ligne brisée : un triangle est une ligne brisée fermée de trois segments, permet de résoudre le problème de construction du triangle ainsi que le problème d’existence ou non du triangle (Figure 9). Ce dernier problème ne pouvait être résolu avec une conception triangle-2D. La stratégie ligne brisée est donc une stratégie porteuse d’apprentissage. C’est une première étape dans la déconstruction dimensionnelle du triangle 2D au triangle 1D. Elle est associée à une conception 1D du triangle qui apporte une structure de contrôle nouvelle sur l’existence ou non du triangle par rapport à la conception triangle-2D.

Les cercles sous-jacents à la construction du triangle

Les deux dernières phases de la situation n'ayant pas été présentées lors du séminaire de l'ARDM, elles ne sont décrites ici que succinctement. Le second cahier informatisé, «Construire des triangles», a pour objectif d'amener les cercles sous-jacents à la construction du triangle. La construction de cercles doit être la stratégie gagnante efficace pour résoudre le problème. La technologie Cabri Elem permet de mettre à la disposition de l'utilisateur certains outils de géométrie dynamique bien choisis. Cette opportunité est utilisée pour contraindre l'utilisation de l'outil cercle dans les stratégies. En effet, dans ce second cahier informatisé, c'est par un jeu sur les outils disponibles que le cercle devient l'outil de la situation. Dans un premier temps, l'outil cercle est utilisé pour vérifier si une ligne brisée peut-être le contour d'un triangle ou non. D'outil pour vérifier, il devient ensuite outil pour produire. Dans un second temps, il s'agit d'utiliser l'outil cercle pour déterminer le troisième sommet du triangle. La situation se termine par une deuxième activité papier-crayon mobilisant le compas matériel dans la construction de triangles. Cette deuxième activité papier-crayon consiste à tracer si cela est possible, des triangles dont les longueurs des côtés sont données par leurs mesures. Cette activité marque la fin de la situation et permet de faire un bilan des apprentissages menés à bien grâce à la mobilisation des artefacts numériques articulés au compas matériel.

IV. EXPERIMENTATIONS ET RESULTATS

1. Instrument et conception deux états d'équilibre du système [sujet-milieu] mis en relation

La conceptualisation en termes de genèses de conceptions et de parcours de conceptions est analysée grâce au modèle cK¢ de Balacheff. Dans cette étude ce modèle permet de relier instrumentation et conceptualisation et de caractériser les connaissances liées à l'émergence d'un instrument. Une conception n'est pas une sous partie, un zoom des connaissances implicites sur lesquelles repose l'opérationnalité des schèmes d'utilisation d'un instrument. C'est une ré-ouverture, une mise en relation. Instrument et conception sont deux états d'équilibre du système [sujet-milieu] « réversibles » (Figure 10).

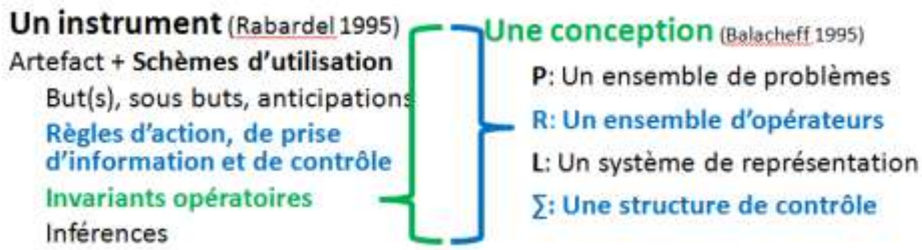


Figure 10 : Une dualité « réversible » entre instrument et conception.

D'un côté, les schèmes d'utilisation d'un instrument reposent sur des connaissances implicites caractérisées en conceptions. De l'autre côté, les problèmes sur lesquels une conception est opératoire incitent à la mobilisation des instruments. Les opérateurs qui permettent la résolution des problèmes et les contrôles qui assurent la non contradiction de la conception comprennent des règles d'action et de contrôle sur les artefacts.

2. Une conception 1D du triangle qui résulte du duo d'artefacts en situation

L'analyse de 34 productions d'élèves de la dernière année d'expérimentation (les 34 élèves pour lesquels des captures vidéo des quatre phases de la situation étaient disponibles) a permis d'identifier les effets du duo d'artefacts sur les apprentissages. Le duo d'artefacts, déplacement par rotation et compas matériel, mobilisé dans la situation permet à 31 élèves sur 34 de mettre en œuvre la construction d'un triangle de longueurs des côtés données à la règle et au compas (Figure 11).

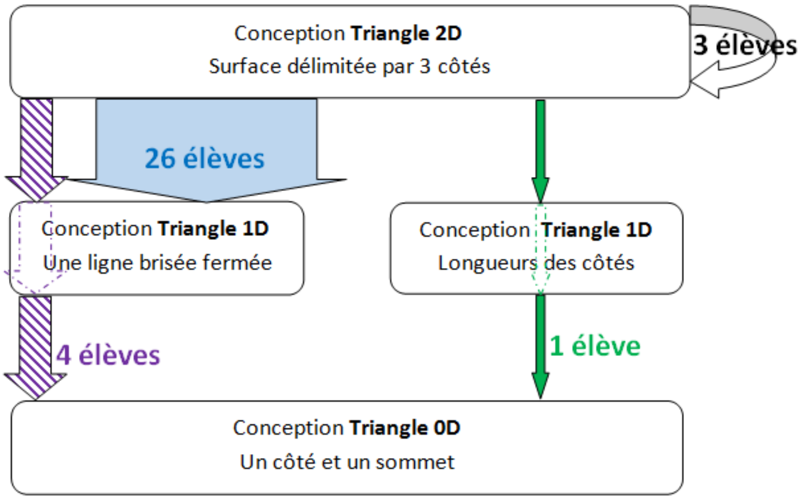


Figure 11 : Une évolution des conceptions du triangle du 2D→1D→0D.

Dès la première page du premier cahier informatisé on observe des interactions des élèves avec les segments numériques afin de les déplacer. Les élèves voudraient pouvoir pivoter les deux extrémités de chaque segment. Dans un premier temps l'extrémité ronde est attrapée et le pointeur est déplacé dans un mouvement circulaire. Dans un second temps le double déplacement des segments est appréhendé ; l'élève comprend que seule une action sur l'extrémité cruciforme permet de pivoter le segment. La stratégie ligne brisée apparait comme la stratégie gagnante efficace pour former un triangle dans l'environnement numérique constitué par le premier cahier informatisé. Elle est transposée dans l'environnement papier-crayon (Figure 9) par 30 élèves sur 34 (Figure 11). Cette stratégie provoque une nouvelle genèse instrumentale du compas utilisé pour pivoter un segment. Les captures vidéo permettent de relever le discours de Luna : *« La ligne brisée ça nous aide parce qu'avant on savait pas qu'il fallait utiliser le compas pour tracer un triangle »*.

Un triangle en tant que ligne brisée fermée est une nouvelle conception 1D du triangle qui résulte du duo d'artefacts en situation. La ligne brisée constitue une étape de dimension 1 dans la déconstruction dimensionnelle du triangle qui n'oblige pas, dans un premier temps, à la conceptualisation du point dans la construction du triangle à la règle et au compas. L'analyse des 34 productions fait aussi ressortir une autre conception triangle 1D-longueurs des côtés. Cette conception permet de résoudre le problème d'existence ou non du triangle par comparaison de la somme des petites longueurs à la plus grande, mais ne permet de résoudre le problème de construction du triangle à la règle et au compas. Enfin on observe que 5 élèves construisent le triangle à la règle et au compas sans le tracé intermédiaire de la ligne brisée. Ces élèves ont donc développé une conception du triangle intégrant le 0D.

3. Des parcours d'instruments et de conceptions du triangle

Des parcours individuels d'instruments et de conceptions du triangle ont été réalisés pour chacun des 34 élèves, à partir de l'identification des opérateurs (r) et contrôles (Σ) réellement mobilisés. Par exemple, le travail d'un élève conduit aux parcours de la Figure 12. Dans le premier cahier informatisé, cet élève élabore un instrument déplacement par rotation pour pivoter un segment puis, dans la première activité papier-crayon il mobilise le compas matériel comme instrument pour pivoter un segment. Les tâches proposées dans le second cahier informatisé l'amène à mobiliser le cercle de la géométrie dynamique, d'une part pour pivoter les segments extrêmes d'une ligne brisée et d'autre part, pour identifier une distance et déterminer le troisième sommet du triangle. De retour dans l'environnement papier-crayon dans la quatrième phase de la situation, il effectue la construction du triangle à l'aide du tracé intermédiaire de la ligne brisée. Il mobilise à nouveau l'instrument compas pour pivoter un segment. Cet élève a donc clairement développé une conception triangle-1D-ligne brisée avec un passage « furtif » par une conception triangle-0D dans le second cahier informatisé. Cette conception triangle-0D nécessite encore d'être consolidée.

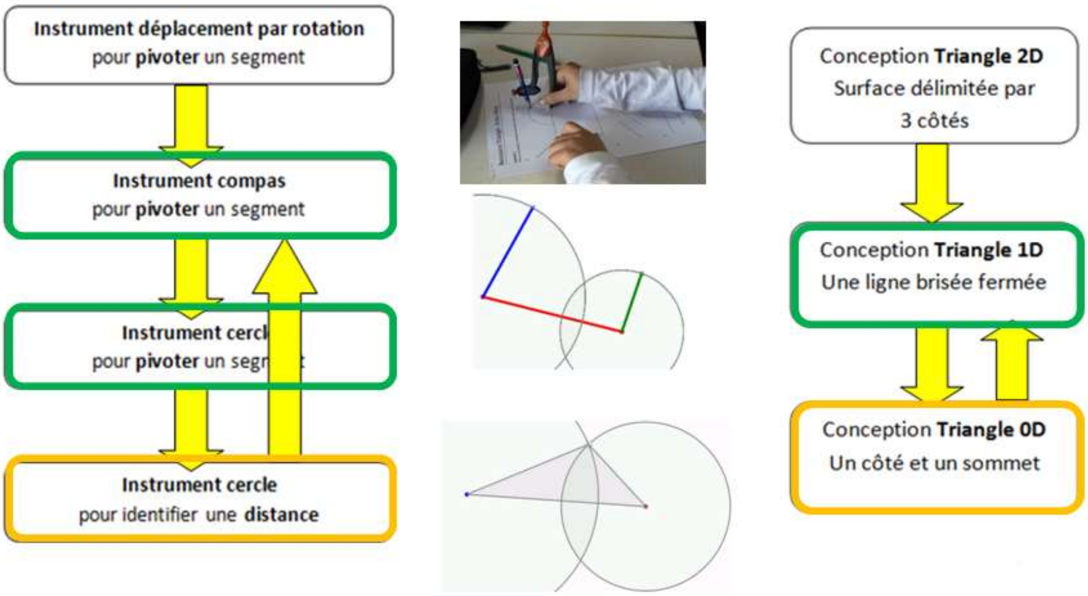


Figure 12 : Les parcours d'instruments et de conceptions du triangle d'un élève.

Les limites de la situation : faire évoluer les conceptions sur le cercle

Un des enjeux de ce travail était d'amener le cercle, objet mathématique, dans la construction du triangle et de faire évoluer les conceptions des élèves sur le cercle. L'instrument compas pour pivoter un segment entre ses branches devrait être un moyen de développer une conception du cercle comme la trajectoire de l'extrémité d'un segment qui pivote. En outre, le cercle de la géométrie dynamique devait amener le cercle objet mathématique comme outil pour identifier une distance. Les expérimentations n'ont pas permis de pouvoir caractériser les conceptions du cercle engagées par les élèves. Deux hypothèses peuvent être formulées pour l'expliquer : d'une part, la situation ne problématise pas le cercle et d'autre part, utiliser l'outil cercle de la géométrie dynamique nécessite une identification du centre et du rayon du cercle ce qui implique une déconstruction dimensionnelle du cercle en son rayon 1D et en son centre 0D difficile à mettre en œuvre par les élèves de l'école primaire.

V. CONCLUSION

L'objet de cette recherche était d'étudier l'introduction des technologies numériques comme environnement complémentaire à des activités papier-crayon pratiquées dans des situations ordinaires de classe. A partir d'un apprentissage du cycle 3, le problème de la construction du triangle à la règle et au compas, les éléments caractéristiques à la composition d'un duo d'artefacts numérique et matériel et son incidence sur les apprentissages ont été illustrés. Afin de favoriser la connaissance individuelle des élèves, les deux caractéristiques principales d'un duo d'artefacts numérique et matériel, sont d'une part d'être sollicité au sein d'une situation didactique et d'autre part, que les artefacts numérique et matériel s'enrichissent l'un l'autre. Un duo d'artefacts en situation engendre des genèses instrumentales associées qui conduisent en particulier à une genèse instrumentale relative à l'artefact matériel. En outre, un duo d'artefacts en situation rend possible la réitération d'expériences en faisant varier les contraintes au cours de l'alternance des actions instrumentées numériques et matérielles et ainsi favorise l'émergence et la transformation des connaissances des élèves. L'exemple du duo d'artefacts composé à partir du problème de la construction du triangle à la règle et au compas, met en évidence comment l'articulation entre des manipulations dans un environnement de géométrie dynamique et l'utilisation du compas matériel permet aux élèves d'élaborer un nouvel instrument compas pour pivoter un segment. De plus le duo d'artefacts conduit à l'élaboration de stratégies porteuses d'apprentissage. La stratégie ligne brisée, qui consiste à former une ligne brisée de trois segments et à faire pivoter les segments extrêmes, stratégie efficace dans l'environnement numérique et dans l'environnement papier-crayon, permet de mettre en œuvre une déconstruction dimensionnelle du triangle et participe à l'élaboration d'une conception 1D du triangle comme une ligne brisée fermée. Le duo d'artefacts en situation est donc une valeur ajoutée au compas matériel qui aide à franchir l'obstacle de la règle graduée et à induire la pertinence géométrique du compas dans la construction du triangle et qui participe à l'élaboration et à l'évolution des connaissances des élèves sur le triangle.

Cette recherche montre qu'il est possible de faire de la géométrie 1D sans nécessairement aller jusqu'à la conceptualisation du point à l'école primaire. Elle ouvre ainsi de nouvelles perspectives de recherche. Il pourrait en effet être intéressant de prolonger la réflexion en composant d'autres duos d'artefacts pour la conceptualisation 1D d'autres figures géométriques usuelles. D'autres duos d'artefacts pourraient aussi être envisagés pour observer la conceptualisation des objets de base de la géométrie (le cercle, le segment, la droite, le point) en relation avec les instruments qui permettent de les construire.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ARTIGUE, M. (2008). L'influence des logiciels sur l'enseignement des mathématiques, contenus et pratiques. *Actes du séminaire DGESCO de février 2007*.

BALACHEFF, N. (1995). Conception, connaissance et concept. In Denise Grenier (Ed.) *Didactique et technologies cognitives en mathématiques, séminaire 1994-1995* (pp. 219–244). Grenoble : Université Joseph Fourier.

BALACHEFF, N. (2013). cK¢, a model to reason on learners' conceptions. In M. V. Martinez & A. Castro Superfine (Eds.) (pp. 2–15). Chicago IL, USA. Retrieved from https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00853856

BROUSSEAU, G. (1998). *La théorie des situations didactiques*. Grenoble : La pensée Sauvage.

BRUILLARD, E. & VIVET, M. (1994). Concevoir des EIAO pour des situations scolaires. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(1.2), 275–304.

COLLINS, A., JOSEPH, D. & BIELACZYC, K. (2004). Design Research: Theoretical and Methodological Issues. *Journal of the Learning Sciences, 13*(1), 15–42. https://doi.org/10.1207/s15327809jls1301_2

DRIJVERS, P., BALL, L., BARZEL, B., HEID, M. K., CAO, Y., & MASCHIETTO, M. (2016). *Uses of technology in lower secondary mathematics education; A concise topical survey*. New York: Springer. Retrieved from http://link.springer.com/10.1007/978-3-319-33666-4

DUVAL, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *10*, 5–55.

DUVAL, R., & GODIN, M. (2005). Les changements de regard nécessaires sur les figures. *Grand N*, *76*, 7–27.

GUEUDET, G. BUENO-RAVEL, L. & POISARD, C. (2014). Teaching Mathematics with Technologies at Kindergarten: Resources and Orchestrations. In A. Clark-Wilson, O. Robutti & N. Sinclair (Eds.), *The Mathematics Teacher in the Digital Era* (Vol. 2, pp. 213–240). Springer.

HOUDEMENT, C. (2007). A la recherche d'une cohérence entre géométrie de l'école et géométrie du collège. *Repères IREM*, *67*, 69–84.

HOYLES, C. & LAGRANGE, J.-B. (Eds.). (2010). *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain* (Vol. 13). Boston, MA: Springer US. Retrieved from http://link.springer.com/10.1007/978-1-4419-0146-0

LABORDE, C., KYNIGOS, C., HOLLEBRANDS, K., STRÄßER, R., GUTIERREZ, A. & BOERO, P. (2006). Teaching and learning geometry with technology. In *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, Present and Future* (pp. 275–304). Rotterdam: Sense Publishers.

LABORDE, C. & LABORDE, J.-M. (2014). Dynamic and Tangible Representations in Mathematics Education. In S. Rezat, M. Hattermann & A. Peter-Koop (Eds.), *Transformation - A Fundamental Idea of Mathematics Education* (pp. 187–202). New York, NY: Springer New York. Retrieved from http://link.springer.com/10.1007/978-1-4614-3489-4_10

MASCHIETTO, M. & SOURY-LAVERGNE, S. (2013). Designing a duo of material and digital artifacts: the pascaline and Cabri Elem e-books in primary school mathematics. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *45*(7), 959–971. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0533-3

MOYER-PACKENHAM, P. S. (Ed.). (2016). *International Perspectives on Teaching and Learning Mathematics with Virtual Manipulatives* (Vol. 7). Cham: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-32718-1

PERRIN-GLORIAN, M.-J. & GODIN, M. (2014). De la reproduction de figures géométriques avec des instruments vers leur caractérisation par des énoncés. *Math-Ecole*, *222*, 28–38.

PERRIN-GLORIAN, M.-J., MATHE, A.-C. & LECLERCQ, R. (2013). Comment peut-on penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 a 15 ans ? *Repères-IREM*, *90*, 5–41.

RABARDEL, P. (1995). *Les hommes & les technologies : approche cognitive des instruments contemporains*. Paris France: Armand Colin.

SINCLAIR, N. & BACCAGLINI-FRANCK, A. (2015). Digital technologies in the early primary school classroom. In *Handbook of International Research in Mathematics Education: Third Edition* (pp. 662–686). Lyn D. English; David Kirshner.

SOURY-LAVERGNE, S. & MASCHIETTO, M. (2015). Articulation of spatial and geometrical knowledge in problem solving with technology at primary school. *ZDM*, *47*(3), 435–449. https://doi.org/10.1007/s11858-015-0694-3

TROUCHE, L. (2005). Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques : nécéssité des orchestrations. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *25*, 91–138.

VERGNAUD, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *10*(2.3), 133–170.

VERGNAUD, G. (1996). Au fond de l'action, la conceptualisation. In J-M, Barbier (pp.275-292). *Savoirs théoriques et savoirs d'action.* Paris: Presses Universitaire de France.

VOLTOLINI, A. (2014). Un duo d'artefacts virtuel et matériel pour apprendre à construire un triangle à la règle et au compas. *Grand N*, *94*, 25–46.

VOLTOLINI, A. (2017). *Duos d'artefacts matériel et numérique pour l'apprentissage de la géométrie au cycle 3*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Lyon, Lyon France.

LE TRAVAIL HORS LA CLASSE DE COLLEGIENS : LE CAS DES EQUATIONS

Stéphane **SIREJACOB**

LDAR, Université Paris Diderot 7

stephanesirejacob@hotmail.fr

Résumé

Cet article synthétise notre travail de thèse (Sirejacob, 2017) et s'articule autour de deux axes majeurs : d'une part, l'étude personnelle hors la classe de collégiens, sujet d'actualité peu abordé en didactique des mathématiques ; d'autre part, l'enseignement des équations du premier degré à une inconnue en collège, thème agrégeant plusieurs notions d'algèbre élémentaire et source de difficultés pour les élèves. Dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1999), nous réiterrogeons ces difficultés d'un point de vue institutionnel : nous faisons l'hypothèse que certains besoins d'apprentissages, tant relatifs aux gestes d'étude hors la classe que disciplinaires (équations), sont implicitement laissés à la charge des élèves ou ignorés de l'institution (Castela, 2008), alors que ces apprentissages sont nécessaires à la construction d'un rapport personnel idoine aux équations. En appui sur une organisation mathématique épistémologique de référence (Bosch et Gascon, 2005) relative aux équations du premier degré et sur une synthèse de travaux de recherche sur l'étude personnelle, nous construisons un modèle de l'étude personnelle et analysons les effets de la mise en œuvre d'un Parcours d'Etude et de Recherche sur les apprentissages de collégiens.

Mots clés

Travail hors la classe, travail personnel, équations

I. ENJEUX ET QUESTIONS INITIALES SUR LE TRAVAIL HORS LA CLASSE

1. Un travail hors la classe nécessaire aux apprentissages et pourtant peu explicitement organisé par l'institution

Les acteurs du système éducatif considèrent l'étude personnelle hors la classe comme un déterminant de la réussite scolaire. Celle-ci est fréquemment décrite en termes de manque voire d'inexistence pour expliquer certains échecs. La nécessité de l'accomplissement de cette étude personnelle provient de la poursuite de deux objectifs : d'une part, faire rencontrer en classe à tous les élèves une liste d'objets de savoirs du programme officiel dans un temps limité et incompressible, d'autre part provoquer les apprentissages de tous les élèves alors que ces derniers les construisent à des vitesses différentes avec des besoins bien distincts. Il existe ainsi une tension entre l'avancée du temps didactique, c'est-à-dire le temps « officiel » rythmé par la liste de savoirs à rencontrer, et l'avancée du temps praxique, c'est-à-dire le temps nécessaire aux élèves pour construire les apprentissages en jeu dans l'ensemble des tâches qu'ils rencontrent dans leur parcours scolaire (Castela, 2007, 2008).

Les élèves qui ont le plus besoin d'accomplir une étude personnelle hors la classe sont ceux pour qui l'avancée du temps didactique n'a pas coïncidé en classe avec celle du temps nécessaire aux apprentissages. Or bien souvent, il s'agit d'élèves dont les besoins d'apprentissages sont les plus importants, et qui sont le moins à même d'assumer l'autonomie nécessaire pour accomplir cette étude personnelle.

Les textes officiels, dans leur proposition de dispositifs divers tels que l'aide aux devoirs ou l'accompagnement dit personnalisé, semblent très peu prendre en compte les spécificités des mathématiques pour en organiser l'étude personnelle et se limitent la plupart du temps à des préconisations générales d'ordre méthodologique.

2. Contexte de recherche et questions initiales

Cette dernière remarque justifie en partie notre choix de spécifier notre travail sur un objet de savoir, les équations du premier degré à une inconnue, nos recherches s'inscrivant dans le champ de la didactique des mathématiques.

Le choix de centrer notre travail sur les équations du premier degré s'explique aussi par le fait que nos recherches se placent dans la continuité de recherches antérieures relatives aux expressions algébriques, entres autres celles de Grugeon-Allys, Chenevotot-Quentin et Delozanne (2012) et Pilet (2012).

De plus, les équations, parce qu'elles agrègent plusieurs notions mathématiques anciennes et nouvelles et sont donc susceptibles d'accentuer les tensions entre avancées respectives des temps didactique et praxique, constituent un thème particulièrement intéressant pour spécifier nos recherches.

Nos questions initiales sont les suivantes : en quoi consiste l'étude personnelle hors la classe ? Quelle explicitation auprès des élèves et quelle organisation en classe sont réalisées par les enseignants ?

Nous précisons dans ce qui suit les cadres théoriques et les principaux éléments méthodologiques utilisés pour traiter et faire évoluer ces questions (section II), puis nous présentons un modèle de l'étude personnelle (section III) et une organisation mathématique épistémologique de référence relative aux équations du premier degré (section IV), points d'appui d'une construction et d'une mise en œuvre d'un Parcours d'Etude et de Recherche (section V). Nous concluons avec notamment quelques éléments de perspective (section VI).

II. Cadres theoriques, problematique et premiers elements methodologiques

1. Une approche multidimensionnelle

Nous avons réinterrogé et fait évoluer nos questions initiales au prisme d'une approche multidimensionnelle dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1999) pour prendre en compte le savoir mathématique et sa transposition didactique dans diverses institutions, ainsi que pour disposer d'un modèle de l'activité mathématique et de l'organisation didactique du savoir.

Rappelons brièvement que dans ce cadre théorique, on suppose que l'activité mathématique d'un élève procède de *praxéologies* : l'élève doit réaliser des *tâches* mathématiques relevant de *types de tâches*, à l'aide de méthodes ou de moyens appelés *techniques*, techniques justifiées par des discours rationnels appelés *technologies*, eux-mêmes justifiés à un niveau supérieur par des *théories*. Nous illustrerons ceci par des exemples dans la suite.

Nous avons également eu recours à un cadre théorique secondaire, la théorie des situations didactiques, pour pouvoir obtenir une autre granularité dans nos analyses lorsque nous en avons eu besoin.

2. Hypothèses de travail et problématique de recherche

Les deux principales hypothèses de travail que nous posons sont les suivantes : le décalage entre avancée du temps didactique et avancée du temps praxique, et l'existence d'enjeux d'apprentissages non pris en charge explicitement par l'institution, sont potentiellement à l'origine de la construction par les élèves de rapports personnels aux équations non idoines.

Sous ces hypothèses, nous formulons notre problématique ainsi : comment l'enseignant peut-il organiser l'étude des équations en classe de quatrième pour favoriser une évolution des rapports personnels des élèves aux équations vers des rapports idoines ? Quels gestes d'aide à l'étude peut-il accomplir pour les accompagner hors la classe à réaliser une étude personnelle favorisant les apprentissages ?

3. Hypothèses de recherche et éléments méthodologiques

Nous émettons deux hypothèses de recherche principales. En classe de quatrième en France (et désormais en fin de cycle 4 dans les programmes actuels), nous supposons que la construction par les élèves de rapports personnels idoines aux équations du premier degré est favorisée d'une part par la mise en œuvre d'une certaine organisation explicite de l'étude personnelle en classe et hors classe par l'enseignant ; d'autre part par la mise en place d'un Parcours d'Etude et de Recherche sur les équations prenant en compte ces besoins, en appui sur les principaux éléments épistémologiques relatifs aux équations.

Pour traquer les enjeux d'apprentissages non explicitement pris en charge par l'institution autour de l'étude personnelle et des équations, nous avons construit un modèle de l'étude personnelle (section III) et une organisation mathématique épistémologique de référence relative aux équations (section IV), que nous avons opérationnalisés pour analyser les savoirs à enseigner dans les programmes et les manuels, et les savoirs enseignés et appris en classe et hors classe, afin de repérer d'éventuels déficits praxéologiques.

Pour faire évoluer les rapports personnels des élèves aux équations vers des rapports idoines, nous avons ensuite construit et mis en œuvre un Parcours d'Etude et de Recherche dans une classe de quatrième d'un collège d'un réseau d'éducation prioritaire (section V).

III. Un modele de l'etude personnelle hors la classe

1. Des travaux existants prenant peu en compte les spécificités d'un secteur d'étude et le rôle de l'institution

À partir d'une synthèse de travaux sur l'étude personnelle (entre autres : Milhaud 1998 ; Esmenjaud-Genestou, 2005 et 2006 ; Castela, 2002 et 2007 ; Félix, 2004 ; Rayou, 2008 ; Blochs, 2012 ; Farah, 2015) nous avons pu repérer plusieurs obstacles relatifs à l'organisation de cette dernière. En particulier, un obstacle majeur est la difficulté à définir explicitement en quoi consiste l'étude personnelle hors la classe et en particulier en mathématiques, comme nous l'avons déjà souligné plus haut. Les élèves, ne saisissant pas de contrat didactique explicite autour de cette étude personnelle, peuvent alors réaliser des gestes très variés. Certains travaux comme ceux de Félix (2004) ou Castela (2002) indiquent notamment que les élèves dits « en difficulté » accomplissent des gestes comme la simple relecture ou la mémorisation intensive et qui prennent peu en compte les spécificités de la discipline, tandis que les élèves dits « en réussite » parviennent à identifier des types de tâches et à leur associer des techniques et des technologies pour réaliser ces derniers, témoignant ainsi de connaissances sur le fonctionnement mathématique (Castela, 2000).

Dans la recension de travaux sur l'étude personnelle que nous avons réalisée, un faible nombre relevait de la didactique des mathématiques et prenait en compte les particularités de la discipline. Nous avons trouvé très peu de travaux qui simultanément mettent en relation les gestes enseignants avec les gestes des élèves, prennent en compte les spécificités de l'activité mathématique sur un thème donné et le rôle de l'institution dans l'organisation de l'étude. C'est pourquoi nous avons eu besoin d'élaborer un modèle de l'étude personnelle adapté à nos questions de recherche.

2. Une première étude exploratoire dans un collège REP

Eléments de contexte

Nous avons tout d'abord voulu vérifier expérimentalement les résultats des travaux de recherche sur l'étude personnelle, qui ne portaient pas simultanément et sur le collège et sur un thème donné.

Nous nous sommes rendu dans un collège d'un réseau d'éducation prioritaire. Nous avons filmé et nous sommes entretenu avec huit élèves en train d'accomplir leur étude personnelle hors la classe en mathématiques au cours d'une séquence sur le calcul d'expressions algébriques. Les deux enseignants avec qui nous avons travaillé ont eux-mêmes choisi les élèves interrogés selon une catégorisation classique, « bon », « moyen » et « en difficulté », suivant des critères non explicités.

Trois niveaux d'analyse pour l'étude exploratoire

Nous avons analysé les réponses selon trois niveaux. Un premier niveau porte sur les organisations mathématiques (abrégées OM par la suite) mobilisées par les élèves. Un deuxième niveau d'analyse est relatif aux gestes d'étude pour apprendre à construire et à articuler les OM. Enfin, suivant un troisième et dernier niveau d'analyse, nous avons cherché à mettre en relation les gestes d'étude des élèves avec les gestes d'aide à l'étude de leur professeur.

Les OM mobilisés par les élèves hors la classe

Nous donnons ici quelques exemples pour montrer comment nous faisons fonctionner la grille d'analyse précédemment décrite. Tous les prénoms ont été modifiés pour garantir l'anonymat des élèves et des enseignants.

Vincent, un élève dit « en difficulté », avait pour tâche hors la classe de développer une expression algébrique : $3 \times (a + 5)$. Voici ce qu'il a fait : « *J'ai fait trois fois… Enfin, a plus cinq… Donc ça fait cinq a fois trois. Donc du coup, ça fait quinze a.* » Autrement dit, Vincent a concaténé $a + 5$ en $5a$ avant de multiplier le tout par 5 pour finalement obtenir $15a$. Remarquons qu'en plus de cette réécriture incorrecte, Vincent n'explicite pas spontanément d'élément technologique pour justifier ses actions et qu'il ne contrôle pas son résultat, par exemple en s'appuyant sur la structure de l'expression ou en recourant à la substitution pour tester l'égalité $3 \times (a + 5) = 15a$.

Tamara, une élève dite « en réussite », parvient à réaliser correctement la même tâche que celle accomplie par Vincent : « *J'ai utilisé la distributivité. Ca fait… l'égalité… trois fois a plus trois fois cinq.* » Notons que Tamara justifie spontanément la technique employée par un discours technologique correct. Elle non plus toutefois ne vérifie pas la correction de son résultat.

De façon générale, sur les élèves interrogés, nous avons constaté que les élèves dits « en réussite » parvenaient à réaliser correctement les tâches et à expliciter des éléments de technique et de technologie, ce qui était moins le cas des élèves dits « en difficulté ». Nous avons également pu faire des premiers liens entre les OM enseignées en classe et celles mobilisées par les élèves hors la classe. Par exemple, nous avons noté tout à l'heure que les deux élèves ne contrôlaient pas leurs résultats ; nous relions cette observation au fait que leur enseignant n'avait pas, en classe, proposé de moyens de contrôle.

Les gestes pour apprendre à construire les OM accomplis par les élèves hors la classe

Voici une deuxième série d'exemples qui concernent le deuxième niveau d'analyse de notre grille. Nous avons posé aux élèves des questions toujours en lien avec les organisations mathématiques mais cette fois-ci sur la manière d'apprendre à les construire et à les articuler. L'une des questions portait sur les types de tâches que les élèves pensaient devoir affronter le jour de l'évaluation.

À la question « Qu'y aura-t-il comme type d'exercices le jour de l'évaluation ? », Marianne, une bonne élève, répond : « ***Réduire****. […] Il y a… je sais plus comment ça s'appelle, mais en gros, c'est l'****agrandir****. […]* ***Calculer*** *[…] Si c'est trois a, on va faire trois fois le nombre qui est donné.* » Marianne a été capable de nous donner une liste assez complète de types de tâches, accompagnée de surcroît d'exemples de tâches et d'une résolution correcte de ces tâches.

Géraldine, en revanche, qui est une élève dite « moyenne », a montré moins d'aisance à expliciter les types de tâches : « *Il y aura par exemple… euh… par exemple les x […]* ***faire les x*** *[…] il y aura par exemple les…* ***a égal à deux, a égal cinq*** ». Elle n'a su ni reconnaître la totalité des types de tâches lorsque nous lui en présentions, ni réaliser ces types de tâches.

Cette capacité à identifier des types de tâches, présentée comme un levier dans certains travaux de recherche en didactique (Castela 2000 ; Castela 2007 ; Esmenjaud-Genestoux, 2005 ; Milhaud, 1998), nous est apparue comme une nécessité première pour pouvoir accomplir d'autres gestes d'étude, comme celui de réguler ses propres besoins d'apprentissages en vue de préparer une évaluation. Tamara, la bonne élève que nous avons déjà rencontrée, nous a dit par exemple lors d'un entretien : « *Je fais un exercice sur la notion qu'on a vue. Donc* ***si on a vu six notions, ben je vais faire six exercices*** ». Ses camarades, dits « élèves moyens », se sont quant à eux entraînés sur des séries d'exercices sélectionnés de manière aléatoire, parfois en grand nombre. C'est le cas de Mehdi, élève « moyen » : « *Je prends* ***une file d'exercices*** *et je les suis, je les suis [...]* **au hasard**. *Je prends… par exemple, on va dire, j'ai l'exercice 31, je fais l'exercice 31 jusqu'à l'exercice 35.* » C'est aussi le cas d'Annabelle, élève « en difficulté », qui dit faire des exercices en les prenant « *au pif* ». La manière de travailler de ces élèves n'est donc ni économique ni ciblée sur des types de tâches précis.

Nous avons également pu repérer des différences flagrantes sur la manière « d'apprendre la leçon », injonction pédagogique générale souvent prononcée par les enseignants. Les « bons » élèves trouvaient peu d'intérêt à revenir sur la leçon (Tamara : « *je vois pas l'intérêt de réviser la leçon* ») tandis que ceux avec des besoins d'apprentissages plus forts se lançaient dans des efforts intenses de mémorisation (Mehdi : « *Apprendre [la leçon], pour moi,* ***c'est par cœur*** » ; Annabelle : « *Je* ***mémorise*** *[la leçon] [...] Je* ***mémorise*** *[les corrections d'exercices]* »).

Les observations que nous avons pu faire rejoignent donc finalement certains résultats de travaux de recherche sur l'étude personnelle. Nous avons relié la variabilité des gestes d'étude selon le profil des élèves aux implicites inhérents aux recommandations pédagogiques du type « apprendre », « relire » ou « réviser » émis par les enseignants.

3. Le modèle de l'étude personnelle

Cette première étude exploratoire nous a conduit à approfondir les analyses sur ces trois niveaux : analyse des praxéologies mathématiques mobilisées par les élèves, analyse de leurs gestes heuristiques, et mise en relation des gestes d'étude des élèves avec les gestes d'aide à l'étude des enseignants. Nous en arrivons ainsi à présenter le modèle de l'étude personnelle que nous avons élaboré au cours de nos recherches.

Définition de l'étude personnelle et des praxéologies d'étude

Dans ce modèle, l'étude personnelle relative à un objet de savoir est définie comme étant l'ensemble des gestes accomplis par l'élève dans une institution donnée pour construire les apprentissages mathématiques en vue d'établir un rapport personnel idoine à cet objet de savoir. Cette étude n'est pas obligatoirement explicitement organisée par l'institution alors qu'elle peut s'avérer nécessaire à l'établissement de rapports personnels idoines.

Nous avons également défini ce que nous avons appelé des *praxéologies d'étude*. Il s'agit de praxéologies non mathématiques au sens où elles ne portent pas sur le produit de l'activité mathématique mais plutôt sur son déroulement. Elles font référence à des gestes heuristiques, pour apprendre à construire, utiliser, articuler, situer les unes par rapport aux autres des organisations mathématiques.

En utilisant le terme de praxéologie, nous affirmons l'existence de techniques d'étude et d'un *logos* à leur sujet, que l'enseignant peut mettre en scène en classe à travers une organisation didactique explicite. La question est de savoir comment l'enseignant peut accompagner les élèves dans leur organisation de l'étude personnelle pour qu'ils développent des praxéologies d'étude favorisant une activité mathématique idoine.

Les praxéologies d'étude supposées favoriser une activité mathématique idoine

Avec cette définition de l'étude personnelle, nous considérons les injonctions du type « réviser », « revoir », « apprendre » comme relevant de praxéologies d'étude pédagogiques générales puisque ne donnant pas la primauté aux spécificités de la discipline. Nous leur opposons des praxéologies d'étude que nous supposons permettre une activité mathématique idoine, à savoir :

- identifier un type de tâches mathématiques ;
- mettre en relation un type de tâches avec une technique et une technologie ;
- situer et articuler des organisations mathématiques nouvelles et anciennes entre elles ;
- diagnostiquer puis réguler ses besoins d'apprentissages.

Si nous nous sommes risqué dans notre travail (Sirejacob, 2017) à proposer des techniques d'étude qui en l'état mériteraient des assises théoriques plus solides et des confirmations expérimentales, nous ne sommes pas prononcé sur les technologies d'étude. En effet, nous n'avons à ce jour pas connaissance de discours rationnels largement partagés dans la communauté enseignante sur le sujet.

Schéma du modèle de l'étude personnelle

Le schéma ci-dessous (figure 1) synthétise une partie de la complexité des phénomènes liés à l'étude personnelle que nous avons cherché à analyser. Dans ce schéma, l'étude personnelle hors la classe prend place dans un système didactique auxiliaire (SDA) piloté par le système didactique principal (SDP) classe (Chevallard, 2002). Nous supposons que la construction de certaines praxéologies d'étude en classe et la gestion didactique de l'enseignant favorise (ou non) l'émergence de conditions pour que cette étude soit accomplie de manière adéquate, et permet (ou non) à l'élève d'occuper des positions d'étudiant autonome dans le modèle de structuration du milieu (Margolinas, 2003 ; Castela, 2006).

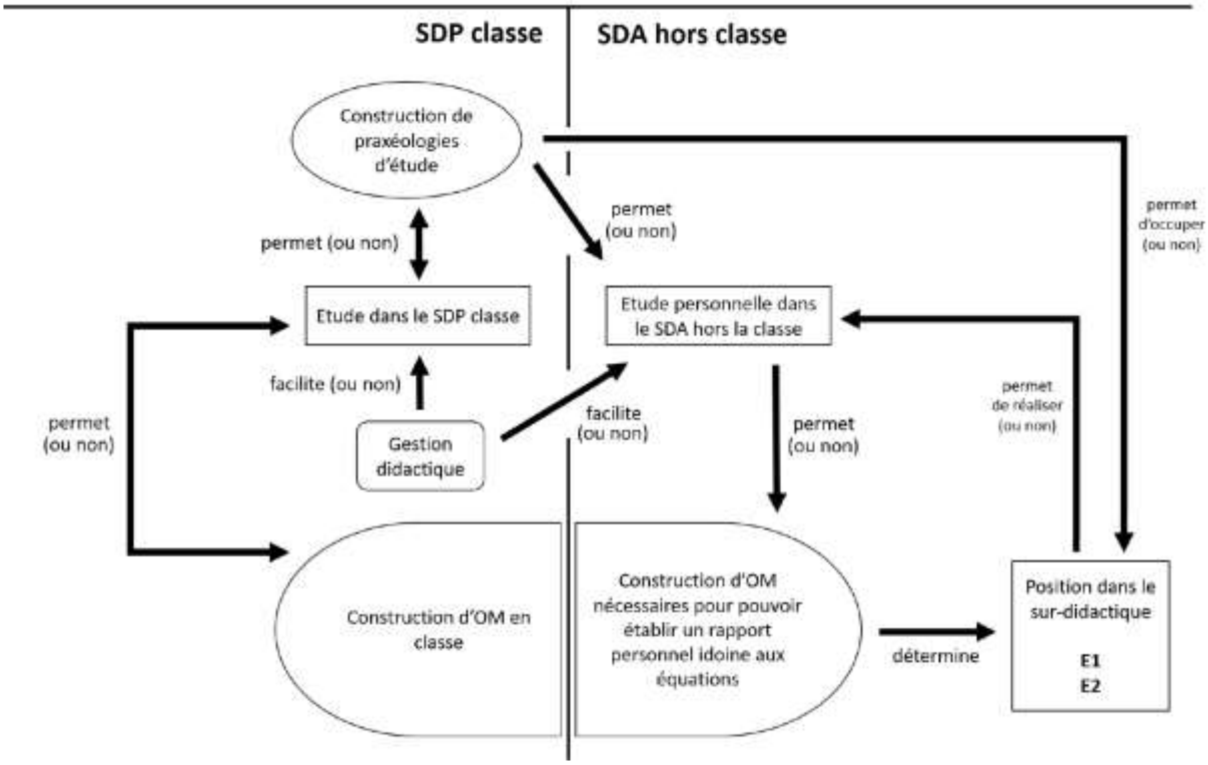


Figure 1 : Un modèle de l'étude personnelle hors la classe.

Opérationnalisation du modèle sur trois niveaux

Nous avons opérationnalisé le modèle de l'étude personnelle pour analyser cette dernière suivant les trois niveaux que nous avons déjà présentés (§ III. 2) mais que nous avons affinés.

À un premier niveau, nous comparons d'une part les OM travaillées en classe avec celles « visiblement » mobilisées par les élèves hors la classe, d'autre part les OM enseignées avec celles de l'OM épistémologique de référence sur les équations que nous présenterons plus bas

À un deuxième niveau, nous mettons en perspective d'une part les praxéologies d'étude développées en classe avec celles utilisées par les élèves hors la classe, d'autre part ces mêmes praxéologies d'étude avec celles dont nous avons supposées qu'elles favorisaient l'accomplissement d'une étude idoine.

À un troisième niveau, nous analysons la gestion didactique de l'enseignant. Comment ce dernier mène-t-il les phases de recherche en classe ? Comment prend-il en compte les techniques mobilisées par les élèves durant ces phases et celles de validation ? Quelle institutionnalisation est réalisée ? Porte-t-elle sur les OM mais aussi sur les praxéologies d'étude ?

Nous avons croisé chacun des trois niveaux d'analyse précédents avec les six moments de l'étude (Chevallard, 1998), c'est-à-dire les moments « incontournables » qui organise l'étude : première rencontre avec un type de tâches, exploration de ce type de tâches et élaboration d'une technique pour le résoudre, constitution de l'environnement technologico-théorique, travail de la technique, évaluation de cette technique.

Nous montrerons plus loin comment nous faisons opérer le modèle sur des exemples précis. Avant cela, nous présentons l'organisation mathématique épistémologique de référence relative aux équations du premier degré à une inconnue

IV. UNE ORGANISATION MATHEMATIQUE (OM) EPISTEMOLOGIQUE DE REFERENCE RELATIVE AUX EQUATIONS DU PREMIER DEGRE A UNE INCONNUE

1. Une OM construite à partir d'une approche anthropologique et d'une approche cognitive

Nous avons élaboré cette organisation de référence à partir d'une synthèse de travaux de recherche en didactique de l'algèbre sur les équations et en adoptant deux approches. La première, anthropologique (Bosch et Gascon, 2005 ; Chevallard, 1985, 1989, 1998 ; Gascon, 1994 ; Ruiz-Munzon, 2010), nous permet de situer la place et la fonction des équations dans les curricula et prend en compte les phénomènes transpositifs du savoir. À cette première approche, nous en coordonnons une seconde, cognitive (Coulange, 1998 ; Douady, 1986 ; Duval, 1993 ; Filloy, Puig et Rojano, 2008 ; Kieran, 2007 ; Sfard, 1991 ; Vergnaud, Cortes et Favre-Artigue, 1987), afin de déterminer les sources de signification des équations et les processus de conceptualisation des élèves liés à la génération et à la manipulation des équations.

Prenant place dans l'organisation mathématique globale algèbre, l'organisation mathématique épistémologique de référence relative aux équations du premier degré à une inconnue est une organisation mathématique régionale qui intègre et articule des OM locales relativement complètes. Chacune de ces dernières est pilotée par des éléments technologico-théoriques. Nous allons seulement présenter en détail les deux premières organisations (se reporter à Sirejacob (2017) pour la troisième).

OM1 : mise en équation

La première organisation mathématique locale (OM1) porte sur la mise en équation. Elle fait intervenir les activités de formation, de représentation et de coordination inter-registres de représentation sémiotique et fournit un environnement technologico-théorique pour justifier les techniques de production, de traduction et d'association de relations entre grandeurs données dans des registres différents. D'après la synthèse de travaux de didactique de l'algèbre que nous avons réalisée et en particulier selon les travaux de Ruiz-Munzon (2010), les équations se situent à la deuxième étape d'un processus de reconstruction de l'algèbre à partir de programmes de calcul : elles sont utiles pour répondre au type de tâches problématique « deux programmes de calcul étant donnés, quelles sont toutes les valeurs d'entrée possibles telles que les résultats finaux des deux programmes soient égaux ? ». Les programmes de calcul sont paramétrés par des valeurs de variables didactiques telles que leur égalisation conduit à la production d'une équation algébrique non arithmétique, c'est-à-dire une équation de la forme $ax + b = c$ d'inconnue x et dont la résolution peut se faire en inversant les opérations (remontée arithmétique). Cette production nécessite d'effectuer des changements de registres de représentation sémiotique. D'après les travaux de Duval (1993), les conversions sémiotiques et la coordination inter-registres sont sources de signification pour l'élève. La mise en équation, type de tâches relevant de l'algèbre, s'accompagne de plus de ruptures épistémologiques avec l'arithmétique : l'égalité change de statut et devient une fonction propositionnelle dont on interroge la valeur de vérité, et les opérations peuvent demeurer suspendues.

OM2 : Résolution algébrique

La deuxième organisation mathématique locale (OM2) porte sur les transformations algébriques à opérer sur une équation en vue d'en trouver l'ensemble des solutions. Elle ne comprend que des types de tâches nécessitant le recours à une technique de résolution algébrique, puisque l'OM de référence est une OM régionale prenant place au sein de l'OM globale algèbre. La mise en équation d'un problème d'égalisation de programmes de calcul « bien » paramétré conduit à une équation qu'il faut traiter dans le registre des écritures algébriques à l'aide d'une technique de résolution algébrique. En effet, l'inconnue étant présente dans les deux membres, la technique par remontée arithmétique est inopérante, et la solution à trouver étant fractionnaire non décimale, la technique par essais/erreurs est mise en échec elle aussi. La résolution de cette équation nécessite une coupure didactique (Filloy, Puig & Rojano, 2008), les opérations devant porter sur l'inconnue et obéissant à de nouveaux discours technologiques liés à l'application des propriétés de conservation de l'égalité.

OM3 : Structure et solutions

La troisième et dernière OM locale (OM3) est liée à la structure des équations et à leurs solutions. Elle est pilotée par des éléments technologico-théoriques justifiant les techniques de substitution pour tester une solution ou encore de reconnaissance de structure pour guider la résolution algébrique.

2. Une OM épistémologique opérationnelle pour analyser les OM à enseigner relatives aux équations dans les programmes et les manuels

Nous avons opérationnalisé l'organisation mathématique épistémologique de référence pour pouvoir réaliser une analyse praxéologique des programmes officiels et des manuels scolaires (l'analyse détaillée peut être trouvée dans Sirejacob (2016)). En la comparant aux organisations mathématiques à enseigner, nous interprétons les écarts comme d'éventuels déficits praxéologiques susceptibles d'être à l'origine de la construction de rapports personnels aux équations non idoines.

L'analyse praxéologique des programmes indique que les directives générales sont imprécises concernant les variables didactiques des problèmes de mise en équation à proposer aux élèves pour motiver le recours aux équations. Certains types de tâches, comme la reconnaissance de la structure d'une équation, fondamentale pour guider l'intelligence des calculs dans la résolution algébrique, et qui relève de la troisième organisation mathématique locale, sont peu présents. De plus, les injonctions relatives au socle commun affaiblissent potentiellement les raisons d'être des équations en rendant dispensables ces dernières dans la résolution de certaines tâches. Les documents d'accompagnement comblent en partie ces déficits praxéologiques mais, de par leur caractère marginal, nous en interrogeons l'utilisation qui en est effectivement faite par les enseignants.

Concernant l'analyse de manuels, nous avons cherché à déterminer le poids de chaque organisation mathématique locale dans quatre manuels : Horizon $4^{\text{ème}}$ (2011, Ed. Didier), Myriade $4^{\text{ème}}$ (2011, Ed. Bordas), Phare $4^{\text{ème}}$ (2011, Ed. Hachette), Transmath $4^{\text{ème}}$ (2011, Ed. Nathan). Nous avons identifié les types de tâches présents et ceux qui le sont moins, et les discours technologiques utilisés.

Au niveau du poids des organisations mathématiques locales, celle sur la résolution algébrique est la plus présente dans tous les manuels (entre 53% et 65% des OM locales travaillées). Le type de tâches « résoudre algébriquement une équation du premier degré » est le plus travaillé. En revanche, la reconnaissance de la structure des équations, type de tâches de la troisième organisation mathématique locale, est quasiment absente, ce qui fait écho à sa faible présence dans les programmes officiels.

Pour ce qui est des problèmes donnés à résoudre aux élèves, près de la moitié d'entre eux peuvent être solutionnés à l'aide d'une technique non algébrique, c'est-à-dire une technique ne s'appuyant pas sur les propriétés de conservation de l'égalité, dans les quatre manuels. Nous interrogeons le choix des auteurs de proposer une si grande proportion de types de tâches ne motivant pas le recours à la technique de résolution algébrique et les effets sur les apprentissages des élèves qui persistent dans l'utilisation d'anciennes techniques arithmétiques ou par essais/erreurs.

V. Construction et mise en œuvre d'un parcours d'etude et de recherche relatif aux equations

Nous avons montré dans la section précédente qu'il existait des déficits praxéologiques portés par les savoirs didactiquement transposés dans les programmes et les manuels. À ces déficits, nous répondons par la proposition d'un Parcours d'Etude et de Recherche appuyé sur les principaux éléments de la référence épistémologique et intégrant les éléments supposés favoriser le développement de praxéologies d'étude adéquates.

1. Fondements théoriques du Parcours d'Etude et de Recherche

Nous articulons des outils de la théorie anthropologique du didactique et de la théorie des situations didactiques pour concevoir ce parcours d'étude et de recherche. Nous le balisons par des questions génératrices motivant la construction de complexes praxéologiques par un travail équilibré des trois organisations mathématiques locales de l'organisation épistémologique de référence et nous suggérons une organisation didactique explicite de l'étude en classe et hors la classe appuyée sur les moments didactiques. Les situations que nous proposons, avec des milieux riches, donnent des raisons d'être aux types de tâches, aux techniques et aux technologies mathématiques. Une partie de ces situations préexiste dans le champ de la recherche en didactique, notamment dans les travaux de Combier, Guillaume et Pressiat (1996) dans leur ouvrage *Au pied de la lettre.*

2. Un parcours en trois étapes

Nous avons structuré le Parcours d'Etude et de Recherche (abrégé PER dans la suite) en trois étapes.

La première étape motive la production d'une équation pour résoudre un problème de mise en équation à base de programme de calcul, suivant le processus d'algébrisation de Ruiz-Munzon (2010). Dans cette étape, le milieu contient un solveur d'équations qui prend temporairement en charge la résolution de l'équation. Les types de tâches travaillés relèvent principalement des OM locales OM1 et OM3 de l'OM épistémologique de référence.

La deuxième étape du PER donne des raisons d'être à la technique de résolution algébrique. La question génératrice de cette étape est : « comment trouver la valeur d'une variable x dans une égalité de la forme $ax+b=cx+d$? », les coefficients a,b,c,d étant « bien » choisis. L'objectif est de construire une technique fonctionnant quels que soient les coefficients a,b,c,d. Le milieu ne contient plus le solveur d'équations mais comporte un logiciel prenant en charge une partie des transformations algébriques à opérer sur l'équation. Dans cette étape, les types de tâches relèvent principalement de OM2 et OM3.

La troisième et dernière étape du PER concerne la résolution de problèmes algébriques divers, avec un jeu important sur les variables didactiques qui module la complexité de ces problèmes.

Dans un souci de renforcer les raisons d'être des OM relatives aux équations, nous avons proposé des tâches préparatoires avant les étapes du PER. Dans ces tâches est prolongé le moment du travail des techniques arithmétiques et par essais/erreurs et des OM relatives au numérique et aux expressions algébriques.

3. L'organisation didactique au sein du PER

Chaque étape du parcours voit s'opérer un cycle de moments de l'étude pour le principal type de tâches relatif aux équations travaillé. De manière fortement articulée avec le travail des OM, nous proposons des pistes pour faire développer des praxéologies d'étude aux élèves.

Par exemple, dans le schéma ci-après (figure 2), où nous nous situons à l'étape 1 du PER, les premiers moments didactiques correspondent à l'évaluation de techniques anciennes et à l'élaboration de la nouvelle technique de résolution algébrique. Il nous semble possible durant ces moments de faire travailler des techniques d'étude pour apprendre aux élèves à situer les nouvelles OM par rapport aux anciennes, ou encore pour identifier la nouvelle technique comme telle.

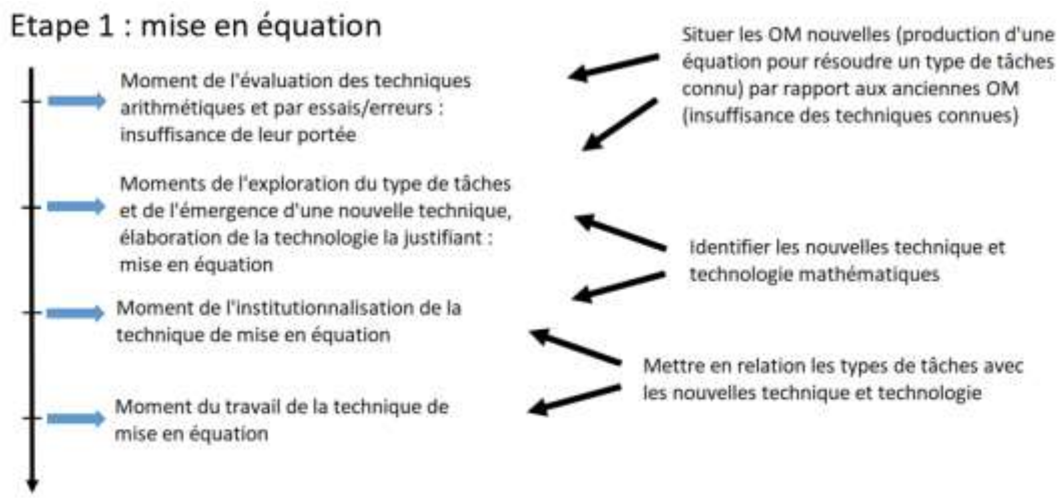


Figure 2 : Des articulations possibles entre OM et praxéologies d'étude à l'étape 1 du PER.

À titre d'illustration, un exemple de type de tâches mathématiques proposé à faire en autonomie à l'étape 2 du PER est présenté dans la figure 3 ci-après. Il s'agit dans cet exemple de résoudre des équations algébriques. Nous avons fait varier sur les valeurs des variables didactiques, avec l'explicitation ou non de signes multiplicatifs ou la présence ou non de produits parenthésés. À ce stade du PER, les élèves ont déjà plusieurs fois rencontré l'objet équations, en ont produites et en ont résolues. Nous nous situons dans le moment du travail de la technique de résolution algébrique. Il nous paraît donc possible pour l'enseignant de réaliser un travail sur quelques praxéologies d'étude : par exemple, il peut amener les élèves à identifier la tâche comme relevant d'une « résolution d'équation » à partir de la donnée de la consigne et des quatre équations en présence, et leur faire associer la technique de résolution algébrique. Au cours de la résolution des équations, il peut également leur faire remarquer en quoi les changements de variables didactiques – sans utiliser les termes de variables didactiques bien entendu – ont conduit à adapter certains éléments de la technique de résolution algébrique, en appui sur la reconnaissance de la structure des expressions en jeu. C'est alors l'occasion de situer les OM relatives aux expressions algébriques par rapport aux OM relatives aux équations et de mettre en avant leur articulation.

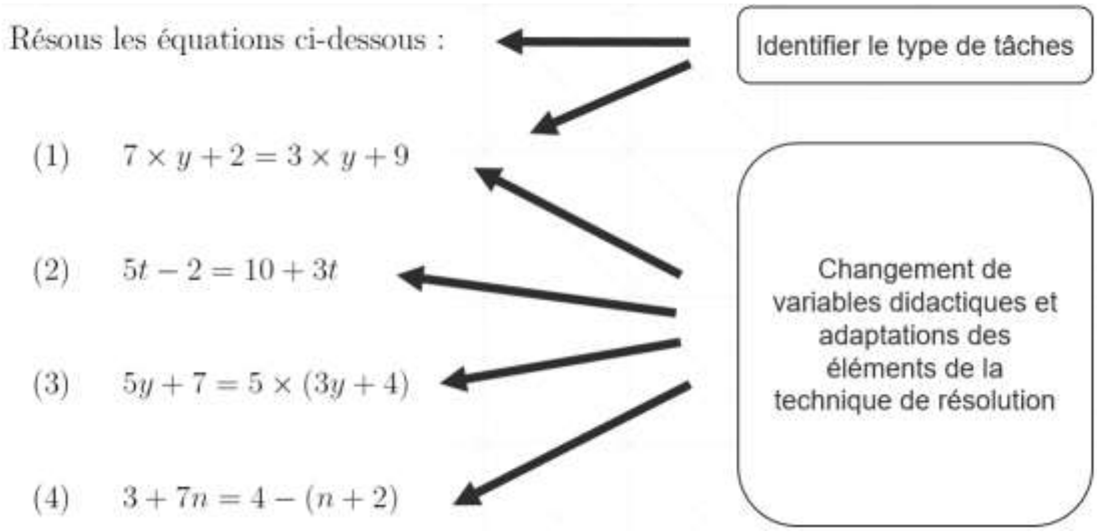


Figure 3 : Un exemple de type de tâches donné à travailler hors la classe.

Afin d'accompagner l'élève dans l'organisation de son étude personnelle hors la classe, nous avons suggéré pour chaque étape du parcours des tâches mathématiques à réaliser en autonomie. Ces tâches ont été choisies pour correspondre à des tâches relevant du même type et qui ont été réalisées en classe. Pour chaque tâche, nous avons fourni un ensemble d'aides de différentes natures, que nous avons différenciées en fonction des besoins d'apprentissages repérés par le test diagnostique automatique. Nous avons fait l'hypothèse que la richesse du milieu ainsi construit pour l'élève étudiant hors la classe et les rétroactions fournies par ce milieu – notamment par les différentes aides – lui permettraient de développer des praxéologies d'étude parmi celles supposées favoriser une activité mathématique adéquate.

Les types d'aides que nous avons proposés sont multiples et comme nous l'avons déjà dit en lien avec les praxéologies d'étude que nous avons voulu faire développer par les élèves :

- Les aides de renvoi, comme leur nom l'indique, renvoient l'élève vers des tâches du même type que celle qu'il a à réaliser en autonomie.
- Les aides comparatrices suggèrent à l'élève de comparer des formulations d'énoncés ou des corrigés, là aussi afin de développer l'identification du type de tâches.
- Les aides pour mobiliser une technique ou pour appliquer une technique donnent des indications à l'élève sur la technique à utiliser ou sur la façon de l'appliquer, par exemple à travers des tâches résolues.
- Les aides régulatrices se présentent sous la forme d'arbres où j'ai anticipé plusieurs réponses possibles d'élèves. En fonction de la réponse donnée, et en appui sur les analyses *a priori* des tâches, nous proposons une aide adaptée aux besoins de l'élève.
- Enfin, les aides au contrôle fournissent à l'élève des moyens de contrôler ce qu'il fait quand il réalise une tâche.

4. Mise en œuvre du PER dans une classe de collège et analyses *a posteriori*

Nous passons à présent à la mise en place du PER dans une classe de collège REP et à l'analyse *a posteriori* de l'expérimentation.

Eléments de contexte de la mise en œuvre du PER

Un enseignant, que nous baptisons ici Marc, a mis en œuvre le PER dans une de ses classes de niveau quatrième. Dans cette classe se trouvaient trois élèves à qui nous avons fait passer les premiers entretiens. Le fait de pouvoir nous entretenir de nouveau avec ces mêmes élèves nous a permis de comparer leurs gestes d'étude hors la classe.

Sept séances d'une heure ont été nécessaires à l'enseignant Marc pour la mise en scène du PER. Une heure supplémentaire a été consacrée à l'évaluation écrite des productions des élèves sur les équations.

Nous avons filmé l'ensemble des séances et travaillé sur leurs transcriptions. Nous avons également filmé les entretiens passés avec les trois élèves sur un mode opératoire identique à celui utilisé pour les tout premiers entretiens.

Des genres de tâches qui auraient pu être travaillés de manière moins inégale

Nous avons analysé les transcriptions en utilisant la grille à trois niveaux que nous déjà présentée (section III.2) et que nous allons maintenant faire fonctionner.

Nous avons tout d'abord constaté un travail relativement équilibré des OM locales de l'OM de référence relative aux équations (OM1 : 42% ; OM2 : 29% ; OM3 : 29%). Toutefois, certains genres de tâches ont été moins travaillés que d'autres, comme « Identifier la structure d'une équation », « Prouver l'équivalence de deux équations » et « Tester si un nombre est solution », alors qu'ils sont en particulier utiles pour contrôler les calculs sur les équations.

Nous nous sommes ensuite particulièrement intéressé à ce qui est laissé à la charge des élèves : réalisent-ils les tâches données à faire et qui explicitent les techniques et les éléments technologiques, ou bien est-ce l'enseignant ? Sur l'ensemble du PER, nous avons observé que dans plus de la moitié des cas, l'enseignant prenait la responsabilité d'accomplir les tâches travaillées en classe et d'expliciter la technique ou la technologie correspondantes.

Des praxéologies d'étude qui auraient pu prendre en compte davantage les spécificités du secteur d'étude

Au niveau des praxéologies d'étude développées en classe, nous avons constaté une présence importante de praxéologies pédagogiques « générales », du type « réaliser une tâche mathématique » ou « réviser un contrôle ». À l'inverse, l'identification des types de tâches mathématiques est peu développée. Or, nous avons fait l'hypothèse que sans cette identification, l'ensemble des autres praxéologies d'étude supposées favoriser une activité mathématique idoine en autonomie hors la classe avait peu de chance d'être développé.

Durant la mise en place du parcours, nous avons également observé une part importante de ce que nous avons appelé des « occasions manquées », c'est-à-dire des occasions pour l'enseignant de développer des praxéologies d'étude signalées et suggérées dans le parcours initial. Par exemple, sur la cinquantaine de tâches mathématiques réalisées en classe, nous pensons que l'enseignant aurait pu identifier les types de tâches parents plus souvent, ou situer les OM nouvelles par rapport aux anciennes sur les tâches qui agrégeaient les OM ponctuelles d'OM régionales différentes.

Nous avons toutefois noté une croissance dans le nombre de praxéologies d'étude développées en classe au cours des séances : celles-ci ont été plus travaillées dans les dernières séances et les élèves avaient davantage la charge de mobiliser ces praxéologies.

L'ensemble de nos observations est à nuancer en regard des moments de l'étude. Par exemple, nous avons remarqué que lors du moment du travail de la technique, les praxéologies d'étude sont davantage développées en classe et ce, par les élèves.

Une autonomie des élèves en classe qui aurait pu être plus importante

Nous nous sommes également focalisé sur l'autonomie dans laquelle les élèves étaient placés. Nous avons pu constater sur l'ensemble des séances analysées que les temps où les élèves étaient autonomes étaient globalement beaucoup moins important que ceux où l'enseignant donne des indications ou réalise les tâches étudiées. En moyenne et en proportion, les élèves sont autonomes environ un cinquième du temps qu'ils passent en classe. Nous interrogeons ceci : comment les élèves dont les besoins d'apprentissages sont les plus forts peuvent-ils occuper des positions d'étudiants au moins localement autonomes hors la classe s'ils font peu en classe l'expérience de cette autonomie ?

Un travail hors la classe des genres de tâches qui aurait pu être plus équilibré

Toujours sur le hors la classe, nous avons observé de plus près les tâches données à faire hors la classe et repéré un déséquilibre. Si de manière peu étonnante, les élèves ont beaucoup résolu d'équations, nous avons remarqué qu'ils ont à l'inverse peu été confrontés à la réalisation de tâches faisant spécifiquement travailler la reconnaissance de la structure, la preuve d'équivalence entre équations ou le test de solutions. Ceci s'est en partie retrouvé dans les traces écrites des élèves où les tâches relevant des genres de tâches les moins travaillés ont été les moins correctement réalisés.

Des effets encourageants sur les apprentissages disciplinaires

Concernant ces traces écrites, nous avons analysé celles de vingt élèves à une évaluation co-construite avec l'enseignant (figure 4). Cette évaluation comportait les principaux types de tâches mathématiques travaillés en classe, entre autres résoudre une équation du premier degré à une inconnue, mettre en équation un problème algébrique du premier degré en égalisant deux programmes de calcul, tester si un nombre est solution d'une équation.

Exercice 2 **Résoudre les équations ci-dessous en détaillant les étapes :** *(5 points)*

$5 \times x + 8 = 3 \times x + 2$	$8x - 4 = -3x + 9$	$3 \times (x + 5) = x + 3$

Exercice 3 *(2 points)*

1] Le nombre 2 est-il solution de l'équation $3x + 5 = 7x - 1$? Justifie.

2] Sam a résolu l'équation $2x + 9 = 3 - 4x$ et a trouvé -1 comme solution. A-t-il raison ? Justifie.

Exercice 4 *(4 points)*

Voici deux programmes de calcul :

PROGRAMME A	PROGRAMME B
• Choisir un nombre • Le multiplier par 11 • Soustraire 4 au résultat	• Choisir un nombre • Lui ajouter 2 • Multiplier le résultat par 6

Alice et Benjamin choisissent le même nombre de départ.

Alice teste le programme A et Benjamin teste le programme B.

Alice et Benjamin trouvent le même résultat final.

Quel nombre de départ ont-ils choisi ? Justifie ta réponse.

Figure 4 : Tâches proposées lors de l'évaluation écrite sur les équations.

Nos analyses indiquent que les élèves semblent majoritairement mobiliser la technique de résolution algébrique pour l'exercice sur la résolution d'équations (exercice 2) : 17 élèves sur 20 ont eu recours à cette technique pour résoudre les équations proposées. Nous relions ceci avec le fait que la résolution d'équations est le genre de tâches qui a été le plus largement travaillé en classe et hors la classe. Les erreurs de calcul que nous avons pu voir dans les traces écrites portent majoritairement sur des OM anciennes. Dans la résolution algébrique des équations, les élèves se trompent dans le calcul sur les nombres relatifs ou sur le développement d'un produit parenthésé avec des expressions algébriques, mais utilisent les propriétés de conservation de l'égalité.

Pour résoudre le problème d'égalisation de programmes de calcul (exercice 4), près de la moitié des élèves ont recours à la technique de mise en équation ; seuls 4 élèves ont tenté d'utiliser la technique par substitution. Cependant, un nombre assez élevé d'équations incorrectes a été constaté, alors que le type de tâches « égaliser deux programmes de calcul » a été lui aussi beaucoup travaillé en classe. Nous avançons au moins deux hypothèses pour expliquer ces résultats. La première est que dans l'évaluation, l'équation traduisant l'égalisation des programmes de calcul comportait un produit parenthésé ; or, en classe, les tâches du même type conduisaient toujours à des équations sans produit parenthésé. Une seconde hypothèse est que le test des solutions et la reconnaissance des structures font partie des genres de tâches les moins travaillés en classe de manière explicite.

Bien que la construction d'un rapport personnel idoine aux équations en classe de quatrième nécessite d'agréger différentes OM, nous considérons comme encourageants les effets obtenus sur les apprentissages des élèves relatifs aux équations après la mise en place du parcours.

Des praxéologies d'étude qui restent à faire évoluer

Pour ce qui est des praxéologies d'étude développées hors la classe, nous avons interrogé trois élèves, pour des raisons liées aux contraintes du terrain. Les résultats que nous avons obtenus sont donc à prendre avec des précautions et des expérimentations à plus grande échelle mériteraient d'avoir lieu.

Pour les élèves qualifiés de « moyens » par leur enseignant, nous n'avons pas constaté d'évolution positive dans leur manière d'organiser leur étude personnelle hors la classe relativement au thème des équations. Ces deux élèves ont continué à réaliser des gestes de lecture ou de mémorisation intensive de la leçon. Ils semblent avoir été peu sensibles aux changements de pratiques de leur enseignant sur les sept séances qu'a nécessité la mise en place du PER. Seule Marianne, l'élève qualifiée de « bonne élève » (section III.2), a changé sa façon d'étudier personnellement : elle qui au premier entretien nous avait dit ne jamais « réviser » les contrôles de mathématiques nous a expliqué qu'elle avait réalisé des tâches relevant des principaux types de tâches relatifs aux équations. Son rapport personnel aux équations nous paraissait déjà idoine à ce niveau scolaire.

Il nous semble hautement probable que l'échelle de temps sur laquelle nous avons analysé les gestes des élèves est très insuffisamment longue pour pouvoir conclure de manière définitive sur les effets d'un travail à long terme des praxéologies d'étude.

VI. CONCLUSION ET PERSPECTIVES DE RECHERCHE

Dans notre travail, nous avons construit un modèle de l'étude personnelle opérationnalisé pour analyser les praxéologies d'étude développées par les élèves et les mettre en perspective avec celles travaillées en classe sous la direction de l'enseignant. Prenant en compte les spécificités de la discipline, et plus précisément celles du thème des équations du premier degré à une inconnue, nous avons fait fonctionner ce modèle en appui sur une référence épistémologique, à travers notamment l'élaboration et l'opérationnalisation d'une OM de référence épistémologique relative aux équations. Face aux déficits praxéologiques repérés dans les programmes et les manuels, nous avons proposé un PER relatif aux équations intégrant les éléments précédents. La mise en place de ce PER au sein d'une classe semble avoir eu des effets positifs sur les apprentissages disciplinaires des élèves.

Le thème de l'étude personnelle hors la classe est peu abordé dans le champ de la didactique des mathématiques. Nous avons conscience d'avoir mené des travaux sur un terrain encore largement en chantier, des interrogations qu'ils peuvent soulever et des nombreux prolongements potentiels à qui ils peuvent donner naissance. Nous en proposons ici quelques-uns.

Nos recherches peuvent être prolongées sur d'autres secteurs d'étude. En particulier, les OM de référence relatives aux expressions algébriques et aux équations du premier degré, présents dans nos travaux et ceux de Pilet (2015) peuvent servir de point d'appui à la construction d'autres OM de référence en algèbre élémentaire, comme celles relatives aux systèmes d'équations ou aux inéquations.

Le modèle de l'étude personnelle que nous avons élaboré nous paraît transférable, moyennant évidemment des adaptations, à d'autres secteurs, domaines, voire à d'autres disciplines.

Certains éléments du PER que nous avons conçus peuvent être selon nous informatisés pour améliorer l'organisation de l'étude personnelle hors la classe des élèves. Nous avons fait distribuer aux élèves de très nombreux documents écrits durant nos expérimentations, peu pratiques à utiliser surtout pour des élèves avec de forts besoins d'apprentissages. En particulier, les aides fournies correspondaient à de grands blocs de textes peu lisibles et gagneraient à prendre corps au sein d'une interface dynamique et ergonomique.

Enfin, nous pensons qu'une piste prometteuse pour favoriser la construction de techniques d'étude efficaces en mathématiques chez les élèves consiste à poursuivre les recherches sur la manière d'organiser didactiquement le travail sur les praxéologies d'étude et ce, en appui sur les moments didactiques. Comment organiser le moment de l'élaboration de nouvelles techniques d'étude et montrer aux élèves l'insuffisance éventuelle d'anciennes techniques d'étude qu'ils employaient jusqu'alors ? Sur quels types de tâches d'étude, en lien avec les types de tâches mathématiques travaillés, pourrait-on faire émerger puis travailler ces nouvelles techniques d'étude ? Comment organiser le moment de leur institutionnalisation ? Quel discours technologique, à diffuser auprès de la communauté enseignante, pourrait-on élaborer et utiliser pour les justifier ?

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BOSCH, M. & GASCON, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. In A. Mercier & C. Margolinas (Eds.), *Balises pour la didactique des mathématiques : cours de la 12e Ecole d'été de didactique des mathématiques. Corps (Isère). Du 20 au 29 août 2003* (pp. 107-122). Grenoble : La Pensée Sauvage.

BLOCHS, B. (2012). Le cahier de cours au collège : une œuvre du professeur ? un instrument pour l'élève ? *Rcherches en Didactique des Mathématiques, 32*(2), 159-193.

CASTELA, C. (2000). Un objet de savoir spécifique en jeu dans la résolution de problèmes : le fonctionnement mathématique. *Recherches en didactique des mathématiques, 20(3),* 331-380.

CASTELA, C. (2002). Les objets du travail personnel en mathématiques des étudiants dans l'enseignement supérieur : comparaison de deux institutions, université et classes préparatoires aux grandes écoles. *Cahier de Didirem,40* . Paris : IREM Paris 7.

CASTELA, C. (2007). Les gestes d'étude en mathématiques d'élèves de première scientifique. In G. Gueudet & Y. Matheron (Eds), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques, année 2006* (pp. 33-77). Paris : IREM Paris 7.

CASTELA, C. (2008). Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissages ignorés par les institutions d'enseignement. *Recherches en didactique des mathématiques, 28(2),* 135-182.

CHEVALLARD, Y. (1985). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Première partie. L'évolution de la transposition didactique. *Petit x, 5,* 51-94.

CHEVALLARD, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Seconde partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation, *Petit x, 19,* 43-72.

CHEVALLARD, Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. In R. Noirfalise (Éd.), *Actes de l'Ecole d'été de la Rochelle, du 4 au 11 juillet 1998, La Rochelle* (pp. 91-120). Clermont-Ferrand : IREM de Clermont-Ferrand.

CHEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques 19(2),* 221-265.

CHEVALLARD, Y. (2002). Nouveaux dispositifs didactiques au collège et au lycée : raisons d'être, fonctions, devenir. *Actes des Journées inter-Irem didactique,* Dijon, 1-26.

COMBIER, G., GUILLAUME, J.-C. & PRESSIAT, A. (1996). *Les débuts de l'algèbre au collège. Au pied de la lettre !* Institut National de Recherche Pédagogique (INRP).

COULANGE, L. (1998). Les problèmes « concrets » à « mettre en équations » dans l'enseignement. *Petit x, 47,* 33-58.
DELOZANNE, E., PRÉVIT, D., GRUGEON, B. & CHENEVOTOT, F.. (2010). Vers un modèle de diagnostic de coméptences. *Revue Techniques et Sciences Informatiques, 29*(8-9), 899-938.
DOUADY, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil/objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7*(2), 5-32.
DUVAL, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives, 5,* 37-65.
ESMENJAUD-GENESTOUX, F. (2005). Le travail 'personnel' au collège ou le partage des responsabilités didactiques entre le professeur, l'élève et ceux qui accompagnent la réalisation de devoirs en mathématiques. Partie 1 : La partie 'privée' du travail des élèves et de l'accompagnement aux devoirs. *Petit x, 69,* 58-77.
ESMENJAUD-GENESTOUX, F. (2006). Le travail 'personnel' au collège ou le partage des responsabilités didactiques entre le professeur, l'élève et ceux qui accompagnent la réalisation de devoirs en mathématiques. Partie 2 : Le professeur accompagne le travail personnel des élèves. *Petit x, 70,* 48-72.
FARAH, L. (2015). *Etude et mise à l'étude des mathématiques en classes préparatoires économiques et commerciales : point de vue des étudiants, point de vue des professeurs*. Thèse de doctorat, Université Paris-Diderot, Paris 7.
FELIX, C. (2004). Les gestes de l'étude personnelle chez les collégiens : une perspective comparatiste. *Spirale, 33,* 483-505.
FILLOY, E., PUIG, L. & ROJANO, T. (2008). *Educational Algebra. A theoretical and Empirical Approach* (Vol. 43). New York : Springer.
GASCON, J. (1994). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l' « arithmétique généralisée ». *Petit x, 37,* 43-63.
KIERAN, C. (2007). Learning and Teaching Algebra At The Middle School Through College Levels. Building Meaning for Symbols and Their Manipulation. In J. Lester F. K. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learnings* (pp. 707-762).
MILHAUD, N. (1998). Le travail personnel des élèves. *Petit x, 11*(3), 51-78.
PILET (2012). *Parcours d'enseignement différencié appuyés sur un diagnostic en algèbre élémentaire à la fin de la scolarité obligatoire : modélisation, implémentation dans une plateforme en ligne et évaluation*. Thèse de doctorat, Université Paris-Diderot, Paris 7.
PILET (2015). Réguler l'enseignement en algèbre élémentaire par des parcours d'enseignement différencié. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 35(3),* 273-312.
RAYOU, P. (2008). Logiques cognitives et logiques sociales du travail hors la classe. *Communication présentée lors du colloque international Efficacité et équité en éducation.* Consultable sur https://esup.espe-bretagne.fr/efficacite_et_equite_en_education/programme/symposium_rayou.pdf
RUIZ-MUNZON (2010). *La introduccion del algebra elemental y su desarollo hacia la modelizacion funcional*. Thèse de doctorat, Université Autonome de Barcelone.
SFARD (1991). On the dual nature of mathematical conceptions : Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22,* 1-36.
SIREJACOB, S. (2016). Les organisations de savoirs mathématiques à enseigner : les équations au collège. *Petit x, 102,* 27-55.
SIREJACOB, S. (2017). *Le rôle de l'enseignant dans l'organisation de l'étude personnelle hors la classe de collégiens: le cas des équations du premier degré à une inconnue*. Thèse de doctorat, Université Paris-Diderot, Paris 7.
VERGNAUD, G., CORTES, A. & FAVRE-ARTIGUE, P. (1987). Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles. Problèmes épistémologiques et didactiques. In *Actes du colloque de Sèvres : Didactique et acquisition des connaissances scientifiques* (pp. 259-288). La Pensée Sauvage.

DES ILLUSTRATIONS QUI ACCOMPAGNENT LES PROBLEMES A LA CONSTRUCTION DE REPRESENTATIONS SCHEMATIQUES PAR LES ELEVES : QUELS ENJEUX FACE AUX PROBLEMES STANDARDS ET PROBLEMATIQUES ?

Annick **FAGNANT**
Université de Liège, Belgique
afagnant@uliege.be

Résumé

La résolution de problèmes nécessite la mise en œuvre d'un processus complexe de modélisation mathématique (Verschaffel & De Corte, 2008) au sein duquel la construction d'une représentation appropriée de la situation joue un rôle central (Thevenot, Barrouillet, & Camos, 2015). Les illustrations qui accompagnent les problèmes ont pour objectif d'enrichir la représentation (le modèle mental) construite par les élèves ou de soutenir la construction d'une schématisation externe (schéma à compléter ou « modèle » à réinvestir). Les recherches mettent en lumière des enjeux diversifiés et des résultats controversés en fonction du type d'illustrations proposées (Elia, Gagatsis, & Demetriou, 2007) et du caractère standard ou problématique des problèmes analysés (Dewolf, Van Dooren, & Verschaffel, 2017). Par ailleurs, même si les résultats de recherches semblent s'accorder quant à l'importance d'apprendre aux élèves à construire des représentations schématiques externes, le type même de schématisation et la façon de les introduire demeurent sujets à débat (Fagnant & Vlassis, 2013). Au départ d'un panorama de recherches centrées sur les illustrations et sur les schématisations face à des problèmes standards ou problématiques, quelques enjeux, complémentarités et opportunités pour les pratiques de classe sont discutés.

Mots-clés

Construction d'un modèle mental, illustrations, schématisations, problèmes standards, problèmes problématiques

I. INTRODUCTION

A l'heure actuelle, il est généralement admis de considérer la résolution de problèmes comme un processus complexe de modélisation mathématique. La figure 1 illustre ce processus en présentant simultanément ce qui correspondrait à une démarche « experte » de résolution, au sens où elle prendrait adéquatement en compte les différentes étapes-clés du processus, et des démarches « superficielles », au sens où elles court-circuiteraient une ou plusieurs étapes-clés de celui-ci.

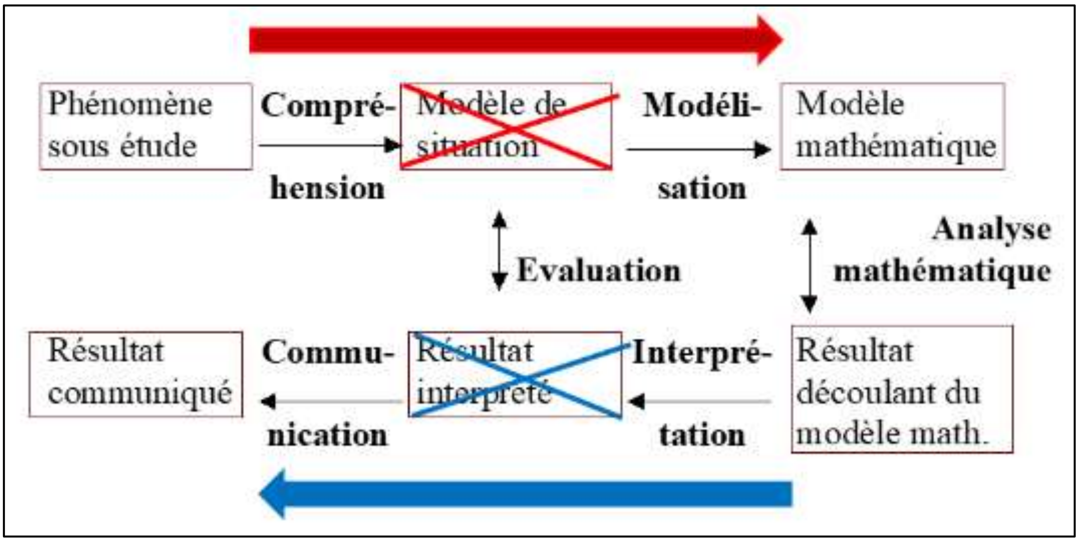


Figure 1 : Le processus complexe de modélisation mathématique et les démarches superficielles (d'après Verschaffel, Greer & De Corte, 2000).

Même si la figure 1 donne l'impression d'une certaine linéarité de la démarche (tout comme l'explication qui suit), celle-ci doit être considérée comme cyclique dans la mesure où des allers-retours entre les différentes étapes sont possibles, voire nécessaires pour résoudre correctement certains problèmes.

Dans la démarche que nous avons qualifiée de « démarche experte », le point de départ est le phénomène sous étude. Il correspond à la description de certains aspects de la réalité, considérés comme potentiellement capables d'être soumis à une analyse mathématique. La première étape implique la compréhension de la situation décrite et la construction d'un modèle de situation. La construction de ce modèle peut nécessiter de faire appel à des connaissances de la vie réelle ; elle peut aussi être médiatisée par des représentations externes, mettant en évidence les variables importantes de la situation, ainsi que les relations temporelles et causales entre ces variables. La deuxième étape (la modélisation) consiste à transformer le modèle de situation en un modèle mathématique, c'est-à-dire à exprimer sous une forme mathématique les relations qui unissent les éléments importants de la situation étudiée. La troisième étape consiste à appliquer une analyse mathématique au modèle mathématique. La disponibilité des ressources joue alors un rôle important, tant pour l'analyse elle-même que pour une anticipation des résultats découlant du modèle. La quatrième étape consiste alors à interpréter la ou les solution(s) en relation avec le modèle de situation. Plusieurs modèles alternatifs peuvent encore être comparés à ce stade. Les résultats interprétés doivent encore être évalués en fonction du modèle de situation : la solution obtenue a-t-elle du sens ? Si ce n'est pas le cas, le modèle de situation peut être soumis à une nouvelle analyse et le processus cyclique peut redémarrer… Une fois la solution trouvée, interprétée, évaluée et acceptée, la dernière étape consiste à la communiquer en fonction des requêtes de la tâche.

Les « démarches superficielles », mentionnées précédemment et représentées par les flèches épaisses sur la figure 1, consistent généralement à négliger une ou plusieurs étape(s) de cette démarche « experte », généralement l'étape de compréhension (ou de construction d'un modèle de situation) et les étapes d'interprétation et/ou d'évaluation. La figure 2 illustre ce type de démarches superficielles face à trois problèmes assez différents les uns des autres.

P1 - Pierre a joué deux parties de billes. Il a **perdu** 8 billes à la première partie et il a **perdu** 3 billes à la seconde partie. Combien de billes a-t-il **perdues** en tout ?

> Démarche superficielle consistant à s'appuyer sur les mots-clés présents dans l'énoncé pour choisir l'opération à effectuer, sans procéder à la construction d'une représentation (un modèle de situation) mettant en évidence les données importantes du problème et les relations qui les unissent : « perdre » évoque une soustraction, l'élève applique alors l'opération erronée « 8-3 = 5 ».

P2 - John court le 100 m en 15 secondes. Combien de temps lui faudra-t-il pour parcourir 1 km ?

> Démarche superficielle consistant à ne pas prendre en compte ses connaissances de la vie réelle pour construire un modèle de situation approprié : la situation décrite dans l'énoncé évoque un problème de vitesse, l'élève applique alors un modèle proportionnel sans se poser la question de savoir si celui-ci a du sens dans la situation décrite : 10 x 15 secondes = 150 secondes

P3 - Un bus de l'armée peut contenir 36 soldats. Si 1128 soldats ont besoin de se rendre à leur camp d'entraînement en bus, combien de bus sont nécessaires ?

> Démarche superficielle consistant à ne pas interpréter la solution mathématique obtenue au terme des calculs effectués (« 31,33 bus ») ou à procéder à l'arrondi à l'unité (« 31 bus »). Dans les deux cas, la plausibilité de la réponse n'est pas évaluée en regard du modèle de situation (la solution « 31,33 bus » n'a pas de sens d'un point de vue réaliste et la solution « 31 bus » laisse quelques soldats sur le carreau).

Figure 2 : Exemples de démarches superficielles face à des problèmes standards et problématiques.

En référence à la distinction proposée par l'équipe de Leuven (Verschaffel et al., 2000), le premier problème est un « problème standard », au sens où il peut être résolu par l'application directe d'une opération au départ des données de l'énoncé (P1). Les deux autres sont des « problèmes problématiques » pour lesquels la simple application d'une opération pose question à partir du moment où des connaissances réalistes liées à la situation sont prises en considération (P2) ou qui nécessitent une interprétation réaliste de la solution (P3).

Les problèmes standards et les problèmes problématiques posent évidemment des questions différentes en termes d'enjeux pour l'enseignement. Ainsi, les réponses « étonnantes » produites par les élèves face aux problèmes problématiques peuvent sans doute en partie s'expliquer par une rupture du « contrat didactique » (Brousseau, 1990) dans la mesure où ces problèmes vont à l'encontre des « normes socio-mathématiques » (Yackel & Cobb, 1996) établies dans les classes. Elles questionnent quant aux pratiques de classe qui conduisent justement les élèves à penser que le « contrat » est de faire des calculs pour donner une réponse numérique précise face à tout problème proposé en classe et/ou à ne pas interpréter la solution mathématique obtenue. Parallèlement, les démarches superficielles produites face aux problèmes standards questionnent également quant aux raisons qui poussent les élèves à penser que l'on peut se fier aux mots-clés (ex. perdre = soustraction) ou à d'autres « indices », comme les nombres proposés dans l'énoncé (ex. 75 et 3 = division) ou la dernière opération découverte en classe (ex. hier, on a vu la proportionnalité, c'est donc ce modèle mathématique qu'il convient d'appliquer aujourd'hui). Finalement, qu'il s'agisse de problèmes standards ou problématiques, un enjeu important de l'enseignement est d'amener les élèves à développer des démarches expertes et réflexives de résolution de problèmes, consistant à mettre en œuvre un processus complexe de modélisation mathématique dans lequel la construction d'une représentation appropriée (d'un modèle de situation) joue un rôle central (Thevenot, Barrouillet, & Camos, 2015).

Dans cet article, nous allons nous intéresser à deux « pratiques » assez répandues dans le domaine de la résolution de problèmes : accompagner les énoncés d'illustrations et inviter les élèves à construire des schématisations externalisées sur papier (schémas, dessins…). Nous avons choisi de situer nos propos dans le domaine des « problèmes d'application » face auxquels on attend des élèves qu'ils mobilisent des connaissances mathématiques acquises préalablement pour faire face aux situations qui leur sont proposées. Dans ce type de situations, on peut considérer que les illustrations qui accompagnent les problèmes et les représentations externes produites par les élèves eux-mêmes ont toutes deux pour but d'aider à la construction d'une représentation mentale (un modèle de situation) permettant de résoudre le problème en mobilisant un modèle mathématique approprié. Mais les illustrations aident-elles réellement les élèves (*et qu'en est-il face aux problèmes standards vs problématiques*) et la construction de schématisations par les élèves peut-elle constituer un outil d'enseignement/apprentissage porteur (*et si oui, quel type de schématisation et comment les introduire*) ? Sans prétention d'exhaustivité, la suite du texte apporte quelques éléments de réponse à ces questionnements en cherchant à mettre en évidence les enjeux, les complémentarités et les opportunités de ces « illustrations » et « schématisations » pour les pratiques de classe.

II. LES ILLUSTRATIONS QUI ACCOMPAGNENT LES PROBLEMES

De nombreuses études se sont intéressées à l'impact des illustrations qui accompagnent les énoncés de problèmes standards (Berends & Van Lieshout, 2009 ; Elia, 2009 ; Elia, Gagatsis, & Demetriou, 2007 ; Fagnant & Vlassis, 2013 ; Pantziara, Gagatsis, & Elia, 2009 ; Reuter, Schnotz & Rasch, 2015) ou problématiques (Dewolf, Van Dooren, Ev Cimen, & Verschaffel, 2014 ; Dewolf, Van Dooren, & Verschaffel, 2017 ; Fagnant & Auquière, à paraître). Pour présenter quelques constats et enjeux liés à ces illustrations, il nous est apparu pertinent de nous appuyer sur la typologie proposée par Elia et Philippou (2004) qui distingue quatre types d'illustrations définies comme suit :

> *"Decorative pictures do not give any actual information concerning the solution of the problem. Representational pictures represent the whole or a part of the content of the problem, while organizational pictures provide directions for drawing or written work that support the solution procedure. Finally, informational pictures provide information that is essential for the solution of the problem; in other words, the problem is based on the picture." (p. 328)*

Dans les points qui suivent, nous allons nous intéresser à l'effet de ces différents types d'illustrations lorsqu'elles accompagnent des problèmes standards d'abord, des problèmes problématiques ensuite.

1. Les illustrations qui accompagnent les problèmes standards

Ciblées sur des problèmes standards, correspondant à des structures additives de type « changement » (selon la typologie de Riley, Greeno & Heller, 1983 ; ou de type « Etat-Transformation-Etat », selon l'analyse de Vergnaud, 1990), les recherches menées par Berends et Van Lieshout (2009) auprès de 135 élèves de grade 5 (10-11 ans) aux Pays-Bas et par Elia et al. (2007) auprès de 1447 élèves des grades 1 à 3 (6-7 à 8-9 ans) à Chypre conduisent à des résultats assez convergents. Tout d'abord, les illustrations « décoratives » et les illustrations « représentationnelles » (qualifiées aussi d'évocatrices) ont globalement peu d'effet ; elles semblent être considérées comme inutiles par les élèves et n'affectent pas les taux de réussite observés. Les illustrations « informationnelles », quant à elles, ont un effet contre-productif qui semblerait s'expliquer par une augmentation de la charge mnésique et témoigner des difficultés éprouvées par les élèves pour combiner la prise d'informations dans le texte et dans les illustrations. Enfin, les illustrations « organisationnelles », supposées donner des indications sur la procédure de résolution à mobiliser, présentent des résultats assez disparates selon les études. En effet, dans l'étude de Berends et Van Lieshout précitée, elles impactent négativement les résultats des élèves faibles et elles n'ont pas d'effet auprès des élèves plus compétents. Ces résultats, qui peuvent paraître surprenants, peuvent sans doute en partie s'expliquer par le fait que ces auteurs ont choisi de tester l'impact des illustrations face à un problème très simple pour des élèves de grade 5 (un problème de type changement présentant l'inconnue à l'état final, c'est-à-dire l'un des problèmes les plus élémentaires de la typologie additive). Mais qu'en est-il de l'effet de ce type d'illustrations face à des problèmes plus complexes ?

Dans une étude menée auprès de 194 élèves chypriotes de grade 6 (11-12 ans), Pantziara et al. (2009) ont mis en œuvre un testing en deux étapes impliquant des problèmes que les auteurs qualifient de non-routiniers[1] et qu'ils définissent comme suit, par opposition aux problèmes routiniers :

> *"English (1996) defines non-routine problems as the problems that do not involve routine computations, but the application of a certain strategy, in this case a diagram, is most often required in order to solve a problem. Non-routine problems are considered more complicated and difficult than routine problems in which only the application of routine computations is involved in their solution (Schoenfeld, 1992)." (Pantziara et al., 2009, p. 43)*

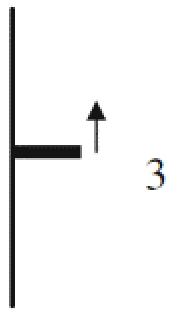
Dans un premier temps, un test comprenant six problèmes non-routiniers a été proposé aux élèves qui étaient invités à les résoudre comme ils le souhaitaient et à développer par écrit leur démarche de résolution. Dans un second temps (une semaine plus tard), les élèves ont reçu un test comprenant six problèmes parallèles à ceux du premier test, mais étant cette fois accompagnés d'une illustration (qualifiée par les auteurs de *diagramme*) que les élèves devaient utiliser pour résoudre le problème. Ces *diagrammes* peuvent être considérés comme des illustrations « organisationnelles » incomplètes devant aider les élèves à se représenter le problème et à dégager une démarche de résolution appropriée.

La figure 3 présente un exemple de problème non-routinier accompagné de l'illustration à compléter ; elle montre aussi une production d'élève indiquant que ce dernier s'est emparé de cette « ébauche » pour compléter la schématisation et résoudre le problème sur cette base.

Globalement, les résultats de l'étude de Pantziara et al. (2009) montrent que la présence des illustrations ne conduit pas à une augmentation des performances moyennes en résolution de problèmes. Face à ces problèmes non-routiniers, accompagner les énoncés d'illustrations (dans le cas présent, sous la forme de schémas prédéfinis à compléter) semble être une aide pour certains élèves alors que cela semble en perturber d'autres.

[1] Ces problèmes non-routiniers n'en demeurent pas moins des problèmes « standards » au sens où il est possible de les résoudre en appliquant une ou plusieurs opération(s) au départ des nombres de l'énoncé. C'est donc par opposition aux problèmes « problématiques » (face auxquels on attend des élèves qu'ils fassent appel à leurs connaissances de la vie réelle pour questionner le modèle mathématique que l'on pourrait appliquer à la situation) qu'on conviendra ici de les considérer comme « standards ».

Mr. Andreas is standing in a rung of a ladder and cleans the building's windows. Then, he stepped up three rungs to clean the rest of the windows. Next, he went down five rungs to clean other windows. Then he climbed up seven rungs to clean the rest of the windows and he was at the ninth rung of the ladder. In which rung did Mr. Andreas stand when he first started cleaning the windows?



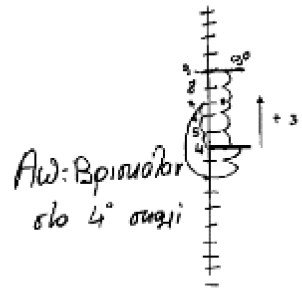
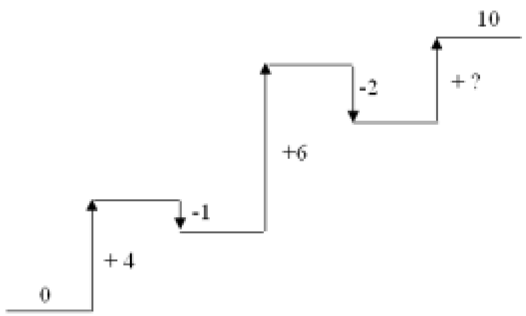


Figure 3 : Problème non-routinier accompagné d'une illustration organisationnelle (Extrait de Pantziara et al., 2007, p. 57) et exemple de production d'élève (Ibid., p. 52).

Dans la lignée de l'étude de Pantziara et al. (2009), une étude comparable a été menée auprès de 146 élèves de grade 4 (élèves de 9-10 ans) au Luxembourg (Fagnant & Vlassis, 2013). Un testing en trois étapes, constituées chacune de 4 problèmes non-routiniers inspirés de ceux proposés dans l'étude précitée, a été mis en place en vue d'analyser l'impact de deux types de schématisations : l'un, proche des *diagrammes* des auteurs chypriotes, mais présentant cette fois toutes les données du problème, l'autre, plus proche de dessins produits spontanément par les enfants face à ce type de problèmes et conservant des éléments de contexte. La figure 4 illustre ces deux types d'illustrations pour un problème parallèle au laveur de vitre (figure 3).

A snail tries to climb a brick wall. First it climbs up the first four bricks, but is then exhausted, stops and falls asleep. While it is asleep it slips down one brick. When it wakes up it climbs up six bricks, then goes to sleep again and slips down two bricks. On its last attempt it reaches the tenth brick. How many bricks did the snail climb on its last attempt?



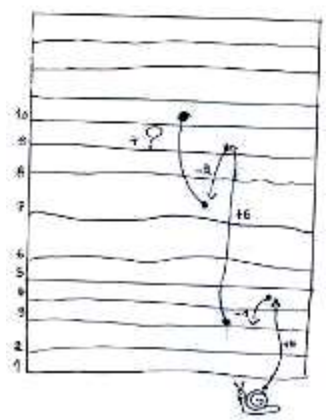


Figure 4 : Problème non-routinier accompagné de deux types d'illustrations organisationnelles (Extrait de Fagnant & Vlassis, 2013, p. 165).

Lors de la première phase de test, les problèmes étaient présentés sans illustration. Lors de la deuxième phase (qui survenait tout de suite après), des problèmes parallèles étaient proposés, accompagnés de l'un ou l'autre type d'illustrations (par ex. le problème du laveur de vitre – figure 3 – était proposé en étape 1 sans illustration et le problème des escargots –figure 4 – était proposé en étape 2 accompagné d'un des deux types d'illustrations). Pour éviter un effet-classe, les deux types d'illustrations étaient répartis au hasard dans chaque classe. Lors de la troisième phase, qui se déroulait une semaine plus tard et sur laquelle nous reviendrons dans la deuxième partie de cet article, les élèves étaient invités à produire eux-mêmes une schématisation, en s'inspirant de celles qu'ils avaient rencontrées à l'étape 2.

Les résultats montrent une augmentation des performances lors de l'étape 2, lorsque les énoncés sont accompagnés d'illustrations organisationnelles de type *diagramme* ou *dessin schématique*. Les progrès observés sont relativement importants, mais ils ne permettent pas de montrer la plus-value d'un des deux types d'illustrations par rapport à l'autre. Par ailleurs, tout comme dans l'étude de Pantziara et al. (2009), les résultats sont assez variables selon les élèves. De plus, les taux de réussite à l'ensemble du test restent relativement bas, montrant assez nettement que plusieurs élèves ne se saisissent pas de l'aide (soi-disant) apportée par ces illustrations.

Dans une approche similaire, l'étude de Reuter et al. (2015), réalisée auprès de 199 élèves de grade 4 (9-10 ans) en Allemagne, n'a montré aucun impact significatif de la présence d'illustrations accompagnant des problèmes non-routiniers. Les dessins et les *diagrammes* (ici, de type tableaux à double entrée) accompagnant les énoncés ne semblent pas avoir facilité le processus de résolution de problèmes. Lorsqu'un léger effet se marque, il est généralement en faveur des dessins, mais les effets sont variables en fonction des problèmes et en fonction des compétences initiales des élèves. Au final, on s'accordera avec leur conclusion générale selon laquelle la présence d'illustrations est insuffisante pour soutenir efficacement le processus de résolution de problèmes et qu'il est donc nécessaire de développer « *an early training in diagram literacy* » (p. 1387).

2. Les illustrations qui accompagnent les problèmes problématiques

Le point qui précède soulignait le fait que les illustrations « décoratives » et les illustrations « représentationnelles » (qualifiées aussi d'évocatrices) avaient globalement peu d'effet et semblaient s'avérer somme toute peu utiles à la résolution du problème (Berends & Van Lieshout, 2009 ; Elia et al., 2007). Face aux problèmes standards, la distinction entre ces deux types d'illustrations n'est d'ailleurs pas facile à établir et semble en réalité dépendre de l'interprétation qu'en fait le sujet. Les propos d'Elia (2009) sont éclairants :

> *« Si on considère la situation concrète globale du problème, l'image est évocatrice. Mais si on considère que seules les données du problème sont importantes — (...) ce qui revient à considérer l'évocation d'une situation concrète comme inutile — l'image est décorative. En fait la distinction entre image décorative et image évocatrice est non pertinente pour les énoncés de problèmes ». (p. 11)*

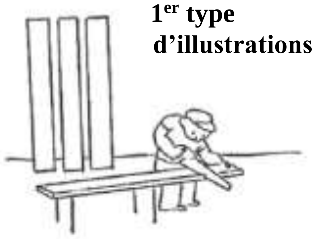
Si l'on peut s'accorder avec cette façon de voir les choses dans le cas de problèmes standards, la distinction entre les deux types d'illustrations garde au contraire tout son sens face aux problèmes problématiques. En effet, face à ces derniers, l'objectif des illustrations « représentationnelles » est justement de conduire les élèves à évoquer la situation concrète à laquelle l'énoncé fait référence, de façon à les inciter à faire appel à leurs connaissances de la vie réelle et à éviter de se précipiter dans l'application d'une opération directement appuyée sur les données de l'énoncé. Autrement dit, lorsqu'elles accompagnent des problèmes problématiques, ces illustrations représentationnelles visent à amener les élèves à construire un « modèle de situation » plus riche et plus réaliste.

Dans une première étude, Dewolf et al. (2014) ont proposé des problèmes problématiques à 402 élèves de grade 5 (10-11 ans) provenant d'écoles situées en Communauté flamande de Belgique. Ils ont comparé plusieurs conditions expérimentales en vue d'évaluer l'effet de la présence d'illustrations « représentationnelles » sur le réalisme des réponses fournies. Contrairement aux hypothèses des chercheurs, la présence de ces illustrations n'a eu aucun effet significatif sur la propension des élèves à produire des réponses réalistes.

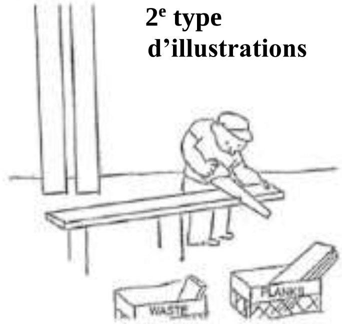
Prolongeant ces travaux, Dewolf et al. (2017) ont alors comparé l'effet de trois types d'illustrations en soumettant des problèmes problématiques à 288 élèves de grades 5-6 (10-12 ans). Ce qui distingue les trois modalités comparées, c'est que les premières représentent simplement le contexte dans lequel se situent les problèmes (comme dans l'étude de 2014) alors que les deux autres contiennent un élément supplémentaire, ciblé sur la particularité de la situation d'un point de vue réaliste. Dans la troisième modalité, cet élément est mis en évidence à l'aide d'un marquage de couleur (voir figure 5). Comme dans l'étude de Fagnant et Vlassis (2013), les trois types d'illustrations étaient distribuées aléatoirement au sein de chaque classe. Dans toutes les classes, les élèves recevaient aussi deux avertissements visant à attirer leur attention sur le fait que certains problèmes étaient un peu particuliers et les invitant à regarder attentivement les illustrations.

Steve has bought 4 planks of 2.5 m each to make a bookshelf.
How many planks of 1 m can he get out of these planks?

1^er^ type d'illustrations



2^e^ type d'illustrations



3^e^ type d'illustrations

La boîte contenant les déchets (*waste* sur la 2^e^ image) est mise en évidence par un marquage orange.

Figure 5 : Les illustrations utilisées dans l'étude de Dewolf et al. (2017, p. 343).

Les résultats qu'ils obtiennent ne permettent toujours pas de mettre à jour des différences significatives selon le type d'illustrations. Les deux nouveaux types d'aide visuelle n'apportent aucune plus-value substantielle alors qu'elles visaient pourtant à mettre en exergue un élément-clé du problème. Parmi les hypothèses évoquées pour expliquer ces résultats, les auteurs estiment que les illustrations ont pu être considérées comme purement décoratives par les élèves, qui les ont alors sans doute ignorées ou analysées très superficiellement.

En vue d'obliger les élèves à prendre en compte les illustrations proposées, Fagnant & Auquière (à paraître) ont transformé le 3^e^ type d'illustrations en illustrations « informationnelles », en présentant les données numériques du problème au sein même de l'illustration (et uniquement dans celle-ci) comme illustré à la figure 5. Dans ce cas, l'élève est obligé de prendre en compte l'illustration pour y retirer les données utiles à la résolution du problème.

Le dispositif mis en place est tout à fait parallèle à celui de l'étude de Dewolf et al. précitée : les problèmes proposés, les consignes et les deux premiers types d'illustrations sont identiques ; seul le troisième type d'illustrations est modifié. Le test a été soumis à un échantillon composé d'environ 500 élèves de grades 5-6 (10-12 ans) provenant d'écoles situées en Belgique francophone.

Steve a acheté des planches de même longueur pour fabriquer une étagère. Combien de petites planches d'étagère peut-il faire avec ces planches ?

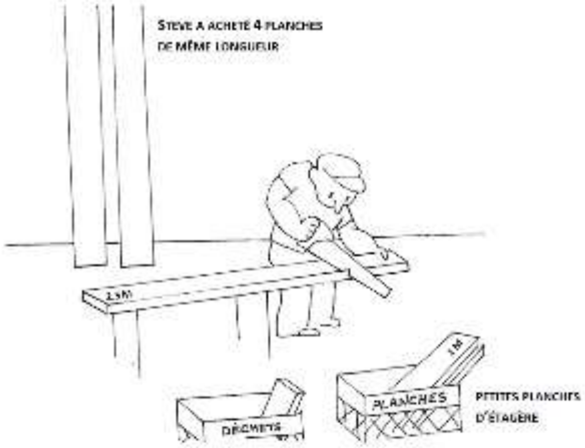


Figure 6 : Exemple d'illustration informationnelle utilisée dans l'étude de Fagnant & Auquière (à paraître).

Les résultats, issus d'un premier codage brut, montrent un léger impact des illustrations « informationnelles » (légère augmentation des réponses réalistes attendues et diminution des réponses non réalistes comparativement aux deux autres types d'illustrations), mais aussi une très grande variabilité selon les problèmes proposés. Un élément interpellant est que les représentations informationnelles semblent aussi avoir engendré davantage de démarches erronées ne correspondant pas aux réponses non réalistes attendues. Ce constat, qu'il conviendra d'éclairer par des analyses ultérieures, pourrait traduire un effet délétère des illustrations informationnelles, comme cela a été constaté face aux problèmes standards. En définitive, le codage en réponses réalistes *vs* non réalistes s'avère plus complexe (et peut-être plus limitatif) que ce que les écrits antérieurs sur la question ne le laissaient entendre (voir Fagnant & Auquière, à paraître, pour une discussion sur la problématique du codage). Quoi qu'il en soit, le premier codage brut contenant (pour chacun des problèmes et pour chacun des trois types d'illustrations) une proportion importante de réponses « autres » (i.e. ne correspondant ni aux réponses réalistes attendues, ni aux réponses non réalistes traduisant les erreurs courantes), des analyses complémentaires sont nécessaires pour affiner les résultats.

Au final, il semble que l'on peut compléter la conclusion formulée au point 1 en indiquant qu'accompagner les problèmes problématiques d'illustrations ne semble pas non plus suffisant pour favoriser la prise en compte de conceptions réalistes par les élèves ou, pour le dire autrement, pour faciliter la résolution de ce type de problèmes.

III. LA CONSTRUCTION DE SCHEMATISATIONS PAR LES ELEVES

Puisque fournir des illustrations aux élèves ne suffit pas, il convient sans doute de les aider à construire eux-mêmes des schématisations efficaces. Mais quel type de schématisations et comment les faire apprendre aux élèves ?

De nombreuses études se sont focalisées sur les schématisations externes pouvant soutenir l'étape de construction de la représentation du problème (d'un modèle de situation). Plusieurs études ont montré qu'il était possible de s'appuyer sur les dessins spontanément construits par les élèves (Csíkos, Szitányi, & Kelemen, 2012 ; Van Essen & Hamaker, 1990) ou de leur apprendre à utiliser des schématisations prédéfinies, spécifiques aux structures classiques de problèmes additifs (Willis & Fuson, 1988) ou multiplicatifs (Levain, Le Borgne, & Simard, 2006). D'autre études ont montré qu'il était possible d'apprendre aux élèves à utiliser des *diagrammes* (cf. étude de Pantziara et al., 2009 citée précédemment) adaptables à des problèmes non-routiniers (Diezmann, 2002) ou encore des schématisations « standardisées » (*schémas « range-tout » ou strip diagrams*) qui s'adaptent aux différentes structures additives ou multiplicatives de problèmes (Beckmann, 2004 ; Polotskaia & Consultant, 2010 ; Savard & Polotskaia, 2014). Quelle que soit finalement leur forme spécifique, les schématisations efficaces sont celles qui aident à construire une représentation mentale permettant de mettre en évidence les données importantes du problème et les relations qui les unissent (Hegarty & Kozhenikov, 1999 ; Uesaka et al., 2007).

Dans le cadre de cet article, nous allons nous centrer sur deux études menées par notre équipe de recherche. La première confronte l'utilisation de dessins libres et de *diagrammes* tels que ceux utilisés dans l'étude de Pantziara et al. (2009 ; voir aussi Diezman, 2002) ; la seconde s'intéresse aux schématisations « range-tout » tels qu'utilisées dans les études canadiennes (Polotskaia & Consultant, 2010 ; Savard & Polotskaia, 2014).

1. Les *diagrammes* et *les dessins schématiques* comme soutien à la résolution de problèmes

Revenons tout d'abord sur l'étude de Fagnant et Vlassis (2013) menée au Luxembourg auprès d'élèves de grade 4 (9-10 ans). Pour rappel, cette étude comportait trois étapes : lors de la première étape, les problèmes étaient présentés sans illustration ; lors de la deuxième étape, des problèmes parallèles accompagnés de dessins schématiques ou de *diagrammes* (voir figure 4) étaient proposés ; lors de la troisième étape (une semaine plus tard), les élèves étaient invités à résoudre une nouvelle série de problèmes parallèles à ceux des étapes précédentes en produisant eux-mêmes une schématisation, inspirée de celles rencontrées à l'étape 2. Nous avions déjà noté que la présence d'illustrations (étape 2) avait conduit à une augmentation des performances comparativement à l'étape 1, sans que l'on puisse conclure à un effet plus marqué des *diagrammes* ou des dessins schématiques (dans les deux cas, les différences se marquaient par une ampleur de l'effet[2] proche de 0.65). Qu'en est-il alors de l'invitation à réinvestir le « modèle » rencontré une seule fois ?

Lors de l'étape 3, l'invitation à réinvestir les schématisations rencontrées à l'étape précédente s'accompagnait d'un rappel ciblé. Pour les élèves qui avaient été confrontés aux *diagrammes*, le rappel mentionnait les exemples rencontrés (diagrammes fléchés, tableaux à double entrée et diagramme de Venn représentant une relation partie-tout), mais aucune indication n'était fournie quant au type de *diagramme* à utiliser face à tel ou tel problème. Pour les élèves qui avaient été confrontés aux dessins schématiques, on précisait qu'il fallait réaliser des dessins qui pouvaient prendre n'importe quelle forme, mais qui devaient contenir certaines informations (les données importantes, l'inconnue et les relations qui les unissent). Les résultats obtenus à l'étape 3 sont certes un peu plus faibles que ceux observés à l'étape 2 (lorsque les schématisations étaient fournies aux élèves), mais ils sont plus élevés qu'à l'étape 1 (la comparaison entre les étapes 1 et 3 de l'épreuve se traduit par une ampleur de l'effet modérée, proche de 0.50).

[2] L'ampleur de l'effet est calculée sur la base des moyennes et des écarts-types (M1 - M2 / √[(12+22) / 2]). Généralement, en référence à Cohen (1992), on considère une ampleur de l'effet de 0.2 comme faible, de 0.5 comme modérée et de 0.8 comme élevée. L'ampleur de l'effet renseigne sur la taille de la différence entre deux moyennes observées, mais n'autorise pas forcément les généralisations.

Après une très brève intervention, consistant simplement à les confronter à un outil possible d'aide à la résolution de problèmes, les élèves peuvent en partie produire des représentations schématiques efficaces et améliorer leurs performances de résolution de problèmes. Les schématisations produites s'inspirent des schématisations rencontrées, mais elles présentent également certaines adaptations au contexte du problème. Enfin, notons aussi que certaines résolutions correctes ne sont pas accompagnées de schématisations ou sont accompagnées de schématisations incomplètes, rappelant par-là que l'enjeu essentiel est bien la représentation mentale que l'élève se construit de la situation-problème. La figure 7 illustre quelques exemples de schématisations produites par les élèves face au problème des « puces » qui correspond au problème de réinvestissement du laveur de vitre (figure 3) et des escargots (figure 4).

Paul est dresseur de puces. Il a appris un tour fabuleux à sa championne Pioupioute. Il aligne des crayons et il fait sauter Pioupioute au-dessus des crayons. Elle fait 6 bonds en avant, 1 bond en arrière, 5 bonds en avant, 2 bonds en arrière… puis elle s'arrête pour saluer les spectateurs. Elle fait encore quelques bonds en avant et elle s'arrête après avoir sauté au-dessus du 14e crayon. Combien de bonds en avant Pioupioute a-t-elle fait après avoir salué les spectateurs ?

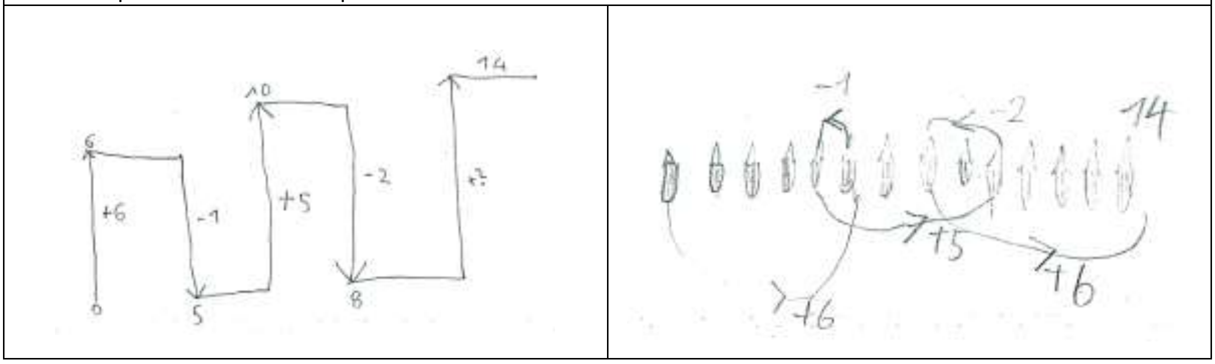


Figure 7 : Exemples de schématisations produites par les élèves face au problème des puces – Extrait de la recherche de Fagnant & Vlassis (2013) – Résultats non publiés.

Si les schématisations externalisées sur papier sont intéressantes, c'est non seulement parce qu'elles peuvent soutenir le processus de construction d'une représentation mentale, mais aussi parce qu'elles constituent un outil potentiel de communication entre l'enseignant et les élèves. Dans l'étude qui vient d'être détaillée, aucune phase d'enseignement/apprentissage proprement dite n'a été organisée. Les progrès observés témoignent du « potentiel » offert par ces représentations schématiques, mais ils montrent aussi qu'une simple présentation de celles-ci n'est pas suffisante pour la majorité des élèves. En effet, une analyse plus détaillée des résultats montre que les progrès moyens traduisent en réalité des divergences importantes entre élèves : si les représentations schématiques semblent avoir aidé certains d'entre eux (39% en moyenne pour l'ensemble des problèmes), elles paraissent aussi en avoir perturbé d'autres (7% en moyenne) et avoir eu très peu d'effet sur plus de la moitié de l'échantillon. Au final, les résultats sont variables selon les problèmes et selon les élèves et il n'est pas possible de dégager clairement la plus-value d'une forme de schématisations en particulier (même si les résultats sont légèrement en faveur des *diagrammes*). Mais qu'en est-il si on procède à une phase d'enseignement/apprentissage plutôt qu'à une simple exposition aux schématisations ?

En prolongement de cette étude, Auquière (2013) a mis en œuvre une étude exploratoire dans laquelle ces deux types de schématisations ont fait l'objet de cinq séances d'enseignement/apprentissage dans des classes de grade 4 (élèves de 9-10 ans). Dans une classe, les dessins libres étaient introduits en suivant l'approche didactique proposée par Demonty, Fagnant et Lejong (2004) dans le manuel « Résoudre des problèmes : pas de problème ». En aucun cas, un « modèle » de représentation n'est proposé ; il s'agit de partir des schématisations produites spontanément par les élèves, de les exploiter en insistant sur les éléments importants d'une représentation efficace et de les inviter à retravailler leurs représentations spontanées de façon à ce qu'elles soient opérationnelles et les aident à résoudre le problème (voir Fagnant, 2008 pour une présentation plus détaillé). Dans l'autre classe, les différents *diagrammes* de l'étude de Pantziara et al. (2009) étaient introduits tour à tour par l'enseignant, puis les élèves étaient invités à les réinvestir face à des problèmes du même type. Les différents types de problèmes étaient ensuite mélangés de façon à amener les élèves à sélectionner, parmi le répertoire de *diagrammes* qu'ils avaient rencontrés, lequel ou lesquels pourrai(en)t s'adapter au problème soumis (voir approche proposée par Diezmann, 2002).

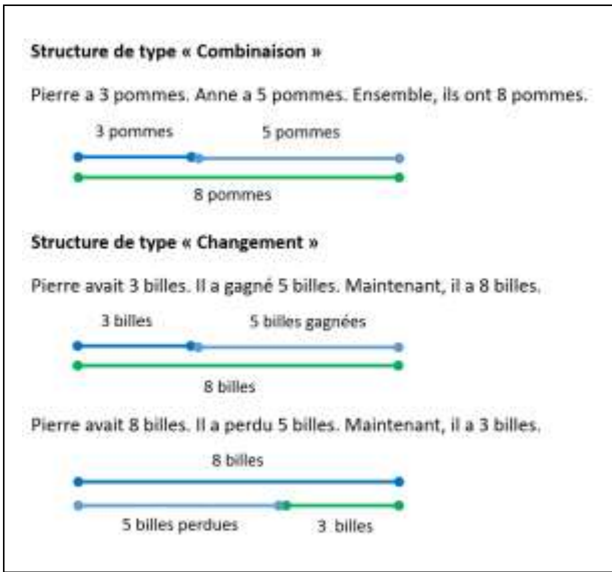
Les cinq séances d'enseignement/apprentissage étaient encadrées par un pré-test et un post-test. De façon à évaluer les capacités de transfert, le test était composé non seulement de problèmes proches de ceux utilisés durant l'intervention, mais aussi de problèmes de structures différentes. Les résultats de l'intervention ont été comparés à ceux obtenus dans des classes contrôles dans lesquelles seuls les tests ont été administrés. Les résultats sont assez positifs dans la mesure où l'on note des progrès notables au post-test (ampleur de l'effet très importante dans les deux classes expérimentales – proche de 1.00 dans une classe et de 1.20 dans l'autre – et léger – proche de 0.20 – dans les classes contrôles). Une analyse plus fine (non présentée ici) montre que la plupart des élèves ont progressé, parfois de façon très importante. Comme on pouvait s'y attendre, les résultats sont toutefois moins marqués sur les problèmes de transfert que sur les problèmes du même type que ceux travaillés en classe. Globalement, l'approche centrée sur les *diagrammes* semble un peu plus efficace que l'approche centrées sur les « dessins libres », mais les différences sont faibles et dépendent des types de problèmes.

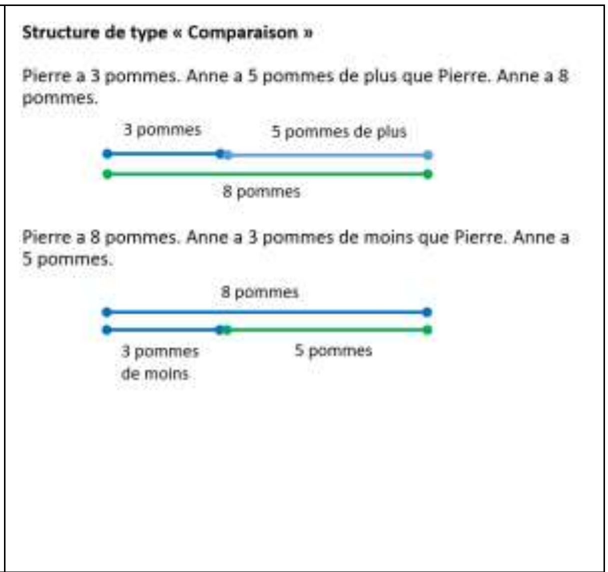
Finalement, on pourrait reprendre à notre compte la conclusion de Pantziara et al. (2009) qui plaidaient pour une complémentarité entre les diagrammes et d'autres constructions plus « inventives » : "*teachers could give students opportunities not only to use presented diagrams but also to invent or search for their own solution strategy*" (p. 56) de façon à permettre à chacun des élèves de trouver une approche qui lui convient et qui l'aide à construire une représentation mentale correcte et opérationnelle des différents types de problèmes proposés. Rencontrer des schématisations différentes et inviter les élèves à réfléchir quant au meilleur usage de celles-ci permettrait sans doute aussi d'aider les élèves à faire preuve de « flexibilité représentationnelle » (Nistal, Van Dooren, Calrebout, Elen & Verschaffel, 2009), en s'accordant avec l'idée que le choix d'une représentation appropriée ne dépend pas seulement du type de problème, mais aussi des élèves et sans doute d'une interaction entre ces deux variables. En réalité, certains types de schématisations pourraient s'avérer plus ou moins efficaces selon qu'ils s'accordent ou non avec les démarches spontanées des élèves. C'est notamment cette idée de « (non) congruence » que nous avons explorée dans une autre étude, qui s'appuie cette fois sur les schématisations « range-tout » développées par l'équipe canadienne susmentionnée (Polotskaia & Consultant, 2010 ; Savard & Polotskaia, 2014).

2. Les *schématisations « range-tout »* comme soutien à la résolution de problèmes

Plusieurs études menées par Polotskaia et ses collaborateurs (Ducharme & Polotskaia, 2008, 2009 ; Gervais, Savard & Polaskaïa, 2013 ; Polotskaia, 2009 ; Polotskaia & Consultant, 2010) montrent qu'il est possible d'apprendre aux élèves à utiliser des schématisations qu'ils qualifient de « range-tout », et ceci, dès le début de l'enseignement primaire (Savard &

Polaskaïa, 2014). Ces schématisations auraient l'avantage d'être adaptables à des problèmes de structures différentes et d'aider les élèves à se focaliser sur les relations existant entre les quantités connues et inconnues. La figure 8 illustre ces schématisations pour les trois structures de problèmes issues de la classification de Riley et al. (1983), ainsi que face à une structure de problème combinant plusieurs de ces relations de base.





Problème composant une relation de type changement et une structure de type comparaison

Pierre est arrivé à l'école ce matin avec un sachet de 15 billes. Il a perdu 3 billes pendant la récréation. Fin de journée, Pierre et Marc comptent leurs billes. Marc a 6 billes de plus que Pierre. Combien de billes Marc a-t-il ?

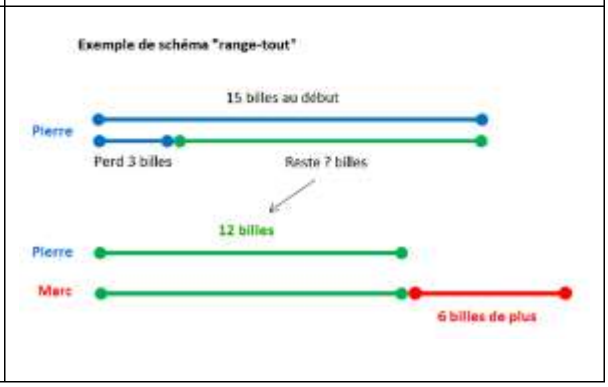


Figure 8 : Schématisations « range-tout » pour des structures de types combinaison, changement et comparaison, ainsi que pour un problème composant deux de ces structures de base – Extrait de Auquière, Demonty & Fagnant (à paraître).

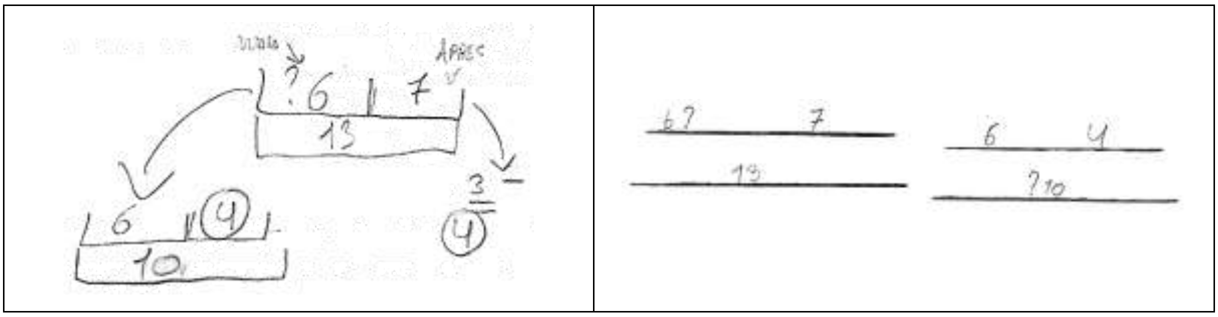
Dans une étude exploratoire menée auprès d'élèves de grade 4 (9-10 ans – Auquière et al., à paraître), ces schématisations ont été brièvement introduites aux élèves lors d'une séance focalisée sur des problèmes de type combinaison ; elles ont ensuite été réinvesties face au problème présenté à la figure 8. Avant l'introduction de ces schématisations, les élèves ont été soumis à un test composé de trois problèmes de structures différentes : un problème de type combinaison et deux problèmes composant plusieurs structures (changement et comparaison, d'une part ; combinaison et comparaison, d'autre part). En nous appuyant sur des études menées préalablement par Gamo et ses collaborateurs (Gamo, Sander & Richard, 2010 ; Gamo, Taabane & Sander, 2011), on s'attendait à ce que les élèves développent une procédure de résolution économique (procédure-comparaison) face au problème de type « changement-comparaison » (voir figure 9) et à ce que cette procédure entre en conflit avec la représentation séquentielle induite par les schématisations « range-tout ». Lors d'un post-test survenant juste après la micro-intervention et étant composé de trois problèmes parallèles à ceux du pré-test, les résultats montrent un effet positif léger pour les problèmes de types « combinaison » et « combinaison-comparaison » (ampleur de l'effet de 0.33 et de 0.17) alors que c’est un effet négatif qui est constaté face au problème de type « changement-comparaison » (ampleur de l’effet de de -0.25).

Les résultats négatifs obtenus au problème de type « changement-comparaison » s’expliquent notamment par une évolution des démarches de résolution développées par les élèves entre le pré-test et le post-test (voir figure 9). L’évolution est notable puisque près d’un quart des démarches correctes s’appuie maintenant sur une « procédure-complément » (non économique), alors que celle-ci était pratiquement inexistante au pré-test. Parallèlement, on note une diminution de la « procédure-comparaison » qui est nettement plus économique et qui, comme attendu, étaient la plus fréquemment utilisée spontanément par les élèves au pré-test. L’augmentation des « procédures hybrides » peut sans doute aussi se comprendre dans cette logique, dans la mesure où elle conduit à mettre à plat l’état initial, même si celui-ci n’est finalement pas utilisé pour comparer les états finaux.

Problème de type « *Changement-comparaison* » proposé au post-test A midi, Farid et Julie terminent la partie de fléchettes commencée à dix heures. Farid avait déjà quelques points après la partie de la matinée. À midi, il gagne 7 points. Il a maintenant un total de 13 points. Julie avait le même nombre points que Farid ce matin. À midi, elle gagne 3 points de moins que lui. Combien de points Julie a-t-elle à la fin de la partie ?		
Nombre de résolutions correctes et proportion de chaque type de procédures observées lors du pré et du post-test	Pré-test (N=76)	Post-test (N=63)
Procédure-complément (6)+7=13, 7-3=(4) et 6+4=(10)	1% (N=1)	24% (N=15)
Procédure hybride (6)+7=13 et 13-3=(10)	10% (N=8)	24% (N=15)
Procédure-comparaison 13-3=(10)	86% (N=65)	52% (N=33)
Non identifiable *Calcul et schématisation absents ou incodables*	2 (3%)	-

Figure 9 : Evolution des démarches de résolution correctes observées entre le pré et le post-test face au problème de type « changement-comparaison » (Extrait de Auquière et al., à paraître).

La figure 10 illustre les trois types de démarches observées : les deux premiers exemples traduisent une « procédure-complément » (toutes les étapes sont représentées dans le premier cas, la deuxième étape est réalisée mentalement dans le second) ; les deux suivants correspondent respectivement à une « procédure-hybride » et à une « procédure-comparaison ».



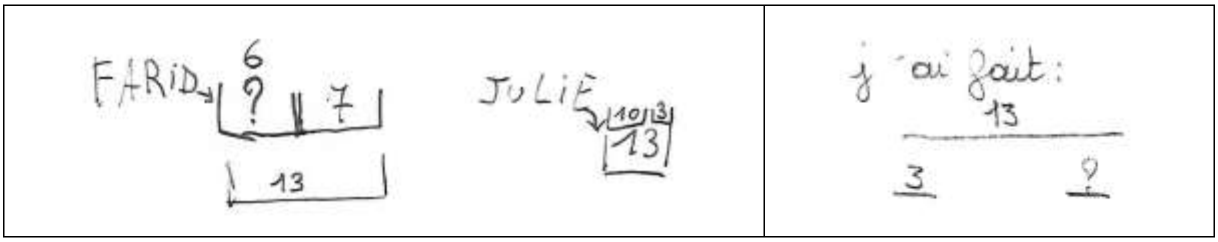


Figure 10 : Exemples de schématisations « range-tout » correspondant au problème de type changement-comparaison (Extrait de Auquière et al., à paraître).

Finalement, les résultats de cette étude exploratoire sont assez mitigés. Les schématisations « range-tout » semblent aider les élèves (ou tout au moins certains d'entre eux) face à certains problèmes, alors que leur utilisation semble plutôt contre-productive face à d'autres problèmes, notamment lorsque cette manière de procéder entre en conflit avec une démarche de résolution plus économique. Rappelons toutefois que l'intervention menée était très courte et que l'efficacité limitée observée ne doit pas faire perdre de vue le potentiel offert par cette approche.

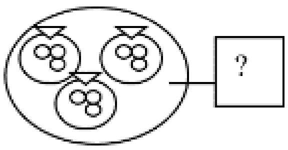
Certes, la démarche non économique (« procédure-complément ») est ici moins efficace à court terme, mais ne témoigne-t-elle pas pour autant d'une bonne compréhension des différentes étapes du problème ? L'aspect séquentiel de la résolution ne serait-il pas à plus long terme une plus-value pour aider à mettre en œuvre un processus de « qualification » consistant à identifier chaque résultat intermédiaire, en relation avec le contexte de l'énoncé (Houdement, 2011, 2014) ? L'appropriation de ce type de schématisations par les élèves semble assez complexe, non seulement parce qu'elles demandent un certain formalisme pour représenter les quantités par des segments, mais aussi un certain degré d'abstraction pour représenter tous les problèmes sous la forme de relations parties-tout. Avec les « range-tout », il s'agit de construire une schématisation en organisant soi-même la mise en relation entre les données et l'inconnue au départ d'un canevas adaptable aux différentes situations rencontrées. Si, à court terme, cette façon de procéder semble plus complexe que de faire appel à un schéma spécifique à un type de problèmes (voir Willis & Fuson, 1988 ; voir aussi Gustein et Romberg, 1995), elle pourrait s'avérer plus efficace à long terme, notamment en évitant le développement de stratégies superficielles consistant à rechercher des mots-clés indicateurs du « bon » schéma (critique couramment posée aux approches précitées). Par ailleurs, les schématisations « range-tout » se caractérisent par une focalisation sur les relations unissant les données, ce qui pourrait favoriser un raisonnement de nature algébrique, porteur pour les apprentissages mathématiques ultérieurs, comme l'expliquent clairement les auteurs canadiens qui défendent l'intérêt de ces schématisations et dont nous reprenons ici quelques propos :

> *« Nous avons remarqué que dans la situation de résolution d'un problème d'addition à énoncé verbal, l'élève peut se concentrer :*
>
> *• soit sur les données (nombres concrets) et les opérations possibles pour calculer la réponse ;*
>
> *• soit sur les relations entre les quantités (le rôle de chaque donnée dans la situation) et les différentes méthodes de solution.*
>
> *Dans le premier cas, le raisonnement de l'élève est de nature arithmétique. Dans le deuxième cas, son raisonnement est purement algébrique. En accord avec l'opinion de Sophian (2007), nous pouvons formuler l'hypothèse que les difficultés dans l'apprentissage de l'algèbre sont grandement liées à l'habitude acquise par les élèves de considérer de préférence les nombres eux-mêmes (raisonnement arithmétique) plutôt que les relations entre les nombres (raisonnement pro-algébrique). Cette habitude, causée par un manque d'entraînement à l'analyse de relations entre les quantités, se développe durant les années passées à l'école primaire. La question est : comment développer chez les jeunes l'habitude d'analyser la situation ou le problème pour identifier les relations mathématiques essentielles ? » (Polotskaïa, & Consultant, 2010, p. 13)*

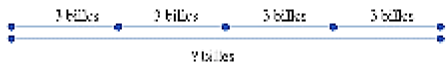
Enfin, notons encore que ces schématisations « range-tout » sont très proches de celles utilisées dans la « méthode de Singapour© ». Intitulées « *Strip diagrams* » dans la littérature anglo-saxonne, ces schématisations sont aussi présentées comme soutenant un raisonnement pré-algébrique permettant notamment à de jeunes élèves de résoudre des problèmes assez complexes (voir Beckmann, 2004 pour une illustration de cette approche).

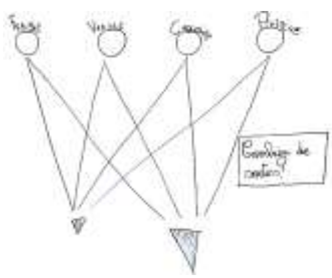
Mais ces schématisations s'avèreraient-elles efficaces face à des problèmes non-routiniers tels que ceux utilisés dans l'étude de Pantziara (2009) et ses collègues ? Ne serait-il pas contre-productif de représenter, par exemple, le problème du laveur de vitres, des puces ou de l'escargot avec ce type de schématisations ? Et si de telles schématisations « range-tout » peuvent s'adapter à certaines structures multiplicatives (comme entre autres les problèmes de type « isomorphisme de mesures » de la classification de Vergnaud, 1990), comment les adapter à des problèmes de « produits de mesure » (ou « combinaison multiplicative »), comme on en retrouve dans l'étude de Pantziara et al. (2009), schématisés par des tableaux à double entrée ou des arbres de décomposition ? La figure 11 illustre différentes schématisations adaptables à ces deux types de structures multiplicatives.

<table>
<tr><td colspan="3">Structure de problèmes de type « isomorphisme de mesures » (Vergnaud, 1990)

Il y a 3 billes dans 1 sachet et 4 sachets de billes. Combien y a-t-il de billes en tout ?</td></tr>
<tr><td>Dessin schématique</td><td>Schématisation centrée sur la structure multiplicative (d'après Vernaud, 1990 ; voir aussi Levain et al., 2006)</td><td>Schématisation « range-tout »</td></tr>
<tr><td>
</td><td>

Sachets	Billes
1	3
4	? ↓ x4

</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="3">Structure de problèmes de type « produits de mesure » (Vergnaud, 1990) ou « combinaison multiplicative » (Pantziara et al., 2009 ; voir aussi Fagnant & Vlassis, 2013)

Le marchand de glace de mon quartier vend des boules de glace à la fraise, à la vanille, au chocolat et à la pistache. Il propose deux sortes de cornets : des petits cornets et des grands cornets. Combien de sortes de cornets de glace à une boule ce marchand peut-il faire ?</td></tr>
<tr><td>Dessin schématique</td><td>Schématisation centrée sur la structure multiplicative</td><td>Schématisation « range-tout »</td></tr>
<tr><td></td><td>

	Fraise	Vanille	Chocolat	Pistache
Petits cornets				
Grands cornets				

</td><td>?</td></tr>
</table>

Figure 11 : Exemples de schématisations adaptables à différentes structures de problèmes multiplicatifs.

IV. CONCLUSION

Dans cet article, nous avons présenté plusieurs études qui s'intéressent aux illustrations qui accompagnent les problèmes et/ou aux schématisations construites par les élèves. Dans les deux cas, le point de vue soutenu était que ces deux types d'« outils » avaient pour but d'aider à la construction d'une représentation mentale appropriée des situations proposées. Alors que la construction de représentations schématiques par les élèves semble constituer une aide à la résolution de problèmes, les résultats sont plus controversés en ce qui concerne l'aide apportée par la présence d'illustrations qui accompagnent les problèmes, et ceci tant pour les problèmes « standards » que « problématiques ».

Au niveau des illustrations qui accompagnent les problèmes, la conclusion qui s'impose est d'inviter les enseignants à la plus grande prudence avec leur utilisation. Il est évident qu'il serait incorrect de les considérer comme de simples « décorations » qui auraient pour seule fonction de motiver les élèves en donnant un caractère plus ludique à la résolution de problèmes.

En ce qui concerne la construction de représentations schématiques par les élèves, les résultats sont plutôt encourageants, mais ne permettent néanmoins pas de trancher formellement quant au type de représentations schématiques à privilégier et quant à la meilleure façon de les introduire. S'il paraît essentiel d'apprendre aux élèves à utiliser ce type d'outils, plusieurs approches semblent pouvoir s'avérer efficaces et il n'est pas aisé de statuer sur la plus-value d'une approche comparativement à une autre. Tout dépend sans doute des objectifs que l'on vise, des problèmes que l'on propose et de la façon dont on en discute en classe avec les élèves. On s'accordera dès lors à la conclusion de Thevenot et al. (2015) invitant les enseignants à proposer une variété de problèmes de structures différentes et à insister sur leur analyse et leur interprétation, plutôt que de faire apprendre « mécaniquement » aux élèves des démarches ou des schématisations liées à des types de problèmes particuliers. Dans le domaine de la résolution de problèmes d'application, il paraît en effet essentiel de proposer des problèmes variés, non-routiniers, mais aussi problématiques, pour amener les élèves à considérer la résolution de problèmes comme un véritable processus de modélisation mathématique. Il s'agit de modifier la culture de classe (ou le contrat didactique), non seulement en modifiant les types de problèmes proposés, mais aussi en changeant la façon de les traiter en classe (voir Verschaffel & De Corte, 1997 ; Verschaffel, De Corte, Lasure, Van Vaerenbergh, Bogaerts & Ratinckx, 1999 pour des études ayant montré l'efficacité d'approches de ce type).

Même si les premières études sur les problèmes problématiques datent de la fin des années 90 (voir Verschaffel et al., 2000 pour une synthèse), force est de constater que les pratiques de classe doivent encore évoluer. Ainsi, Depape, De Corte et Verschaffel (2015) ont montré que, même si les problèmes proposés en classe cherchent davantage que par le passé à s'approcher des expériences de vie des élèves, ils n'en demeurent pas moins « stéréotypés » au sens où la plupart requièrent la simple application d'une opération arithmétique au départ des données de l'énoncé. Dans le même ordre d'idées, les enseignants déclarent valoriser l'importance de créer des connexions entre les problèmes proposés en classe et les éléments issus de la vie réelle, mais ils critiquent parallèlement les éléments qui dépeignent des relations trop complexes entre les situations décrites et les modèles mathématiques à mobiliser, ainsi que l'ajout d'éléments factuels qui enrichissent les situations décrites mais ne sont pas nécessaires à la résolution. Finalement, les problèmes sont souvent traités dans une approche

« pragmatique », essentiellement focalisée sur les aspects mathématiques, plutôt que dans une approche « narrative » mettant l'accent sur les aspects réalistes lors de l'entrée dans le problème et de l'interprétation de la solution. Finalement, il ne s'agirait pas seulement de proposer des problèmes variés en classe, mais il serait tout aussi important d'amener les élèves à les reformuler et à en débattre (Mellone, Verschaffel & Van Dooren, 2017) dans des situations de communication où les schématisations prennent sens.

En accord avec la perspective socioculturelle vygotskienne, ne pourrait-on s'accorder avec l'idée selon laquelle « apprendre à résoudre des problèmes », c'est participer à des activités dans lesquelles la communication et les interactions sociales, médiatisées par des signes tels que le langage, l'écriture, les gestes, les schémas, les dessins... sont considérées comme consubstantielles à l'apprentissage et au développement de la pensée (Vlassis, Fagnant & Demonty, 2015) ? En ce sens, ce sont sans doute les débats autour des problèmes et de leur compréhension, supportés par diverses schématisations traduisant cette compréhension, qui pourraient *in fine* conduire à réellement œuvrer au développement d'un processus complexe de modélisation mathématique.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

AUQUIERE, A. (2013). *Les représentations schématiques comme soutien à la résolution de problèmes arithmétiques en quatrième primaire. Étude comparative de deux approches d'aide à la construction de représentations de problèmes mathématiques.* Mémoire de Master en Sciences de l'éducation. Université de Liège, document non publié.

AUQUIERE, A., DEMONTY, I. & FAGNANT, A. (à paraître). Impact des structures sémantiques et de l'introduction de schématisations sur les performances et les démarches de résolution de problèmes. *Annales de Didactique et des Sciences Cognitives, 23.*

BECKMANN, S. (2004). Solving Algebra and Other Story Problems with Simple Diagrams: a Method Demonstrated in Grade 4–6 Texts Used in Singapore. *The Mathematics Educator*, 14(1), 42-46.

BERENDS, I.E. & VAN LIESHOUT, E.C.D.M. (2009). The effect of illustrations in arithmetic problem-solving: Effects of increased cognitive load. *Learning and Instruction, 19,* 345-353.

BROUSSEAU, G. (1990). Le contrat didactique : Le milieu. *Recherches en Didactique des mathématiques, 9,* 308-336.

COHEN, J. (1992). A power primer. *Psychological Bulletin, 112*(1), 155-159.

CSÍKOS, C., SZITÁNYI, J. & KELEMEN, R. (2012). The effects of using in developing young children's mathemat ical word problem solving: A design experiment with third-grade Hungarian students. *Educational Studies in Mathematics, 81*(1), 47-65.

DEPAEPE, F., DE CORTE, E., & VERSCHAFFEL, L. (2015). Students' non-realistic mathematical modeling as a drawback of teachers' beliefs about and approaches to word problem solving. In B. Pepin & B. Roesken-Winter (Eds.) *From beliefs to dynamic affect systems in mathematics education.* Springer: Advance in mathematics education.

DEMONTY, I., FAGNANT, A. & LEJOING, M. (2004). *Résoudre des problèmes : pas de problèmes. Guide méthologique (8-10 ans).* Bruxelles : De Boeck.

DEWOLF, T., VAN DOOREN, W., EV CIMEN, E. & VERSCHAFFEL, L. (2014). The impact of illustrations and warnings on solving mathematical word problems realistically. *The Journal of Experimental Education, 82*(1), 103-120.

DEWOLF, T., VAN DOOREN, W. & VERSCHAFFEL, L. (2017). Can visual aids in representational illustrations help pupils to solve mathematical world problems more reastically? *European Journal of Psychology of Education, 32,* 335-351.

DIEZMANN, C. M. (2002). Enhancing students' problem solving through diagram use. *Australian Primary Mathematics Classroom, 7*(3), 4-8.

DUCHARME, M. & POLOTSKAIA, E. (2008). Développement du raisonnement algébrique par resolution de problèmes textuels chez les enfants au primaire (ingénierie didactique) (Partie 1). *ENVOL, 145*, 21-28.

DUCHARME, M. & POLOTSKAIA, E. (2009). Développement du raisonnement algébrique par resolution de problèmes textuels chez les enfants au primaire (ingénierie didactique) (Partie 2). *ENVOL, 146*, 33-38.

ELIA, I. (2009). L'utilisation d'images en résolution de problèmes additifs : quel type d'images et quel rôle. *Annales de Didactique des Sciences cognitives, 14,* 5-29.

ELIA, I., GAGATSIS, A. & DEMETRIOU, A. (2007). The effects of different modes of representations on the solution of one-step additive problems. *Learning and Instruction, 17,* 658-672.

ELIA, I. & PHILIPPOU, G. (2004). The functions of pictures in problem solving. In M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 2, pp. 327–334). Bergen, Norway: University College.

FAGNANT, A. (2008). Des outils didactiques pour développer la résolution de problèmes dans l'enseignement fondamental. Aperçu des fondements théoriques et entrée au coeur de quelques activités. *Cahiers des Sciences de l'Education (Les),27-28*, 51-94.

FAGNANT, A. & AUQUIERE, A. (à paraître*).* Impact des illustrations accompagnant les problèmes problématiques : focus sur le codage des réponses. *Colloque de l'Espace Mathématique Francophone (EMF 2018)*, Paris, octobre 2018.

FAGNANT, A. & VLASSIS, J. (2013). Schematic representations in arithmetical problem solving: Analysis of their impact on grade 4 students. *Educational Studies in Mathematics*, *84*,149-168.

GAMO, S., SANDER, E. & RICHARD, J-F. (2010). Transfer of strategy use by semantic recoding in arithmetic problem solving. *Learning & Instruction, 20,* 400-410.

GAMO, S., TAABANE, L. & SANDER, E. (2011). Rôle de la nature des variables dans la résolution de problèmes additifs complexes. *L'Année psychologique, 111*, 613-640.

GERVAIS, C., SAVARD, A. & POLATSKAIA, E. (2013) La résolution de problèmes de structures additives chez les élèves du premier cycle du primaire : le développement du raisonnement. *Bulletin AMQ, 53,* 58-66.

GUSTEIN, E. & ROMBERG, T.A. (1995). Teaching children to add and subtract. *Journal of mathematical Behavior, 14*, 283-.324.

HEGARTY, M. & KOZHENIKOV, M. (1999). Types of visual-spatial representations and mathematical problem solving. *Journal of Educational Psychology, 91*(4), 684-689.

HOUDEMENT, C. (2011). Connaissances cachées en résolution de problèmes arithmétiques ordinaires à l'école. *Annales de Didactique des Sciences cognitives*, *16*, 67-96.

HOUDEMENT, C. (2014). Des connaissances fonctionnelles (mais ignorées) en résolution de problèmes arithmétiques. *Cahiers des Sciences de l'Education*, (36), 7-33.

LEVAIN, J.P., LE BORGNE, P. & SIMAR, A. (2006). Apprentissage de schémas et résolution de problèmes en SEGPA. *Revue Française de Pédagogie*, *159*, 95-109.

MELLONE, M., VERSCHAFFEL, L. & VAN DOOREN, W. (2017). The effect of rewording and dyadic interactions on realistic reasoning in solving word problems. *The Journal of Mathematical Behavior, 46*, 1-12.

NISTAL, A., CLAREBOUT, G., ELEN, J., VAN DOOREN, W. & VERSCHAFFEL, L. (2009). Conceptualising, investigating and stimulating representational flexibility in mathematical problem solving and learning: A critical review. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education, 41,* 627-636.

PANTZIARA, M., GAGATSIS, A. & ELIA, I. (2009). Using diagrams as tools for the solution of non-routine mathematical problems. *Educational Studies in Mathematics, 72,* 39-60.

POLOTSKAIA, E. (2009). *Communication de la structure mathématique du problème par les élèves du primaire. Analyse d'un scénario didactique*. Proceedings of CIEAEM 61, 178-183, University of Palermo, Italy.

POLOTSKAIA, E. & CONSULTANT, P. (2010). Des représentations graphiques dans l'enseignement des mathématiques – Deux jeux pour apprendre. *Bulletin AMQ, L*(1), 12-28.

REUTER, T., SCHNOTZ, W. & RASCH, R. (2015). Drawings and tables as cognitive tools for solving non-routine word problems in primary school. *American Journal of Educational Research, 3(11)*, 1387-1397.

RILEY, M.S., GREENO, J.G. & HELLER, J.I. (1983). Development of children's problem-solving ability in arithmetic. In H.P. Ginsburg (Ed.) *The development of mathematical thinking*. New York : Academic Press.

SAVARD, A. & POLOTSKAIA, E. (2014). Gérer l'accès aux mathématiques dans la résolution de problèmes textuels : une exploration du côté de l'enseignement primaire. *Education & Francophonie, XLII*(2), 138-157.

THEVENOT, C., BARROUILLET, P. & FAYOL, M. (2015). De l'émergence du savoir calculer à la résolution des problèmes arithmétiques verbaux. In M. Crahay & M. Dutrevis (Eds). *Psychologie des apprentissages scolaires* (pp. 169-197). Bruxelles: De Boeck.

UESAKA, Y., MANALO, E. & ICHIKAWA, S. (2007). What kinds of perceptions and daily learning behaviors promote students' use of diagrams in mathematics problem solving? *Learning and Instruction, 17,* 322–335.

VAN ESSEN, G. & HAMAKER, C. (1990). Using self-generated drawings to solve arithmetic word problems. *Journal of Educational Research, 83(6),* 301-312.

VERGNAUD, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des Mathématiques, 10(2.3)*, 133-170.

VERSCHAFFEL, L. & DE CORTE, E. (1997). Word problems : A vehicle for promoting authentic mathematical understanding and problem solving in the primary school ? In T. Nunes & P. Bryant (Eds), *Learning and Teaching Mathematics : An International Perspective* (pp. 69-97). UK : Psychology Press Ltd.

VERSCHAFFEL, L. & DE CORTE, E. (2008). La modélisation et la résolution des problèmes d'application: de l'analyse à l'utilisation efficace. In M. Crahay, L. Verschaffel, E. De Corte & J. Grégoire (Eds). (2e édition). *Enseignement et apprentissage des mathématiques. Que disent les recherches psychopédagogiques?* (pp.153-176). Bruxelles: De Boeck.

VERSCHAFFEL, L., DE CORTE, E., LASURE, S., VAN VAERENBERGH, G., BOGAERTS, H. & RATINCKX, E. (1999). Learning to solve mathematical application problems: A design experiment with fifth graders. *Mathematical Learning and Thinking, 1,* 195-299.

VERSCHAFFEL, L., GREER, B. & DE CORTE, E. (2000). *Making sense of word problems*. Lisse, Hollande : Swets & Zeitlinger.

VLASSIS, J., FAGNANT, A. & DEMONTY, I. (2015). Symboliser et conceptualiser, une dialectique intrinsèque aux mathématiques et à leur apprentissage. In M., Crahay & M., Dutrévis (Eds.), *Psychologie des apprentissages scolaires (2e édition)* (pp.221-255). Bruxelles: De Boeck.

WILLIS, G.B. & FUSON, K.C. (1988). Teaching children to use schematic drawings to solve addition and substraction word problems. *Journal of Educational Psychology*, *80*(2), 192-201.

YACKEL, E. & COBB, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458-477.

PROBLEMES ARITHMETIQUES BASIQUES : LE CŒUR DU PROBLEME

Catherine **HOUDEMENT**
LDAR (EA 4434), UA-UCP- UPD-UPEC-URN
ESPE, Université de Rouen Normandie
catherine.houdement@univ-rouen.fr

Résumé
La résolution de problèmes est toujours au cœur de l'enseignement des mathématiques de la scolarité obligatoire. Les programmes de Mathématiques 2016 (cycle 2, cycle 3 ou cycle 4) promeuvent la rencontre avec des problèmes liés à des situations issues de la vie (de classe, quotidienne) ou d'autres disciplines, des problèmes internes aux mathématiques, en appui sur un corpus de connaissances et de méthodes, des réflexes intellectuels et des automatismes. Ils mentionnent aussi des problèmes pour chercher (cycle 2, cycle 3), des activités de recherche liées à des notions ou des objets mathématiques dont la maîtrise n'est pas attendue en fin de cycle (cycle 4). Ils y associent une liste de verbes redéfinis (chercher, modéliser, représenter, raisonner, calculer, communiquer). Comment accompagner l'enseignant dans ce vaste programme ? Quelles connaissances faire passer en formation des enseignants ?

Nous nous intéresserons aux problèmes arithmétiques verbaux des cycles 2 et 3 que nous proposons d'organiser en trois types, avec un accent particulier sur les problèmes arithmétiques « basiques ».

Mots clés
Problèmes, arithmétique, résolution de problèmes

I. INTRODUCTION

Ce texte est une contribution au thème de la résolution de problèmes en cycle 2 et cycle 3 (élèves français de 6 à 12 ans, voire au-delà). Il prend appui sur l'article paru dans le numéro 100 de la revue Grand N (Houdement, 2017) et qui apporte des précisions complémentaires. Il cherche à enrichir la compréhension de ce qui se joue dans la résolution de problèmes plus qu'à développer une ingénierie. Cette contribution se situe à l'interface recherche formation.

Les problèmes sont difficiles pour les enseignants parce qu'ils ne réussissent pas à faire réussir leurs élèves. Beaucoup d'élèves n'aiment pas les problèmes parce qu'ils ne réussissent pas et ne savent pas comment faire pour réussir (Houdement, 2003). La finalité de notre étude sur les problèmes est d'avancer sur ce problème d'enseignement et de partager avec les enseignants des connaissances qui résistent à la grande variabilité interindividuelle (enseignant ; élèves), et collective (classe) et les aideraient à contrôler les choix qu'ils font ou les aides qu'ils proposent.

II. UN CONTEXTE BROUILLE

Les programmes de mathématiques, sur les trente dernières années, ont accumulé un nombre impressionnant de descripteurs pour les problèmes (Artigue & Houdement, 2007 ; Coppé & Houdement, 2010) : leur position dans les progressions thématiques (en amont, au cœur, en aval, en dehors), leur fonction pour l'apprentissage (motiver, introduire, entraîner, réinvestir, légitimer, évaluer, faire chercher…), leur forme (texte minimal ; texte alourdi d'informations ; documents authentiques ; situation vécue ; situation évoquée… , avec questions -ou pas). La multitude de descripteurs cache la nécessité d'envisager une certaine progressivité dans les « types de » problèmes à proposer aux élèves, ainsi que dans les types de gestion de telles séances. Tout cela ne rend pas la tâche facile aux enseignants.

L'idée de « méthodologie » est souvent associée à la résolution de problèmes. Tapez l'expression Résolution de problèmes dans un moteur de recherche et vous trouverez des offres de formation d'adultes qui promettent de « connaître et utiliser efficacement les différents outils qui visent la résolution des problèmes » dans le monde de l'entreprise. Bien sûr cela ne concerne pas le sujet qui nous intéresse ici, mais en réalité certaines propositions pédagogiques[1] pour aider les élèves à réussir les problèmes en général n'en sont pas si loin ! Elles supposent implicitement qu'il existerait une aptitude générale à la résolution de problèmes, indépendante des connaissances notionnelles que le problème convoque. On trouve ainsi, assez classiquement, à propos des problèmes, et en amont de leur résolution, des consignes du type : trouver la question, souligner les informations utiles, barrer les informations inutiles, voire trouver l'opération …. Or ce sont des tâches qui ne peuvent pas être faites sans résoudre le problème, elles sont partie prenante de la résolution, elles ne peuvent pas précéder la résolution. Des travaux plus anciens ont déjà mis en garde sur ces « fausses routes », (Coppé & Houdement 2002 ; Houdement 1999, 2003), mais celles-ci résistent.

Récemment les programmes ont même, sous couvent de descriptifs de la compétence Chercher, réinjecté ces idées fausses en mettant en avant les deux alinéas suivants dans *Chercher* cycle 3 et cycle 4.

> *Prélever et organiser les informations nécessaires à la résolution de problèmes à partir de supports variés : textes, tableaux, diagrammes, graphiques, dessins, schémas, etc. (Mathématiques Cycle 3, 2015, p. 199)*
>
> *Extraire d'un document les informations utiles, les reformuler, les organiser, les confronter à ses connaissances. (Mathématiques Cycle 4, 2015, p. 367)*

Ce préambule nous amène à préciser comment on réussirait à résoudre des problèmes. Dans ce but nous nous appuyons sur le modèle des schémas, notamment convoqué par Julo (1995, 2002).

[1] Cf. cet extrait de manuel de 6ème : http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/detentes/les-etapes-pour-resoudre-un-probleme.

III. COMMENT REUSSIT-ON A RESOUDRE DES PROBLEMES ?

L'objet de cette partie est de faire avancer le lecteur dans cette compréhension, en s'appuyant sur des exemples.

1. Des problèmes à résoudre

Les massifs de fleurs
Il s'agit à chaque fois de calculer le nombre de tulipes dans un massif :
2. un massif de fleurs, formé de 60 tulipes rouges et 15 tulipes jaunes ;
3. un massif de 60 rangées de 15 tulipes ;
4. un massif de 60 fleurs, formé de tulipes et de 15 jonquilles ;
5. 60 tulipes disposées en 15 massifs réguliers

Les quatre problèmes choisis (les massifs de fleurs) nous permettent de contextualiser des questions ou d'interroger des pratiques liées à la résolution de problèmes verbaux. Notre réponse est très rapide, du moins l'opération qui permet le calcul. En général ces problèmes sont « automatisés » pour des adultes. *A priori* c'est aussi ce que vise l'école pour les élèves de fin cycle 3 (France : 9 à 12 ans).

Mais d'où vient cette capacité à discerner que ces quatre problèmes relèvent d'opérations différentes, alors qu'ils sont donnés dans un même contexte et mettent en jeu les deux mêmes nombres ? Le prochain paragraphe nous éclairera sur cette question. A quoi servirait le fait de souligner des informations utiles pour un élève qui échouerait à donner une réponse ? On voit avec ces exemples les limites des tâches « aides méthodologiques » citées plus haut.

Les châtaignes de Charles ©ARMT cat.5 6 7
Charles a récolté 108 kg de châtaignes. Il les met dans trois paniers, un petit, un moyen, un grand. Les châtaignes du panier moyen pèsent le double de celles du petit panier. Les châtaignes du grand panier pèsent le double de celles du panier moyen. Après avoir rempli ces trois paniers, il lui reste quelques kg de châtaignes, exactement la moitié du poids des châtaignes du grand panier. Combien de kg de châtaignes Charles a–t-il mis dans chaque panier ? Combien de kg lui reste-il ?

Le problème « les châtaignes de Charles », extrait de la banque des problèmes de l'Association du Rallye Mathématique Transalpin (Grugnetti & Jacquet 1997) demande un plus grand temps de résolution. Des élèves de cycle 3 devront pratiquement tous construire une stratégie nouvelle, ils ne pourront pas inférer une procédure automatisée. Pour les élèves d'école primaire, nous placerons ce problème dans une autre catégorie que les massifs de fleurs, le qualifiant de « problème a-typique », alors que les problèmes de massifs de fleurs seront qualifiés de « basiques ». Ces deux termes seront mieux définis plus loin dans le texte.

2. Ce que nous apprennent des recherches de psychologie cognitive

Jean Julo (1995, 2002), psychologue cognitiviste, s'est intéressé relativement tôt aux aides à la résolution des problèmes scolaires ordinaires. Il a insisté sur l'existence de processus spécifiques de l'activité de résolution de problèmes :

> *L'accès aux connaissances et leur instanciation dans une situation donnée ne sont pas des phénomènes triviaux, même dans le cas où l'on a une bonne compréhension et une bonne pratique (entendue comme résultat d'un exercice) de ces connaissances. Ce sont des processus cognitifs ad hoc qui vont faire que l'on est capable ou non de mettre cette situation sous une forme telle que nos connaissances deviennent mobilisables pour les traiter. (Julo, 2002, p.35)*

Ces processus ont un versant représentationnel (développé ci-dessous) et un versant opératoire (évoqué souvent sous le terme de stratégies) en étroite interaction.

Les représentations d'un problème, quel qu'il soit, sont des représentations ponctuelles et occasionnelles, Julo parle de *représentations particularisées.* La représentation du problème ne se réduit pas à la compréhension de son énoncé. La nature d'un problème engage un autre type de représentation.

> *Ce sont les relations complexes entre un but donné et les conditions de réalisation de ce but (les contraintes et les aides qu'introduit l'auteur de l'énoncé) qui caractérisent ce qu'est un problème par rapport à d'autres situations de compréhension de texte. (Julo, 1995, p.16)*

L'enjeu de la résolution de problèmes est aussi spécifique :

> *C'est bien le fait de découvrir par soi-même une solution que l'on n'entrevoyait pas dans un premier temps qui est l'enjeu de cette activité particulière. (Julo, 1995, p.25)*

D'après Julo (1995), interviennent dans la résolution de problèmes des connaissances « liées directement aux situations particulières que nous avons rencontrées auparavant et à l'expérience représentationnelle que nous avons acquise à leur propos » (p.90), ce qu'il désigne sous l'expression « schémas de problèmes ».

> *Ce sont les représentations construites lors de la résolution de différents problèmes qui s'organisent progressivement en schémas2 de problèmes. (Julo 2002, p.43)*

On voit le côté récursif du modèle : résoudre un problème passe par la construction d'une représentation de ce problème et la réussite à ce problème enrichit notre mémoire des problèmes… résolus. D'après Julo (1995), la mémoire des problèmes (sous forme de schémas de problèmes) que nous avons rencontrés et résolus joue un rôle décisif dans la façon dont nous nous représentons un nouveau problème à résoudre.

Des recherches plus récentes (par exemple Sanders, 2007, Gamo et al., 2011) confirment que la seule prise en compte des raisonnements en jeu (la structure formelle du problème) ne peut pas expliquer les comportements de tous les enfants face à un problème. A structure formelle égale, le contexte du problème (par exemple s'il s'agit d'individus *ou* d'objets, si la grandeur en jeu est le Temps plutôt que la Masse ou la Longueur) peut plus ou moins favoriser la réussite ou influer sur la procédure de résolution. Julo (2002, p.41) avait déjà intégré l'influence potentielle du contexte dans son modèle explicatif et dans ses expérimentations autour de la multiprésentation (voir aussi Nguala 2005).

Il se pourrait aussi que pour un sujet, les problèmes soient d'abord représentés en mémoire par un « prototype »[3], une des trois formes supposées par Julo pour les schémas de problèmes (Julo 2002, p.35-36). Cette représentation pourrait s'enrichir au fur et à mesure de la fréquentation des adaptations de ce prototype (au sens de Robert 2008), ce qui permettrait au

[2] Attention, il ne s'agit pas de schémas graphiques, mais de schémas cognitifs : des structures cognitives qui stockées dans la mémoire à long terme, sélectionnent et traitent l'information de manière inconsciente (au sens d'automatique).

[3] De la même façon qu'en géométrie plane, le carré est d'abord mémorisé en position prototypique, c'est-à-dire avec des cotés horizontaux et verticaux ou parallèles aux bords de la feuille.

sujet de reconnaître et réussir une plus grande variété de problèmes de même structure formelle.

IV. PREMIERES CONSEQUENCES POUR L'ENSEIGNEMENT

1. Enrichir la mémoire des problèmes

Notre compréhension de la résolution de problèmes est enrichie par la notion de mémoire des problèmes (Julo, 1995, 2002). Pour un élève confronté à un problème, il y aurait deux possibilités extrêmes : soit il active dès la lecture un schéma adéquat qu'il associe, voire adapte au problème à résoudre, soit en l'absence d'instanciation d'un tel schéma, l'élève doit construire « de toutes pièces » une représentation *ad hoc* du problème. Dans notre propos ce schéma peut être lié au contexte du problème.

Ce modèle, relativement stabilisé en psychologie cognitive, change radicalement selon nous le rapport aux problèmes pour l'apprentissage et l'enseignement. **Il devient urgent et crucial d'enrichir la mémoire des problèmes de chaque élève** : l'élève disposerait ainsi de plus de schémas et face à un nouveau problème, serait plus à même de pointer des analogies avec quelque chose de déjà rencontré, au moins en partie. Cet enrichissement passe nécessairement par la rencontre des élèves avec des problèmes qu'ils mènent à terme. Or les pratiques d'enseignement donnent souvent de façon différenciée de telles occasions aux élèves : certes des problèmes leur sont proposés, mais le temps de recherche s'arrête souvent quand les meilleurs ont trouvé, les élèves qui ont des difficultés peuvent rarement mener à terme la résolution du problème. L'enseignant suppose souvent qu'assister à la correction (qu'elle soit magistrale ou proposée par l'entremise de brefs exposés d'élèves sur leurs productions) produira des effets positifs sur la prochaine résolution. Julo suppose que la source des difficultés persistantes des élèves en mathématiques est « une carence en matière de véritable occasion de résoudre des problèmes » (Julo, 2001, p.10).

Mais quels types de problèmes arithmétiques est-il urgent de faire rencontrer et mener à terme aux élèves ? Quels problèmes valent la peine d'être mémorisés au sens défini ci-dessus, pour qu'ils soient résolus de façon quasi immédiate comme les massifs de fleurs du début de cet article ?

2. Les problèmes arithmétiques basiques

Notre hypothèse est qu'il s'agit des « éléments simples » (au sens de la chimie de Mendeleiev) d'un champ notionnel, que nous appelons les « problèmes basiques ». Les problèmes basiques arithmétiques sont les problèmes qui rendent compte des raisonnements élémentaires en relation avec les quatre opérations, donc qui définissent les sens des opérations. Cela recouvre les problèmes à deux données [resp. ($2n$+1) données pour les problèmes liés à la proportionnalité], où il s'agit de déterminer une troisième valeur [resp. une $(2n+2)^{\text{ème}}$], à énoncé court, syntaxe simple, sans information superflue : les *one step problems*, objets d'étude de Vergnaud (1986, 1997) qui a réalisé un apport magistral quand il décrit les structures additives et multiplicatives. Les problèmes de massifs de fleurs cités plus haut en sont des exemples pour la fin d'école primaire.

Vergnaud (1997), Ridley & al.(2003) ont défini ce que nous considérons comme une échelle a priori de la complexité des problèmes additifs /soustractifs : des *one-step problems* (deux données numériques, trouver la troisième), à contextes identiques, avec une syntaxe simple, les mêmes nombres en jeu, sans information superflue) sont hiérarchisables en tenant compte du couple formé par la catégorie dont ils relèvent (composition d'états OU transformation additive/soustractive d'états OU comparaison additive/soustractive d'états OU …) et la place de l'inconnue : par exemple un problème de transformation négative avec recherche de l'état final est moins complexe qu'un problème de transformation positive avec recherche de l'état initial, même si les deux problèmes relèvent de la même écriture arithmétique donnant le résultat. Les problèmes multiplicatifs sont aussi hiérarchisables : Vergnaud (1997) a beaucoup œuvré dans ce sens, mais de façon plus formelle, en étudiant les emboitements de raisonnements : par exemple la réussite des problèmes de proportionnalité s'appuie sur une compréhension minimum des problèmes de comparaison multiplicative (problèmes comportant les expressions n fois plus, n fois moins), ce qui suppose que ces derniers précédent les autres dans la progression d'enseignement sur la proportionnalité.

3. Deux autres « types » de problèmes arithmétiques

Comment appeler les problèmes qui ne seraient pas *basiques* ? Il nous semble judicieux d'en distinguer deux sortes ;

- d'abord les « *problèmes complexes* » (voir paragraphe suivant) qui sont des agrégats de « problèmes basiques », à construire par le sujet. La complexité des problèmes peut venir en effet de la distance, dans l'énoncé, entre des informations qui devront être connectées pour la construction de la réponse ;
- ensuite des « *problèmes atypiques* »[4] définis justement par leur caractère non routinier, le fait qu'on suppose que les élèves ne disposent pas de stratégies connues pour les résoudre, qu'ils doivent en inventer de toutes pièces, en s'appuyant sur leurs connaissances passées, notamment leur mémoire des problèmes.

Le lecteur aura compris que les qualificatifs de basique et a-typique sont dépendants du niveau de connaissances du sujet. Par contre les textes des programmes pourraient comporter des recommandations sur les types de problèmes basiques d'un champ notionnel à tel niveau : c'est possible au moins pour les problèmes arithmétiques du primaire.

V. LES PROBLEMES COMPLEXES

Considérons le problème suivant, donné par l'enseignant en classe de CM, que nous avons spécifiquement étudié dans le cadre d'une recherche sur les connaissances mises en jeu par les élèves dans la résolution de problèmes arithmétiques ordinaires de la classe.

Au cinéma Royal Ciné[5] Au cinéma 'Royal Ciné' un adulte paye 6€ par séance et un enfant paye 4€ par séance. A la séance de l'après-midi, il y avait 50 adultes et des enfants. A la séance du soir, il y avait 15 adultes et 20 enfants. La recette de la journée est 542€. Combien y avait-il d'enfants à la séance de l'après-midi ?

[4] Notamment des « problèmes pour chercher » selon l'expression des programmes du primaire 2002.
[5] Extrait de ERMEL (1997 ; 2005). Apprentissages numériques et résolution de problèmes CM1. Paris : Hatier.

Ce problème n'est pas un problème basique, mais un agrégat de problèmes basiques. Un travail du résolveur est en effet de construire des sous-problèmes (pas nécessairement basiques au sens *one step problems*) qui soient calculables (*id est*, dont on puisse obtenir la réponse avec les données fournies). Le résolveur doit donc (re)connaitre des problèmes calculables, même si tous le lui serviront pas nécessairement pour la réponse finale. Les problèmes basiques sont ici les plus « petits » problèmes (irréductibles) calculables. Illustrons par le tableau ci-dessous (Figure 1).

Exemples de sous problèmes basiques calculables	Exemple de suites (de sous-problèmes) qui conduisent à la réponse
Séance du soir : nombre de personnes Séance du soir : prix que payent les adultes Séance du soir : prix que payent les enfants Séance du soir : prix payé par le public Séance de l'après-midi : prix que payent les adultes Deux séances : nombre d'adultes Deux séances : prix que payent les adultes Etc.	Recette du soir, puis recette de l'après-midi, puis recette de l'après-midi venant des adules, puis venant des enfants, et enfin nombre d'enfants de l'après-midi. OU Recette venant des adultes, puis recette venant des enfants, puis nombre total d'enfants venus, enfin nombre d'enfants de l'après-midi.

Figure 1 : Exemples de sous-problèmes à construire par le résolveur.

Construire ces problèmes nécessite, au-delà du calcul, de mettre en relation, de connecter des informations (souvent éloignées les unes des autres dans le texte). Il s'agit aussi de savoir quels problèmes sont calculables, ce qui nécessite d'avoir mémorisé antérieurement des problèmes basiques résolus. Nous renvoyons le lecteur à Houdement (2017) sur la nécessité pour l'élève de savoir « qualifier » le résultat calculé pour avancer vers la réponse finale.

Dans ce texte, nous ne pointons pas les inférences nécessaires à la compréhension du texte (liée à la construction de la représentation du problème), ni le fait que les calculs à faire puissent être assez différents (nombres en jeu notamment) selon les choix du résolveur.

VI. VERS UN PROGRAMME DE RECHERCHE, DE FORMATION

Il est donc urgent de développer des programmes de recherche en didactique des mathématiques qui visent la réussite des élèves de cycle 2 et cycle 3 sur les « problèmes arithmétiques basiques ». Les pistes sont nombreuses : organiser des milieux matériels permettant des rétroactions sur les réponses ; amener les élèves à pointer des ressemblances entre les problèmes en leur proposant, non pas un seul, mais une série de problèmes vue comme un tout ; amener les élèves à pointer des ressemblances entre les problèmes en s'appuyant sur les « stratégies gagnantes » et les consigner dans un cahier de problèmes ; considérer les écritures arithmétiques comme une conclusion nécessaire à tout problème (indépendamment du fait, non obligatoire, qu'elles permettent de trouver le résultat) ; développer des outils sémiotiques d'aide à la construction de la représentation du problème ou d'une heuristique (schémas, tableaux…) ; solliciter et proposer systématiquement des reformulations oral *versus* écriture arithmétique en ligne ; travailler en décroché les transformations d'écritures, additives *versus* soustractives, multiplicatives *versus* divisives[6].

Il est aussi nécessaire d'éveiller la vigilance des enseignants et de ne pas les engager à suivre de propositions d'aide à la résolution de problèmes qu'on sait, *a priori*, sans effet notoire.

Une question éthique se pose dans la communauté 'recherche en didactique et formation': est-il possible que le formateur et/ou chercheur en didactique, reste honnête vis-à-vis des enseignants et puisse dire : l'état des travaux scientifiques ne nous permet pas encore de proposer des réponses robustes sur cette question !

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ARTIGUE, M. & HOUDEMENT, C. (2007). Problem solving in France: didactic and curricular perspectives, *Zentralblatt der Didaktik der Mathematik, 39,* 365–382.

COPPE, S. & HOUDEMENT, C. (2002). Réflexions sur les activités concernant la résolution de problèmes à l'école primaire, *Grand N, 69*, 53–63.

COPPE, S. & HOUDEMENT, C. (2010). Résolution de problèmes à l'école primaire : perspectives curriculaire et didactique. In *Actes du 36ème Colloque des formateurs d'enseignants du premier degré en mathématiques* (pp.48–71). COPIRELEM Auch 2009. ARPEME.

GAMO, S., TAABANE, L. & SANDER, E. (2011). Rôle de la nature des variables dans la résolution de problèmes additifs complexes. *L'Année psychologique*, *111*, 613-640.

GRUGNETTI, L. & JAQUET, F. (1997-98). La résolution de problèmes par classes. *Grand N, 61,* 61–69.

HOUDEMENT, C. (1999). Le choix des problèmes pour la résolution de problèmes. *Grand N, 63,* 59–76.

HOUDEMENT, C. (2003). La résolution de problèmes en question. *Grand N, 71,* 7–23.

HOUDEMENT, C. (2009). Une place pour les problèmes pour chercher, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 14*, 31–59.

HOUDEMENT, C. (2017). Résolution de problèmes arithmétiques à l'école. *Grand N, 100,* 59–78.

JULO, J. (1995). *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques. Un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement*. Presses Universitaires de Rennes.

JULO, J. (2001). Aider à résoudre des problèmes. Pourquoi ? Comment ? Quand ? In *Actes du 27ème Colloque des formateurs d'enseignants du premier degré en mathématiques* (pp. 9–28). COPIRELEM Chamonix 2000. IREM de Grenoble.

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE (2015). Programme de mathématiques cycle 3 ET Programme de mathématiques cycle 4. *Bulletin officiel spécial n°11 du 26 novembre 2015*. En ligne http://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?pid_bo=33400

NGUALA, J.B. (2005). La multi-présentation. Un dispositif d'aide à la résolution de problèmes. *Grand N*, 76, 45–63.

RILEY,M.S., GREENO, J.G. & HELLER, J.I. (1983). Development of children's problem-solving in arithmetic. In H.P. Ginsburg (Ed.) *The development of mathematical thinking* (pp.153–196). New-York: Academic Press.

ROBERT, A. (2008). Une méthodologie pour analyser les activités (possibles) des élèves en classe. In F. Vandenbrouck (coord.) *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp.45–57). Paris : Octarès Éditions.

SANDER, E. (2007). Manipuler l'habillage d'un problème pour évaluer les apprentissages. *Bulletin de Psychologie, 60*, 119–124.

VERGNAUD, G. (dir. 1997; 2001). *Le Moniteur de Mathématiques cycle 3. Résolution de problèmes.* Paris: Nathan.

[6] Il s'agit du nécessaire travail pré-algébrique : savoir transformer 85 + ? = 113 en 113 - 85 = ? ; savoir transformer 15 x ? = 135 en 135 : 15 = ?

UNE PERSPECTIVE INTERPRETATIVE SUR LA RESOLUTION DE PROBLEMES ARITHMETIQUES : LE CADRE A-S^3

Emmanuel **SANDER**

Université de Genève, Laboratoire IDEA (Instruction, Développement, Education, Apprentissage)

emmanuel.sander@unige.ch

Résumé

Cet article a pour objet la présentation du cadre A-S^3, fondé sur la distinction entre trois formes d'analogies - de *substitution*, de *scénario* et de *simulation*, interdépendantes mais dissociables, qui influent sur la résolution de problèmes arithmétiques, facilitant, ou au contraire faisant obstacle à, la résolution. Un énoncé de problème fait l'objet d'une interprétation qui repose sur un encodage orienté par les connaissances de la vie quotidienne et qui conduit à se focaliser sur certaines caractéristiques et à en ignorer d'autres. Un énoncé s'avère sujet à une multiplicité de perspectives, chacune pouvant orienter l'élaboration d'une stratégie de résolution ou fonder le transfert d'une stratégie transposée d'un problème résolu antérieurement. Un recodage sémantique est susceptible de conduire une interprétation inadéquate à évoluer au profit d'une autre plus pertinente. Les implications sur le plan de l'élaboration de progressions d'apprentissage et d'évaluations sont discutées.

Mots clés

Résolution de problème, apprentissages arithmétiques, analogie, conceptions intuitives, stratégies informelles, recodage sémantique

I. INTRODUCTION

L'objet de ce texte est de proposer un cadre pertinent sur le plan didactique, s'inscrivant dans l'approche de l'analogie que nous avons développée par ailleurs (Hofstadter & Sander, 2013), applicable à la résolution de problèmes arithmétiques à énoncés verbaux, à la fois dans la perspective de rendre compte des difficultés rencontrées par les élèves, de favoriser l'enseignement de notions mathématiques et d'évaluer les acquisitions de connaissances. La résolution de problèmes y est considérée comme jouant un rôle primordial non seulement dans la mise en œuvre mais également dans la construction même des notions mathématiques.

Le cadre A-S^3 (Sander, 2016a, 2016b) met en avant trois formes d'analogies – de *substitution*, de *scénario* et de *simulation*, interdépendantes mais dissociables, supposément influentes sur la résolution d'un problème arithmétique[1]. Un énoncé de problème y fait l'objet d'une interprétation par un solveur. Cette interprétation repose sur un encodage selon

[1] Tout au long du texte, la formulation « problème arithmétique » désignera un « problème arithmétique à énoncé verbal ».

certaines dimensions dépendantes de connaissances issues de la vie quotidienne – telles que le fait que des vases sont dans un rapport de contenance avec des fleurs. Elle intègre certaines caractéristiques d'un énoncé et en ignore d'autres, contraignant ainsi les stratégies de résolution envisageables et le transfert d'apprentissage, car seules les stratégies compatibles avec l'interprétation du solveur sont susceptibles d'être mises œuvres, et un transfert de stratégie n'est réalisable que si les interprétations de chacun des énoncés concernés sont appariables.

L'approche proposée ici met l'accent sur la diversité des grilles de lecture d'un même énoncé, chacune traduisant un certain encodage de cet énoncé. Les typologies de problèmes arithmétiques les plus connues (Vergnaud, 1982 ; Riley, Greeno & Heller, 1983, pour les problèmes à structure additive à une étape ; Vergnaud, 1988 ; Greer, 1992, pour les problèmes à structure multiplicative) sont généralement envisagées comme s'appliquant aux énoncés eux-mêmes alors que la conception interprétative introduite ici envisage à l'inverse qu'un même énoncé puisse être, selon son encodage, assigné à différents items d'une typologie, ce qui traduit sa polysémie intrinsèque. Cette dernière est vue comme un levier d'apprentissage car une même situation devient sujette à une diversité de perspectives adoptables, chacune pouvant ancrer l'élaboration d'une stratégie de résolution ou fonder le transfert d'une stratégie transposée d'un problème déjà résolu.

Dans cette optique, l'élaboration de progressions d'apprentissage peut s'envisager à travers des activités en classe qui favorisent la construction de nouvelles interprétations par l'élève, qui suscitent la prise en compte de caractéristiques ignorées jusque-là, bien que mathématiquement pertinentes, ou qui aboutissent à l'occultation de propriétés mathématiquement non pertinentes, quoique saillantes sur le plan de la sémantique quotidienne. En effet, une interprétation d'un énoncé est susceptible de mettre en valeur des propriétés non pertinentes mais saillantes, pouvant faire obstacle à la résolution. Par exemple, dans le problème « Paul avait 8 billes. Il en donne 5 à Pierre. Combien lui en reste-t-il ? », dont l'objet est de déterminer une quantité restante, la caractéristique saillante de recherche du résultat d'une perte peut rendre difficile la perception que l'addition et la soustraction sont des opérations réciproques car l'idée qu'en ajoutant ce qui reste à ce qui a été perdu on retrouve la valeur d'origine n'est pas immédiate – ce dernier type où il s'agit de retrouver la valeur initiale par une addition est d'ailleurs l'un des problèmes additifs les plus difficiles en début d'école primaire. La prédominance de l'analogie de substitution de la soustraction comme recherche de la quantité restante peut ainsi expliquer la difficulté de ces élèves à lier « 5+3=8 » et « 8-5=3 » ; l'équivalence entre la forme additive « 5+3=8 » et la forme soustractive « 8-5=3 » ne semble absolument pas perçue en début de primaire (Baroody, 1999).

En revanche, la réciprocité de l'addition et de la soustraction sera plus saillante dans un énoncé de comparaison tel que « Hugo a 2 billes, Théo en a 7 de plus, combien Théo a-t-il de billes ? », qui rend plus apparent que l'opération réciproque à l'ajout de 7 à la quantité de Hugo pour obtenir celle de Théo est le retrait de 7 à la quantité de Théo pour obtenir celle de Hugo. Un énoncé tel que « J'ai 2 pommes et 6 oranges. Combien de fruits ai-je en tout ? » rend quand à lui saillant la commutativité de l'addition, car le fait de débuter par les oranges ou les pommes dans cette réunion de fruits paraît indifférent, contrairement au scénario précédent de comparaison où les statuts diffèrent entre la valeur du référent et le terme de la comparaison, rendant difficile de percevoir que l'interversion des deux valeurs conserve le résultat. Ce phénomène incite à introduire les notions mathématiques par des situations mettant au premier plan des propriétés pertinentes sur le plan mathématique et dépourvues tant que possible de propriétés saillantes non pertinentes, qui biaisent le sens de la notion. Sur un plan plus métacognitif, cela oriente vers des activités qui favorisent la prise de conscience par les élèves qu'un même énoncé peut se lire de plusieurs façons et vers une tentative de lecture alternative lorsqu'une interprétation initiale conduit à l'impasse. Par exemple, dans l'énoncé « Hugo a 2 billes, Théo en a 7 de plus, combien Théo a-t-il de billes ? », la valeur 7 peut être interprétée comme celle d'un écart, ce qui rend saillant la réciprocité de l'addition et de la soustraction, comme nous venons de le voir. Une autre interprétation de cette même valeur 7 est qu'il s'agit de la quantité de billes manquant à Hugo pour qu'il en ait autant que Théo. Cette lecture donne un statut quasiment symétrique aux deux valeurs, qui désignent cette fois le cardinal d'un sous ensemble de 2 billes et celui d'un autre de 7 billes, ce qui peut alors légitimer la commutativité. Ainsi une certaine lecture de cet énoncé favorise la perception de la réciprocité des opérations de soustraction et d'addition, tandis qu'une autre est favorable à celle de la commutativité de l'addition. Un élève qui serait en mesure d'adopter sans difficulté l'une et l'autre de ces lectures et de passer aisément de l'une à l'autre pourrait saisir ces deux aspects. Selon nous (Hofstadter & Sander, 2013), ce phénomène est de même nature que celui de recatégorisation qui permet à une personne de passer d'une catégorisation à une autre de manière flexible, le plus souvent inconsciemment, en fonction du contexte et en particulier du but. Par exemple, une chaise suscite typiquement un usage de siège, mais peut aisément être recatégorisée en objet sur lequel il est possible de monter si le besoin s'en fait sentir, pour changer par exemple une ampoule ; elle peut aussi être catégorisée comme meuble lors d'un déménagement, en objet inutile et encombrant lors d'un vide grenier, en porte veste, en projectile lors d'une crise de colère aigue… Nous envisagerons dans ce texte cette activité de construction d'interprétations alternatives à travers la notion de recodage sémantique des énoncés de problèmes arithmétiques. Un tel recodage sémantique serait susceptible de conduire une interprétation inadéquate (une lecture figée de 7 comme valeur de l'écart qui occulterait la commutativité) à évoluer au profit d'une autre plus pertinente (la perception de 7 comme un ensemble de billes latent, dont le statut serait homologue à celui de l'autre quantité de billes, favorisant la perception du caractère commutatif de l'addition). Préalablement à la présentation du cadre A-S[3] et des activités de recodage sémantique, nous précisons la notion d'analogie.

II. L'ANALOGIE COMME PROCESSUS ADAPTATIF TRANSVERSAL

Une acception contemporaine de cette notion est qu'une analogie « *rend possible de comprendre une situation [la cible] dans les termes d'une autre [la source]* » (Holyoak & Thagard (1995, p. 5). Ainsi, une enfant de 2 ans qui dit « J'ai déshabillé l'orange » (Duvignau, 2003) alors qu'elle l'a épluché, a réalisé une analogie dont la cible est la situation d'épluchage d'orange et la source la notion de déshabillage. L'analogie s'inscrit comme un mécanisme psychologique adaptatif fondé sur la référence au connu pour appréhender la nouveauté (Gick & Holyoak, 1983). Toute situation dans laquelle un individu se trouve comportant une part de singularité, l'expérience ne peut être capitalisée que par ressemblance avec un existant antérieur ; la situation est appréhendée à travers le prisme d'un analogue. Tout comme son expérience du déshabillage donne à Camille un prisme à travers lequel appréhender l'épluchage de son orange, c'est ainsi qu'un individu bénéficie de ses expériences passées. L'analogie conjugue un faible coût cognitif – car la situation source est mobilisée comme cadre interprétatif sans qu'il y ait besoin de construire une structure représentationnelle propre, ce qui serait potentiellement plus coûteux – et un fort pouvoir inférentiel dans la mesure où une fois une source identifiée, les connaissances associées à cette source peuvent être projetées sur la cible et constituer autant d'inférences qui enrichissent la perception de cette cible et auxquelles il aurait fallu aboutir autrement en l'absence de source. Selon la pertinence de la source d'analogie dans un contexte donné, ces inférences peuvent être fécondes ou, à l'inverse, fourvoyer.

Les travaux sur les métaphores conceptuelles, dont le voisinage conceptuel avec l'analogie a été amplement noté (Leary, 1990), montrent l'omniprésence et la persistance de ce phénomène d'appréhension d'une notion (la cible de la métaphore) par le biais d'une autre (sa source). Alors que le vocable d'analogie met l'accent sur la similitude structurale entre le source et la cible (le « rapport » existant, en se fondant sur l'étymologie du terme analogie), celui de métaphore met l'accent sur le transfert opéré (le « transport » sur le plan étymologique). L'idée principale qui unit ces notions est celle d'une cible perçue selon le prisme d'une source en s'appuyant sur la ressemblance ; l'idée selon laquelle une métaphore s'appuie sur un rapport d'analogie n'est pas sujet à controverse. Selon Lakoff et Johnson (1980 ; voir également Lakoff & Nunez, 2000 spécifiquement sur les mathématiques), notre système conceptuel est métaphorique par nature : une notion un tant soit peu abstraite ne peut être conçue autrement que métaphoriquement, la source de la métaphore étant une notion concrète et familière. Ces métaphores, généralement inconscientes, sont qualifiées de conceptuelles pour marquer qu'elles sont « avant tout, affaire de pensée » (Lakoff & Johnson, 1980, p. 153). Elles se repèrent en particulier dans les expressions langagières ; par exemple la métaphore conceptuelle « Un DEBAT est un COMBAT » est mise en évidence par l'existence d'expressions du langage commun empruntées au champ lexical du combat pour qualifier un débat, comme « *Camper sur ses positions* », « *Se retrancher derrière un argument* », « *Combattre une idée* », « *Etre offensif dans son argumentation* », « *Capituler face à un débatteur* », « *Rendre les armes* face à ses détracteurs », « *Repousser les assauts* de ses opposants »…. Du fait que les sources privilégiées de métaphores sont ancrées dans l'expérience concrète, cette théorie place les métaphores sensorielles, comme celles liées à la perception visuelle, au premier rang. Par exemple, la métaphore conceptuelle « COMPRENDRE est VOIR » se manifeste par des expressions qui, pour qualifier la compréhension, s'inscrivent dans ce registre de la perception visuelle, telles que : « *Changer de point de vue* », « *Voir d'un nouvel œil* », « *Adopter un autre regard* », « *Avoir une illumination* », « *Trouver une idée claire, brillante* », « *Bien vu !* », « *C'est encore flou* », « *Changer de perspective* »… Loin d'être de simples moyens pour communiquer à propos de notions abstraites, ces métaphores conceptuelles sont considérées comme constitutives des notions elles-mêmes. Ainsi, la notion de débat serait intrinsèquement pénétrée de celle de combat, celle de compréhension de celle de vision, si bien qu'expurger une source de métaphore conduirait à appauvrir conceptuellement la notion, voire serait inconcevable tellement l'une se construit sur l'autre. Cette approche n'est pas restreintes aux savoirs profanes et concerne aussi les champs disciplinaires. Elle a été en particulier déclinée pour la philosophie (Lakoff & Johnson, 1999) et pour les mathématiques (Lakoff et Nunez, 2000).

Deux constats ayant une portée importante sur le plan de l'éducation ont émergé de travaux sur l'analogie (Hummel & Holyoak, 1997 pour une revue ; voir aussi Richland & Simms, 2015). La première est que le transfert analogique est potentiellement efficace dans la mesure où le fait d'avoir résolu un certain problème favorise en général la résolution d'un autre problème de même structure : disposer de sources d'analogie efficientes est un atout, car celles-ci sont mobilisables pour résoudre des problèmes analogues. Toutefois, de nombreux travaux ont modulé ce constat d'efficacité du transfert analogique car ce dernier est particulièrement marqué lorsque la situation source est explicitement indiquée à l'élève, par exemple lorsqu'un enseignant indique quel problème préalablement résolu en classe est susceptible d'aider à résoudre le problème en cours. En revanche, lorsque l'élève cherche à identifier un problème source approprié, des écueils existent du fait d'un accès en mémoire fondé parfois sur des indices inappropriés (Ross, 1989 ; Trench & Minervino, 2015). Ainsi, un élève ayant appris à résoudre un problème respectant un certain principe de solution peut se trouver démuni pour l'identifier comme source d'analogie pertinente. Un transfert négatif est même parfois observé, caractérisé par la mise en œuvre de la structure de solution d'un problème superficiellement ressemblant mais structurellement non analogue (Novick, 1988). Un double enjeu éducatif émerge donc, celui de la construction de sources d'analogie pertinentes et celui de la possibilité de leur évocation à bon escient.

Ce double enjeu est reflété par deux facettes du développement des concepts, l'une comme l'autre étroitement liées aux processus d'analogie. La question des liens entre analogie et concepts n'est pas nouvelle (Turner, 1988 ; Ramscar & Pain, 1996), et nous avons développé (Hofstadter & Sander, 2013) un cadre qui les associe étroitement. Chaque concept y est évoqué par les analogies qu'établit notre système cognitif afin d'interpréter ce qui est nouveau et inconnu dans des termes anciens et connus. Outre ce rôle de l'analogie dans l'évocation d'un concept, le développement conceptuel est lui-même piloté par des analogies. Un mécanisme d'extension catégorielle conduit en effet chaque nouvelle situation rencontrée, une fois associée par analogie à une catégorie mentale préexistante, à transformer cette même catégorie ; un tel mécanisme dynamique et cumulatif oriente le développement conceptuel (Hofstadter & Sander, 2013 ; Sander, sous-presse). Alors que ce dernier est soumis à l'arbitraire des expériences de vie individuelles pour les concepts quotidiens, un enjeu éducatif majeur est que l'enseignement oriente cette construction lorsqu'il s'agit de notions scolaires.

III. Le cadre A-S^3

Le cadre A-S^3 distingue trois formes d'analogies intuitives[2], les analogies de *Substitution*, de *Scénario* et de *Simulation*. Ces trois formes d'analogies reposent sur des connaissances extra-mathématiques, issues de la vie quotidienne, préalables à l'enseignement. Ces analogies orientent les interprétations de l'énoncé par l'élève ; peuvent être facilitatrices comme obstructives selon qu'elles suscitent des inférences pertinentes et favorisent la réussite ou à l'inverse des inférences inappropriées et y font alors obstacle. Les identifier permet de se prononcer sur la plus ou moins grande difficulté de résolution d'un problème. Elles peuvent être mises à profit pour élaborer des progressions d'apprentissage et favoriser une montée en abstraction. Leur prise en compte peut également orienter l'élaboration d'évaluations (Sander, 2007), dans la mesure où les succès ne s'interprètent pas de manière identique selon qu'ils sont obtenus « avec le support de » ou « malgré l'obstacle engendré par » tel ou tel type d'analogie.

1. Les Analogies de Substitution

A la différence des analogies de Scénario et de Simulation, les analogies de substitution portent sur les notions mathématiques elles-mêmes. Elles sont illustrées dans ce texte principalement avec les quatre opérations élémentaires mais peuvent être envisagées pour toute notion mathématique. Elles se repèrent par le fait qu'une notion est conçue par analogie avec une connaissance familière. La terminologie d'analogie de substitution provient du fait que cette connaissance familière se substitue à la notion disciplinaire pour l'individu, qui

[2] Ces analogies sont qualifiées d'intuitives au sens de Fischbein (1987), comme une « cognition qui apparaît subjectivement comme évidente, directement acceptable, holistique, coercitive et extrapolable ».

considère qu'il traite de la notion scientifique alors qu'il s'appuie en fait sur l'analogie de substitution. Une analogie de substitution est attachée à un domaine de validité (Sander, 2008), qui désigne le champ de coïncidence entre la notion mathématique et la source d'analogie et marque les cas où la substitution conduit au succès. Une analogie de substitution est facilitatrice à l'intérieur du domaine de validité et obstructive à l'extérieur. Cette notion d'analogie de substitution est en phase avec celle de modèle tacite (Fischbein, 1989) et de métaphore conceptuelle (Lakoff & Nunez, 2000). Relativement à ces deux cadres, elle offre l'intérêt d'ancrer ces analogies de substitution dans une théorie des concepts, car les sources d'analogie sont des concepts quotidiens. En particulier, il devient pertinent de s'intéresser à la structure même des concepts source avec par exemple la présence de prototypes et de membres atypiques, et à leur développement, avec la possibilité que la source même de l'analogie soit sujette à développement (Sander, 2017).

Prenons le cas de la soustraction et la tâche d'inventer un problème de soustraction qui puisse se résoudre par l'opération 8-3=5. De manière quasi systématique, un énoncé tel que « Paul (Hugo, Théo, Nathan, Léa, Marie, Judith, etc…) a 8 bonbons (billes, gâteaux, pommes, etc…). Il/Elle en donne (mange, perd, etc…) 3 à (pendant, etc…). Combien lui en reste-t-il ? » est proposé. En dépit de la diversité des scénarios inventés, une structure commune est présente, qui manifeste l'existence de l'analogie de substitution selon laquelle soustraire c'est perdre, retirer, enlever (Fischbein, 1989 ; Lakoff & Nunez, 2000). Plus précisément, une totalité est donnée, dont une partie est retranchée et la question porte sur la partie subsistante (« Combien en reste-t-il ? »). Il apparaît donc que l'analogie de substitution de la soustraction est la recherche de la quantité restante après qu'un événement conduise à faire décroître une quantité initiale donnée. Plus de 90% des élèves de fin d'école primaire, de Master en psychologie ou des enseignants d'école primaire proposent des énoncés obéissant strictement à cette forme (Sander, 2016b, sous-presse). La tâche d'inventer un problème d'addition qui puisse se résoudre par l'opération 5+3=8, va quant-à-elle conduire majoritairement à des énoncés ayant la forme: « Paul (Hugo, Théo, Nathan, Léa, Marie, Judith, etc…) a 5 bonbons (billes, gâteaux, pommes, etc…). Il/Elle en reçoit (gagne, etc…) 3 à (pendant, etc…). Combien en a-t-il en tout ? ». L'analogie de substitution de l'opération d'addition est celle de l'ajout (Fischbein, 1989; Lakoff & Nunez, 2000). Plus précisément deux formes d'ajout prédominent dans le cadre de cette analogie de substitution. Soit (i) un état initial est donné, ainsi qu'un accroissement et la question porte sur l'état résultant, soit (ii) deux parties sont données, qui forment un tout et la question porte sur la valeur de ce tout (Sander, 2016b, sous-presse).

En ce qui concerne la multiplication, les tâches « Inventer un problème de multiplication » et « Définir l'opération mathématique de multiplication » montrent, pour la première d'entre elles, que la quasi-totalité des problèmes inventés décrivent une réplication sommative, par exemple « J'ai 3 paquets de 10 gâteaux. Combien cela fait-il de gâteaux en tout ? », qui peuvent se résoudre comme des additions répétées (Fischbein, 1989 ; Lakoff & Nunez, 2000 ; Sander, 2008). De manière systématique, une des valeurs est un nombre entier et a le statut de multiplicateur. Les définitions construites et unanimement acceptées par des étudiants à l'université reflètent cette conception d'addition répétée (Hofstadter & Sander, 2013) : « Une multiplication est une addition réitérée d'un nombre, un nombre de fois donnée. » ; « Multiplier consiste à ajouter à un chiffre donné ce même chiffre autant de fois qu'on le souhaite. » ; « Multiplier, c'est additionner un certain nombre à lui-même autant de fois que le nombre par lequel on le multiplie l'indique. » ; « La multiplication est un calcul dans lequel on choisit combien de fois on additionne une quantité par elle-même. » L'analogie de substitution de la division est la recherche de la taille de la part dans un contexte de partage équitable (Fischbein, 1989; Lakoff & Nunez, 2000). A la question "Inventer un problème de division" tant les élèves français de 12 ans à 13 ans que des adultes étudiants à l'université en France proposent à plus de 90% de problèmes de partage équitable où la question porte sur la taille de la part (Audo & Sander, 2008 ; Sander, 2008), qui mène à un résultat dans la même unité que la quantité initiale. Quelques exemples d'énoncés produits par des étudiants à l'université (Hofstadter & Sander, 2013) reflètent cette conception de la division : « 4 amis se partagent 12 bonbons. Combien de bonbons chaque ami recevra-t-il ? » ; « Au marché, une maman achète 20 pommes pour ses 5 enfants. Combien de pommes chaque enfant aura-t-il ? » ; « Pour les vacances, on prépare 20 kilos de vêtements à mettre dans 4 valises. Combien va peser chaque valise ? » ; « Un terrain de 90 m2 doit être divisé en 6 parcelles de superficie égale. Quelle sera la superficie de chaque parcelle ? » ; « On utilise 12 mètres de tissu pour fabriquer 4 robes. Combien de mètres de tissu faut-il pour fabriquer une seule robe ? »

Le caractère facilitateur ou obstructif des analogies de substitution dépend de l'inscription ou non de la situation à l'intérieur de champ de validité. Pour la soustraction, la tâche d' « Inventer un problème de soustraction dont la solution est 8-3=5 et dans lequel on ne perd rien, on ne fait que gagner » met en impasse le plus souvent les élèves d'école primaire, voire des adultes, alors que des situations tout aussi concrètes que les précédents énoncés de soustraction existent, qui ont simplement la caractéristique de ne pas se conformer à la recherche de reste. Par exemple, un énoncé orienté vers une recherche de gain, tel que « Paul a 3 billes. Il en gagne pendant la récréation et maintenant il en a 8. Combien de billes a-t-il gagnées ? » répond à la tâche précédente mais est rarement envisagé. Ainsi, l'analogie de substitution donne sens à la notion, mais induit une focalisation sur un seul type de situation. Elle est nécessaire mais limitante, car elle éclipse la diversité des situations de soustraction (Sander, 2008) : sur la douzaine de catégories de problèmes soustractifs à une étape que comportent les typologies de problèmes qui ont émergé dans les années 1980 (Vergnaud, 1982 ; Riley, Greeno & Heller, 1983), plus de 90% des propositions se concentrent ainsi sur la seule catégorie des recherches de reste dans une situation de retrait. Des situations de comparaison où l'on cherche la valeur de l'écart ou d'un terme de la comparaison, des situations de recherche de gain, ou des situations de recherche d'une partie manquante connaissant la totalité et l'autre partie, ne sont quasiment jamais proposées, ce qui montre la prégnance de l'analogie de substitution. On note aussi qu'un énoncé tel que « Lors d'une course, 108 coureurs prennent le départ. Il y a beaucoup d'abandons : 85 coureurs seulement terminent la course. Combien de coureurs ont abandonné ? », proposé en France par la Direction de l'Evaluation de la Prospective et de la Performance (DEPP) auprès d'élèves de CE2 (8 ans) donne lieu à seulement 25% de réussites (DEPP 2014 ; Sander & Richard, 2017). Bien qu'il s'agisse d'un contexte de diminution car des coureurs abandonnent, cette situation sort du domaine de validité de l'analogie de substitution car la valeur du reste est connue et la question porte sur la quantité ôtée. Le cadre A-S^3 rend compte du fait qu'un énoncé questionnant non sur le nombre d'abandons mais sur le nombre de coureurs atteignant la ligne d'arrivée serait nettement mieux réussi (Vergnaud, 1981/1994). On voit poindre deux modes d'intervention scolaire. L'un conduisant à ce que la notion de soustraction embrasse d'autres cas que ceux de recherche de reste, l'autre permettant à un élève de lire différemment l'énoncé et de pouvoir y percevoir une recherche de reste par un glissement d'interprétation (en l'occurrence, que ceux qui ont abandonné la course sont ceux qui restent une fois ôtés ceux qui l'ont terminée).

En ce qui concerne l'addition, la tâche « Inventer un problème d'addition dont la solution est 5+3=8 et dans lequel on ne gagne rien, on ne fait que perdre » laisse sans proposition la grande majorité des adultes, alors qu'un énoncé tel que « Paul avait des billes. Il en perd 3 pendant la récréation et maintenant il lui en reste 5. Combien de billes avait-il avant la récréation ? » y répondrait. Là encore, une telle situation est tout aussi concrète que celles des problèmes d'addition proposés en l'absence de contrainte. La difficulté provient du fait qu'elle nécessite de ne pas se restreindre au cadre de l'analogie de substitution qui assimile l'addition à la recherche du résultat d'un accroissement ou à un ajout de deux parties. Parmi les problèmes additifs à une étape, les deux types qui s'inscrivent dans le champ de validité de l'analogie de substitution sont résolus par la totalité des élèves de 6 ans tant que les valeurs numériques sont suffisamment faibles (Riley, Greeno & Heller, 1983). C'est le cas des problèmes « Paul avait 3 billes. Il en gagne 5 à la récréation. Combien a-t-il de billes maintenant ? » et « Paul a 3 billes. Pierre a 5 billes. Combien ont-ils de billes ensemble ? ». En revanche, hors du champ de validité de l'analogie substitution, les performances chutent. Ainsi, le problème « Paul avait des billes. Il en perd 3 pendant la récréation et maintenant il lui en reste 5. Combien de billes avait-il avant la récréation ? » n'est réussi qu'à 28%, tandis que « Paul a 3 billes. Pierre a 5 billes de plus que Paul. Combien de billes Pierre a-t-il ? » obtient 17% de réussite au même âge, en dépit du mot « plus » dans l'énoncé dont on pourrait attendre qu'il déclenche une addition par un simple effet de mot clé. Ce phénomène illustre le fait que la conformité à l'analogie de substitution paraît être un facteur majeur de réussite.

Concernant la multiplication, l'analogie de substitution conduit à ce qu'un nombre entier soit systématiquement introduit lors de l'invention d'un problème et que les définitions acceptées de manière consensuelles soient celle d'une addition réitérée, qui ne s'applique pourtant pas pour les produits en général, par exemple lors du calcul de la surface d'un rectangle ou d'une distance parcourue connaissant la vitesse et la durée. Cette analogie conduit également à la croyance erronée que multiplier rend plus grand et rend difficile l'invention d'un problème où multiplier rend plus petit. Elle rend aussi difficile à justifier la commutativité de la multiplication dans la mesure où l'analogie de substitution légitime les notions de multiplicateur et de multiplicande en faisant jouer un rôle asymétrique aux valeurs du produit ; dans le cadre de la multiplication vue comme addition réitérée, la justification que 3x5=5x3 (5+5+5 = 3+3+3+3+3) ne va alors pas de soit. Les explications données par les élèves et certains adultes sont souvent de l'ordre de la règle arbitraire (« parce qu'on a le droit de le faire » ; Sander, 2008). La difficulté de résolution d'un problème de multiplication dépend également de sa conformité à l'analogie de substitution. Ainsi, l'énoncé « Si un gallon d'essence coûte £1,27, combien coûte 0,22 gallon ? » est réussi seulement par 44% de collégiens anglais de 12 à 15 ans alors que la réussite atteint 100% si c'est le prix d'une valeur entière de gallons qui est recherché (Bell, Swann & Taylor, 1981) ; le premier cas n'est pas assimilable à une addition réitérée alors que le deuxième l'est. De même, auprès cette fois de collégiens italiens, en maintenant les mêmes valeurs numériques mais, selon la place de ces valeurs, en restant ou non dans le domaine de validité de l'analogie de substitution : « Avec un quintal de blé, on obtient 0,75 quintaux de farine. Quelle quantité de farine peut être obtenue avec 15 quintaux de blé ? » obtient 77% de réussite tandis que pour « Le volume d'un quintal de gypse est de 15 cm^3. Quel est le volume de 0,75 quintaux ? », on ne compte plus que 53% de réussite (Fischbein et al., 1985).

Pour ce qui est de la division, nous avons montré que la tâche « Inventer un problème de division avec un résultat plus grand que la valeur initiale » est difficile, car la recherche de la taille de la part conduit toujours à obtenir une quantité moindre que la quantité initiale. Une expérience menée auprès d'élèves de 11 ans et 12 ans au collège en France a conduit à ce que 78% d'entre eux considèrent que c'est impossible (Audo & Sander, 2008 ; Sander, 2008), tandis que la même tâche proposée à des adultes étudiants à l'université conduisait à 74% d'échec, ceux-ci se répartissant de manière à peu près équivalente entre ceux qui disent « Impossible » avec des justifications soulignant l'influence de l'analogie de substitution telles que « Impossible, car diviser c'est découper en plusieurs morceaux » ou encore « Lorsqu'on divise par une moitié, on a plus, mais c'est impossible de diviser par une moitié », ceux qui posent une opération (par exemple : 4/0,2) sans être en mesure d'élaborer un énoncé (« je ne trouve pas de situation qui va avec »), et ceux qui construisent un problème transgressant la consigne (« Jean a 20 bouteilles de vin. Il en vend la moitié à 8 euros la bouteille. Combien d'argent reçoit-il ? ») (Hofstadter & Sander, 2013 ; Sander, 2008). Pourtant, les énoncés pour lesquels « diviser rend plus grand » (par exemple « Combien de verres de 0,25 l peut-on remplir avec une carafe de 2 l ? ») sont aussi concrets que ceux inventés spontanément sans la contrainte de rendre plus grand, mais la nécessité de quitter le champ de validité de l'analogie de substitution rend la tâche particulièrement difficile.

En synthèse, les analogies de substitution offrent l'intérêt de donner sens à une notion mathématique. Elles constituent une entrée pour cette notion. Au même titre que les métaphores conceptuelles apparaissent nécessaires pour développer une conception de toute notion qui n'est pas directement incarnée sur le plan expérientiel, les analogies de substitution sont utiles, voire nécessaires, et offrent une incursion dans la notion, dont la validité, même partielle, explique la prégnance et la robustesse. En effet, comme les cas précédents le montrent, de même que des travaux menés auprès d'enseignants en formation (e.g. Tirosh et Graeber, 1991), ces analogies de substitutions ne sont pas transitoires. Leur influence persiste chez les adultes et, même si nous avons choisi de nous focaliser sur les quatre opérations arithmétiques élémentaires, les notions mathématiques concernées peuvent être plus complexes. Par exemple, une fonction serait conçue par analogie avec une « fine ligne d'encre » et la continuité d'une telle fonction serait conçue comme « une fine ligne d'encre tracée sans lever le stylo » (Fischbein, 1987). De cette analogie de substitution, on peut tirer qu'une fonction continue est dérivable presque partout car si l'on « zoome » d'assez près sur la courbe, on trouve forcément des portions lisses et donc des possibilités de tracer des tangentes à la courbe. De fait, Ampère (1806) lui-même semble avoir été pris au piège de cette analogie en montrant – pensait-il – qu'une fonction continue est dérivable partout sauf en un nombre limité de points.

Mais qu'en est-il des fonctions non traçables ? Bolzano puis Weierstrass ont démontré qu'il était possible pour une fonction continue de n'être dérivable nulle part. La réaction de la communauté des mathématiciens a été pour partie hostile. Ainsi peut-on citer Charles Hermite (1893), particulièrement virulent :

> *« Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions continues qui n'ont point de dérivées »*

tout comme Henri Poincaré (1908) :

> *« La logique parfois engendre des monstres. On vit surgir toute une foule de fonctions bizarres qui semblaient s'efforcer de ressembler aussi peu que possible aux honnêtes fonctions qui servent à quelque chose. [...] de la continuité, mais pas de dérivées [...], on les invente tout exprès pour mettre en défaut les raisonnements de nos pères, et on n'en tirera jamais que cela. »*

Pourtant ces fonctions sont maintenant considérées comme parfaitement « respectables » : elles sont même denses dans l'ensemble des fonctions continues et sont parfaitement intégrées aux mathématiques, notamment avec les objets fractals.

Sur le plan de l'éducation, la question n'est pas de faire disparaître par l'enseignement ces analogies de substitution. Elles ne peuvent ni se déconstruire ni être éradiquées comme les données précédemment présentées semblent le montrer. L'enseignant a à intégrer leur présence chez lui comme chez l'élève. Leur influence persiste au même titre que les métaphores conceptuelles telles que « DEBATTRE est COMBATTRE » ou « COMPRENDRE est VOIR » sont inscrites culturellement et n'ont pas vocation à disparaître, pas plus que « SOUSTRAIRE est RECHERCHER CE QUI RESTE » ou « ADDITIONNER est AJOUTER ». En revanche, un objectif clé de l'éducation est d'aider les élèves à surmonter l'influence puissante de leurs analogies de substitution même si celles-ci resteront toujours des stéréotypes incontournables de la notion. Toutefois, l'objectif est que la notion cesse d'être réduite à son analogie de substitution et que « de combien le nombre de billes a-t-il augmenté? » puisse être vu comme résoluble par une opération de soustraction. C'est l'enjeu d'un développement conceptuel ancré sur l'analogie de substitution et que l'enseignement contribue à faire évoluer. Cela est notamment concevable en s'appuyant sur des scénarios, car les analogies de substitution sont seulement la partie émergée de l'iceberg, et vont de concert avec des analogies de scénarios.

2. Les Analogies de Scénario

Un énoncé de problème, de même qu'un proverbe, un court récit ou une fable, évoque une catégorie de scénarios, par exemple des situations d'échange, de partage équitable, de gain, de don, de perte, de répartition, etc. Ces catégories de situations quotidiennes ne sont toutefois pas indépendantes des résolutions mathématiques qui leur sont associées. Les situations qu'elles regroupent sont analogues entre elles ; ce qui les lie est d'un niveau d'abstraction qui va au-delà des objets concrets impliqués dans les situations par le fait justement qu'elles constituent par exemple des scénarios d'échanges ou de partage. Ainsi, des billes réparties dans des sacs de billes, des oranges dans des paniers et des tulipes dans des vases dessinent le contour d'un scénario de répartition de contenus dans des contenants. Les résolutions dont la structure mathématique est congruente avec cette catégorisation sont facilitées par l'analogie de scénario car les propriétés activées sont cohérentes avec les propriétés mathématiquement pertinentes alors qu'en cas de dissonance, la difficulté de résolution est accrue.

Si l'on demande à des adultes (Bassok, Chase & Martin, 1998) d'inventer d'une part un énoncé dans lequel il est question d'oranges et de pommes et d'autre part un énoncé dans lequel il est question d'oranges et de paniers, le premier énoncé induira de manière presque systématique un scénario où les deux sortes de fruits ont un statut symétrique (typiquement « Combien y-a-t-il de fruits en tout ? ») alors que la seconde tâche induira un scénario où les rôles sont asymétriques et où la relation fonctionnelle est impliquée (typiquement « Quel est le nombre d'oranges par panier ? »). Les énoncés impliquant les oranges et les pommes, ou plus généralement impliquant des collatéraux d'une même catégorie superordonnée, donnent ainsi lieu à des problèmes se résolvant par une opération d'addition ou de soustraction, alors que les énoncés impliquant les oranges et les paniers, ou plus généralement impliquant des entités entretenant une relation fonctionnelle de type contenance ou répartition, donnent lieu à des problèmes se résolvant par une multiplication ou une division. Il s'avère difficile, y compris pour des enseignants à l'école primaire (Sander, 2016b), de concevoir un énoncé impliquant des oranges et des pommes et se résolvant par une multiplication ou une division. Les manuels scolaires suivent ce mouvement. Bassok, Chase & Martin (1998) ont trouvé que pour 97% des problèmes à résoudre par addition, les objets additionnés appartenaient à des catégories de même niveau (e.g., des pommes et des poires, ou des billes rouges et des billes noires) alors que 94% des problèmes requérant une division faisaient intervenir des objets reliés fonctionnellement (e.g., des billes et des boites). Cette orientation exclut par exemple l'introduction d'un énoncé dans lequel il y aurait dissociation du scénario communément induit et de l'opération mathématique, comme ce serait le cas pour la question « Combien de fois plus de pommes que d'oranges ? ».

Le caractère facilitateur ou obstructif de l'analogie de scénario est déterminant pour la difficulté d'un problème. Ainsi, dans le cas d'énoncés de division, les problèmes « Avec 75 roses, on peut faire 5 bouquets identiques. Combien de roses seront dans chaque bouquet ? » et « 15 amis ont acheté ensemble 5 kg de cookies. Combien chacun en a-t-il reçu ? » donnent lieu à des performances très différentes (93% de réussite pour le premier versus 28% pour le second par des élèves de collège italien ; Fischbein et al., 1985). En effet, le premier est bien conforme sur le plan de l'analogie de scénario dans lequel un certain nombre de contenus est réparti dans un plus petit nombre de contenants alors que pour second, la quantité d'objets partagée paraît moindre que le nombre d'acteurs et la plupart des élèves rétablissent un scénario dans lequel 5 amis se partageraient 15 gâteaux pour proposer, à tort, la solution 15/5. On notera que l'analogie de substitution n'est en effet pas en cause ici, car l'un et l'autre de ces problèmes sont conformes à l'analogie de substitution de la division dans la mesure où il s'agit de cas de partages équitables dans lesquels la taille de la part est recherchée : la composante obstructive provient de l'analogie de scénario.

Comme l'illustre le cas précédent, les caractères facilitateur ou obstructif sur le plan de l'analogie de substitution et sur le plan de l'analogie de scénario sont dissociables. Par exemple, la résolution d'un énoncé tel que « J'ai 3 paquets de 10 gâteaux. Combien ai-je de gâteaux en tout ? » est supposée facilitée par la conformité sur le plan de l'analogie de substitution (réplication) et sur celui de l'analogie de scénario (relation fonctionnelle de contenance des gâteaux dans les paquets). En revanche, l'énoncé « J'ai 4 oranges. Je reçois 5 pommes en échange de chaque orange. Combien aurai-je de pommes ? » est favorable sur le plan de l'analogie de substitution dans la mesure où il y a réplication des groupes de 5 pommes, en revanche l'analogie de scénario est obstructive pour cet énoncé qui implique des collatéraux d'une même catégorie, qui ne sont pas dans une relation fonctionnelle. Pour un énoncé tel que « Si un gallon d'essence coûte £1,27, combien coûte 0,22 gallon ? », il n'y a pas cette fois conformité sur le plan de l'analogie de substitution (absence de réplication), mais conformité sur le plan de l'analogie de scénario (recherche d'un prix payé connaissant le prix unitaire d'une certaine marchandise et la quantité de cette marchandise).

Selon le scénario évoqué par l'énoncé, les stratégies envisagées par les solveurs sont susceptibles de changer radicalement (Gros, Thibaut & Sander, 2015 ; Mengue, Richard & Sander, 2015 ; Gamo, 2009 pour la mise en évidence de cet effet parmi une population d'enseignants d'école primaire). Par exemple, le problème « Laurent achète une trousse à 7 euros et un classeur. Il paie 15 euros. Jean achète un classeur et une équerre. Il paie 3 euros de moins que Laurent. Combien coûte l'équerre ? » est presque toujours résolu par une stratégie en trois étapes tant par des adultes que par des élèves de fin d'école primaire (calcul du prix du classeur : 15 – 7 = 8 ; calcul de la somme payée par Jean : 15 – 3 = 12 ; calcul du prix de l'équerre : 12 - 8 = 4), et ce y compris si de fortes incitations sont faites pour que la solution la comportant le moins d'opérations soit proposée. En revanche, lorsqu'exactement la même consigne est proposée pour l'énoncé « Laurence a suivi des cours de danse pendant 7 ans et s'est arrêtée à 15 ans. Jeanne a commencé au même âge que Laurence et s'est arrêtée 3 ans plus tôt. Combien de temps Jeanne a-t-elle suivi ses cours de danse ? », une majorité de participants identifie cette fois une solution en un seul calcul (7 – 3 = 4 ; Jeanne a suivi ses cours de danse pendant 4 ans). Or ces deux énoncés sont l'un et l'autre résolubles par les mêmes stratégies, en trois calcul et en un calcul. En revanche, dans le premier cas le type de scénario évoqué oriente vers des résolutions par complémentation et rend presque invisible la solution directe 7-3=4, conduisant à voir le prix de l'équerre comme résultant du fait d'ôter du prix de la trousse l'écart des prix totaux payés par Jean et Laurent. Cette deuxième stratégie devient pourtant saillante dans le second cas, où une comparaison de durée (un écart de 3 ans qui se transpose de l'âge d'arrêt des cours à leur durée) permet de proposer une solution directe. Cet effet est si robuste qu'une large proportion d'adultes étudiants à l'université considère que le problème « Laurent achète une trousse à 7 euros et un classeur. Jean achète un classeur et une équerre. Il paie 3 euros de moins que Laurent. Combien coûte l'équerre ? » est insoluble alors qu'une simple soustraction conduit à sa solution et que ce n'est presque jamais le cas pour l'énoncé « Laurence a suivi des cours de danse pendant 7 ans. Jeanne a commencé au même âge que Laurence et s'est arrêtée 3 ans plus tôt. Combien de temps Jeanne a-t-elle suivi ses cours de danse ? » (Gros, Sander, & Thibaut, 2016). Il se trouve que tous ces énoncés incarnent le théorème selon lequel « Si deux ensembles ont une partie commune, l'écart entre les cardinaux de ces ensembles est le même que l'écart entre les cardinaux de leurs parties non communes », mais il s'avère que selon le type de scénario, l'un mettant l'accent sur des caractéristiques cardinales qui suscitent une stratégie par complémentation, et l'autre mettant l'accent sur des caractéristiques ordinales qui suscitent une stratégie par comparaison, la solution en une opération qui opérationnalise le théorème est soit fréquemment mise en œuvre (cas ordinal, tel que celui des cours) soit rarement (cas cardinal, tel que celui des achats). On notera que lorsque le scénario est favorable à la mise en œuvre de la stratégie directe, cela n'indique pas pour autant une conceptualisation du théorème, car en cas de scénario cardinal, cette stratégie directe cesse d'être perçue par les mêmes participants. La difficulté à percevoir la solution directe pour ces énoncés dans le cas cardinal reste marquée jusque pour des élèves qui ont réussi les concours scientifiques de la rue d'Ulm, montrant la difficulté à percevoir certaines analogies de structure mathématique et la tendance à privilégier des analogies de scénarios, qui conduisent à juger analogues entre eux les scénarios cardinaux et analogues entre eux les scénarios ordinaux et à ignorer l'analogie entre scénarios cardinaux et ordinaux, légitimée pourtant par une structure mathématique commune qui fonde le théorème mentionné plus haut (Gros, Thibaut & Sander, 2015 ; Gros, Sander, & Thibaut, 2016).

Ainsi, tout comme c'était le cas pour les analogies de substitution, la réussite est un indicateur assez pauvre de conceptualisation lorsque l'analogie de scénario est facilitatrice dans la mesure où la même personne peut se trouvée mise en échec dès lors qu'une dissociation est introduite entre le scénario et la structure mathématique. Ce phénomène a été notamment mis en évidence dans le cadre de la résolution de problèmes de combinatoire (Ross, 1987, 1989 ; voir aussi Bassok, Wu & Olseth, 1995 pour une mise en évidence plus systématique encore de ce phénomène). Un problème source était proposé aux participants, adultes étudiants à l'université, accompagné d'une formule pour déterminer sa solution. Le problème source était « Les mécaniciens d'IBM doivent s'assurer que les voitures de la société fonctionnent bien. Ce jour-là, il y a 11 voitures et 8 mécaniciens. Les mécaniciens choisissent au hasard sur quelle voiture ils vont travailler. Ce choix est fait par ordre d'ancienneté. Quelle est la probabilité que les 3 plus anciens mécaniciens, Al, Bud et Carl, choisissent respectivement les voitures du chef du conseil d'administration, du président exécutif et du vice-président ? » et la solution indiquée était « 1/(11x10x9) ». Dans un second temps, les participants étaient scindés en deux groupes. Le premier groupe recevait l'énoncé suivant : « Les mécaniciens d'IBM réparent les voitures des commerciaux de la société. Les mécaniciens choisissent au hasard sur quelle voiture ils vont travailler, le meilleur mécanicien choisissant en premier et ainsi de suite. Ce jour là, il y a 16 voitures de commerciaux et 5 mécaniciens. Quelle est la probabilité que le meilleur mécanicien choisisse la voiture du meilleur vendeur et que le 2ème meilleur mécanicien choisisse la voiture du 2ème meilleur vendeur ? ». Les participants étaient 75% à proposer la solution correcte : 1/(16x15). Un deuxième groupe recevait pour énoncé « Les mécaniciens d'IBM réparent les voitures des commerciaux de la société. Les commerciaux choisissent au hasard le mécanicien qui réparera leur voiture, le meilleur commercial choisissant en premier et ainsi de suite. Ce jour là, il y a 14 voitures de commerciaux et 16 mécaniciens. Quelle est la probabilité que le meilleur mécanicien répare la voiture du meilleur vendeur et que le 2ème meilleur mécanicien répare la voiture du 2ème meilleur vendeur ? ». La même solution correcte 1/(16x15) n'était cette fois proposée que par 37% des participants. Comment expliquer cette baisse de moitié de la performance de transfert ? Le premier énoncé partage avec le problème source un scénario dans lequel l'ensemble dans lequel se fait le tirage est confondu avec les entités inanimées du récit. Si celui qui interprète le problème source comprend que lorsqu'un récit fait intervenir des objets et des individus, le dénominateur est déterminé par les objets, il aboutira à la solution exacte tout en ignorant la notion d'ensemble dans lequel se fait le tirage. A l'inverse, dans le second cas de figure, la même interprétation conduit à proposer la solution erronée 1/(14x13). Ainsi l'analogie de scénario s'avère facilitatrice dans le premier cas car il y a congruence entre les inanimés et l'ensemble dans lequel se fait le tirage ; en revanche il y a non congruence dans le second cas. Le scénario évoqué par le problème incarne une structure dont la congruence avec la structure mathématique est déterminante pour la réussite du problème.

En cas de congruence, qui est le cas par défaut dans les manuels scolaires, il n'est pas possible de distinguer ce qui relève de la conception mathématique de ce qui relève de la sémantique des scénarios évoqués. En cas de non congruence, les analogies de scénarios deviennent obstructives. Il s'agit d'un enjeu éducatif important que les élèves soient en mesure de résoudre des problèmes y compris lorsque le scénario n'est pas un support pour la résolution. Comme l'illustre le deuxième énoncé (Ross, 1987, 1989), c'est ce dernier cas qui est le plus probant d'une conceptualisation mathématiquement satisfaisante.

3. Les Analogies de Simulation

La troisième forme d'analogie du cadre A-S^3 relève de l'approche des modèles mentaux (Johnson-Laird, 2006) selon laquelle lorsque l'on lit un texte, un modèle mental du contenu décrit dans ce texte en est construit, qui est un analogue d'une situation du monde extérieur, qui préserve les caractéristiques des entités décrites dans la situation. Il est possible alors d'opérer sur le modèle mental comme on le ferait dans une situation réelle, mais par simulation mentale. Par exemple, si l'énoncé indique que j'ai 5 bonbons dans ma poche et que j'en mange deux, il est possible de mentalement simuler cette action jusqu'à aboutir à un modèle mental comprenant 3 bonbons, sur la base duquel la solution à ce problème peut être énoncée sans connaissance scolaire en arithmétique car la simulation associée au modèle mental conduit à la solution sans formalisme arithmétique. Ce phénomène renvoie aux travaux sur les stratégies informelles qui conduisent de jeunes enfants non encore scolarisés à trouver par simulation mentale la solution à des problèmes qui seraient également résolubles par des opérations arithmétiques (Carpenter, Ansell, Franke, Fennema, & Weisbeck, 1993).

Lorsque la simulation mentale de la situation évoquée par l'énoncé mène à la solution, l'analogie de simulation est facilitatrice alors que lorsque la simulation n'est pas praticable pour atteindre la solution, l'analogie de simulation devient obstructive. Une recherche de Schliemann et al. (1998) illustre ce phénomène. Des adolescents brésiliens qui font du commerce de rue mais n'ont pas été scolarisés sont invités à répondre pour la moitié d'entre eux au problème « Quel est le prix de 3 objets à 50 cruzeiros ? » et pour l'autre moitié « Quel est le prix de 50 objets à 3 cruzeiros ? ». Selon le cadre A-S^3, ces deux énoncés ont le même statut facilitateur sur le plan des analogies de substitution et de scénario. En effet, il s'agit d'une réplication qui se prête à une addition réitérée, ce qui inscrit l'énoncé à l'intérieur du domaine de validité de l'analogie de substitution. L'analogie de scénario est facilitatrice également car il s'agit de la recherche du prix d'un achat groupé. Pourtant ces deux problèmes diffèrent grandement par leur difficulté, ce dont l'analogie de simulation permet de rendre compte. En effet, la simulation mentale est efficiente dans le premier cas pour aboutir à la solution (50+50+50=150) alors qu'elle ne l'est pas dans le second (3+3+3+….= ?). De fait, 75% des adolescents trouvent la solution dans le premier cas et 0% dans le second. Même si des adultes qui ont été scolarisés sont tout à fait en mesure de résoudre les problèmes en faisant appel aux opérations arithmétiques, il arrive qu'ils les résolvent par simulation mentale lorsque cette dernière est efficiente (Gvozdic & Sander, 2018), ce qui se justifie si cette stratégie est perçue comme la plus directe et si c'est la première qui vient à l'esprit.

Le même phénomène s'observe parmi les problèmes à structure additive. Ainsi, les énoncés « Pierre a 15 billes. Il en perd 3 à la récréation. Combien lui en reste-t-il ? » et « Pierre a 15 billes. Il en perd 12 à la récréation. Combien lui en reste-t-il ? » sont supposés être de difficultés différentes en dépit du fait que pour l'un et l'autre les analogies de substitution et de scénario sont facilitatrices (recherche d'un reste et scénario de perte de billes). En effet, la simulation mentale est favorable pour le premier énoncé en ôtant 3 de 15 (comptage à rebours de 3), mais défavorable dans le second car il faudrait alors ôter mentalement 12 de 15 (comptage à rebours de 12) ce qui est coûteux et requiert un contrôle difficile à assurer. Nous montré (Brissiaud & Sander, 2010 ; voir aussi Gvozdic & Sander, 2017) que jusqu'en classe de CE2 l'efficience ou non de la simulation mentale est un facteur déterminant : les performances qui vont du simple au double selon que l'analogie de simulation est facilitatrice, c'est-à-dire que la simulation mentale seule mène à la solution, ou qu'elle est obstructive, c'est-à-dire qu'elle est trop coûteuse pour être mise en œuvre, auquel cas il est nécessaire de faire appel aux propriétés des opérations arithmétiques. L'efficience ou non de la simulation mentale module plus la difficulté que l'appartenance à tel ou tel item d'une typologie de problèmes à structure additive ou que les effets de taille de nombres. Par exemple, parmi les quatre énoncés suivant, « 1/ Nicolas va en récréation avec 27 billes. Pendant la récréation, il gagne des billes et maintenant il en a 31. Combien de billes Nicolas a-t-il gagnées ? ; 2/ Nicolas va en récréation avec 31 billes. Pendant la récréation, il perd 27 billes. Combien de billes reste-t-il à Nicolas ? ; 3/ Nicolas va en récréation avec 4 billes. Pendant la récréation, il gagne des billes et maintenant il en a 31. Combien de billes Nicolas a-t-il gagnées ? ; 4/ Nicolas va en récréation avec 31 billes. Pendant la récréation, il perd 4 billes. Combien de billes reste-t-il à Nicolas ? », le premier et le quatrième sont résolus par 75% des élèves de CE1 alors que le deuxième et le troisième par seulement 40% d'entre eux. Parmi les problèmes faciles comme parmi les difficiles on trouve des énoncés de recherche de gain et de recherche de reste, ainsi que des énoncés avec des grands nombres et des énoncés contenant un petit nombre ; le facteur discriminant est le fait que l'analogie de simulation soit facilitatrice ou non. Les mêmes effets s'observent avec des énoncés de problèmes à structure multiplicative tels que « 1/ Dans un paquet de 200 images, on fait des tas de 50 images. Combien y a-t-il de tas ? ; 2/ On partage 200 images en 50 tas. Combien y a-t-il d'images dans chaque tas ? ; 3/ On partage 200 images en 4 tas. Combien y a-t-il d'images dans chaque tas ? ; 4/ Dans un paquet de 200 images, on fait des tas de 4 images. Combien y a-t-il de tas ? », où recherche de taille ou de nombre de parts, ainsi que les différentes configurations de tailles de nombre se trouvent répartis parmi les problèmes faciles (le 1 et le 3 résolus par 75% des écoliers de CE1, avant même toute étude de la division) et parmi les problèmes difficiles (le 2 et le 4, 20% de réussite). L'efficience de la simulation mentale est là encore le facteur discriminant sur le plan de la difficulté de résolution.

La possibilité de dissociation des trois formes d'analogie peut-être illustrée par les quelques exemples suivant. Ainsi, l'analogie de substitution n'est pas facilitatrice pour « Pierre a 3 billes. Il en gagne à la récréation. Maintenant il en a 15. Combien en a-t-il gagnées ? » car il ne s'agit pas d'une recherche de reste ; l'analogie de scénario est en revanche facilitatrice pour cet énoncé car il s'agit d'un scénario de gain de billes ; l'analogie de simulation n'est quant à elle pas facilitatrice car elle encourage à compter en avançant de 3 à 15. En ce qui concerne, la résolution du problème « Paul a 3 oranges. Il reçoit 10 pommes par orange. Combien de pommes reçoit-il ? », celle-ci est soutenue par l'analogie de substitution car il y a une réplication (succession de groupes de 10 pommes), mais pas par l'analogie de scénario car la pommes et oranges n'orientent pas vers un scénario d'échanges, tandis que l'analogie de simulation (10+10+10) est facilitatrice. Concernant l'énoncé « Combien de verres de 0,5 l peut-on remplir avec une carafe de 2l ? », on reconnaîtra que les analogies de scénario et de simulation sont facilitatrices mais que le problème se situe hors du domaine de validité de l'analogie de substitution.

La résolution aisée d'un problème résoluble par simulation mentale et la difficulté rencontrée par le même élève si la simulation mentale n'est pas efficiente sont des indicateurs que l'élève résout le problème en faisant appel à une compréhension générale de la situation et par la mise en œuvre de stratégies informelles, efficaces dans des contextes spécifiques, mais inadaptées pour faire face à l'ensemble des situations faisant intervenir la notion mathématique, et ne relevant pas d'une conceptualisation satisfaisante de cette notion. En revanche, la résolution d'un énoncé pour lequel la simulation mentale ne permet pas d'aboutir au résultat est indicatrice de conceptualisation de propriétés mathématiques.

IV. DES INTERVENTIONS POUR DEVELOPPER LES NOTIONS

Comme les cas envisagés l'illustrent, les élèves sont souvent en mesure de mettre en œuvre les stratégies de résolution adaptées, mais sont limités dans les contextes dans lesquels ils perçoivent cette possibilité de mise en œuvre. Par exemple, un élève fera une soustraction dans le cas d'un énoncé de recherche de reste mais pas dans celui d'un énoncé de recherche de la valeur qui a été ôtée (DEPP, 2014) ; ou encore il trouvera une stratégie directe dans un contexte ordinal mais pas dans un contexte cardinal (Mengue, Richard & Sander, 2015) ; ou encore, il trouvera une solution en comptant à rebours dans un certain contexte mais pas dans un autre alors que le même comptage à rebours aurait mené à la solution (Brissiaud & Sander, 2010 ; Gvozdic & Sander, 2017). Ainsi, il apparaît que les compétences stratégiques sont régulièrement présentes mais dans des contextes limités aux cas où les analogies intuitives sont facilitatrices alors qu'elles seraient adaptées dans des contextes plus larges. La difficulté est que les élèves se fondent sur un codage situationnel trop spécifique par rapport aux notions mathématiques concernées ; lorsque deux situations relèvent de la même notion sur le plan scolaire, la perception d'une analogie entre elles ne va pas de soi.

Cela oriente vers des enseignements destinés à susciter la perception de l'analogie qui fonde les notions scolaires et justifient par exemple de regrouper sous le label « problème de soustraction » une diversité de scénarios, qui, sur le plan des connaissances quotidiennes évoquées, ont peu en commun. Il s'agit donc d'intervenir pour faire relier et rendre possible la mise en œuvre dans des contextes plus larges qu'initialement des compétences présentes au départ dans le champ restreint des analogies intuitives. C'est l'enjeu du recodage sémantique (Hofstadter & Sander, 2013 ; Sander, 2016 ; Sander & Richard, 2017). L'objectif du recodage sémantique est de faire apparaître la ressemblance profonde entre deux situations qui, en dépit des différences sémantiques, sont analogues sur le plan des notions disciplinaires. Son objet est de faire dépasser une compréhension spontanée (« intuitive »), fondée sur les seules connaissances quotidiennes. Il consiste à attribuer à une situation des propriétés usuellement attribuées à une autre et incite à faire abstraction des différences entre situations et favorise le développement d'une conception plus abstraite qui fonde l'analogie et rend accessible une stratégie qui n'aurait pas été envisagée avec le codage spontanée de la situation. Il peut s'agir de voir différemment la notion même, par exemple d'associer une soustraction pas simplement à une recherche de reste mais aussi à une recherche d'écart. Il peut aussi s'agir de proposer une grille de lecture différente d'un énoncé afin de le lier à la notion telle qu'elle est conçue (Sander & Richard, 2017).

Par exemple, le problème « Paul avait des billes. Il en perd 3 pendant la récréation et maintenant il lui en reste 5. Combien de billes avait-il avant la récréation ? » est massivement échoué même en CE1. Il se situe en dehors du domaine de validité de l'analogie de substitution « addition c'est ajouter ». Toutefois un travail en classe peut favoriser un recodage sémantique qui va orienter l'élève vers une réinterprétation de l'énoncé qui rendra envisageable l'addition en montrant l'analogie avec un problème d'ajout. La raisonnement qui sous-tend la mise en œuvre d'une addition est difficile à expliquer dans le problème original pour justifier que c'est en additionnant ce qui reste à ce que l'on a perdu que l'on trouve ce qu'il y avait à l'origine. L'introduction de « situations pivots », dénommées ainsi parce qu'elles se prêtent aisément à plusieurs codages, peut favoriser la perception de l'analogie entre problèmes qui paraissent au départ très différents, et faciliter le transfert de stratégie. Par exemple, un énoncé tel que « Pierre va à l'école avec des billes bleues et des billes rouges. A la récréation, il perd ses 39 billes rouges. Maintenant il lui reste ses 4 billes bleues. Combien de billes Pierre avait-il avant la récréation ? » se perçoit aisément d'une part comme une recherche de la valeur initiale, connaissant la valeur de la perte et la valeur finale, mais aussi comme la recherche de la totalité (le nombre de billes qu'avait Pierre le matin), connaissant la quantité perdue (les billes rouges) et la quantité restante (les billes bleues), ce qui constitue un recodage de la situation et le rend similaire à un problème d'addition canonique dans lequel deux parties sont données afin de trouver le tout. Les problèmes pivots s'avèrent largement mieux réussis que les problèmes classiques et rendent possible la mise en œuvre de stratégies de résolution ignorées dans les formulations standards des énoncés (de Longuemar & Sander, 2016). Nous avons montré qu'en faisant travailler des élèves de CE1 et de CE2 en classe spécifiquement sur des séries de problèmes pivots (Sander & Fort, 2014), leurs progrès était plus importants que s'ils travaillaient sur des problèmes classiques, l'hypothèse étant qu'un recodage était suscité par le travail sur les problèmes pivots et qu'il pouvait ensuite s'appliquer aux énoncés classiques.

Le recodage sémantique peut également être suscité par la comparaison d'énoncés en travaillant avec les élèves à la mise en place d'un codage commun qui rend perceptible les analogies existant entre les énoncés. Il est ainsi possible de faire acquérir à des élèves d'école primaire des points de vue pourtant « invisibles » spontanément à des adultes, dans des classes banales (Gamo, Richard & Sander, 2010) ou en éducation prioritaire (Gamo, Nogry & Sander, 2014). Le recodage sémantique peut être suscité également par les situations introduites et les activités en classe associées, avec la perspective que les élèves développent une appétence particulière pour la recherche de points de vue alternatifs susceptibles de leur faire voir le problème d'une manière qui les aide à le résoudre. Les élèves apprennent par exemple à percevoir que lors de la résolution d'un problème tel que « Madame Durand achète dans une librairie pour chacun de ses 5 enfants, 3 stylos rouge, 6 stylos bleu et 4 stylos vert. Combien de stylos achète-t-elle en tout ? », le développement et la factorisation ne constituent pas simplement deux algorithmes concurrents mais découlent de deux codages alternatifs d'une même situation qui conduisent à des stratégies distinctes. Dans le cas du développement, c'est le codage par couleur qui est privilégié en procédant à l'addition successive des stylos de chaque couleur : « 5x3 + 5x6 + 5x4 ». Dans le cas de la factorisation, le codage par objets est privilégié en procédant d'abord à l'addition des types de stylo : « 5x(3+6+4) ». Un tel travail de repérage des différents codages possibles auprès d'élèves des deux dernières années d'école primaire (Scheibling-Sève, Sander & Pasquinelli, 2017) a conduit à des progrès importants concernant la mise en œuvre de la factorisation et le fait de pouvoir envisager deux stratégies de résolution pour un même énoncé.

V. CONCLUSION

Sur le plan des relations entre les connaissances quotidiennes et les notions mathématiques, nous espérons, à travers la cadre A-S^3, avoir montré trois formes d'influence. La première, appréhendée par les analogies de substitution, relève de la conception de la notion mathématique elle-même, qui n'est pas directe mais ancrée sur des concepts quotidiens : ainsi, si l'on se cantonne aux quatre opérations arithmétiques, l'opération de soustraction est conçue comme la recherche de la quantité subsistante dans un contexte où une quantité initiale est connue et où une action conduit à la faire décroître ; l'opération d'addition est conçue comme la recherche d'une quantité résultant d'un ajout, que cet ajout soit obtenu par réunion de deux quantités de même nature ou comme un accroissement d'une quantité initiale connue ; l'opération de multiplication s'appuie sur la réplication et est conçue comme un ajout successif de répliques d'une certaine entité quantifiée ; l'opération de division est conçue comme la recherche de la taille d'une part dans le cadre d'un partage équitable.

La deuxième, appréhendée par les analogies de scénario, concerne les scénarios induits par les entités et les contextes dans lesquels ces entités sont mises en scène dans un énoncé de problème. Par exemple, l'introduction de collatéraux d'une même catégorie générale dans un énoncé suscite des scénarios dans lesquels ces entités ont des statuts symétriques alors que l'introduction d'entités qui entretiennent des relations fonctionnelles telles qu'une relation de contenance suscite des scénarios où les entités ont un rôle asymétrique et conforme à cette relation fonctionnelle.

La troisième, appréhendée par les analogies de simulation, concerne la manière dont la représentation de la situation décrite par l'énoncé permet une résolution par simple simulation mentale. Lorsque cette dernière est efficiente, elle est privilégiée par rapport à l'usage de représentations arithmétiques, ce qui conduit à ce qu'il soit par exemple plus facile de soustraire une petite quantité d'une grande dans un cadre de recherche de reste que de recherche de gain et à l'inverse qu'il soit plus facile de soustraire une grande quantité d'une autre pour obtenir un résultat peu élevé dans un cadre de recherche de gain que de recherche de reste : l'efficience de la simulation mentale contraint la stratégie mise en œuvre, et une stratégie arithmétique est proposée moins systématiquement lorsqu'une simple simulation mentale conduit à la solution.

Les travaux qui portent sur analogies intuitives indiquent donc qu'elles sont présentes de manière précoce chez les élèves. Ils indiquent également leur persistance après enseignement et à l'âge adulte, notamment parmi une population enseignante, en particulier pour les analogies de substitution et de scénario, ce qui est conforme aux connaissances sur la psychologie des concepts, qui se développent en restant ancrés sur des conceptions quotidiennes (Fischbein, 1987 ; Lakoff & Nunez, 2000 ; Lautrey, Sander, Rémi-Giraud & Tiberghien, 2008 ; Hofstadter & Sander, 2013). Comme toute catégorie de situations, elles sont sujettes au phénomène de typicalité, autrement dit à l'existence de prototypes des catégories et de cas atypiques, pour lesquels l'appartenance catégorielle est moins évidente. Elles sont également sujettes au phénomène d'extension catégorielle par analogie qui oriente le développement conceptuel (Hofstadter & Sander, 2013; Sander, 2016b, 2017). Ces travaux invitent à une démarche qui oriente le choix des exemples et des situations choisis en classe afin de ne pas accentuer encore l'ancrage des conceptions intuitives.

Le cadre A-S^3 peut ainsi être mobilisé afin de se prononcer sur la difficulté de résolution d'un problème, afin de distinguer les cas « d'expertise apparente » de compréhension plus profonde des notions, de construire des évaluations, de former des enseignants, de développer des progressions d'apprentissage. Les trois formes d'analogie identifiées sont dissociables les unes des autres dans la mesure où toutes les configurations en termes de « facilitateur/obstructif » peuvent être observées. Cette possibilité de dissociation n'exclut pas l'existence d'interdépendances, indiquant que certaines configurations sont plus aisément constructibles que d'autres. Les représentations initiales des élèves s'avèrent orientées par des catégorisations par analogie, qui rattacheront les énoncés de problème ou les notions mathématiques incarnées dans ces énoncés à des catégories mentales préexistantes ; ces rattachements contraindront leurs interprétations, les stratégies mises en œuvre et les transferts d'apprentissage envisageables. Des progressions d'apprentissage peuvent être élaborées afin de faire évoluer les représentations des élèves, notamment par des recodages sémantiques, afin de limiter l'influence des analogies intuitives lorsqu'elles font obstacle. De tels recodages sémantiques favorisent la perception d'analogies qui fondent les notions scolaires et peuvent favoriser un développement de la conceptualisation.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

AMPERE, A.-M. (1806). Recherches sur quelques points de la théorie des fonctions dérivées. *Journal de l'École polytechnique*, *13*, 148-191.

BAROODY, A.J. (1999). Children's relational knowledge of addition and subtraction. *Cognition and Instruction, 17(3)*, 137-175.

BASSOK, M., CHASE, V.M. & MARTIN, S.A (1998). Adding and Oranges: Alignment of Semantic and Formal Knowledge. *Cognitive Psycholoy, 35*, 99-134.

BASSOK, M., WU, L.L. & OLSETH, K.L. (1995). Judging a book by its cover: Interpretative effects of content on problem-solving transfer. *Memory and Cognition, 23*, 354-367.

BELL, A., SWANN, M. & TAYLOR, G. (1981). Choice of operation in verbal problems with decimal numbers. *Educational Studies in Mathematics, 12,* 399-420.

BRISSIAUD, R. & SANDER, E. (2010). Arithmetic word problem solving: a situation strategy first framework. *Developmental Science, 13 (1),* 92-101.

CARPENTER, T.P., ANSELL, E., FRANKE, M.L., FENNEMA, E. & WEISBECK, L. (1993). Models of problem solving: a study of kindergarten children's problem-solving processes. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*, 428–441.

DUVIGNAU, K. (2003) Métaphore verbale et approximation. In K. Duvignau, O. Gasquet et B. Gaume (Eds.), *Regards croisés sur l'analogie* (pp. 869-881). Paris : Hermès Sciences

FISCHBEIN, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An Educational Approach*. Reider: Dordrecht.

FISCHBEIN, E. (1989). Tacit models and mathematical reasoning, *For the Learning of Mathematics, 9*, 9-14.

FISCHBEIN, E., DERI, M., NELLO, M. S. & MARINO, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 16,* 3-17.

GAMO, S., NOGRY, S. & SANDER, E. (2014). Apprendre à résoudre des problèmes en favorisant la construction d'une représentation alternative chez des élèves scolarisés en éducation prioritaire, *Psychologie française, 59(3),* 215-229.

GAMO, S. (2009). *Rôle des effets de contenu dans la catégorisation des problèmes arithmétiques à plusieurs solutions: Recodage sémantique et transfert de procédures*. Thèse de doctorat, Université Paris 8.

GAMO, S., SANDER, E. & RICHARD, J-F. (2010). Transfer of strategies by semantic recoding in arithmetic problem solving. *Learning and Instruction*, *20*, 400-410.

GICK, M. L. & HOLYOAK., K. J. (1983). Schema induction and analogical transfer. *Cognitive Psychology, 15,* 1–38.

GREER, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.276-295). New York: Macmillan Publishing Company.

GROS, H., THIBAUT, J.-P. & SANDER, E. (2015). *Robustness of semantic encoding effects in a transfer task for multiple-strategy arithmetic problems*. In Noelle, D. C., Dale, R., Warlaumont, A. S., Yoshimi, J., Matlock, T., Jennings, C. D. & Maglio, P. P. (Eds.), *Proceedings of the 37th Annual Meeting of the Cognitive Science Society* (pp. 818-823). Austin, TX: Cognitive Science Society.

GROS, H., SANDER, E. & THIBAUT, J-P. (2016). *"This problem has no solution": when closing one of two doors results in failure to access any.* In A., Papafragou, D., Grodner, D., Mirman, & J.C., Trueswell, (Eds.) (2016). *Proceedings of the 38th Annual Conference of the Cognitive Science Society* (pp. 1271-1276). Austin, TX: Cognitive Science Society.

Gvozdic, K. & Sander, E. (2017). Solving additive word problems: Intuitive strategies make the difference. In G. Gunzelmann, A. Howes, T. Tenbrink & E. Davelaar (Eds.) Proceedings of the 39th Annual Meeting of the Cognitive Science Society (pp. 2150-2155). Austin, TX: Cognitive Science Society.

GVOZDIC, K. & SANDER, E. (2018). When intuitive conceptions overshadow pedagogical content knowledge: Teachers' conceptions of students' arithmetic word problem solving strategies. *Educational Studies in Mathematics, 98*, 157-175.

HERMITE, C. (1893/1905). Lettre à Stieljtes. In B. Baillaud et H. Bourget (Eds.), *Correspondance d'Hermite et de Stieltjes, 2* (pp. 317-319). Paris : Gauthier-Villars
HOFSTADTER, D. & SANDER, E. (2013). *L'Analogie : Cœur de la pensée*. Paris: Odile Jacob.
HUMMEL, J.E. & HOLYOAK, K.J. (1997). Distributed representations of structure: a theory of analogical access and mapping, *Psychological Review,104,*427-466.
JOHNSON-LAIRD, P.N. (1983). *Mental models : Towards a cognitive science of language, inference, and consciousness.* Cambridge, MA : Harvard University Press/ Cambridge. UK : Harvard University Press.
JOHNSON-LAIRD, P.N. (2006). *How We Reason*. Oxford University Press.
LAKOFF, G. & JOHNSON, M. (1980). *Metaphors we live by.* Chicago, IL: University of Chicago Press.
LAKOFF, G. & JOHNSON, M. (1999). *Philosophy In the Flesh: The Embodied Mind And Its Challenge To Western Thought*. New York, NY: Basic Books.
LAKOFF, G. & NUNEZ, R. (2000). *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*. New York: Basic Books.
LAUTREY, J., RÉMI-GIRAUD, S., SANDER, E. & TIBERGHIEN, A. (2008). *Les connaissances naïves.* Paris, Armand Colin.
LEARY, D. E. (1990). Psyche's muse: the role of metaphor in the history of psychology. In D. E. Leary (Ed.), *Metaphors in the history of psychology* (pp. 1-78). New York: Cambridge University Press.
DE LONGUEMAR & G., SANDER, E. (2016). *Learning to overcome inadequate intuitive strategies in arithmetic word problem solving*. Communication affichée présentée à la Budapest CEU Conference on Cognitive Development, Budapest; 01/2016
MENGUE, E., RICHARD, J-F. & SANDER, E. (2015). Classification des problèmes additifs : statut intermédiaire de la transformation relativement au complément et à la comparaison, *L'Année Psychologique, 115 (4),* 497-531.
NOVICK, L. R. (1988). Analogical transfer, problem similarity, and expertise. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition, 14,* 510-520.
POINCARÉ, H. (1908). *Science et méthode*. Paris : Flammarion.
RAMSCAR, M. J. A. & PAIN, H. G. (1996). Can a real distinction be made between cognitive theories of analogy and categorisation? In S.E. Cozzens & T.F. Gieryn (Eds.) *Proceedings of the 18th annual conference of the cognitive science society* (pp. 346-351). New Jersey: Lawrence Erlbaum.
RICHARD, J-F. & SANDER, E. (2015). *Quelles relations établir entre la résolution de problèmes et l'introduction des opérations et de leurs propriétés ? Faut-il systématiquement relier les enseignements à des situations de la vie réelle ou concevoir des situations ad hoc ?* Rapport technique pour la conférence de consensus « Nombres et opérations : premiers apprentissages à l'école primaire » CNESCO, novembre 2015.
RICHLAND, L. E. & SIMMS, N. (2015). Analogy, higher order thinking, and education. *Cognitive Science, 6*(2), 177-192.
RILEY, M. S., GREENO, J. G. & HELLER, J. I. (1983). Development of children's problem solving ability in arithmetic. In H. P. Ginsberg (ed.), *The Development of Mathematical Thinking* (pp. 153–196). New York: Academic Press.
ROSS, B.H. (1989). Distinguishing types of superficial similarities: Different effects on the access and use of earlier problems. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, & Cognition (15)*, 456-468.
SANDER, E. (2007). Manipuler l'habillage d'un problème pour évaluer les apprentissages, *Bulletin de psychologie, 60*, 119-124.
SANDER, E. (2008). Les connaissances naïves en mathématiques. In J. Lautrey, S. Rémi-Giraud, E. Sander & A. Tiberghien (Dir). *Les connaissances naïves* (pp. 57-102). Paris : Armand Colin.
SANDER, E. (2016a). *Analogies, éducation, conceptions du maître et de l'élève*. Séminaire du Groupe Compas «Education et Cognition », Ecole Normale Supérieure Ulm, 15 février 2016, Paris, France
SANDER, E. (2016b). *L'impératif analogique*. Séminaire international de l'IFÉ Apprendre et Faire apprendre : perspectives internationales, « L'analogie. Quelles conceptions et quelles conséquences éducatives ? », 12e session des 29 et 30 juin 2016, Lyon, France
SANDER, E. (2016c). Enjeux sémantiques pour les apprentissages arithmétiques. *Bulletin de Psychologie, 546(6)*, 463-469.
SANDER, E. (2017). Des concepts quotidiens pour développer des concepts scientifiques : une perspective éducative. *L'homme dans le monde de l'incertitude. Pour le 120e anniversaire de la naissance de Lev Vygotsky* (pp.14-20). Moscou : FIRO.
SANDER, E. (sous-presse). Transformer l'inconnu par le connu. Constructions et interventions analogiques pour les apprentissages scolaires. In J.-M. Barbier & M. Durand (Dir.), *Représenter/transformer : Débats en analyse des activités* (pp.259-279). Paris : L'Harmattan.
SANDER, E. & FORT, C. (2014). *Semantic ambiguity as basis for promoting learning in the case of arithmetic problem solving*. Proceedings of ICAP 2014, 28th international congress of applied psychology, 8-13 July 2014, Paris.
SANDER, E. & RICHARD, J-F. (2017). Les apprentissages numériques. In R. Miljkovitch, F. Morange-Majoux et E. Sander (Dir.). *Traité de Psychologie du Développement* (pp. 251-258). Paris : Masson.
SCHEIBLING-SÈVE, C., SANDER, E. & PASQUINELLI, E. (2017). *A recategorization method to improve pupils' cognitive flexibility*. Budapest CEU Conference on Cognitive Development. Budapest, Hongrie, 6-8 janvier.
SCHLIEMANN, A.D., ARAUJO, C., CASSUNDÉ, M.A., MACEDO, S. & NICÉAS, L. (1998). Use of multiplicative commutativity by school children and street sellers. *Journal for Research in Mathematics Education, 29,* 422–435.

TIROSH, D. & GRAEBER, A. O. (1991). The effect of problem type and common misconceptions on preservice elementary teachers' thinking about division. *School Science and Mathematics, 91(4),* 157–163.

TRENCH, M. & MINERVINO, R. A. (2015). The role of surface similarity in analogical retrieval: Bridging the gap between the naturalistic and the experimental traditions. *Cognitive Science*, *39*, 1292-1319.

TURNER, M. (1988). Categories and analogies. In D. H. Helman (Ed.), *Analogical Reasoning* (pp.3-24). Kluwer Academic Publishers.

VERGNAUD, G. (1981/1994). *L'enfant, la mathématique et la réalité : problèmes de l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire***.** Berne : Peter Lang.

VERGNAUD, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and substraction problems. In T.P. Carpenter, J.M. Moser and T.A. Romberg (Eds.) Addition and substraction: A cognitive perspective (pp. 39-59). Hillsdale: Erlbaum.

VERGNAUD, G. (1988). Multiplicative structures. In H. Hiebert and M. Behr (Eds.) *Research Agenda in Mathematics Education: Number concepts and operations in the Middle Grades* (pp. 141-161). Hillsdale : Erlbaum.

LES ETUDIANTS ET LEURS CHOIX POUR LA CONSTRUCTION D'UN NOUVEAU CONCEPT : L'INTRODUCTION DU CONCEPT DE LIMITE DE FONCTION

Sonia Maria **MONTEIRO DA SILVA BURIGATO**

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul/Brésil

soniaburigato@gmail.com

José Luiz **MAGALHÃES DE FREITAS**

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul/Brésil

joseluizufms2@gmail.com

Cécile **OUVRIER-BUFFET**

Université de Reims Champagne-Ardenne/France

cecile.ouvrier-buffet@univ-reims.fr

Résumé

Dans ce travail[1], nous présentons une partie de notre recherche doctorale dont la problématique centrale consiste à étudier l'introduction du concept de limite, chez les étudiants au Brésil et en France. Nous mettons l'accent sur la recherche des premiers schèmes des étudiants lorsqu'ils commencent à étudier le concept de limite. Au Brésil, nous avons élaboré et expérimenté des activités d'introduction du concept de limite de fonction (limite finie d'une fonction en un point, limites à l'infinie et limites infinies en un point). Nous avons réalisé deux entretiens avec les étudiants pendant l'expérimentation. En France, nous avons suivi l'introduction de ce concept dans une classe de lycée et avons conduit des entretiens avec des élèves de cette classe. Notre première analyse des productions des étudiants indique qu'ils mobilisent des schèmes en lien avec les concepts de fonctions et de nombre réel. Cependant, les invariants opératoires ne sont pas toujours pertinents pour les tâches qu'ils ont besoin de résoudre, les obligeant à réorganiser ou abandonner un schème précédent.

Mots clés

Concept image, concept définition, schèmes, théorème-en-acte, représentations

I. INTRODUCTION

Dans ce texte, nous présentons une partie de notre recherche doctorale. La question générale de notre recherche est : Comment les étudiants du Brésil et de la France construisent-ils une première connaissance du concept de limite ? Nous savons que dans ces pays le concept de limite est présent dans l'enseignement de différentes manières. Ainsi, nous nous demandons si ces différences des modèles du Brésil et de la France feront que les étudiants auront des processus de construction de connaissances très différents.

[1] Recherche financée par le PDSE/CAPES.

Une première différence réside dans le fait que le concept de limite est présenté à différents moments au cours de la scolarité au Brésil et en France. Au Brésil, ce concept est introduit à l'université alors qu'en France le concept de limite est introduit dès le lycée.
Le cours à partir duquel nous avons fait la recherche au Brésil est en licence de mathématiques à l'Université Fédérale de Mato Grosso Sul (UFMS). Le concept de limite est introduit dans la première année du cours, dans des disciplines appelées : « Calcul différentiel et intégral I » ou simplement « Calcul I » représentant environ 100 heures par semestre. Les contenus du programme de cette discipline portent sur les fonctions d'une variable réelle, les limites et la continuité des fonctions, les dérivées, les intégrales et leurs applications.
Nous avons fait notre recherche en France dans le lycée de Lombards dans la ville de Troyes, et plus particulièrement dans une classe de terminale générale scientifique, Sciences de la Vie et de la Terre (SVT) où les étudiants[2] peuvent choisir différentes spécialités (ISN soit Informatique et Sciences du Numérique, ou Physique Chimie, ou SVT, ou Mathématiques).
Nous avons choisi de travailler avec les étudiants sur la présentation de la notion de limite de fonction dans les situations qui permettent de travailler sur des difficultés rencontrées habituellement par les étudiants, telles que l'approximation en un point, ainsi que l'idée de nombre arbitrairement petit et d'infini et l'étude des fonctions. Nous nous inscrivons dans la lignée des recherches antérieures sur l'enseignement et l'apprentissage du concept de limite, recherches de natures épistémologiques et didactiques (compréhension du concept, lignes directrices méthodologiques pour son enseignement) (Artigue, 1995 ; Cornu, 1983 ; Cury, 2004, Santos, 2013, etc.).
Nos études nous ont conduit à délimiter un champ conceptuel (Vergnaud, 1990) pour l'introduction du concept de limite, centré sur les concepts d'inégalités, d'intervalles, de nombres réels et de fonction. Ces concepts sont importants pour la construction de la notion de limite et ils sont considérés comme connus par les étudiants. Cependant, plusieurs aspects de ceux-ci ne sont approfondis que dans les situations de limite (Artigue, 1995) et ces concepts ne sont pas forcément maîtrisés par les étudiants. Pour Vergnaud (1990), l'apprentissage d'un concept implique un ensemble de situations mais aussi un ensemble de concepts qui s'entrecroisent, comme un réseau. L'étudiant traite de nouvelles situations à la recherche de similitudes avec des situations vécues et bien résolues par leurs schèmes. Alors, comment l'étudiant va-t-il apprendre à gérer ces situations d'introduction au concept de limite? Quelles connexions sont pertinentes ou non pour faire face aux situations proposées ? Ces questions et d'autres ont guidé notre enquête. Nous présentons dans ce qui suit l'organisation de notre étude.

II. CADRE THEORIQUE ET METHODOLOGIE

Notre cadre théorique est principalement basé sur les champs conceptuels (Vergnaud, 1990) car nous cherchons à étudier le processus d'apprentissage des étudiants dans des situations d'introduction du concept de limite. Vergnaud (1990) définit un concept comme un triplet.
Dans notre cas, le concept est celui de limite, et le triplet est le suivant :

- *les situations*: qui donnent du sens au concept de limite ;
- *des invariants opératoires* : concepts-en-acte et théorèmes-en-acte qui permettent de faire face aux situations ;
- et *les représentations* : l'ensemble des formes langagières et non langagières qui permettent de représenter symboliquement le concept, ses propriétés, les situations et les procédures de traitement.

L'autre élément théorique que nous utilisons réside dans les schèmes (Vergnaud, 1990)

[2] Pour faciliter la lecture, nous utiliserons le terme générique d'étudiant. Nous préciserons toujours s'il s'agit de la France (lycée) ou du Brésil (université).

composés de :

- un objectif (but) ou plus ;
- des règles d'action (prendre le contrôle et des informations) ;
- des invariants opératoires (concepts-en-acte et théorèmes-en-acte) ;
- et des possibilités d'inférence.

Nous faisons l'hypothèse que ces éléments nous permettrons de caractériser les différentes actions organisationnelles qui guident les étudiants dans les situations des activités proposées. Nous nous intéressons en particulier aux « erreurs », difficultés rencontrées et connaissances mobilisées par les étudiants tout au long du processus de résolution.
Notre problématique est d'enquêter (et de comparer) sur les chemins parcourus par les étudiants dans la construction de la notion de limite au Brésil et en France. Nous organisons notre travail de la façon suivante :

- Caractériser certains concepts de base du champ conceptuel des activités d'introduction du concept de limite.
- Identifier les invariants opératoires mobilisés par les élèves pour résoudre les activités, mais aussi pour justifier leurs choix.
- Caractériser les *schèmes* de raisonnement des étudiants.
- Identifier quels sont les concepts utilisés dans ces schèmes.

Notre étude et nos analyses de documents officiels, de manuels, de recherches didactiques sur le concept de limite nous ont permis d'identifier des activités pertinentes pour notre étude, et ce dans une perspective de comparaison France-Brésil.
Au Brésil, nous avons élaboré et appliqué un questionnaire dans une classe du cours de mathématiques de l'UFMS. Notre objectif était de présenter la recherche, ainsi que d'identifier certaines connaissances antérieures des étudiants. Nous souhaitons également vérifier qui serait intéressé à participer à notre étude. Ensuite, nous avons élaboré et expérimenté trois ensembles d'activités, où les situations suivantes ont été étudiées : nous prenons les valeurs proches d'un point, du domaine de définition de la fonction, pour vérifier ce qui se passe avec les valeurs prises par la fonction ; étude de la limite finie d'une fonction en un point, étude de limites à l'infinie (en + ∞ ou - ∞) et de limites infinies en un point (approche par « définition intuitive[3] »). Après ces deux ensembles d'activités, nous avons réalisé un entretien en binôme avec les étudiants volontaires, puis avons mis en œuvre la troisième activité ; nous avons ensuite conduit un entretien individuel. À la fin, cinq mois plus tard, nous avons réalisé une dernière interview individuelle.
En France, nous avons suivi une enseignante en cours de Terminale dans l'introduction du concept de limite. Pour cela, nous avons élaboré une grille d'analyse pour identifier les différents moments de travail de cette enseignante. Notre grille d'analyse a été construite sur la base des questions suivantes :

- Quel(s) concept(s) est (sont) rappelé(s) pour l'introduction du concept de limite ? Quels autres concepts et quelles représentations (géométrique, algébrique, graphique, fonctionnelle), définitions, propriétés sont rappelées et introduites ? Quels types de problèmes sont utilisés ? Quels concepts connexes (nombres réels, autres concepts imbriqués du champ conceptuel) sont mobilisés ? Et comment sont-ils représentés et évoqués ?
- Quelles sont les caractéristiques de l'activité d'introduction ?
- Quelles institutionnalisations sont mises en œuvre ? Présentent-t-elles une définition intuitive, formelle, ou des propriétés ?

[3] Nous utilisons ici l'expression de « définition intuitive » dans le sens mobilisé dans un livre très utilisé au Brésil (Guidorizzi, 2001) qui développe une approche conceptuelle qui valorise la présentation des définitions et des démonstrations, ainsi que des représentations géométriques. Nous allons formaliser ces aspect sur les «définitions intuitives » et « formelles » dans notre travail au niveau théorique.

- Quels réinvestissements sont prévus ?
- Comment les concepts sont-ils réinvestis ?

Après l'analyse de la grille de ce cours de l'enseignante sur l'introduction du concept de limite, nous avons préparé un questionnaire similaire à celui que nous avons utilisé au Brésil pour retenir certains étudiants et aussi aider à l'élaboration des questions pour des entretiens. Nous faisons actuellement les retranscriptions des dernières interviews. Dans la Figure 1, nous présentons un résumé de nos choix méthodologiques pour une comparaison Brésil/France.

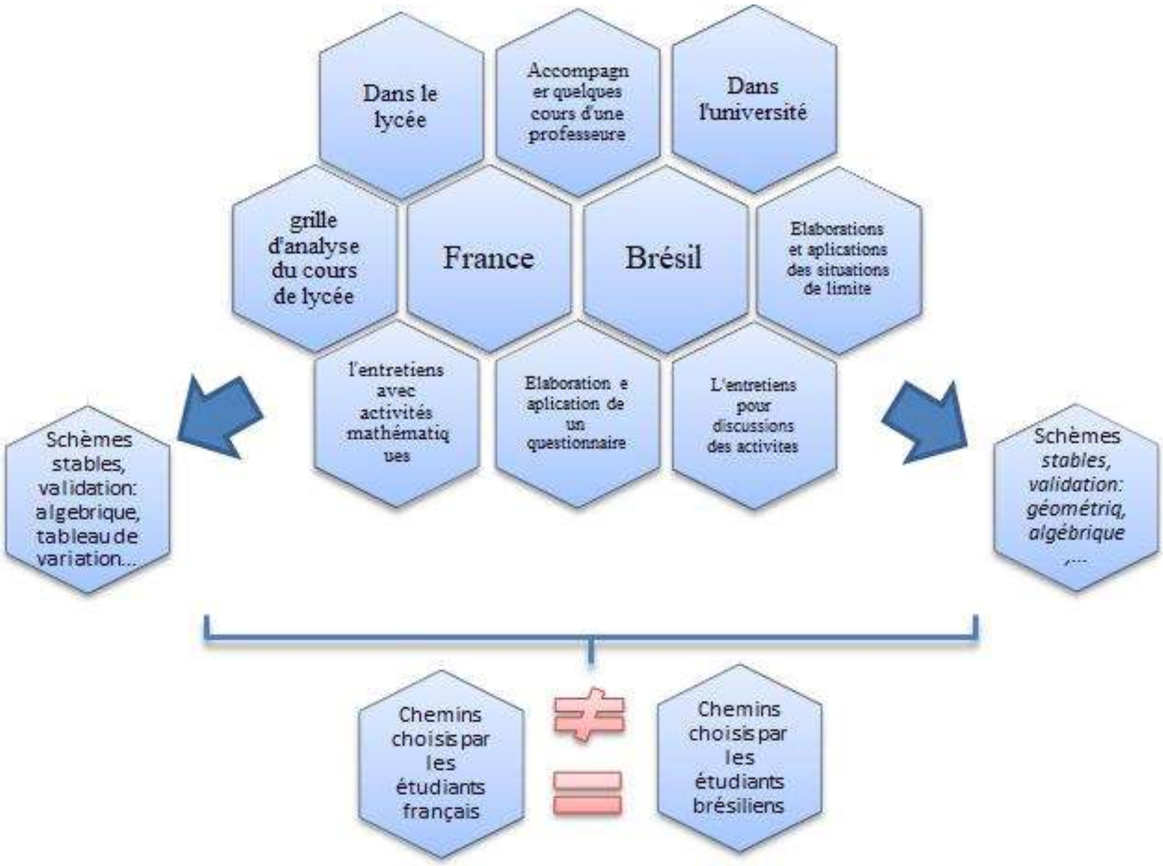


Figure 1 : Choix méthodologiques.

III. LES PREMIERS RESULTATS ET PERSPECTIVES

L'étude de comment les schèmes sont construits ou reconstruits par les étudiants nous a fait réfléchir sur un autre aspect de notre travail lié à la notion de limite et l'étude d'un autre point s'est révélée nécessaire. Nous savons qu'il existe un certain nombre de définitions possibles, certaines plus formelles que d'autres, avec des représentations variées. Ces définitions sont construites en lien étroit avec les expériences de l'étudiant, dans un processus dynamique. Un étudiant peut avoir une définition de limite bien mémorisé, mais sans aucun schème efficace pour traiter des activités liées à cette définition. Toutefois, il peut mobiliser un processus stable pour faire face à plusieurs situations impliquant des limites. Nous souhaitons interroger ici la proximité de ces schèmes avec la notion de limite proposée par (et dans) l'enseignement. En effet, nous nous référons à Vergnaud (1990) et à l'évolution des schèmes au fil des situations. Ce questionnement fait écho aux outils théoriques proposés par Tall et Vinner (1981). Ils soutiennent que beaucoup de concepts que nous utilisons tous les jours ne sont pas formellement définis et sont utilisés au travers de leur reconnaissance d'expériences passées.

Nous pouvons faire un parallèle avec Vergnaud (1990) et dire que dans des situations reconnues comme similaires à des situations précédemment vécues, l'étudiant mobilise des schèmes ayant fonctionnés précédemment. À ce stade de la recherche, nous souhaitons intégrer dans nos analyses la distinction proposée par Tall et Vinner (1981) en utilisant les termes *concept image* et *concept définition* afin de faire progresser nos outils d'analyse et de comparaison. Il s'agit là des *concepts images* et *concepts definitions* du concept de limite mais aussi de ceux des autres concepts en jeu dans les situations étudiées.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ARTIGUE, M. (1995). La enseñanza de los princípios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. In *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Bogotá : Grupo Editorial Iberoamérica. 97-140.

CORNU, B. (1983). *Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles*. Thèse de doctorat, Grenoble.

CURY, H. N. & CASSOL, M. (2004). Análise de erros em Cálculo: uma pesquisa para embasar mudanças. *Atas Cientifica*, Canoas, 6, 27-36.

GUIDORIZZI, H. L. (2001). *Um Curso de Cálculo*: volume 1. Editora LTC, Rio de Janeiro, 5ª edição.

SANTOS, M. B. S. (2013). *Um Olhar para o Conceito de Limite: Constituição, Apresentação e Percepção de Professores e Alunos sobre o seu ensino e Aprendizado*. Thèse de doctorat en Enseignement des Mathématiques, PUC, São Paulo, Brésil.

TALL, D. & VINNER, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 3(12), 151-169.

VERGNAUD, G. (1990). La théorie de champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *10 (2-3)*, 133-170.

DIFFUSION DES MATHEMATIQUES, L'EXEMPLE DE LA MAISON DES MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

Gilles **ALDON**

IFÉ-ENS de Lyon

Laboratoire S2HEP

gilles.aldon@ens-lyon.fr

Résumé

« Ils jouent mais quel jeu jouent-ils ? » questionnait Eric Sanchez pour présenter les jeux épistémiques numériques dans l'enseignement. On peut étendre la question en s'intéressant au lieu et au contexte de ces jeux et plus largement aux actions de diffusion (ou de vulgarisation) des mathématique : dans un cadre scolaire, extra-scolaire ? Quels liens peut-on faire de l'un à l'autre ? Les cadres théoriques permettant de décrire et d'analyser l'enseignement et l'apprentissage sont-ils encore pertinents pour la diffusion des mathématiques ? La volonté de modifier le système de connaissances des personnes tendraient à laisser penser que la diffusion des mathématiques n'échapperait pas aux cadres de la didactique des mathématiques. Mais entre l'école et un lieu de diffusion, l'institution change et les rapports aux savoirs sont profondément modifiés. Ma contribution à ce séminaire pose ces questions et essaie d'y apporter quelques réponses à partir de mon expérience à la Maison des Mathématiques et de l'Informatique.

Mots clés

Vulgarisation, diffusion, théorie anthropologique du didactique, théorie des situations didactiques, jeux

I. INTRODUCTION

Depuis sa création en 2012, la Maison des Mathématiques et de l'Informatique (MMI[1]) accueille des classes de différents niveaux pour des ateliers, propose des animations grand public autour d'expositions mathématiques, offre un « cours pour les parents » en mathématiques, des conférences grand public, des séminaires pour les étudiants,... Je participe depuis le début à ces actions et je suis donc un *diffuseur de la culture mathématique et informatique* bien que mes recherches en didactique des mathématiques ne portent pas sur ces aspects. Le texte qui suit est donc une réflexion d'un praticien réflexif sur son activité de diffusion plus que d'un chercheur voulant étudier la diffusion des mathématiques.

Je m'interroge tout de même sur les cadres théoriques qui permettent d'analyser le travail que je fais en privilégiant les cadres de la didactique des mathématiques et en me posant la question de savoir si ces cadres, construits dans une perspective d'enseignement et

[1] http://mmi-lyon.fr/

d'apprentissage, peuvent encore s'appliquer dans les actions de diffusion. Je m'appuie sur ma pratique effective pour exemplifier mon propos et j'essaie de conclure sur une perspective de didactisation des actions de diffusion.

II. UNE APPROCHE DES NOTIONS DE VULGARISATION ET DE DIFFUSION

En termes de vocabulaire, on trouve de façon quasi-synonyme les termes de diffusion ou de vulgarisation (*popularization* en anglais). Il est toujours intéressant de s'intéresser au vocabulaire utilisé même si les dictionnaires donnent des définitions qui se renvoient l'une à l'autre comme en témoigne le Tlfi :

« Diffusion : Action de propager une idée, des connaissances, des techniques ».

« Vulgarisation : Fait de diffuser dans le grand public des connaissances, des idées, des produits ».

Le terme de « vulgarisation » garde cependant une connotation négative. Le *vulgus,* le « commun des hommes » que Cicéron méprisait : « *non est concilium in vulgo* » (la foule n'a pas de réflexion) fait son pendant du verbe *vulgo* « répandre dans le public ». De cette racine naît aussi bien le terme *vulgaire,* « Qui est identique, semblable aux autres individus, aux autres objets de son espèce » que le terme *vulgarisation* ; mais est-ce seulement l'origine lexicale qui donne à ce terme cette connotation ? Il est aussi intéressant de regarder brièvement l'histoire de la vulgarisation qui remonte aux « cabinets de curiosité » qui apparaissent à la Renaissance, dans un moment ou le livre devient un media universel de transmission de l'information. Les connaissances scientifiques diffusent dans un monde où la science commence à apparaître comme une possibilité de comprendre le monde. Les premiers musées scientifiques comme l'Ashmolean Museum d'Oxford voient le jour montrant au public des spécimens zoologiques ou géologiques. Les magazines généralistes commencent à publier des articles de « vulgarisation scientifique » en utilisant notamment les langues vernaculaires plutôt que le latin réservé aux textes scientifiques. Le XVIIIème siècle voit l'apparition d'une vulgarisation souvent en direction des femmes privées par ailleurs d'une éducation scolaire, ou des enfants en parallèle d'une éducation plus tournée vers les lettres et les études religieuses (Fontenelle, 1686, De Lalande, 1786-1817). Le goût pour les sciences ne fait que croître au XIXème siècle avec une amplification du phénomène de vulgarisation à travers l'apparition de nombreux *jardin des plantes*, d'articles scientifiques qui envahissent les pages des journaux, des écrits de science-fiction qui font apparaître la science comme la réponse à toutes les questions. Même si cette réponse est encore inaccessible mais sera sûrement rapidement présente : « Tout ce qui est impossible reste à accomplir » disait Jules Verne en alliant l'action à la réflexion scientifique. Ainsi la vulgarisation scientifique naît et se nourrit des progrès des sciences et apparaît comme une volonté de diffuser des concepts ou des représentations créés par les scientifiques.

Quels sont alors les effets et les conséquences pour la diffusion des idées scientifiques. Les modèles classiques de la vulgarisation (Maldinier, 1973) proposent une distinction entre un modèle à deux personnages et un modèle à trois personnages. Dans le modèle à deux personnages, le scientifique s'adresse directement au public alors que le modèle à trois personnages introduit un intermédiaire, un passeur (diffuseur, journaliste, professeur, passeur ?) qui fait le lien et traduit le discours scientifique pour le public visé. On ne peut évidemment pas s'empêcher de voir ici un phénomène de transposition didactique dans une institution particulière dont l'objectif est de transmettre des savoirs…

Ces modèles de vulgarisation à deux ou trois personnages sont encore bouleversés aujourd'hui du fait de l'apparition des blogs scientifiques ou autres chaînes de diffusion de vidéos, ce qui pose de façon cruciale la légitimité du troisième personnage. Ces considérations nous amènent à nous poser les questions d'une définition plus précise de la vulgarisation en essayant de circonscrire les questions du public cible, mais aussi de la fonction assumée de la vulgarisation. Est-ce une fonction d'information ? Il s'agirait alors de donner des éléments de compréhension de faits et de découvertes scientifiques ; le troisième homme, ou le scientifique lui-même, serait alors le « traducteur » d'une langue que le grand public ne pourrait pas comprendre, ce qui laisse sous-entendre que le langage scientifique n'est présent que pour cacher au plus grand nombre la signification de ce qu'il porte. Ou bien est-ce une fonction d'éducation ? C'est à dire, s'agit-il de donner à un public déterminé un savoir utilisable dans une institution donnée et transposable dans d'autres circonstances. L'ambiguïté du message de la vulgarisation peut se retrouver dans une confusion entre les fonctions qui lui sont assignées. Dans la chaîne scientifique-passeur-public, les deux charnières scientifique-passeur et passeur-public sont sujettes à des incompréhensions que la transposition didactique peut aider à modéliser : le travail qui d'un objet de savoir en fait un objet de vulgarisation s'apparente naturellement à la transposition didactique. Mais le savoir-enseigné de la transposition didactique vit dans le système didactique et dans une institution spécifique, l'école, avec ses contraintes et les attentes sociales qui lui sont attachées. Alors que la fonction de la vulgarisation n'est pas clairement évoquée ni nommée. Considérer les fonctions de la vulgarisation amène à des questionnements déjà largement travaillés sur les effets des actions de vulgarisation tant en utilisant des medias (journaux, vidéos, documentaires,…) que dans des « institutions » de vulgarisation dont la MMI fait partie ; l'effet vitrine (Roqueplo, 1973) met en évidence la contradiction apparente de la vulgarisation. Malgré une volonté de rapprocher la science du public elle crée une séparation artificielle et la rend encore plus inaccessible ; ce qui est donné à voir, la vitrine, n'est qu'une façon de mettre en valeur un aspect, la plupart du temps attirant, d'un phénomène scientifique mais insuffisant pour reconstituer les concepts sous-jacents. Ainsi, la vulgarisation scientifique, loin de partager des savoirs, rend la science encore plus lointaine puisque ce qui en est montré n'est qu'un aspect faussé du discours scientifique ; la science est ainsi décrite par Roqueplo (Ibid.) comme appartenant au pouvoir et la vulgarisation comme un moyen d'asservissement dont le peuple (le *vulgus*) ne pourrait sortir que par le combat, c'est à dire par l'accession à la connaissance réelle et non pas celle dénaturée, voire caricaturée dans la vulgarisation ; le rôle, la fonction de la vulgarisation ne serait qu'une façon de cacher la réalité scientifique pour maintenir le peuple hors de la connaissance réelle ; dans ces conditions la vulgarisation ne peut qu'au plus susciter des envies de connaître, des vocations, avec le danger sous-jacent que l'accès à la connaissance préalablement masqué par la vulgarisation n'apparaisse comme beaucoup moins excitant et accessible que la jolie image proposée dans la vitrine. Peut-on alors diffuser, vulgariser des connaissances sans mettre en garde de la réelle exigence scientifique nécessaire pour comprendre les phénomènes étudiés ?

De la même façon, l'effet de la « *culture en simili* » (Maldinier, 1973) correspond aux utilisations de la vulgarisation dans un cadre sociétal ; sa fonction est ainsi de construire dans un certain groupe social une culture commune ou un verni de culture commune suffisant pour se reconnaître comme faisant partie de ce groupe social. La vulgarisation scientifique est alors considérée comme une marque de reconnaissance d'appartenance à ce groupe social et pas une diffusion des connaissances scientifiques à des fins de compréhension et d'utilisation. Maldinier (Ibid.) a étudié le lectorat de certaines revues de diffusion scientifique et a dégagé cet aspect de reconnaissance mutuelle à travers la vulgarisation proposée, la « *culture en simili* ». Il est là aussi certainement important dans le cadre d'une institution de diffusion de penser à la fonction de cette diffusion pour ne pas tomber dans cet effet repéré et étudié de la vulgarisation.

Enfin, lorsque la diffusion concerne un public en âge scolaire, il y a une concurrence de fait qui apparaît entre l'école et les lieux de diffusion avec l'idée que l'école ne peut pas proposer une vision créatrice de la science du fait des barrières imposées par l'institution elle-même. L'école ne traiterait que de techniques ennuyeuses :

> *Cantonnée souvent à la maîtrise de techniques de manipulations d'expressions écrites, la mathématique enseignée est pauvre d'un point de vue esthétique, sensoriel, dynamique et créatif, donnant une fausse image du travail du mathématicien. (Mercat, 2015, p. 935)*

La diffusion dans un cadre extérieur à l'école, au contraire, permettrait de casser les barrières et de laisser libre cours à la créativité. Cependant, le débat entre les propositions de l'école et la vulgarisation porte sur un aspect global de l'enseignement dans une organisation didactique donnée :

> *La TAD situe l'activité mathématique, et donc l'activité d'étude en mathématiques, dans l'ensemble des activités humaines et des institutions sociales. Or ce parti pris épistémologique conduit qui s'y assujettit à traverser en tous sens – ou même à ignorer – nombre de frontières institutionnelles à l'intérieur desquelles il est pourtant d'usage de se tenir, parce que, ordinairement, on respecte le découpage du monde social que les institutions établies, et la culture courante qui en diffuse les messages à satiété, nous présentent comme allant de soi, quasi naturel, et en fin de compte obligé. (Chevallard, 1998, p. 91)*

La vulgarisation apparaît alors comme une rustine sur un problème qui relève du domaine scientifique :

> *Je range les gens de métier parmi les gueux; et j'imagine alors des puissants qui leur veulent du bien. Rien de mal à cela a priori : ainsi font les dames patronnesses à l'endroit de leurs pauvres. Si cette dernière comparaison heurte, parlons de bienfaiteurs ou, avec les anciens Grecs, d'évergètes. (Chevallard, 2010, p. 8)*

Ce sont là de vraies questions qui interrogent à la fois la diffusion et le cadre scolaire habituel et qui renvoient aux relations qui peuvent exister entre les actions de vulgarisation et l'enseignement scolaire. Des questions qui sont bien sûr cruciales dans le cas de la Maison des Mathématiques et de l'Informatique tout comme elles le sont pour l'avenir de l'enseignement des mathématiques à l'école. Ce qui nous paraît intéressant plutôt que d'opposer diffusion et apprentissage est de comprendre et de construire les relations possibles entre les actions de diffusion et les apprentissages scolaires. Nous pouvons ainsi nous inspirer des réussites de la vulgarisation mathématique ; Math.en.jean[2], par exemple, permet à des élèves de construire de belles mathématiques et se donne comme objectif de développer « *des actions de jumelage entre un mathématicien et des établissements scolaires, afin de mettre les jeunes en situation de recherche, permettre aux élèves comme à leurs parents de se faire une autre image des mathématiques que celle d'une discipline scolaire sélective ou de champ scientifique strict et achevé* ». Mais ces actions restent volontairement en marge de l'école : ce sont des élèves volontaires qui travaillent avec leur professeur en relation avec un chercheur en dehors des horaires de mathématiques de la classe. La diffusion se dégage ainsi de la dévolution du problème, puisque seuls les élèves qui veulent s'emparer du problème participent à l'action. La diffusion, pour tous les élèves, en revanche ne peut se dispenser de penser la dévolution du problème et la dévolution du savoir qui pourra être institutionnalisé :

[2] https://www.mathenjeans.fr/

> *La dévolution de la situation a-didactique est peut-être observée indépendamment de la dévolution de l'objet d'enseignement […]. Ni le maître, ni l'élève ne peuvent identifier ce qui est enseigné, ce qui est à connaître ou à savoir. (Brousseau, 1986, p. 304)*

Nous pouvons montrer d'autres réalisations qui tendent, dans le cadre de l'école, de proposer des expériences impliquant tous les élèves dans le temps habituel de la classe (Aldon & Garreau, 2017). Ce sont vraiment les questions de la diffusion des mathématiques pour tous et de ses rapports à l'école qui sont posées. La distinction « vulgarisation-diffusion » relève sans doute des fonctions qui sont données aux actions proposées et on peut penser que la diffusion essaye de minimiser les effets constatés de la vulgarisation et en particulier les effets vitrines et « *culture en simili* » ; en contrepartie, les phénomènes de dévolution, de contrat didactique inhérents à des situations d'apprentissage doivent être pris en compte dans cette construction subtile d'une diffusion-apprentissage. Pour un public en âge scolaire, la collaboration entre l'école et les lieux de diffusion devient cruciale, les seconds pouvant permettre une approche novatrice mais rigoureuse de concepts scientifiques facilitant la dévolution des savoirs, la première permettant cette nécessaire institutionnalisation donnant aux connaissances rencontrées un statut local de savoir, suffisant pour être mobilisable pour apprendre. Les questions de l'utilisabilité des cadres théoriques de la didactique des mathématiques pour analyser les actions de vulgarisation-diffusion des mathématiques apparaissent fructueuses et les réflexions précédentes montrent l'importance d'un regard anthropologique permettant, entre autres, de mettre en évidence les phénomènes de transposition didactique.

Un autre aspect très important dans les phénomènes de diffusion et d'enseignement est la place du jeu dans le processus même d'apprentissage. Si l'on souhaite rester dans une perspective cognitive, les définitions des jeux épistémiques (Loup & al., 2015, Schaffer & al., 2009) mettent en avant les connaissances comme moteur fondamental du jeu qui se joue ainsi dans un domaine spécifique sous-jacent. Les caractéristiques des jeux épistémiques sont listées par plusieurs auteurs comme proposant une résolution de problèmes non-déterministes, au sens où la solution n'est pas déterminée à l'avance, ou plusieurs solutions différentes peuvent être apportées, concernent la résolution de problèmes complexes, s'appuient la plupart du temps sur des activités pluridisciplinaires dans un contexte réaliste et mettant en jeu des connaissances repérées. (Sanchez & al., 2012, Salmani Nodoushan, 2009, Schaffer & al., 2009). Le jeu est omniprésent dans les actions de diffusion, et c'est même ce que les enseignants viennent principalement chercher à la MMI. Je ne rentre pas dans la délicate question de la définition de ce qu'est un jeu et je laisse aux spécialistes la responsabilité des définitions (Pelay, 2011 ; Essonier, 2018 ; Sanchez & al. 2012), mais j'insiste plus sur la distinction importante à faire entre le jeu-game et le jeu-play pour le relier au concept didactique de milieu. Le jeu-game dont on peut faire le parallèle avec le milieu matériel d'une situation de référence dans le cadre de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1986). Et le jeu-play l'acte de jouer peut être mis en parallèle avec les situations d'actions et de formulation d'une situation didactique, et les allers retours entre les situations de référence et d'apprentissage de la structuration des milieux (Margolinas, 2004).

Mais en faisant le parallèle avec les situations didactiques se posent la question fondamentale de l'institutionnalisation. En particulier, dans quelle institution se passe cette institutionnalisation ? Dans quelle institution le savoir est-il partagé ? Je pense qu'ici, il y a un point important de distinction entre la vulgarisation et l'enseignement.

Pour illustrer ces propos je voudrais m'attacher rapidement à trois exemples différents d'actions de vulgarisation dans leurs rapports avec l'enseignement et l'apprentissage.

Tout d'abord et parce que c'est d'actualité (Aldon, 2018), je voudrais parler du Rallye Mathématique de l'Académie de Lyon (RMAL), puis plus spécifiquement des ateliers pour les scolaires de la MMI et faire un petit détour par les « cours de maths pour les parents » ou les mathématiques de l'école racontées aux parents.

III. TROIS EXEMPLES DE VULGARISATION ET LEURS RAPPORTS A L'ENSEIGNEMENT

1. Le rallye mathématique de l'Académie de Lyon

Le rallye mathématique de l'Académie de Lyon[3] est né en 2006 d'une initiative conjointe de l'IREM de Lyon, de l'APMEP et du rectorat de l'Académie de Lyon. Il est destiné aux élèves des classes de troisième, seconde, CAP et deux premières années de bac pro 3 ans des établissements publics et privés sous contrat des trois départements de l'Académie de Lyon (Ain, Loire et Rhône).

> *Le Rallye comporte plusieurs phases :*
>
> *- les épreuves écrites du Rallye sous forme d'un travail collectif de résolution de problèmes dans chaque classe inscrite ; l'illustration d'un des exercices peut être le support du concours d'affiches pour choisir l'affiche du Rallye de l'année suivante ;*
>
> *- en mai ou juin, la finale pour les 12 classes lauréates des épreuves écrites, sous forme d'un parcours mathématique sur le campus de la Doua à Villeurbanne. Les classes participent ensuite à une conférence sur un thème mathématique. La journée se termine par une remise de prix, chaque élève recevant une petite récompense offerte par l'un de nos partenaires ou achetée par l'association ;*
>
> *- entre avril et juin, une vingtaine de classes, autres que les classes finalistes, sont également récompensées pour leurs bons résultats aux épreuves écrites ou à la recherche du problème ouvert. Elles gagnent la découverte d'un site scientifique ou technologique de la Région ou bien une remise de prix organisée dans leur établissement avec l'intervention d'un chercheur sur un thème mathématique, ou encore une petite récompense individuelle.*[4]

Est-ce une action d'enseignement ou une action de diffusion ? Mille classes ont été inscrites cette année (2018) dans l'Académie soit environ 30 000 élèves qui ont participé à l'épreuve « écrite » puisque la classe entière est concernée et tous les élèves participent à l'épreuve. Cette première épreuve se passe dans le cadre de l'école, presque dans le cadre du cours de mathématiques puisque généralement une partie de la journée est banalisée pour chaque classe dans l'établissement pour permettre aux deux heures d'épreuve de prendre place. Le contrat didactique spécifique peut s'intégrer au contrat de la classe et d'une certaine manière le modifie en mettant un accent particulier sur l'utilisation des connaissances comme le montre très bien le travail qui a été réalisé par Guillaume et Delphine Thérez (Thérez & Thérez, 2018). On est ici dans une forme de diffusion complètement intégrée à l'enseignement où le succès atteste la volonté des enseignants de mathématiques d'intégrer le jeu, la réflexion et l'enseignement en faisant, d'une certaine manière sortir les maths de la salle de classe tout en restant dans l'institution spécifique de la classe. Mais cette séance peut également rester une parenthèse ludique dans le cadre d'une activité culturelle. C'est bien de la responsabilité des enseignants d'en faire au niveau de la classe une proposition didactique

[3] http://rallye-math.univ-lyon1.fr/
[4] http://rallye-math.univ-lyon1.fr/spip.php?article37

mettant le problème au cœur de l'enseignement des mathématiques. Le problème est alors vu comme une investigation prenant une place centrale de l'enseignement des maths comme le fait remarquer Gardes (2018) :

> *Le point de vue épistémologique sur l'activité mathématique qui sous-tend un enseignement et un apprentissage par la résolution de problèmes est celui de la place centrale des problèmes dans l'activité mathématique. (p. 79)*

Dans ce cas, l'institution cible est bien l'école et la référence montrée ici au programme de mathématiques est significative :

> *La démarche d'investigation présente des analogies entre son application au domaine des sciences expérimentales et à celui des mathématiques. (BO 5 25 août 2005)*

Ce premier exemple montre bien la délicate frontière existant entre la vulgarisation, présente dans le rallye mathématique de l'Académie de Lyon à travers la diffusion de connaissances mathématiques sous forme ludique, et l'enseignement des mathématiques dans les classes, présent dans l'utilisation du cadre même du rallye pour modifier un contrat didactique à l'intérieur des classes. C'est aussi un bel exemple de la complémentarité de la diffusion et de l'enseignement pour un bénéfice d'apprentissage des mathématiques. Les concepts de la didactique des mathématiques, en particulier, de la Théorie des Situations Didactiques, sont ici pertinents pour analyser les apports du rallye pour les apprentissages des élèves et l'utilisation. L'exploitation dans la classe du cadre particulier du Rallye est un exemple de la modification du contrat didactique puisque le savoir est dévolu à travers une situation de jeu puis institutionnalisé dans le cadre de la classe. Le rallye propose dans la construction des situations didactique un milieu particulier facilitant la dévolution tout au long de l'utilisation des épreuves dans les phases de mise en train, d'entraînement, de « concours » et d'exploitation, et en ce sens modifie dans la classe le contrat didactique habituel. Cette analyse didactique de l'utilisation dans la classe des épreuves du rallye permet de mieux comprendre les enjeux de la diffusion des mathématiques dans une action de type « rallye ». Il ne s'agit pas de proposer une parenthèse ludique dans un cours ennuyeux mais bien de modifier profondément l'approche des mathématiques en proposant des exemples didactisés de situations d'apprentissage.

2. Les ateliers de la Maison des Mathématiques et de l'Informatique (MMI)

Le deuxième exemple de diffusion des mathématiques est représenté par les ateliers proposés pour les scolaires dans le cadre de la MMI. En 2018, le taux d'occupation de la MMI pour les activités pour les scolaires a été proche de 80 %. A partir du catalogue de la MMI, les enseignants nous contactent pour organiser une demi-journée ou une journée d'atelier pour leurs classes autour d'un thème : calculer et jouer avec la pascaline, la cryptographie, l'informatique débranchée, calculer c'est gagné, ludothèque, la malle à jeux…[5]

Ici les questions de l'institutionnalisation sont évidemment cruciales et participent de l'impact de ces ateliers sur la diffusion des mathématiques : les élèves viennent ponctuellement et participent à des activités mettant en jeu des connaissances mathématiques qui ne pourront être institutionnalisées que dans le cadre de la classe. C'est ainsi, là encore, à la charge de l'enseignant, s'il le veut, d'exploiter dans la classe ce qui a été fait dans l'atelier. Cependant, les ateliers pour les scolaires peuvent avoir un double objectif. D'une part proposer aux élèves une approche différente de concepts mathématiques abordables et d'autre part montrer aux enseignants les possibilités d'apprentissage offertes par une approche différente de concepts présents dans les programmes. L'exemple des animations autour de la pascaline est

[5] http://mmi-lyon.fr/clic-activites-scolaires-2017-2018/

significatif de cette volonté de diffusion à la fois au niveau d'une transmission des connaissances pour les élèves qui participent à l'action mais aussi d'une diffusion d'une certaine vision de l'enseignement et de l'apprentissage en direction des enseignants qui accompagnent les classes. La pascaline est une machine à calculer construite sur l'idée de la Pascaline de Blaise Pascal (Fig. 1). Il s'agit d'un ensemble de roues dentées permettant d'afficher des nombres d'au plus trois chiffres, et de mettre en œuvre des algorithmes permettant d'additionner ou de soustraire des nombres mais aussi de proposer des jeux avec les nombres tirant profit de l'artefact lui-même (Soury-Lavergne & Maschietto, 2015). L'objectif de l'usage de la pascaline est l'enseignement de la numération décimale de position et les opérations d'addition et de soustraction. Les principes didactiques sous-jacents sont mis en acte appuyés par les réflexions théoriques (Soury-Lavergne, 2017). Les séquences et situations proposées utilisent des pascalines et des logiciels dans lesquels apparaît une version informatisée de la pascaline, appelée e-pascaline.

Figure 1 : La pascaline et les cliquets violet.

L'atelier joue de cette façon un double jeu : d'enseignement et d'apprentissage et de formation. Il y a donc un double effet d'institutionnalisation, en direction de l'institution classe et en direction de l'institution éducation. En ce qui concerne la classe, les situations proposées ont été conçues pour que le milieu proposé aux enfants leur permette de construire l'écriture décimale de position des nombres en jouant sur la complémentarité de la manipulation de l'objet tangible (la pascaline physique) et de l'objet numérique (la e-pascaline), en relation avec la construction abstraite de l'écriture du nombre. L'exemple du jeu « nombre de clics » est significatif de cette complémentarité : il s'agit d'afficher sur la pascaline un nombre donné en un minimum de clics, c'est à dire d'actions sur l'une ou l'autre des roues de la pascaline qui se traduisent par un son du fait des cliquets permettant une rotation discrète des roues (Fig. 1). Ce qui, informatiquement, se traduit par des clics de la souris sur la e-pascaline. Afficher le nombre 12 conduit à au moins deux stratégies : l'énumération de 12 sur la roue des unités ou de décomposition du nombre en une dizaine (un clic sur la roue des dizaines) et deux unités (2 clics sur la roue des unités). Pour un nombre comme 18, par exemple, la stratégie gagnante provient cette fois d'une décomposition soustractive du nombre : 18 = 20 - 2. Mais avant d'arriver à la justification par le calcul de l'écriture, les stratégies sur la pascaline peuvent être d'afficher 8 sur la roue des unités en tournant la roue dans le sens trigonométrique puis de tourner la roue des dizaines de 2 clics dans le sens négatif. Mais la suite d'opérations sous-jacente à cette manipulation est : 0 - 2 = 998 puisque la pascaline tangible affiche les nombres de Z/1000Z. Puis 998 + 20 = 18. La e-pascaline en revanche travaille dans l'intervalle de nombres entiers [0 ; 999] et ne permet donc pas de soustraire un nombre à 0. La vérification sur la e-pascaline de cette stratégie s'avère impossible et incite à repenser le défi en terme de calcul. Le dialogue ci-dessous provient de la recherche d'un groupe de deux CE1(A et B) sur le minimum de clics pour atteindre 99 après qu'ils aient trouvé 99 en 24 clics (résultat dont on peut supposer qu'il provient de quelques mauvaises manipulations), en 18 clics (9 dizaines et 9 unités), en 4 clics (100 – 10 – 1 + 10) :

- (A affiche 100 sur la e-pascaline)
- B : Là, là c'est bon (il utilise la pascaline tangible et pointe du doigt vers l'ordinateur). J'ai trouvé l'astuce. Là ici ! (il pointe du doigt la flèche de sens direct de la roue des unités)
- (A clique)
- B : ouiiiiiiii !
- (A demande confirmation à l'ordinateur qui affiche le smiley)
- A : Yes ! (en frappant des mains) (Fig.2)

Ce qu'il reste à institutionnaliser, c'est la découverte de « l'astuce » et le lien avec l'opération réalisée : 99 = 100 – 1.

Figure 2 : 99 en deux clics.

En ce qui concerne les enseignants eux-mêmes, la conduite de l'atelier, la mise en évidence des apports didactiques spécifiques des artefacts tangibles ou numériques, et les rétroactions des élèves sur les situations proposées nous permettent une institutionnalisation des principes didactiques qui ont présidé à l'élaboration de l'atelier.

Dans le même ordre d'idée, les ateliers construits sur l'idée d'informatique sans ordinateur proposent cette double institutionnalisation : en direction des élève dans une diffusion de connaissances informatiques et en direction des professeurs pour diffuser ces connaissances d'algorithmique (Bell & al., 1998).

3. Cours pour les parents

Un autre exemple de diffusion est l'initiative portée par la MMI d'un cours à destination des parents d'élèves : tout ce que vous avez toujours voulu savoir sur les mathématiques et leur enseignement ! Du point de vue de la diffusion il y a là encore un double objectif : décrypter le contrat de l'école pour des parents pas toujours au fait des attendus de l'école et puis permettre un regard critique sur les mathématiques enseignées et apprises. D'un point de vue pratique, il s'agit de séances de deux heures par semaine pendant lesquelles les parents d'élèves peuvent poser des questions essentiellement issues de difficultés ressenties par leurs enfants et pour lesquelles ils n'ont pas de réponse, ou pas de réponse adaptée, c'est à dire cohérente avec les attendus de l'école à un instant précis. L'exemple de la proportionnalité et des méthodes de résolution de problèmes de ce type est tout à fait significatif de cette transposition didactique. Les techniques sont différentes en regard de types de tâches identiques et le propos du cours est de proposer des technologies et une approche de la théorie permettant de faire le lien entre les techniques différentes. Dans ce cas l'école est en toile de fond mais l'institution visée est d'une autre nature. Cette expérience de « cours pour les parents » est menée avec la participation d'étudiants de l'ENS de Lyon qui ont suivi un cours de master de « diffusion des mathématiques » que j'ai donné. Pour les parents, il s'agit vraiment de se décomplexer vis-à-vis des mathématiques et des mathématiques enseignées et de comprendre à la fois le contrat de l'école et les connaissances fondamentales proposées par l'école dans chacun des cycles. Comment aider ses propres enfants lorsque les méthodes apprises ne correspondent plus à l'enseignement actuel ou que les connaissances sont (semblent) différentes de celles acquises quelques années en arrière ? La réponse proposée consiste davantage à mettre en évidence les connaissances fondamentales que les élèves doivent acquérir en fin de cycle de façon à donner aux parents d'élèves un recul suffisant sur les savoirs enseignés pour pouvoir modifier leur rapport aux mathématiques elles-mêmes. D'un point de vue didactique, les questions des parents amènent nécessairement à se plonger dans la transposition didactique et l'analyse praxéologique des concepts mathématiques en jeu de façon à rendre opérationnelles les savoirs abordés. Il ne s'agit pas de présenter des concepts superficiellement mais bien de rentrer dans la construction des connaissances de façon à armer les parents d'élèves pour qu'ils puissent répondre aux questions posées par leurs enfants. Ce cours apparaît ainsi comme un lieu de diffusion de la culture mathématique dont les objectifs dépassent la seule information pour proposer un véritable apprentissage des mathématiques de l'école appuyé sur une présentation et une justification des techniques apprises ou que les enfants proposent à leurs parents tout en gardant l'objectif de proposer une vision sereine et pacifiée des mathématiques,.

Dans ces trois exemples, la relation entre la diffusion et l'apprentissage est clairement mis en évidence et montre la nécessaire réflexion autour de la diffusion pour faire en sorte que les effets repérés de la vulgarisation ne soit pas un obstacle aux objectifs annoncés de la vulgarisation.

IV. CONCLUSION

Les exemples développés montrent qu'à l'évidence les cadres de la didactique des mathématiques sont utilisables pour comprendre les enjeux de la diffusion des mathématiques. Sont-ils suffisants ? Comme dans toute analyse de phénomènes complexes des sciences humaines, un unique regard ne peut embrasser toute la complexité et les approches multiples, sociologiques, anthropologiques, didactiques seraient bien entendu nécessaires pour mieux comprendre les questions que pose la transmission d'une culture à travers les actions de vulgarisation des sciences. Les critiques adressées à la vulgarisation scientifique issues de la sociologie ou des sciences du langage convergent pour mettre en évidence les effets de la vulgarisation en contradiction avec les intentions affichées. Le travail engagé à la MMI montre que cette adéquation entre les intentions et les effets pourraient être largement réduits en proposant des situations construites sur des analyses *a priori* utilisant les outils de la didactique des mathématiques ou de l'informatique. Les concepts fondamentaux de la Théorie des Situations Didactiques tout comme ceux de la Théorie Anthropologique du Didactique permettent de réfléchir ces actions de diffusion en se prévenant des effets repérés de la vulgarisation. Nous avons pointé dans les exemples développés la nécessité d'une dévolution de la situation au public visé lorsque la fonction de la vulgarisation tend à diffuser largement une culture scientifique authentique. L'étude praxéologique des types de tâches proposées dans les actions de vulgarisation peut là aussi modifier l'approche et la compréhension des concepts en jeu et éviter de montrer une belle construction inatteignable puisque tronquée. La question de l'institutionnalisation est une question cruciale pour les actions de diffusion pour que l'effet vitrine ne soit pas un obstacle aux objectifs annoncés ou qu'elles ne restent pas une « *culture en simili* ». Mais, et les exemples développés le montrent, les outils de la didactique permettent d'analyser les propositions de vulgarisation lorsque la fonction qu'on lui donne se construit sur une volonté de transmission de connaissances et non pas seulement sur l'admiration d'une vitrine, une autre forme de « visite des œuvres », rapport mondain à une culture qui évite la rencontre avec la motivation de l'œuvre.

Par ailleurs et dans une perspective d'intégration dans l'école des bonnes idées de la vulgarisation, les objectifs de la diffusion se doivent de favoriser les passerelles entre l'école et ses objectifs d'apprentissage et les lieux institutionnels de la diffusion plutôt que de les opposer. La double institutionnalisation en direction des enfants mais aussi des enseignants est ainsi une piste de travail pour diffuser à la fois les méthodes et les analyses issues de la didactique des mathématiques.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ALDON, G. (dir.). (2018). Le rallye mathématique dans la classe : un jeu très sérieux. Canopé-IREM de Lyon.

ALDON, G. & GARREAU, O. (2017). Un dispositif de recherche de problèmes de mathématiques au cycle 3, Repères IREM, 108, 26-40.

BELL, T. C., WITTEN, I. H. & FELLOWS, M. (1998). Computer Science Unplugged: Off-line activities and games for all ages. Computer Science Unplugged.

BROUSSEAU, G. (1986). Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques. Thèse d'état, Université de Bordeaux 1.

CHEVALLARD, Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. *Actes de cette université d'été Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques*, 91-120.
http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Analyse_des_pratiques_enseignantes.pdf

CHEVALLARD, Y. (2010). L'échec splendide des IUFM et l'interminable passion du pédant. Quel avenir pour le métier de professeur ? *Actes de Regards des didactiques des disciplines sur les pratiques et la formation des enseignants,*
http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Colloque_Gridife_20-22_octobre_2010_Conference_YC.pdf, *consulté le 12 janvier 2019*

DE LALANDE, J. (1786-1817). *Astronomie des dames* (4eme édition). Ménard et Desenne fils, Paris.

FONTENELLE, B. (1686-1724). *Entretiens sur la pluralité des mondes*. Chez Michel Brunet, grand'Salle du Palais, au Mercure Galant.

ESSONIER, N. (2018). *Étude du développement d'une communauté d'intérêt autour de la conception et de l'expérimentation de ressources numériques en mathématiques*, Thèse de l'Université Lyon 1.

GARDES, M.-L. (2018). Démarches d'investigation et recherche de problèmes. In G. Aldon (dir.). *Le rallye mathématique dans la classe : un jeu très sérieux* (pp. 73-96). Canopé-IREM de Lyon,

LOUP, G., GEORGE, S. & SERNA, A. (2015). Fondements et caractérisation des jeux épistémiques numériques pervasifs. *Actes des 7eme conférence sur les Environnements Informatiques pour l'Apprentissage Humain,* 41-52, http://eiah2015.uiz.ac.ma consulté le 15 décembre 2018.

MALDINIER, P. (1973). *Les revues de vulgarisation, contribution à une sociologie des cultures moyennes*. Ronéo, CSE, Paris, 168.

MARGOLINAS, C. (2004). *Les bifurcations didactiques : Un phénomène révélé par l'analyse de la structuration du milieu*. Habilitation à Diriger des Recherches, Université de Clermont-Ferrand.

MERCAT, C. (2015). La diffusion : un lieu pour une mathématique plus humaine ? *Actes de EMF 2015*, p. 934-943.

PELAY, N. (2011). *Jeu et apprentissages mathématiques : Elaboration du concept de contrat didactique et ludique en contexte d'animation scientifique*. Thèse de doctorat, *Université de Lyon I,* Lyon. https://halshs.archives-ouvertes.fr/tel-00665076/

ROQUEPLO, P. (1973). Partage du savoir et vulgarisation scientifique. *Economie et Humanités*, 212, 40-49.

SANCHEZ, E., JOUNEAU-SION, C., DELORME, L., YOUNG, S., LISON, C. & KRAMAR, N (2012). Fostering Epistemic Interactions with a Digital Game A Case Study about Sustainable Development for Secondary Education. *International Symposium Science & Technology Education for Development, Citizenship and Social Justice.*

SHAFFER, D.W., HATFIELD, D., SVAROVSKY, G.N., NASH, P., NULTY, A., BAGLEY, E., FRANK, K., RUPP, A.A. & MISLEVY, R. (2009). Epistemic Network Analysis: A Prototype for 21st-Century Assessment of Learning. *Int. J. Learn. Media*. 1, 33–53.

SOURY-LAVERGNE, S. (2017). *Duos d'artefacts tangibles et numériques et objets connectés pour apprendre et faire apprendre les mathématiques*, Doctoral dissertation, Ecole Normale Supérieure de Lyon-ENS LYON; Institut Français de l'Education.

SOURY-LAVERGNE, S. & MASCHIETTO, M. (2015). Number system and computation with a duo of artefacts: The pascaline and the e-pascaline. In X. Sun, B. Kaur & J. Novotna (Eds.), *Proceedings of ICMI Study 23: Primary Mathematics Study on Whole Numbers* (pp. 371–378). Macau, China.

THÉREZ, D. & THÉREZ, G. (2018). Le rallye dans l'enseignement des maths, In G. Aldon, G. (dir.), *Le rallye mathématique dans la classe : un jeu très sérieux* (pp. 115-146). Canopé-IREM de Lyon.

L'ATELIER DES POTIONS – UN JEU DIDACTIQUE ET LUDIQUE POUR L'APPRENTISSAGE ET L'ENSEIGNEMENT DES FRACTIONS

Alix **BOISSIERE**
IMAG, Univ Montpellier, CNRS, Montpellier, France
Plaisir Maths R&D
alix.boissiere@umontpellier.fr

Nicolas **PELAY**
Plaisir Maths R&D
nicolas.pelay@plaisir-maths.fr

Résumé
Ce texte reprend les grandes lignes de l'exposé que nous avons donné au séminaire national de l'ARDM en mars 2018 et dont la vidéo est accessible en ligne. Nous y avons présenté les travaux de recherche du collectif Plaisir Maths et en particulier la conception d'un jeu didactique et ludique pour l'enseignement et l'apprentissage de la notion de fractions : l'Atelier des potions®.

Mots clés
Jeu, Contrat didactique et ludique, Fractions, Atelier des potions®

I. INTRODUCTION

L'Atelier des potions est un jeu didactique et ludique conçu par des chercheurs, enseignants et animateurs du collectif Plaisir Maths[1] pour jouer et apprendre les fractions. Il est le fruit d'un projet de recherche et développement (R&D) mené en didactique des mathématiques au sein de Plaisir Maths R&D. Dans la continuité de la thèse de Pelay (2011) et de ses travaux de recherche sur la dialectique jeu/apprentissage en mathématiques. La thèse de Boissière est en cours de réalisation en lien avec ce nouveau jeu.
Dans une première partie, nous revenons sur les origines et les enjeux du projet didactique de Plaisir Maths, puis dans une deuxième partie nous décrivons le jeu Atelier des potions[2] et le cahier des charges qui a permis de le réaliser. Dans une troisième partie, nous détaillons le processus de recherche et développement et explicitons les choix opérés pour permettre sa réalisation.

[1] www.plaisir-maths.fr
[2] www.atelier-potions.fr

II. ORIGINE ET ENJEUX DU PROJET

1. Le travail de Pelay

Le travail de thèse de Pelay (2011) est le premier à mettre la dialectique jeu/apprentissage au cœur d'une problématique de recherche en didactique des mathématiques. Pelay a adapté des situations didactiques pour les rendre viables dans le contexte d'animation scientifique dans lequel il a mené ses expérimentations (séjours de vacances, fête de la science, classe de découverte, etc.). Il montre que le jeu est un moteur du processus de dévolution et qu'il existe, dans la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998), une dimension ludique intrinsèquement liée à la dimension didactique.
Le concept de contrat didactique et ludique est élaboré afin d'étudier les interactions entre un animateur et des enfants. Il est défini comme l'ensemble des règles et comportements, implicites et explicites, entre un "éducateur" et un ou plusieurs "participants" dans un projet, qui lie, de façon explicite ou implicite, jeu et apprentissage dans un contexte donné.
L'élaboration de ce concept montre ainsi qu'il est possible d'objectiver la dimension ludique d'une activité, et en particulier qu'il existe des ressorts ludiques[3] internes à une situation didactique.
Une perspective de recherche, pour Pelay, est qu'il devient désormais possible d'intégrer la dimension ludique dès le processus de conception d'ingénierie didactique, ce qui ouvre la perspective de concevoir des « ingénieries didactiques et ludiques » : elles sont définies comme des ingénieries didactiques incluant la dimension ludique dans le processus de conception. L'objectif est notamment de pouvoir développer des ingénieries de développement adaptées au terrain en même temps que des recherches didactiques en lien avec la dialectique jeu/apprentissage.
Pour développer des recherches didactiques dans le champ encore peu étudié de l'animation scientifique, Nicolas Pelay s'engage de façon pratique : il expérimente par lui-même certaines animations scientifiques, s'engage en tant que directeur de séjour de vacances, forme de nouveaux animateurs scientifiques, etc. Cela le conduit à développer une méthodologie de recherche spécifique, la méthodologie des trois pôles (Pelay, 2016), pour rendre compte de son implication sur le terrain, et de l'impact sur ses recherches didactiques.

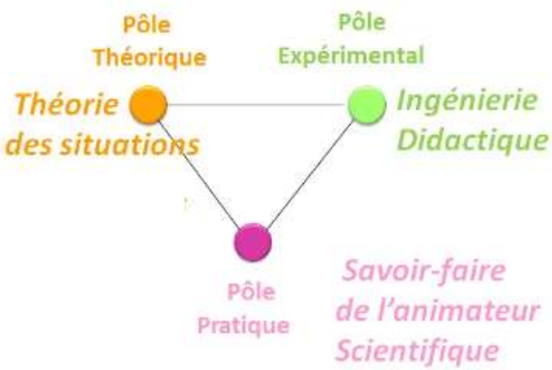


Illustration 1: Schéma de la méthodologie des trois pôles, Pelay (2016).

[3] La course, la compétition, l'imaginaire et la recherche de stratégies sont par exemple les ressorts ludiques présents dans la situation didactique principale expérimentée et analysée dans la thèse de Pelay (2011). La notion est détaillée page 110.

2. Le projet didactique de Plaisir Maths

Afin de pouvoir poursuivre ses recherches sur la dialectique jeu/apprentissage, Pelay a fondé en 2011 Plaisir Maths, une structure de diffusion des mathématiques regroupant des chercheurs en didactique, des enseignants et des animateurs mathématiques. Les animations y sont conçues et expérimentées en lien avec l'approche théorique développée dans sa thèse, et la méthodologie des trois pôles devient une méthodologie de recherche et de développement (Pelay, 2016). Pour accompagner et rendre possible cette démarche, un nouveau métier est développé au sein de Plaisir Maths, celui d'ingénieur didactique, centré sur la conception d'animations, de jeux et de ressources, en lien direct avec la recherche en didactique des mathématiques.
Depuis sa création, Plaisir Maths a ainsi mené plus de 500 animations dans et hors la classe, et nous collaborons avec la maison des mathématiques et du numérique de Belgique (MDMEN), la Maison des Mathématiques et de l'Informatique de Lyon (MMI), et menons des projets de recherche et développement comme « L'atelier des potions » ou « les mathématiques, c'est stratégique » (Boissière, Pelay & Rougetet, 2017).
L'équipe de recherche et développement de Plaisir Maths poursuit le travail de recherche sur la dialectique jeu/apprentissage, et selon plusieurs axes :

Axe 1 : Elaboration d'animations, de jeux, de matheliers[4]et d'ingénieries didactiques et ludiques

Nous nous questionnons sur les activités et les jeux proposés pour optimiser les liens entre jeu et apprentissages mathématiques, sur la classification de ceux-ci, et leur intégration dans les processus d'enseignement et d'apprentissage. Nous travaillons à développer les concepts introduits par Pelay (2011), notamment en vue de développer à terme des ingénieries didactiques et ludiques.

Axe 2 : Pratiques ludiques des enseignants et des animateurs

Nous cherchons à caractériser les pratiques des enseignants et des animateurs en formation et en ressource sur l'utilisation du jeu pour l'enseignement, l'apprentissage et la diffusion des mathématiques dans et hors la classe.

Axe 3 : Évaluation et impact des activités didactiques et ludiques

L'objectif est de mesurer l'impact et les effets de l'utilisation du jeu sur les élèves et les enfants : quels sont les apprentissages réalisés ? Comment évoluent la relation aux mathématiques ? Quels sont les effets sur le long terme de la mise en place de pratiques ludiques dans l'enseignement des mathématiques ?

3. Connexions avec la MMI

La maison des mathématiques et de l'informatique de Lyon (MMI[5]) est un lieu privilégié pour les expérimentations menées par Plaisir Maths. C'est un lieu de diffusion des sciences dédié aux sciences mathématiques et informatiques via une approche vivante, ludique et pluridisciplinaire, et connecté au milieu de la recherche universitaire. Entièrement pilotée par des enseignants-chercheurs passionnés, elle a été créée en 2012 par le Laboratoire d'excellence en Mathématiques et Informatique fondamentale de Lyon et déploie toute l'année des actions pédagogiques et innovantes à destination de publics variés : élèves, enseignants, grand public. L'offre d'animation est le résultat d'une collaboration avec des partenaires éducatifs et les acteurs associatifs lyonnais.
Plaisir Maths anime tous les samedis après-midi une ludothèque mathématique pour le grand

[4] Le concept de mathelier® est un concept d'atelier mathématique développé au sein de Plaisir Maths qui vise à faire diffuser les mathématiques de façon ludique en intégrant des problématiques de recherche didactique et en s'appuyant sur la méthodologie des trois pôles.
[5] www.mmi-lyon.fr

public, et mène tout au long de l'année des animations à destination des écoles avec des profils de classe très différents : classes de la grande section à la terminale, ordinaires, REP, REP+, Ulis, non francophones, etc.
La multitude des animations et la diversité des conditions d'animation nous permettent de mettre à l'épreuve la robustesse de nos activités au cours du temps, et de développer un pôle pratique consistant pour poursuivre nos recherches théoriques.

III. L'ATELIER DES POTIONS : UN JEU DIDACTIQUE ET LUDIQUE

Les animations menées à la MMI avec des groupes scolaires nous ont amené à considérer le fait que les résultats de la thèse de Pelay pourraient être pertinents en contexte d'éducation formelle. Nous avons commencé à travailler à la transmission de notre savoir-faire aux enseignants, dans l'optique de leur fournir les moyens de mettre en place des ingénieries didactiques et ludiques dans leur classe. Partant de ces observations, nous avons souhaité développer un jeu didactique pour le cycle 3 et prenant en compte l'intégration des composantes didactique et ludique dès la phase de conception.

1. Cahier des charges

Pour réaliser le jeu, nous avons défini un cahier des charges constitué de trois catégories : didactique, ludique, et utilisation en classe.
Sur le plan didactique, nous nous appuyons sur la théorie des situations didactiques, et nous identifions les caractéristiques didactiques que nous souhaitons retrouver dans notre jeu :
- un jeu qui favorise le processus de dévolution, permettant à la fois l'entrée et le maintien dans l'activité ;
- un jeu avec un fort potentiel d'adidacticité, et qui puisse s'insérer dans une séquence didactique articulant des situations d'action, de formulation et de validation ;
- un jeu qui laisse des choix possibles pour les variables didactiques mathématiques et d'organisation, afin de donner aux enseignants et animateurs de nombreuses possibilités d'action.
Sur le plan du ludique, l'objectif est d'élaborer un jeu de société qui puisse fonctionner comme tel, indépendamment de toute intention didactique *a priori*, et qui puisse être joué aussi bien à l'école que hors l'école. Nous souhaitons une grande part de manipulation, une contextualisation motivante et accrocheuse, et surtout de nombreux ressorts ludiques pour que la majorité des enfants puissent y trouver une caractéristique ludique qui leur plait. Plus le jeu comporte de ressorts ludiques, plus il a de chance de plaire à un grand nombre de joueurs.
Enfin, nous souhaitons que ce jeu puisse être un véritable outil d'enseignement en classe, dans la mesure où notre objectif est d'élaborer un jeu pour l'enseignement des mathématiques. En collaboration avec des enseignants du cycle 3, nous avons défini les critères suivants :
- le thème du jeu doit être une notion du programme scolaire ou une compétence du socle commun ;
- le jeu doit permettre le travail autonome des élèves ;
- l'ergonomie du jeu doit être adaptée à une utilisation en classe (facile à installer et à ranger, matériel adapté aux élèves, plusieurs modalités d'utilisation, etc.) ;
- la durée d'une partie doit être modulable ;
- les règles et la prise en main du jeu doivent être simples et faciles à comprendre.

2. La notion de fraction

L’appropriation du concept de fraction, introduite actuellement dans le curriculum français au cours du cycle 3, est complexe et source de difficultés pour de nombreux élèves tout au long de leur scolarité. Cette notion fait l’objet de travaux en didactiques des mathématiques constants depuis les années 1970, avec les travaux pionnier de Brousseau (1981), jusqu’à plus récemment, avec ceux d’Allard (2016) et Alahmadati (2016). De nombreuses difficultés conceptuelles décrites dans les travaux en didactiques sont le résultat des multiples interprétations possibles des fractions, selon le contexte d’utilisation et les problèmes associés.
Parmi les travaux menés en didactique, trois ingénieries ont été transposées, du moins en partie, dans l’enseignement ordinaire : l’ingénierie longue de Brousseau destinée à capturer l’ensemble de la notion, l’ingénierie de Douady et Perrin-Glorian (1986) constituée de situations visant à présenter les fractions comme outil à la résolution de problème, et l’ingénierie du groupe ERMEL proposant une introduction des fractions par le rapport de mesures de grandeurs.
Pour autant, l’enseignement des fractions demeure pour beaucoup d’enseignants du cycle 3 une réelle difficulté professionnelle sur laquelle ils sont en demande d’outils pédagogiques adaptés et de formation, et c’est pourquoi nous faisons l’hypothèse que le développement d’un jeu sur les fractions sera favorable au développement d’une problématique de recherche et de développement autour de la notion d’ingénierie didactique et ludique.

3. Présentation du jeu

L’Atelier des potions est un jeu de plateau qui peut se jouer seul, en binôme ou à quatre. Les joueurs sont des apprentis sorciers qui gagnent des points de magie en réalisant des potions Au départ, chaque sorcier a devant lui un chaudron et un plateau avec quatre types d’ingrédients (des araignées, des grenouilles, des raies et des serpents) qui sont prédécoupés en morceaux (demis, tiers, quarts, neuvièmes, dixièmes, etc.).

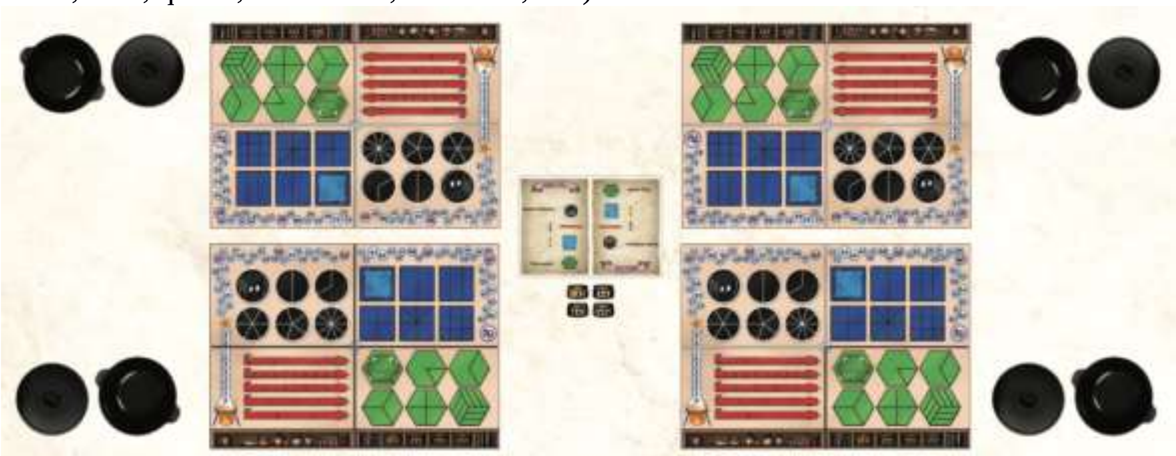


Illustration 2 : Exemple de configuration du jeu pour 4 joueurs.

Au signal, une recette est dévoilée et chaque joueur doit la réaliser en plaçant les morceaux d’ingrédients appropriés dans le chaudron. Il mise ensuite l’un des « jetons étoiles » à sa disposition sur le plateau, et referme son couvercle.
Par exemple, pour la potion n°16 ci-dessous, le joueur doit prendre trois neuvièmes de grenouille, deux huitièmes de raie, un sixième d’araignée, trois dixièmes de serpent.

Illustration 3 : Carte potion n°16

Lorsque tous les joueurs ont fini la recette, ils vérifient alors leur recette à l'aide du grimoire des solutions en l'ouvrant à la page correspondant à la potion en cours. Ils superposent à tour de rôle le contenu de leur chaudron sur les illustrations, et si l'ensemble des pièces se superposent exactement à l'illustration, cela signifie que les joueurs ont pris la bonne quantité d'ingrédients, et que la potion réalisée est correcte.

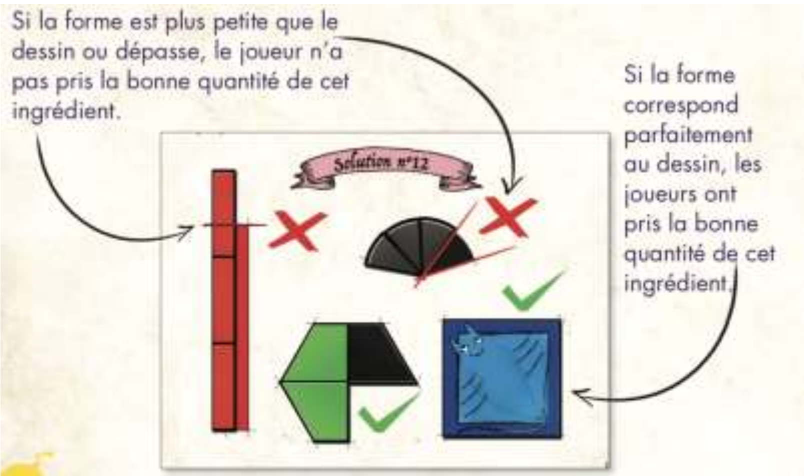


Illustration 4 : Exemple de vérification à l'aide du grimoire.

Lorsque la recette est correcte, le joueur marque autant de points de magie qu'il y a d'étoiles sur le jeton qu'il a choisi, et sinon (c'est-à-dire lorsque la quantité d'au moins un ingrédient est fausse), le joueur perd autant de points de magie qu'il y a d'étoiles sur le jeton qu'il a choisi.
Le but du jeu est d'obtenir au cours d'une partie le plus de points de magie possibles.
Ce jeu peut se jouer seul ou à plusieurs avec une autocorrection possible grâce au grimoire des solutions, et selon différents modes (entrainement, duel, coopératif, semi-coopératif, etc.)

4. Méthodologie de conception

Le projet de R&D pour la conception du jeu a commencé en janvier 2017. Cinq prototypes ont été élaborés et testés successivement dans des classes ordinaires et à la Maison des Mathématiques et de l'Informatique. Cette phase s'est achevée en mai 2018 au salon des jeux et de la culture mathématiques avec la première édition du jeu, et le jeu est depuis diffusé dans les écoles et fait l'objet d'une nouvelle phase de recherche et de développement.

Acteurs de la conception du jeu

Nous avons développé l'Atelier des potions dans l'optique de construire une ingénierie didactique et ludique, au sens de Pelay (2011), autour de celui-ci. De plus nous souhaitions que le jeu, et plus tard l'ingénierie didactique et ludique élaborée autour de ce jeu, puissent être utilisés dans le contexte de l'enseignement ordinaire. Afin d'assurer l'adaptabilité de notre jeu à l'enseignement ordinaire, au sens de Perrin-Glorian (2011), nous avons choisi de collaborer avec des enseignants du cycle 3 dès le début de la conception du jeu. Nous avons en effet fait appel à eux dès le choix de la notion sur laquelle nous allions baser le jeu (à l'aide d'un questionnaire) et lors de l'élaboration du cahier des charges. Cependant, l'ensemble des enseignants avec lesquels nous avons collaboré n'avait pas la même implication dans le projet.
Au cœur du projet se trouve la cellule de conception du jeu, divisée en deux noyaux : le noyau de recherche et le noyau développement. Le noyau de recherche regroupe Alix Boissière, doctorante en didactique des mathématiques à l'université de Montpellier, ainsi que ses directeurs de thèse : Viviane Durrand-Guerrier et Nicolas Pelay. Le noyau de développement regroupe quant à lui une ingénieure en didactique des mathématiques travaillant pour Plaisir Maths, et deux enseignantes en cycle 3 associées à Plaisir Maths, une enseignante en élémentaire et une enseignante au collège.
Autour de la cellule de conception, et englobant celle-ci, se trouve l'ensemble des enseignants qui nous ont permis de tester et d'expérimenter le jeu à différentes étapes de sa création. Il s'agit soit d'enseignants faisant partie de la cellule de conception soit d'enseignants connectés à Plaisir Maths et familiers avec nos activités. La majorité de ces enseignants sont recrutés par le biais de visites à la MMI. Ces enseignants testent les différents prototypes du jeu et, permettent par leurs retours, de faire des choix à différentes étapes de conception du jeu pour parvenir au jeu tel qu'il est aujourd'hui (aussi bien du point de vue du matériel, que des règles et des ressources annexes).
Finalement, nous avons une communauté d'acteurs de l'enseignement (enseignants, formateurs, inspecteurs) à qui nous soumettons certains choix par le biais de questionnaires diffusés sur les réseaux sociaux, par email via les inspecteurs, et lors d'événements tels que les journées de l'APMEP. Certains détails du jeu, comme par exemple le choix du thème des fractions, découlent des réponses à ces questionnaires.

Cycles de conception

A partir du cahier des charges, élaboré avec la cellule de conception, le développement du jeu s'est effectué en ensemble de cycles (10 au total) constitués de 3 phases :

- Phase divergente. C'est une phase d'exploration pour la cellule de conception, à la suite de questionnements qui ont émergés lors du cycle précédent (ou lors de l'élaboration du cahier des charges au début de notre projet). Chaque membre de la cellule génère de nouvelles idées sur le matériel ou les règles du jeu qui sont par la suite transmises au reste de l'équipe.

- Phase convergente. Lors de cette phase la cellule de conception discute l'ensemble des propositions faites et choisit celles qui seront prises en compte pour le nouveau prototype.

- Phase de test du prototype. Les choix fait à l'étape précédente ont mené à un nouveau prototype qui est testé par les expérimentateurs de développement. Cela permet la validation ou le rejet des différents aspects du prototype et l'émergence de nouveaux questionnements.

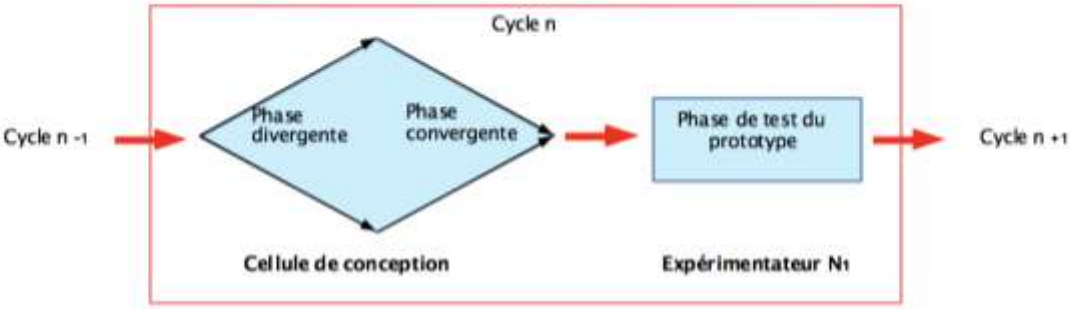


Illustration 5 : Cycles de conception.

IV. PROCESSUS DE CONCEPTION

Dans cette partie, nous décrivons le processus de conception de l'atelier des potions, en explicitant les choix qui ont été réalisés en lien avec la réflexion didactique et les contraintes du cahier des charges. Ce travail, objet de la thèse en cours d'Alix Boissière, vise à poursuivre la problématisation et conceptualisation de la dialectique jeu/apprentissage initiée dans la thèse de Pelay (2011).

1. Principe du jeu et intégration didactique-ludique

Lors du premier cycle de conception et après avoir choisi de développer un jeu de plateau autour de la notion de fraction, l'équipe des ingénieurs didactiques de Plaisir Maths s'est lancée dans une phase exploratoire de développement. Cette phase d'exploration a été guidée par les usages que nous souhaitions pouvoir faire du jeu aussi bien en contexte didactique, au sens de Brousseau, qu'en contexte ludique, et il s'est dégagé une tendance dans l'ensemble des propositions faites : l'articulation d'un objectif didactique avec une mécanique de jeu[6]. Il s'agit d'une articulation dans le sens où l'objectif est d'obtenir une intégration des dimensions didactiques et ludiques : nous ne voulions ni habiller un objectif didactique d'attributs ludiques (comme l'imaginaire, la manipulation, le comptage de points), ni ajouter à une mécanique ludique des éléments mathématiques (comme créer un mistigri avec des représentations de fractions sur les cartes).

Pour réussir à articuler les deux dimensions didactique et ludique, et ne pas se contenter de les juxtaposer, nous avions besoin d'une mécanique de jeu suffisamment robuste pour pouvoir être utilisée en contexte ludique sans intention didactique et qu'elle puisse, en même temps, être porteuse d'intentions didactiques lors d'une utilisation en contexte didactique, sans que le jeu disparaisse derrière les tâches didactiques.

Pour l'élaboration du jeu, nous avons choisi de nous centrer sur le genre de tâches suivant : reconnaître parmi un ensemble de représentations graphiques, en termes de rapport d'aire, celle(s) qui correspond(ent) à une fraction donnée. Ce genre de tâches est un objectif didactique au programme scolaire et souvent utilisé à la base des jeux que nous avions identifiés. De plus,

[6] Une mécanique de jeu est l'agencement de mécanismes, tels que le déplacement d'un pion sur un plateau ou le retournement de la première carte d'une pile, caractéristiques d'un jeu ou d'un ensemble de jeux. Par exemple la mécanique du jeu de l'oie, pouvant être déclinée en une multitude de version, et l'agencement de mécanismes suivant : lancé de dé(s), déplacement sur un plateau serpentant, analyse de la case d'arrivée et action correspondante (redescendre par un serpent, monté en haut d'une échelle, fin de la partie si case finale), fin de tour, au joueur suivant.

en adaptant le genre de tâche pour reconnaître parmi un ensemble de pièces géométrique celle(s) correspondant à une fraction donnée d'une autre pièce géométrique, nous pouvions remplir la contrainte de manipulation de notre cahier des charges.
Avec cette dimension de manipulation, le genre de tâche que nous avions choisi nous semblait proche d'une mécanique à la base de nombreux jeux (tel que Bazar Bizarre, Crazy Cups, ou Dr Eureka) : retourner une « carte consigne » au centre de la table, réaliser tous en même temps et le plus rapidement possible le défi de manipulation (sélection ou agencement) donné par la carte, annoncer dès qu'un joueur a fini, vérification par les pairs, gain (ou non) de la « carte consigne », tour suivant. Cette mécanique, étant utilisée pour de nombreux jeux du commerce s'adressant à des enfants à partir de 6 ans, est de fait suffisamment robuste pour permettre une utilisation en contexte ludique et adaptée aux élèves du cycle 3. Par ailleurs, le cœur de la mécanique étant la réalisation d'une consigne de manipulation, nous avons fait l'hypothèse qu'elle pouvait être porteuse de nos objectifs didactiques à condition que la « carte consigne » corresponde à une liste de fractions correspondant aux pièces que les élèves doivent « attraper ».
Nous avions à cette étape, l'ébauche d'un jeu didactique et ludique[7]:

- D'une part, le jeu est porteur de plusieurs ressorts ludiques : la compétition avec l'aspect course, le défi avec les difficultés de la consigne, le matériel de jeu qu'il faut attraper ou agencer et l'attente pendant la vérification du résultat par les pairs.
- D'autre part, le jeu est porteur d'enjeux didactiques : la prise des pièces pour réaliser les recettes de potions est directement connectée avec les enjeux didactiques sur les fractions.

Après une contextualisation ludique dans un univers magique où l'enjeux est la réalisation de potions magiques, nous avons joué sur les nombreuses variables didactiques à notre disposition et les ressorts présentés ci-dessus pour nous assurer d'avoir un bon équilibre entre les dimensions didactiques et ludiques.

2. L'impact de notre cahier des charges sur nos choix

L'ébauche de jeu que nous avions dégagée en articulant un genre de tâches didactiques avec une mécanique de jeu, comportait de nombreuses variables didactiques et ressorts ludiques sur lesquels nous pouvions jouer pour nous assurer d'avoir un bon équilibre entre les dimensions didactiques et ludiques. L'objectif de concevoir un jeu de société qui contienne du matériel ne pouvant plus être modifié une fois le jeu édité, nous a amené à fixer la valeur de certaines de ces variables. Les contraintes de notre cahier des charges ont guidé les différents choix que nous avons pu faire. Nous vous en présentons ici trois exemples.

Le choix du matériel pour un apprentissage de la notion d'équivalence de fractions

Après avoir fait le choix d'utiliser des formes géométriques pour représenter des fractions et fixé d'avoir quatre formes différentes représentant l'unité (carré, hexagone, disque et réglette) correspondant à quatre ingrédients, il nous fallait choisir quelles partitions de chacune des formes nous souhaitions avoir. Nous avions déjà fait le choix d'avoir plusieurs partitions régulières de chacune des formes unités. De nombreuses partitions ont été écartées pour des raisons géométriques ou ergonomiques, et d'autres ont été écartées par les recommandations du programme scolaire sur les fractions à utiliser au cycle 3.
Concernant la variable « partition de l'hexagone », parmi les valeurs restantes à cette étape, nos choix ont été guidés par l'utilisation que nous voulions faire du jeu. En effet, nous souhaitions que le jeu permette l'apprentissage de la notion de fraction équivalente (au cœur du programme

[7] Ce terme est en cours de conceptualisation, et il sera à questionner par rapport au terme de jeu-situation proposé par Rousson dans sa thèse (Rousson, 2017).

sur les fractions au cycle 3). Nous souhaitions que le jeu, et en particulier le matériel, soit porteur de cet enjeu didactique. Pour cela, nous avons fait le choix de ne pas mettre dans le matériel toutes les représentations des fractions possibles, de sorte à rendre nécessaire pour le joueur le recours à l'équivalence de fractions.
Par exemple, pour la partition de l'hexagone (grenouille), nous avons mis la partition en quatre quarts, mais pas la partition en deux demis de sorte que lorsque la demi-grenouille sera demandée (par exemple avec la carte 48), les joueurs seront obligés de prendre un ensemble de pièces équivalentes, comme par exemple deux quarts.

Illustration 6 : Potion n°48 et détail des pièces de la grenouille (hexagone).

Le choix du matériel pour un apprentissage de la notion de décomposition des fractions supérieures à 1

La décomposition des fractions supérieures à un en une partie entière et une partie fractionnaire (inférieure à un) est une autre notion au cœur du programme du cycle 3. Elle permet d'introduire par la suite les fractions décimales et l'écriture décimale. Nous souhaitions que le jeu permette d'aborder cette notion.
Parmi les valeurs possibles pour les partitions de nos formes géométriques, nous avions fait le choix d'avoir (dans la majorité des cas) exactement quatre quarts, six sixièmes, neuf neuvièmes etc. Nous avions fait ce choix afin de faciliter la reconnaissance de la fraction attribuée à chaque partition. Il se trouve que ce choix permet, par ailleurs, le travail de décomposition des fractions supérieur à 1. En effet, lorsque sur une carte potion il est demandé onze huitième de raie (cf potion n°30), les élèves ne peuvent pas prendre onze fois un huitième puisqu'ils n'ont pas assez de matériel à disposition. Une des stratégies possibles est de prendre une raie entière et trois huitièmes de raie et décomposer ainsi 11/8 en 1+3/8.

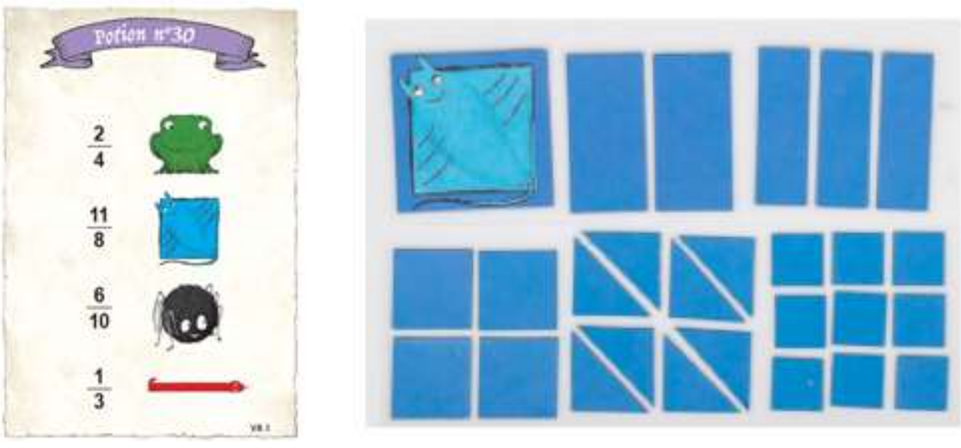


Illustration 7 : Potion n°30 et détail des pièces de la raie (carré).

Afin de permettre une progression didactique vers la décomposition des fractions supérieures à un en partie entière et partie fractionnaire inférieure à un, nous avons créé deux autres types de cartes : les cartes oranges avec une fraction écrite sous la forme n/n + x/n (x<n), et les cartes jaunes avec une fraction écrite sous la forme d'un entier plus une fraction inférieure à 1. Elles permettent d'illustrer les différentes étapes du calcul.

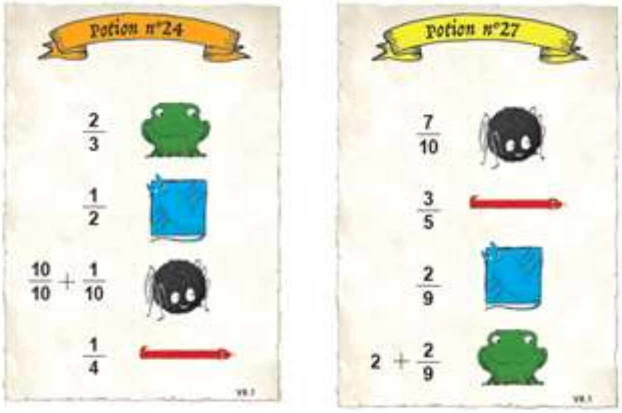


Illustration 8 : Potion n° 24 et n°25.

La représentation des solutions dans le grimoire des solutions

Une des contraintes importantes de notre cahier des charges, liée à une utilisation possible en classe, était que le jeu devait permettre l'autonomie des élèves. Cette contrainte s'est traduite dans notre jeu par la nécessité pour les élèves de pouvoir vérifier si leur potion est juste sans faire appel à l'enseignant. Nous avons pour cela choisi de créer un livret de solutions comme cela se fait aujourd'hui pour de nombreux jeux. Dans le cas de notre jeu, il s'agissait de représenter l'ensemble de pièces à prendre pour obtenir la fraction demandée.
Cependant, dans la majorité des cas, il n'existe pas une solution unique pour obtenir une fraction avec les pièces du jeu, il peut même en exister un grand nombre. Il aurait été trop fastidieux, pour la conception comme pour l'utilisation du grimoire, de lister toutes les combinaisons possibles, si bien que nous avons donc choisi de représenter les solutions sous la forme d'une surface sur laquelle les élèves posent l'ensemble de leurs pièces à la façon d'un puzzle. Si les pièces recouvrent la surface, c'est que les pièces choisies correspondent à une solution.
Une analyse mathématique a ainsi été nécessaire pour déterminer, pour chaque fraction, la forme de la surface solution. Voici un exemple simple : avec les partitions disponibles pour la grenouille hexagonale, nous pouvons former la demi grenouille à l'aide de deux quarts, d'un tiers plus un sixième, ou trois neuvièmes plus un sixième ; et il y a deux représentations d'un demi hexagone dont une seulement permet de valider toutes les solutions (représentation B sur l'illustration 9).

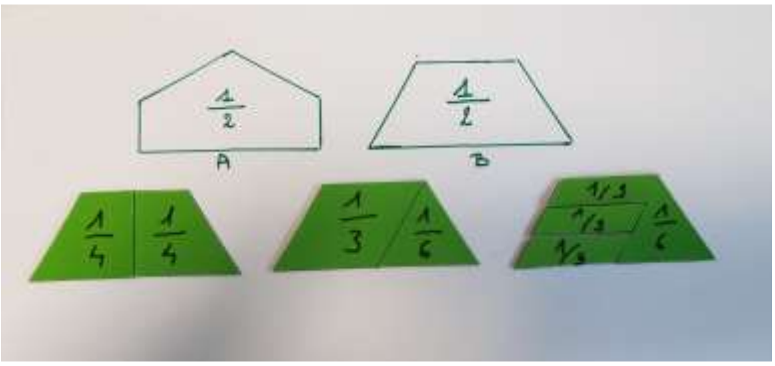


Illustration 9: Représentation d'un demi hexagone avec les pièces disponibles.

Dans ces deux premiers exemples, les choix que nous avons faits portaient sur le matériel présent dans le jeu, et par conséquent sur le milieu. Dans ce troisième exemple, nous avons joué sur les ressorts ludiques en modifiant les règles du jeu pour remplir une contrainte de notre cahier des charges didactique.

Changement de règles du jeu pour un maintien de la dévolution

Les règles initiales du jeu stipulaient que le premier joueur à avoir fini sa potion l'annonce et stoppe ainsi la recherche des autres joueurs pour que tout le monde vérifie. Cette spécificité des règles du jeu, ne permettait pas de maintenir la dévolution dans l'activité, puisque le joueur le plus rapide empêchait les autres de terminer l'activité. De plus, lors des expérimentations nous avons pu observer que certains élèves, découragés par la rapidité d'un camarade, ne prenaient plus la peine de chercher à concocter la potion.
Le maintien de la dévolution par le jeu étant une contrainte de notre cahier des charges, nous avons donc fait le choix de diminuer le ressort compétition ludique et d'introduire un ressort de pari ludique, en introduisant des jetons de magie où les joueurs parient sur leur réussite. Il y a donc toujours un aspect course dans le jeu (pour récupérer le plus de points), mais tous les joueurs peuvent désormais constituer leur potion jusqu'au bout et gagner des points.

V. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

La conception du jeu Atelier des potions et l'explicitation du processus de conception du jeu que nous avons décrit dans cet article est une nouvelle étape dans le projet de recherche et développement de Plaisir Maths sur la dialectique jeu /apprentissage, et la poursuite de l'élaboration théorique initié dans la thèse de Pelay (2011) :

- Les notions de « ressort ludique » et « variable ludique » sont reprises dans la thèse de Boissière en vue d'une conceptualisation plus fine, en ajoutant la notion de « mécanique ludique » pour pouvoir conceptualiser la notion de « jeu didactique et ludique ».
- Le concept de contrat didactique et ludique, élaboré initialement en contexte d'animation scientifique, a été mobilisé pour décrire et analyser les activités menées en classe, si bien que nous faisons aujourd'hui l'hypothèse de sa validité en contexte scolaire.
- La conception du jeu Atelier des potions doit aussi permettre de poursuivre l'objectif de création d'une ingénierie didactique et ludique de deuxième génération, qui était l'une des perspectives de la thèse de Pelay, et qui sera mise en œuvre dans le cadre de la thèse de Boissière.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ALLARD, C. (1990). *Etude du processus d'institutionnalisation dans les pratiques de fin d'écoles primaire : le cas de l'enseignement des fractions.* Thèse, Université de Paris VII.

ALAHMADATI, A. (2016). *Autour du concept de fraction à l'école primaire en France. Étude exploratoire des significations de la fraction au travers des manuels scolaires, des représentations et des connaissances des élèves de cycle III.* Thèse, Université Lumière Lyon 2, France.

BOISSIERE, PELAY & ROUGETET (2017). De la théorie des jeux à l'élaboration d'actions pour l'enseignement et la vulgarisation, Le cas des jeux de type Nim. *Petit X, 104,* 49- 71.

BROUSSEAU, G. (1981). Problèmes de didactiques des décimaux. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 2(1), 37-128.

BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques.* Grenoble : la Pensée Sauvage éditions.

DOUADY, R. & PERRIN-GLORIAN, M-J. (1986). Liaison école-collège : Nombres décimaux. Brochure 62. Paris : IREM de Paris VII.

PELAY, N. (2011). *Jeu et apprentissages mathématiques. Elaboration du concept de contrat didactique et ludique en contexte d'animation scientifique*. Thèse, Université Claude Bernard Lyon, France.
PELAY, N. (2016). La méthodologie des trois pôles : une ingénierie de recherche et développement pour l'animation scientifique. In C. Cohen-Azria, M.-P. Chopin et D. Orange Ravachol *Questionner l'espace. Les méthodes de recherche en didactiques (4)* . Presses Universitaires du Septentrion
PERRIN-GLORIAN, M-J. (2011). L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement de ressources et formations des enseignants. In C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F. Vandebrouck, F. Wozniak. (Eds.) (pp. 57-78). *En amont et en aval des ingénieries didactiques.* Grenoble: la Pensée Sauvage éditions.
ROUSSON, L. (2017). *Conception d'un jeu-situation numérique et son appropriation par des professeurs. Le cas de l'enseignement de l'énumération à l'école maternelle*. Thèse, Université Claude Bernard Lyon 1.

MANUELS SCOLAIRES

ERMEL. (1997). Apprentissages numériques et Résolution de problèmes CM1. Paris : Hatier.
ERMEL. (1997). Apprentissages numériques et Résolution de problèmes CM2. Paris : Hatier.

LES SITUATIONS DE RECHERCHE PAR MATHS A MODELER
ARTICULER RECHERCHE, FORMATION ET DIFFUSION

Virginie **DELOUSTAL-JORRAND**
Laboratoire S2HEP EA 4148
Université de Lyon, Université Claude Bernard
virginie.deloustal-jorrand@univ-lyon1.fr

Simon **MODESTE**
Laboratoire IMAG
Université de Montpellier, CNRS, Montpellier, France
simon.modeste@umontpellier.fr

Résumé

Cet article cherche à montrer comment l'équipe Maths à Modeler articule recherche, formation et diffusion en s'appuyant sur la conception et la mise en œuvre de Situations Recherche pour la Classe (SiRC). L'objectif des SiRC est de travailler la démarche mathématique, les critères de définitions d'une SiRC sont redonnés et illustrés sur un exemple. Quelques recherches liées aux SiRC sont décrites ainsi que les missions de l'équipe Math à Modeler.

Mots clés

Situation Recherche. Démarche mathématique. Argument. Preuve. Mathématiques discrètes. Chasse à la bête

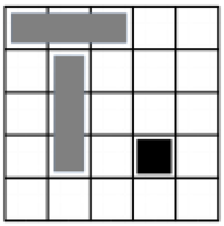
L'équipe Maths à Modeler regroupe des chercheurs en mathématiques discrètes et en didactique des mathématiques. À partir de problèmes issus de la recherche en mathématiques actuelle, elle développe des situations de recherche pour la classe (SiRC ou *Situation Recherche* dans la suite). La mise en œuvre de ces Situations Recherche amène les élèves à se placer en position de « chercheurs » : dans la lignée du *problème ouvert* (Arsac & Mante, 2007) et des *situations didactiques*, ils n'ont pas d'outils directement disponibles et doivent s'en créer pour résoudre le problème. Ainsi, ces situations permettent de travailler la « démarche mathématique » (définition, modélisation, contre-exemples, preuve, condition nécessaire ou suffisante, argumentation, débat…). Du fait qu'elles sont issues de la recherche en mathématiques discrètes et se situent hors des mathématiques traditionnellement enseignées, nos situations sont assez riches et consistantes pour être utilisées du cycle 3 à l'université ainsi qu'en formation des professeurs ou encore dans des situations de diffusion de la sciences (Maison des Maths et de l'Informatique, Fête de la science…). Notre texte s'attache donc, à partir d'une de ces situations Recherche, à montrer l'articulation entre recherche, formation et diffusion. Dans une première partie, nous présentons la Situation Recherche « La chasse à la bête ». À partir de cet exemple, nous décrivons, dans la deuxième partie, quelques caractéristiques d'une SiRC. La troisième partie montre comment les recherches se développent autour de ces situations. Enfin, dans la dernière partie, nous présentons l'équipe Maths à Modeler et ses missions.

I. UNE SITUATION RECHERCHE : LA CHASSE A LA BETE

Dans cette partie, nous souhaitons faire comprendre au lecteur ce que nous entendons par Situation Recherche. Pour cela, nous présentons l'une de nos situations, « La chasse à la bête », et quelques pistes de résolution en les illustrant par des travaux d'élèves de troisième (14-15 ans) du lycée Antoine de Saint-Exupéry (Santiago, Chili). Certains de ces élèves sont de langue maternelle espagnole. Les illustrations sont tirées des cahiers d'élèves (notes de recherche et préparation d'un séminaire inter-classes) remplis lors d'une expérimentation réalisée en 2014.

1. Présentation de la chasse à la bête

Voici la situation telle que nous la présentons en général :



« Ceci est mon jardin : il est représenté par un carré de 5 cases sur 5 cases. Malheureusement, dans mon jardin, il y a des bêtes représentées par les rectangles gris de 3 cases. Ces bêtes peuvent se poser horizontalement ou verticalement, comme ci-contre, mais jamais en diagonale. Elles ne se chevauchent jamais et recouvrent chacune trois cases.
Pour les empêcher de venir, je pose des pièges, représentés par un carré noir. Les bêtes ne peuvent pas se poser sur ces pièges. Comme ces pièges coûtent très cher, je veux en mettre le moins possible. Combien dois-je mettre au minimum de pièges pour empêcher les bêtes de venir dans mon jardin ? »

2. Résultats pour des bêtes en triminos droits

Rapidement, des essais permettent de trouver des premières solutions qui conviennent, c'est-à-dire pour lesquelles aucune bête ne peut rentrer dans mon jardin. Ci-dessous (figure 1) une solution à 9 pièges et deux solutions à 8 pièges.

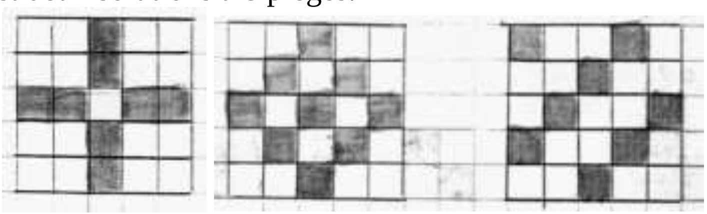
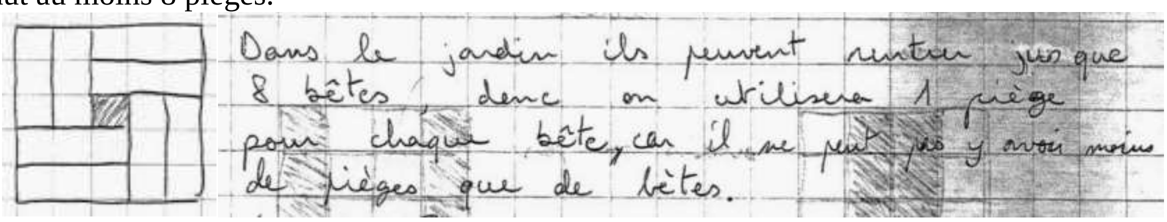


Figure 1 : Des solutions à 8 et 9 pièges.

Après plusieurs essais infructueux pour trouver une meilleure solution, la conjecture est que la solution à 8 pièges est la solution minimale. Pour le prouver, il faut changer de point de vue et s'intéresser au nombre maximal de bêtes pouvant entrer simultanément dans le jardin. La figure 2 ci-dessous montre qu'il peut y avoir 8 bêtes en même temps dans le jardin. Or, un piège ne peut pas piéger deux bêtes à la fois, il faut donc au moins un piège par bête, c'est-à-dire qu'il faut au moins 8 pièges.



« *Dans le jardin, ils peuvent rentrer jusque 8 bêtes, donc on utilisera 1 piège pour chaque bête, car il ne peut pas y avoir moins de pièges que de bêtes.* »

Figure 2 : Argument pour nombre minimum de pièges.

Comme on ne peut pas utiliser moins de 8 pièges et qu'on a trouvé une solution à 8 pièges, le problème est résolu. Le schéma de la figure 3 ci-dessous rend compte de ce résultat. En effet, la condition suffisante y est représentée par la solution à huit pièges en croix (carrés noirs) et l'expression qui lui est liée « $n \leqslant 8$ » tandis que la condition nécessaire y est représentée par les huit bêtes (torsades) et l'expression qui lui est liée « $n \geqslant 8$ ». La conclusion est n=8.

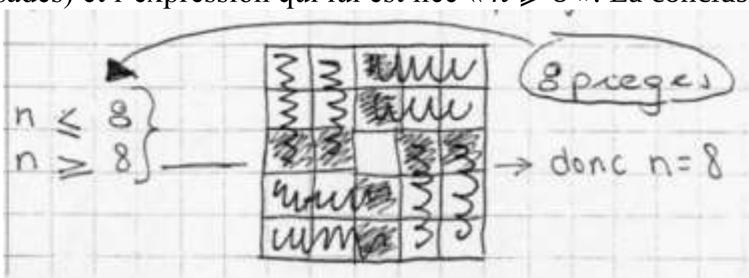


Figure 3 : Schéma représentant les pièges et les bêtes.

3. Résultats pour des bêtes dominos ou triminos coudés

Cette situation de départ peut facilement déboucher sur des prolongements qui sont souvent proposés aux élèves à la suite. Par exemple, les bêtes peuvent changer de forme.

Des bêtes en dominos 

Le même problème est posé aux élèves mais les bêtes ont des enfants qui sont maintenant représentés par des dominos (deux cases).
Le type de raisonnement mis en œuvre est le même. On trouve une solution à 12 pièges et on montre ensuite qu'on ne peut pas diminuer ce nombre car il peut y avoir 12 bêtes en même temps dans le jardin (cf. figure 4).

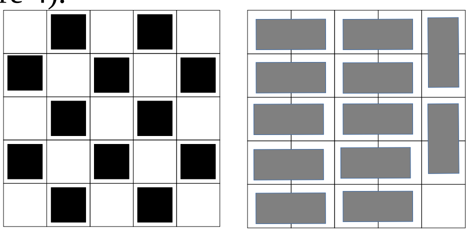
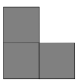
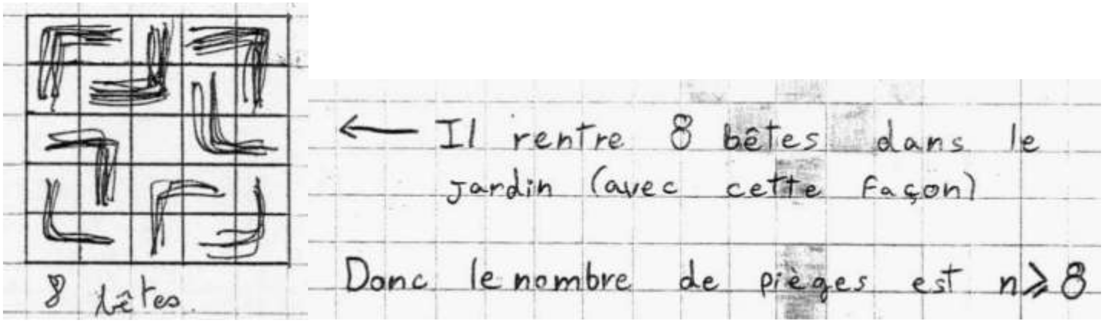


Figure 4 : Solution à 12 pièges et 12 bêtes dans le jardin.

Des bêtes en triminos coudés 

Les bêtes ont encore changé de forme, elles sont maintenant représentées par des triminos coudés (3 cases carrées positionnées en L).
Les élèves essaient alors de mettre en œuvre le même type de raisonnement et commencent en général par s'intéresser au nombre de bêtes pouvant être placées en même temps dans le jardin (figure 5).



« *Il rentre 8 bêtes dans le jardin (avec cette façon)*
Donc le nombre de pièges est n≥ 8 »

Figure 5 : Argument pour le nombre minimal de pièges.

Reste alors à trouver une solution à 8 pièges pour résoudre le problème. Malheureusement, les élèves n'arrivent pas à faire mieux qu'une solution à 10 pièges (figure 6).

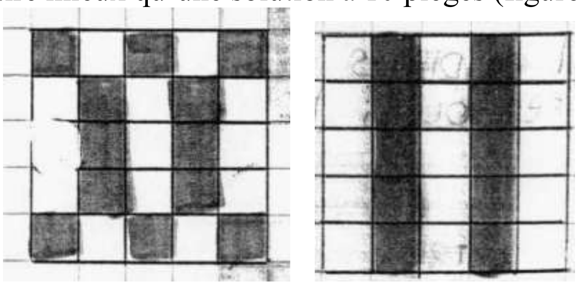
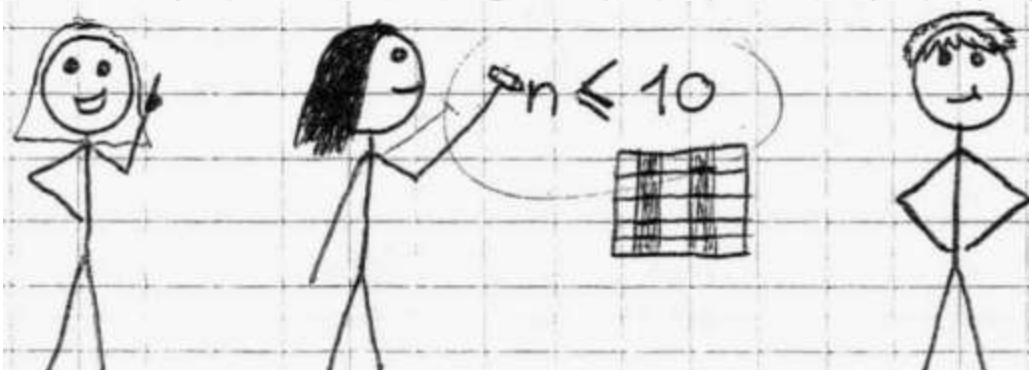


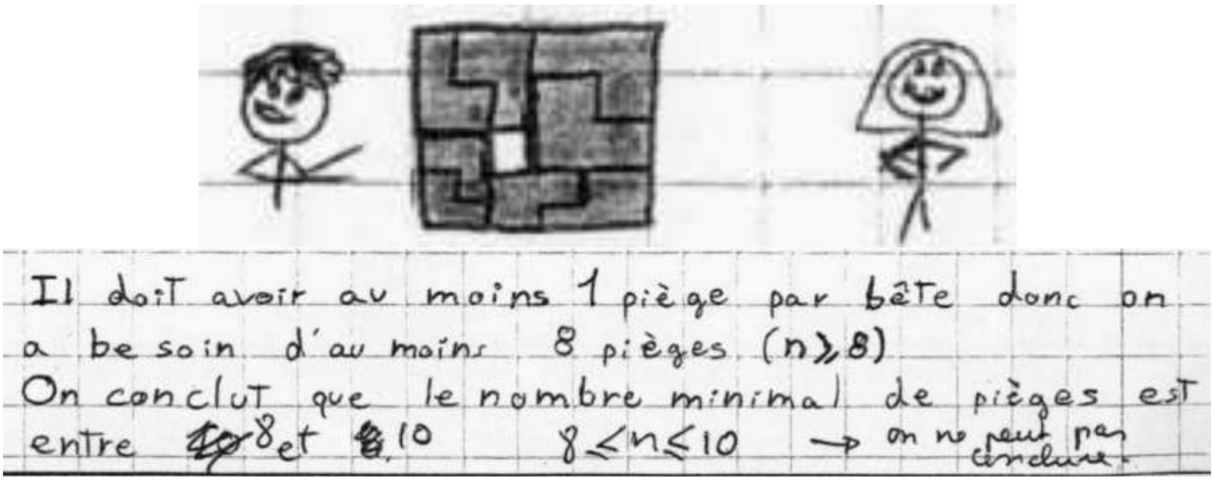
Figure 6 : Solutions à 12 pièges et à 10 pièges.

Cette solution à 10 pièges nous amène à dire que n≤ 10 (où n est le nombre de piège minimal nécessaire). On conclut donc que 8 ≤ n ≤ 10, comme le résume le raisonnement ci-dessous.

– On a Trouvé une solution avec 10 pièges. Vous pouvez voir qu'ils ne rentrent pas de bêtes ^^
Cela veut dire que... comme on a Trouvé une solution avec 10 pièges, alors le nombre minimal de pièges est inférieur ou égal à 10 (n≤10)



Maintenant on veut savoir quelle est le nombre maximal de bêtes. Après quelques essais, on a Trouvé que le nombre maximal de bêtes est 8.



« On a trouvé une solution à 10 pièges. Vous pouvez voir qu'il ne rentrent pas de bêtes. Cela veut dire que… Comme on a trouvé une solution avec 10 pièges, alors le nombres de piège est inférieur ou égal à 10. ($n \leq 10$).
Maintenant on veut savoir quel est le nombre maximal de bêtes. Après quelques essais, on a trouvé que le nombre maximal de bêtes est 8.
Il doit avoir au moins 1 piège par bête donc on a besoin d'au moins 8 pièges ($n \geq 8$). On conclut que le nombre minimal de pièges est entre 8 et 10 $8 \leq n \leq 10$ → On ne peut pas conclure »

Figure 7 : Argument pour encadrer le nombre minimal de pièges.

Pour déterminer le nombre minimal de pièges nécessaires, il faut donc trouver un autre type de raisonnement. Comme souvent en mathématiques, on va s'intéresser à de plus petits cas, c'est-à-dire, ici, à des plus petits jardins. Par exemple, il est facile de voir que dans un jardin de côté 2, un piège ne suffit pas à empêcher les bêtes de venir et qu'il est nécessaire d'en placer au moins deux.

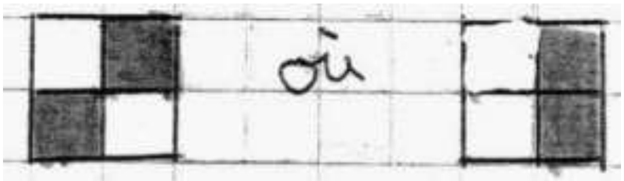


Figure 8 : Il faut au moins 2 pièges dans un jardin de côté 2.

De la même façon, il est nécessaire de placer au moins 3 pièges dans un jardin de côté 3.

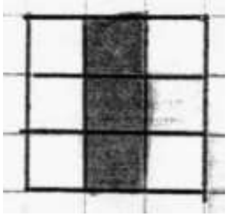
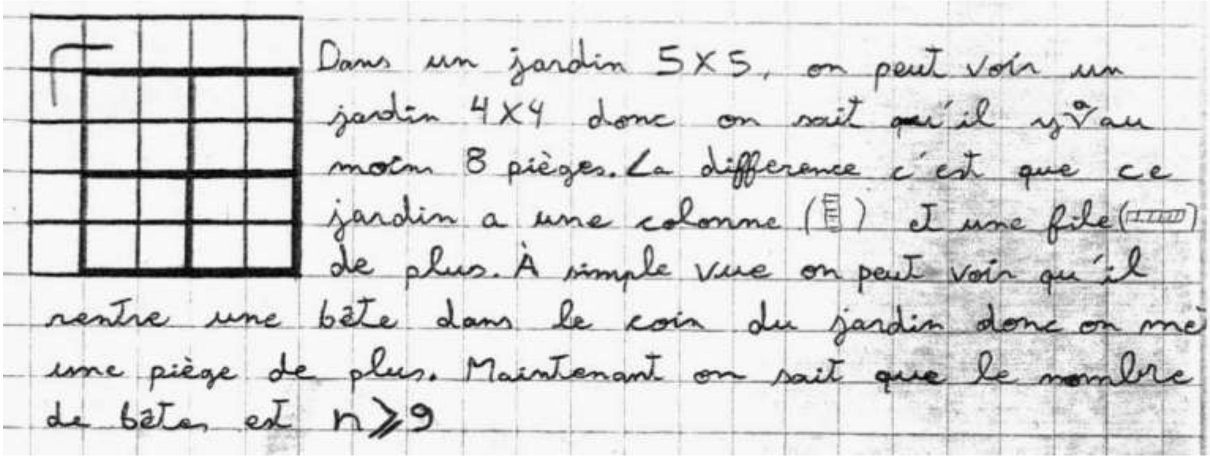


Figure 9 : Il faut au moins 3 pièges dans un jardin de côté 3.

Il s'agit alors de découper notre jardin initial en zones plus petites, comme le montre le raisonnement ci-dessous.


Dans un jardin 5x5, on peut voir un jardin 4x4 donc on sait qu'il y a au moins 8 pièges. La difference c'est que ce jardin a une colonne ( ) et une file ( ) de plus. À simple vue on peut voir qu'il rentre une bête dans le coin du jardin donc on met une piège de plus. Maintenant on sait que le nombre de bêtes est $n \geqslant 9$

« Dans un jardin 5x5, on peut voir un jardin 4x4 donc on sait qu'il y a au moins 8 pièges. La différence c'est que ce jardin a une colonne et une file de plus. À simple vue, on peut voir qu'il rentre une bête dans le coin du jardin donc on met une piège de plus. Maintenant on sait que le nombre de bêtes est n≥ ***9*** *»*

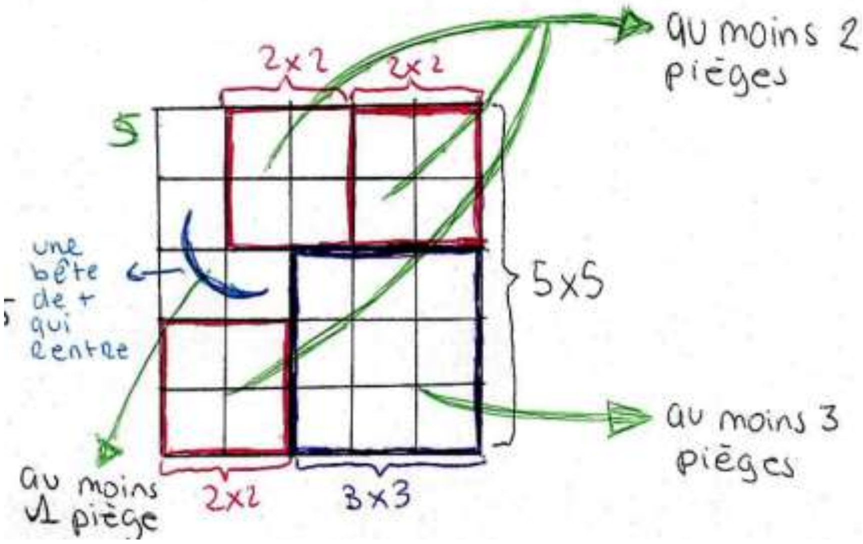


Figure 10 : Il faut au plus 9 pièges dans un jardin de côté 9.

Dans ce découpage, il faut donc au moins 2 pièges pour chaque zone carrée de côté 2, donc au moins 8 pièges mais il faut encore rajouter un piège car on voit qu'une bête pourrait rentrer dans le coin. On a donc réduit l'intervalle et maintenant on sait que 8 pièges ne peuvent pas suffire, reste donc à trancher entre n=9 ou n=10. Pour cela, on va reprendre le même type de raisonnement en découpant les zones plus finement. Ci-dessous un découpage, accompagné d'un raisonnement proposé par des élèves (figure 10).

Figure 11 : Un découpage pour le jardin 5x5.

Le jardin 5x5 est ici découpé en une zone 3x3, pour laquelle il faut au moins 3 pièges et 3 zones 2x2, pour chacune desquelles il faut au moins 2 pièges. Cela donne un total d'au moins 9 pièges pour ces zones-là. Cependant, on remarque qu'on pourrait alors encore placer une bête à l'extérieur de ces zones. Il faut donc un piège de plus pour empêcher cette bête de venir. Il faudra donc en tout au moins 10 pièges. Comme on avait trouvé une solution à 10 pièges (cf. figure 6), on conclut que n=10 est la solution.

4. Quelques idées de prolongements

On peut continuer cette situation en élargissant le champ des questions. On peut, par exemple, se poser la question du nombre minimal de pièges lorsque les jardins carrés sont plus grands. Voici ci-dessous le témoignage d'une recherche en ce sens, où les élèves cherchent à déterminer le nombre de pièges dans des configurations similaires à celles identifiées pour le cas du carré de côté 5.

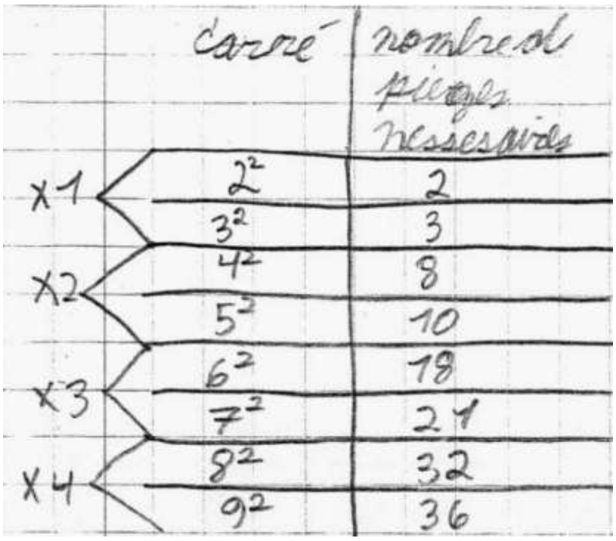


Figure 12 : Nombre de pièges en fonction de l'aire du jardin.

On peut aussi prolonger la situation en imaginant de nouvelles formes de bêtes ou bien différentes espèces de bêtes qui viennent en même temps dans le jardin.

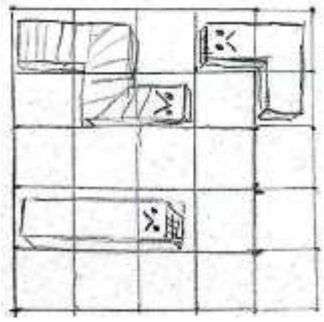


Figure 13 : Différentes espèces de bêtes se partagent le jardin.

On peut encore imaginer que la forme du jardin varie, sur la base d'un ensemble de cases carrées accolées par une arête.

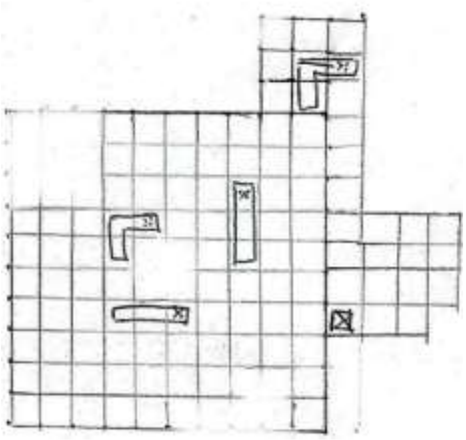


Figure 14 : La forme du jardin peut varier.

Ces différents prolongements peuvent être proposés par l'enseignant ou bien être laissés au choix des élèves. Les groupes ne sont pas tous obligés de s'engager sur le même questionnement.

II. PREMIERES CARACTERISTIQUES D'UNE SITUATION RECHERCHE

C'est en nous appuyant sur la situation détaillée dans la section précédente, que nous allons maintenant décrire quelques caractéristiques d'une Situation Recherche.

1. Caractéristiques de la situation mathématique

Objets mathématiques faciles d'accès - Domaine facilement compréhensible

Les situations que nous proposons ne sont pas formalisées en termes mathématiques. Les jeunes élèves n'y reconnaissent d'ailleurs pas, la plupart du temps, un problème mathématique.
Dans « La chasse à la bête », l'habillage de la situation sous forme de jardin et de bêtes permet aux élèves de rentrer facilement dans le problème : la question est facilement compréhensible. De plus, dans la résolution de ces situations, il n'y a pas (ou il y a peu) d'utilisation de propriétés ou formules du cours, il y a peu de prérequis nécessaires. D'une part, cela participe au fait que les élèves s'engagent facilement dans la résolution. Dans « La chasse à la bête », les élèves peuvent commencer par tester avec des pavages. D'autre part, cela permet aussi qu'il puisse y avoir un travail sur la preuve et le raisonnement qui ne soit pas perturbé par l'utilisation de propriétés mal maîtrisées.

Situations issues de la recherche actuelle en mathématiques discrètes

Les situations proposées par Maths à Modeler sont issues de la recherche actuelle en mathématiques discrètes. La plupart des situations font référence à un problème général ouvert pour la communauté mathématique, c'est-à-dire non encore résolu par elle. Il en résulte, entre autres, qu'il n'existe pas (ou du moins pas encore) de « fin », il n'y a que des résultats partiels qui renvoient à d'autres questions. Dans la situation précédente, le problème particulier du jardin peut se prolonger par d'autres problèmes d'optimum où l'on peut faire varier la forme du jardin ou des bêtes. Cela permet, par exemple, aux élèves d'explorer de nouvelles pistes qu'ils choisissent, se rapprochant en quelque sorte du travail du chercheur devant qui s'ouvrent de nombreuses questions. Cela permet d'autre part, au professeur, de différencier la situation suivant l'avancement des groupes, ce qui facilite la gestion du travail de groupe.

Enjeu de découverte et enjeu de vérité

Dans de nombreux exercices du secondaire qui commencent par « démontrez que... », il n'y a aucun enjeu de découverte ni aucun enjeu de vérité. En effet, l'élève sait ce qu'il doit trouver et, puisqu'il doit le démontrer, il sait aussi que c'est vrai. Pour mener sa démonstration, il part des hypothèses et sait qu'il doit utiliser les théorèmes du cours. Dans ces Situations Recherche, comme dans le *problème ouvert* (Arsac & Mante, 2007), l'enjeu de découverte est réel, l'élève ne sait pas *a priori* ce qu'il va trouver. De plus, la question de départ amène souvent l'élève à s'en poser d'autres qui sont de réelles questions pour lui. Il doit donc faire des essais pour pouvoir proposer des conjectures et s'attacher à la recherche d'éventuels contre-exemples.

Distinction de la condition nécessaire et de la condition suffisante

Dans cette situation « La chasse à la bête », comme dans d'autres, la preuve de la condition nécessaire (nombre nécessaire de pièges) n'est pas de même nature que la preuve de la condition suffisante (nombre suffisant de piège). Cela permet de travailler le fait que la validité d'une implication ne dit rien sur la validité de sa réciproque.

2. Caractéristiques de la mise en œuvre des SiRC

Travailler la démarche mathématique

À travers ces Situations Recherche, l'équipe Maths à Modeler cherche à permettre l'apprentissage de la démarche mathématique. En effet, pour pouvoir résoudre la tâche, les élèves sont amenés à faire des essais (Figure 15), à les organiser et les trier, à formuler des conjectures, à produire des contre-exemples, à modéliser la situation, à réduire la situation à des sous-cas. L'entrée dans la preuve passe par l'argumentation pour défendre ses conjectures. Ces « savoirs transversaux », au centre de l'activité mathématique, prennent ici tout leur sens dans la recherche d'une réponse à un questionnement. Ce n'est pas la réponse au problème qui est mise en avant par le professeur mais la recherche de moyens pour aller vers cette réponse, l'organisation de cette recherche et la justification des moyens utilisés.

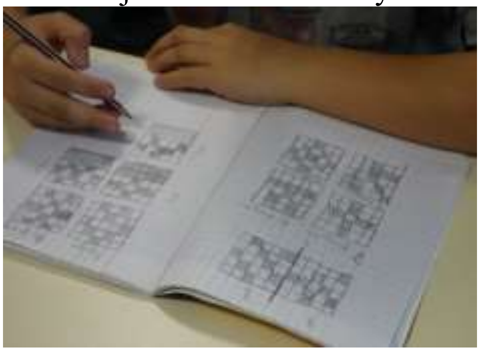


Figure 15 : Nombreux essais organisés sur le cahier.

Dimension ludique

En plus d'une formulation concrète du problème, nous présentons nos situations à l'aide de matériel (souvent en bois). Par exemple, dans le cas de « La chasse à la bête », nous apportons des plateaux carrés de côté 5 cases (jardins) sur lesquels on pose des carrés noirs représentant les pièges et des pièces en bois représentant les bêtes. Cela permet aux élèves de mieux se représenter la situation mais surtout d'entrer facilement dans la résolution puisqu'ils sont d'abord attirés par la manipulation du matériel. De plus, les nombreux essais sont facilités par le matériel.

Même si le matériel doit être enlevé au bout d'un certain temps afin que les élèves se détachent du cas particulier pour modéliser et prouver dans un cas plus général (Godot, 2006), il n'en reste pas moins que ce matériel est un atout pour leur entrée dans la recherche. Très souvent, comme le montre la Figure 16 ci-dessous, les élèves utilisent d'eux-mêmes conjointement le matériel et leur cahier : sur ce dernier, ils peuvent garder une trace des essais qu'ils ont effectués sur le premier.

Figure 16 : Utilisation conjointe du matériel et du cahier.

Organisation de la mise en œuvre dans la classe

La mise en œuvre en classe de ces SiRC reprend certaines caractéristiques de celle des problèmes ouverts au sens didactique défini par l'IREM[1] de Lyon (Arsac & Mante, 2007).
Les élèves mènent leur recherche par groupes de trois ou quatre. Le professeur ne doit en aucun cas les guider. Régulièrement, des bilans provisoires sont faits pour que les groupes puissent présenter l'avancée de leurs recherches. Lors de ces bilans, le professeur ne prend pas position sur la validité des résultats proposés mais il garantit la possibilité d'un débat mathématique. Dans le cas rare où tous les élèves sont d'accord sur une même proposition erronée, le professeur peut leur poser une question ou leur proposer un exemple qui pourrait les amener à rectifier leur avis d'eux-mêmes.
Lorsque cela est possible, la séquence est organisée de façon à ce que les élèves puissent présenter leur travail à d'autres élèves ou à des parents lors de la dernière séance. Pour préparer ces restitutions, ils doivent décider de ce qu'ils veulent montrer, se répartir le travail et fabriquer des affiches ou d'autres supports visuels.

3. Quelques effets dans les classes

Voici quelques effets de la mise en place des Situation Recherche dans les classes, illustrés par quelques témoignages d'élèves de CM2 (11 ans) qui ont passé cinq séances sur une Situation Recherche et qui l'ont présentée à une autre classe.

Une autre façon de faire des mathématiques

Beaucoup d'élèves et même d'adultes apparentent les mathématiques à la mise en œuvre d'algorithmes de calcul ou de raisonnements pour lesquels il faut utiliser la « bonne » formule pour arriver au « bon résultat ». Au contraire, ces Situations Recherche nécessitent peu de prérequis et offrent un enjeu de découverte qui laisse une place à l'erreur, au tâtonnement et à la recherche d'exemples et de contre-exemples. Les mathématiques deviennent alors des outils pour essayer de répondre à des problèmes. En ce sens, beaucoup d'élèves et de professeurs ont le sentiment qu'ils font « d'autres mathématiques ».

> ***Stéphanie** :*
>
> *On a appris à faire des maths autrement !*
>
> ***Hugo** :*
>
> *Des fois les maths c'est bof, bof… et là j'ai vraiment adoré parce que ça nous permettait de voir les maths d'une autre manière que leçon/exercice/leçon//exercice.*

[1] Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques.

Clément :

Mais quand on dit « mathématiques », on pense au calcul et aux multiplications et aux divisions… mais c'est pas que ça les mathématiques ! Y'a la logique dedans, c'est…chercher, y'a plusieurs étapes pour…

Flora :

Quand on se trompe, c'est pas grave, on a le droit, on peut recommencer…

Avoir une posture réflexive sur sa recherche

Lorsqu'ils doivent présenter les résultats de leur recherche à des personnes (élèves, parents) qui n'ont pas cherché à résoudre le problème, les élèves doivent revisiter leur propre recherche. Ils doivent décider ensemble de ce qu'ils souhaitent (et doivent) donner à voir ou non. Souvent, les élèves ont d'abord envie de ne montrer que le résultat final mais les discussions les amènent à prendre conscience qu'il est important aussi de montrer leur recherche : les pistes qu'ils ont ébauchées, les contre-exemples qui les ont obligés à les abandonner, les conjectures qu'ils ont émises, les différentes stratégies qui leur ont permis d'avancer... Le statut de chaque phrase énoncée doit être clair pour ceux qui n'ont pas cherché, il faut donc bien les différencier les unes des autres. Au moment de préparer le support visuel, des choix sont encore à effectuer : choix d'exemples par manque de place mais aussi choix de la modélisation de la situation la plus compréhensible et encore choix de l'ordre de présentation.

Eloane :

[Quand on présente], il faut être précis, il faut être concentré, il faut réfléchir.

Amina :

Il fallait savoir comment s'organiser, fallait aussi savoir placer les choses du bon ordre.

De nouvelles connaissances

Bien que ce ne soit pas l'objectif premier des SiRC, il arrive aussi qu'en cherchant, les élèves se construisent des outils mathématiques qui deviendront ensuite des savoirs enseignés. Par exemple, des élèves de CM2 ont découvert que, dans leur situation, pour trouver un résultat en fonction d'un nombre donné, il fallait toujours utiliser la même formule en changeant simplement le nombre qui varie. Ils ont commencé à rédiger leur affiche en écrivant leur formule avec un espace de trois petits points pour placer le nombre choisi. Nous leur avons alors proposé de remplacer les petits points par la lettre N qui représenterait ainsi le nombre choisi. La situation a donc permis, à certains élèves d'avoir un premier aperçu de l'entrée dans l'algèbre sans que cela n'ait été voulu a priori.

Juliette :

Moi, y'a des choses que je trouve intéressantes, comme, par exemple, on a utilisé la lettre N pour calculer et moi je savais pas du tout qu'on pouvait utiliser la lettre N pour calculer.

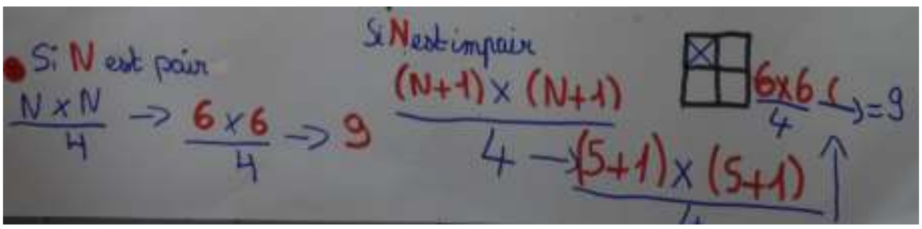


Figure 17 : Utilisation de la lettre N en CM2.

Une autre place pour les élèves en difficulté

Lorsque nous mettons en place ces situations, nous voyons régulièrement des élèves, dont les professeurs nous disent qu'ils sont en difficulté, prendre goût à la recherche et produire des raisonnements qui étonnent leurs camarades et leurs professeurs. Nous faisons l'hypothèse que le fait qu'il n'y ait pas beaucoup de recours aux propriétés du cours et le fait que le matériel permette de faire des essais donnent une nouvelle place aux élèves en difficulté.
Comme ces situations ne sont en général pas reconnues tout de suite comme relevant des mathématiques, les élèves en difficultés n'ont pas cette réaction de peur et de rejet qui se manifeste souvent. Ils peuvent ici entrer dans la tâche sans avoir l'impression de « se mettre en danger ».

> ***Marine** :*
>
> *D'habitude, je suis pas trop forte en maths mais là j'y arrive bien parce que… ben, c'est bien, on a bien rigolé ! Et puis, j'ai présenté ça à mes parents ! Mais ils ont rien compris…*

Dans cette deuxième partie, nous avons voulu, à partir de la situation de « La chasse à la bête », présenter quelques caractéristiques des Situations Recherche.

III. DEUX CHAMPS DE RECHERCHE : DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES ET MATHEMATIQUES DISCRETES

Dans cette troisième partie, nous montrons comment différents types de recherche se développent autour des SiRC. Certaines recherches permettent la conception des SiRC, d'autres analysent leur potentiel pour le travail de classe ou les situations de médiation. Ces recherches mobilisent des chercheurs de différentes communautés.

1. Interactions entre mathématiques discrètes et didactique des mathématiques

Les développements des SiRC s'est fait à l'interface entre deux domaines de recherche : les mathématiques discrètes et la didactique des mathématiques. Les mathématiques discrètes apportent un champ de problèmes dont certaines caractéristiques sont spécifiques. En plus d'apporter des problèmes qui sont des « candidats potentiels » à des situations d'apprentissage, la collaboration avec les mathématiques discrètes contribue à la réflexion épistémologique sur la nature de l'activité de recherche mathématique et la spécificité du discret (et des objets et raisonnements en jeu). La didactique des mathématiques apporte, elle, un questionnement sur les potentiels de ces problèmes et des outils pour penser leurs usages dans la classe (et en situation de médiation). Ce travail a permis d'explorer des problèmes ouverts ou actuels pour la recherche en mathématiques discrètes, étudiés dans l'interaction entre mathématiciens et didacticiens, pour concevoir de nouvelles Situations Recherche. On peut reconnaître dans ce travail une intention de transposer l'activité du chercheur vers la classe avec une certaine « fidélité ».
Nous donnons ici une liste non-exhaustive de situations développées pour la classe et la médiation, associées aux branches de la recherche en mathématiques discrètes desquelles elles sont issues :

- La chasse à la bête – Optimisation dans les graphes,

- Pavages par des dominos – Couplages parfaits,
- Chemins, cycles et arbres dans la grille (chemins et cycles hamiltoniens dans les graphes, sous-arbres couvrants),
- La roue aux couleurs (combinatoire des permutations),
- Chercher la frontière (algorithmique et optimisation),
- Jeu du chocolat (théorie des jeux, jeux combinatoires),
- Les reines / les caisses de dynamite (généralisation du problème des huit reines, problèmes d'optimisation sur les sous-ensembles de sommets dans un graphe).

La collaboration a aussi débouché sur des caractérisations des Situations Recherche pour la classe et sur différents travaux de recherche spécifiques en didactique des mathématiques. Nous revenons ici sur les caractéristiques identifiées et les travaux didactiques qui se sont développés.

2. Des Situations Recherche pour la classe étudiées pour elles-mêmes

Les Situations Recherche pour la classe ont pour objectif principal de permettre aux élèves d'avoir une activité relativement proche de celle du chercheur. C'est pourquoi, elles ont été étudiées principalement pour ce potentiel de développement de connaissances et savoir-faire relatifs à la démarche de recherche mathématique elle-même.

Revenons à l'exemple de « La chasse à la bête ». Parmi les activités et connaissances mises en jeu on peut identifier, entre autres :

- travail d'un problème d'optimisation (identification de solutions recevables, solution non améliorable, solution meilleure que toute autre),
- interprétation en termes de condition nécessaire/ condition suffisante (il faut/il suffit),
- les conditions nécessaires et suffisantes se prouvent d'une manière très différente,
- entrée dans l'activité de recherche mathématiques (conjectures, exemples et contre-exemples, cas particuliers/généralisation, construction d'outils ou de théories ad-hoc, argumenter, prouver…).

Ces Situations Recherche ne visent pas nécessairement des savoirs notionnels spécifiques. Il pourrait y en avoir, liés au discret, mais ils ne constituent pas l'enjeu de la situation. Elles visent des savoirs dits parfois « transversaux », liés à la logique, au raisonnement, aux heuristiques de résolution de problèmes, à la démarche de recherche. La solution du problème (« 8 pièges sont nécessaires et suffisants dans le cas de bêtes 1x3 et d'un jardin 5x5 ») n'est pas l'objectif de la situation, c'est la recherche elle-même, et ce sont des éléments liés à cette recherche qui seront institutionnalisés.

Le choix du champ des mathématiques discrètes permet, en tout cas dans les situations développées, de constituer un milieu de recherche abordable dans lequel peu de concepts « complexes » seront mis en jeu. Par contre, la complexité de la situation se situe du côté de la richesse des raisonnements, des stratégies de résolution et des preuves qu'elle permet d'aborder. Cette idée repose sur l'hypothèse suivante, sous-jacente à de nombreux travaux sur les Situations Recherche : il est plus facile de travailler le raisonnement lorsque les objets en jeu ne sont pas complexes. Les notions mathématiques en jeu ne doivent donc pas faire obstacle au développement de l'activité de recherche et les mathématiques discrètes peuvent offrir des objets pertinents pour cela. Godot résume bien cette idée : « Même s'il n'est pas familier, le domaine conceptuel dans lequel se trouve le problème est d'un accès facile afin que l'on puisse facilement « prendre possession » de la situation et s'engager dans des essais, des conjectures, des projets de résolution. » (Godot, 2006, p. 34)

Grenier et Payan (1998, 2003) ont proposé une caractérisation de ces situations selon cinq critères :

(a) Le problème abordé doit être proche de la recherche actuelle.

(b) La question initiale doit être facile d'accès et ne doit pas être formalisée en termes mathématiques pour faciliter l'entrée dans le problème.
(c) Des stratégies d'approche simples doivent exister pour permettre d'entrer dans une démarche de recherche.
(d) De nombreuses stratégies de recherche peuvent être mises en place, les méthodes de résolutions ne sont pas désignées.
(e) Une question résolue peut amener à se poser d'autres questions : il n'y a que des critères de fin locaux.

Le critère (a) témoigne de la proximité des situations à la recherche en mathématiques. Cette proximité est rendue possible par les spécificités des mathématiques mises en jeu : les objets mis en jeu sont très simples et accessibles aux élèves, alors que les questions mathématiques (ou leur généralisation) peuvent se révéler extrêmement complexes. Ce critère est souvent affaibli sous la forme suivante : le problème abordé doit être suffisamment éloigné des mathématiques rencontrées par les élèves pour les placer hors des techniques et méthodes dont ils disposent usuellement.

Les critères (b) et (c) ainsi que la citation de Godot concernent la dévolution possible du problème aux élèves afin qu'ils entrent dans une démarche de résolution.

Le critère (d) concerne la possibilité du développement de stratégies de recherches diverses, plus ou moins fructueuses, mais qui contribuent à une proximité avec le travail du chercheur face à un problème nouveau, ainsi qu'à un potentiel pour une confrontation riche des stratégies lors de phases de mise en commun et discussion des résultats entre pairs.

Il peut sembler paradoxal de se placer dans un cadre nouveau, voire inconnu pour les élèves, tout en revendiquant que les objets doivent avoir une certaine familiarité permettant une dévolution et une focalisation sur les raisonnements et les propriétés. C'est justement un équilibre entre ces deux conditions que doit respecter la situation : des objets suffisamment proches pour permettre l'appropriation de la question et la construction d'un certain milieu expérimental, mais, assez rapidement, des questions qui résistent et nécessitent un travail de recherche pour l'élève.

Le critère (e), enfin, est caractéristique de la volonté de transposer certains aspects de l'activité du chercheur : la résolution ne se termine jamais (en théorie) puisque chaque solution peut donner lieu à de nouvelles questions. C'est ainsi que la résolution du premier cas de « La chasse à la bête » donne lieu à de nouveaux problèmes, en modifiant les valeurs des variables (forme des bêtes) ou en généralisant (taille quelconque du jardin). L'appropriation par l'élève du «geste» de se poser de nouvelles questions face à un problème résolu, tout comme celui de « resserrer » le problème dans le cas d'un problème trop général pour être résolu directement, peut devenir un enjeu d'apprentissage (heuristique).

Sur ce point, le travail de Godot (2005), apporte des éléments d'éclairage, avec la notion de variable de recherche. Lors d'une SiRC une forte responsabilité est déléguée à l'élève. En effet, à partir de la situation initiale, il a le choix de ses questions et donne la direction qu'il souhaite à ses recherches. Certaines variables de la situation (didactiques ou non) sont laissées à la disposition de l'élève pour organiser son travail de recherche. Il peut alors y avoir une rupture vis-à-vis du contrat didactique usuel de la classe.

> *Les variables de recherche sont des variables de tâches inhérentes à la situation recherche, elles définissent les différents sous-problèmes qui lui sont rattachés et impliquent des tâches différentes (Godot, 2005 p.133.)*

On voit apparaître ici plus nettement cette intention de transposition de l'activité du chercheur, par l'autonomie laissée à l'élève dans l'abord du problème, de ses sous-problèmes, de ses variantes…

3. Des situations pour étudier la spécificité des mathématiques discrètes

Les Situations Recherche ont aussi permis le développement de recherches sur les spécificités des mathématiques mises en jeu.
Certains travaux se sont intéressés à la situation spécifique des mathématiques discrètes dans les curriculums. Ils montrent la potentialité qu'il pourrait y avoir à y introduire des contenus de mathématiques discrètes (Cartier, 2008, par exemple pour la théorie des graphes), en regardant ce qui existe et est possible dans certaines niches où elles existent. On peut cependant se demander si l'absence de ces mathématiques des curriculums n'est pas l'un des facteurs qui contribue à la possibilité de faire vivre des Situations Recherche en appui sur ces mathématiques « accessibles mais inconnues » comme nous l'avons noté précédemment.
Ouvrier-Buffet (2009, 2014) et Grenier (2009, par exemple), se sont intéressées à la spécificité des raisonnements en mathématiques discrètes. Cette question soulève aussi celle de la transférabilité de ces raisonnements à d'autres champs des mathématiques (énumération de tous les cas dans le fini par exemple, raisonnement d'optimisation spécifique au problème...) mais aussi les potentialités pour comprendre la spécificité et l'intérêt de certains résultats classiques du cours de mathématiques qui deviennent faux (ou plus faibles) dans les cas discrets. D'autres travaux (Grenier, 2012, par exemple) soulignent aussi la pertinence d'étudier certains raisonnement dans des situations discrètes bien choisies qui permettent de mieux saisir la portée de ces raisonnements, notamment la récurrence qui peut être travaillée dans un cadre plus riche que celui de la preuve de formules algébriques.
Enfin, notons que la spécificité des objets discrets proposés permettent souvent de développer des théories ad-hoc. Ces micro-théories, construites spécifiquement pour la résolution du problème, permettent de mieux comprendre certains concepts mathématiques, comme par exemple, comprendre ce qu'est la définition en mathématiques et quel est son statut dans le travail de recherche et de preuve.

4. Les Situations Recherche en classe comme support de recherche

Certains travaux de recherche se sont appuyés sur les situations de recherche pour la classe pour développer des recherches sur d'autres questions. Nous prendrons pour exemple le travail de thèse de Giroud (2011) qui s'est intéressé à la démarche expérimentale en mathématiques. Nous prendrons pour exemple un concept développé dans sa thèse et proposé pour la recherche en didactique des mathématiques : la notion de *concept-problème*. En appui sur la notion de concept dans les travaux de Vergnaud (1990), Giroud propose la définition suivante :
« Nous considérons que le concept-problème sur un problème P est composée des éléments suivants :
– l'ensemble des problèmes ***P*** qui donnent du sens à P , nous parlerons d'espace problème ;
– l'ensemble des invariants opératoires qui correspondent aux connaissances sur lesquelles repose l'action du sujet en situation de résolution d'un élément de ***P*** ;
– l'ensemble des représentations R que l'on peut associer aux éléments de ***P***. »
Cette notion lui permet de décrire le concept-problème relatif à des problèmes donnés. Ainsi, pour « La chasse à la bête », cela donne la synthèse suivante :

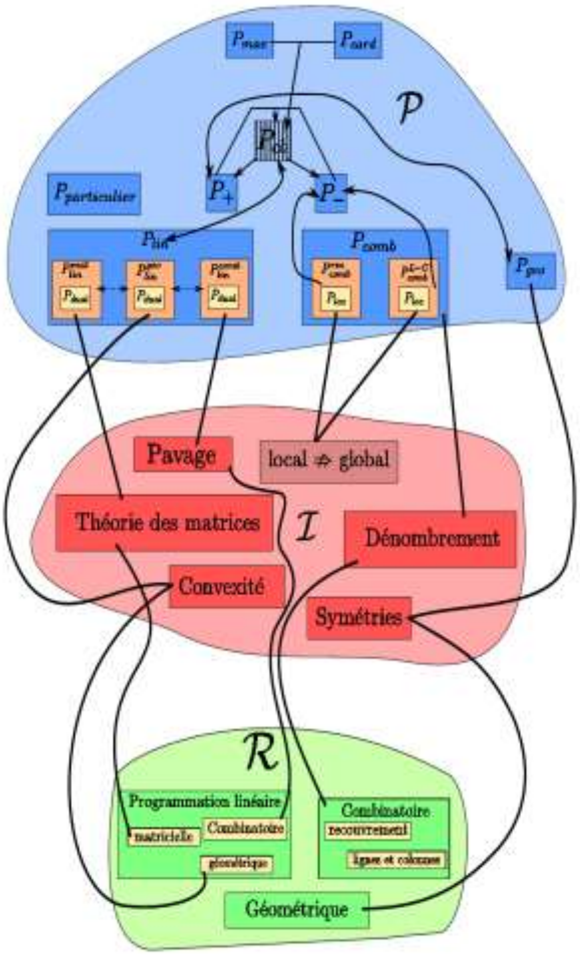


Figure 18 : Concept-problème de « La chasse à la bête », d'après Giroud (2011).

À l'issue de ce travail, Giroud identifie deux intérêts du concept-problème à des fins didactiques :

- Le concept-problème est une aide à l'analyse a priori d'une situation, il permet de faire des hypothèses sur certains obstacles, difficultés ou représentations manquantes. L'établissement de la conception d'un élève (à l'aide d'une expérimentation) et de sa confrontation au concept-problème permet alors de vérifier ces hypothèses.
- Le concept-problème est une aide aux choix des variables de recherche.

5. Ancrages didactiques

Les travaux de recherche sur les Situations Recherches et le développement collaboratif de ces situations s'ancrent principalement dans deux cadres théoriques (déjà mentionnées dans les paragraphes précédents) : la Théorie des Situations Didactiques (Brousseau, 1998) qui apporte un cadre pour penser la mise en œuvre des situations et leur analyse, et la théorie des champs conceptuels (Vergnaud, 1990).

Ces théories sont partagées plus ou moins implicitement avec les chercheurs en mathématiques impliqués dans le développement des situations. En particulier, les outils de la Théorie des Situations Didactiques, tels que les variables didactiques et l'analyse a priori, permettent de penser l'organisation des situations développées collaborativement avec les mathématiciens. Un certain modèle épistémologique de l'activité mathématique agit aussi comme une référence partagée entre mathématiciens et didacticiens et sert de cadre à la construction des situations et à la recherche.

IV. MATHS A MODELER

Pour terminer, nous présentons la structuration de l'équipe Maths à Modeler et ses missions. Nous souhaitons montrer comment la collaboration entre didacticiens et mathématiciens, notamment, vit et comment elle permet d'articuler recherche, formation et médiation.

1. Une équipe

L'équipe Maths à Modeler n'est pas une équipe de recherche au sens où on l'entend habituellement puisque les différents membres n'appartiennent pas tous au même laboratoire de recherche. Il faut prendre le mot « équipe » dans le sens d'un groupe de personnes qui travaillent ensemble sur un même projet « Maths à Modeler ». Initié à Grenoble en 2000, le réseau Maths à Modeler se répartit depuis sur le territoire français et hors du territoire. Voici une carte recensant quelques lieux et quelques membres.

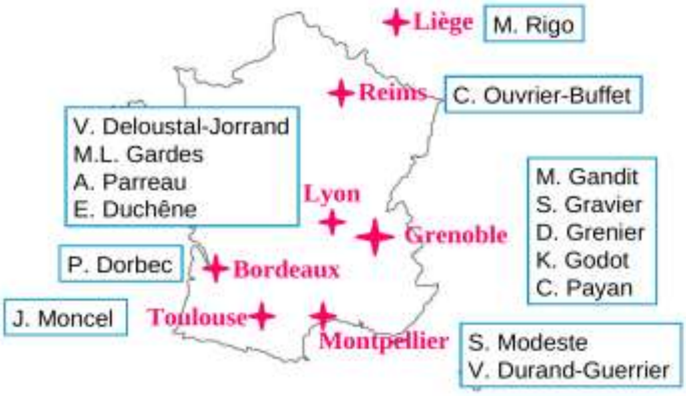


Figure 19 : Quelques membres du réseau Maths à Modeler et leur localisation[2].

On retrouve divers profils dans les membres de l'équipe : des chercheurs en didactique des mathématiques et en mathématiques discrètes (parfois dans des équipes d'informatique) principalement, mais aussi des chercheurs en sciences de l'éducation, en psychologie et en sciences de l'information et de la communication. En plus des chercheurs, l'équipe comprend des enseignants, formateurs et médiateurs scientifiques.
Les interactions entre ces différents profils se font à différents niveaux :

- Conception des situations
- Analyse des situations
- Expérimentations des situations
- Étude des pratiques des chercheurs en mathématiques

Des rencontres annuelles, « Les Journées Maths à Modeler », permettent à tous les acteurs d'échanger autour d'exposés et d'ateliers. Des problèmes mathématiques qui pourraient donner lieu à de nouvelles Situations Recherche y sont présentés, discutés, analysés. Des retours d'expériences, en appui sur les pratiques de terrain de chacun, y sont rapportés. C'est le lieu d'échanges et d'interactions privilégié entre les membres qui ne travaillent pas ensemble au quotidien.

[2] Pour une liste détaillée : http://mathsamodeler.ujf-grenoble.fr

2. Des missions

L'équipe Maths à Modeler a pour principal objectif de faire partager à un large public une certaine vision des mathématiques : celle où elles sont des outils qui permettent de répondre à des problèmes que l'on se pose. C'est ce projet qui va être à l'origine des différentes missions que se donne l'équipe.
Ce projet peut, bien sûr, se décliner dans les classes où, grâce aux SiRC, les élèves rencontrent des « mathématiques différentes » de celles qui sont enseignées au quotidien et entrent dans la démarche et la preuve mathématique.
Cette intervention directe dans les classes se fait à différents niveaux : cycle 3 à l'école primaire, collège, lycée ou même université. Cette participation peut se faire sous diverses formes, une seule séance de deux heures ou une séquence de plusieurs séances, et dans différents contextes : Maths en Jeans[3], semaine des maths, et autres interventions de chercheurs dans les classes, Maison des Mathématiques et de l'Informatique de Lyon[4], UE transversales à l'université, etc.
Ce projet amène aussi l'équipe à intervenir dans la formation des professeurs : en formation initiale (masters Métiers de l'Enseignement, de l'Éducation et de la Formation (MEEF) premier et second degré), en formation continue, dans des séminaires IREM (Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) et en participant à des groupes IREM, en formation des doctorants, dans des colloques tels que journées APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public), colloques Copirelem (Commission Permanente des IREM sur l'Enseignement Élémentaire) et Corfem (COmmission de Recherche sur la Formation des Enseignants de Mathématiques du second degré). Là encore, les interventions sont de natures diverses : cours dans des unités d'enseignement de didactique, en séminaire recherche, encadrement de mémoires, groupes projets, stages de formation continue, par le biais d'ateliers ou conférences dans des colloques, etc.
D'autre part, le projet ayant une large visée, l'équipe souhaite aussi toucher le grand public auquel, grâce aux SiRC, elle montre un aspect du métier de chercheur en mathématiques. Elle intervient donc dans des situations de diffusion de la science dans différents lieux et évènements : Maison des Mathématiques et de l'Informatique de Lyon, La Grange des maths[5], Fête de la science, Semaine des maths, Nuit des chercheurs, Festival Remue-méninges[6], Salon Culture et Jeux Mathématiques[7], etc. De plus, certaines de ses Situations Recherche sont reproduites dans des institutions de diffusion des sciences au grand public (Palais de la découverte[8] par exemple).
Enfin, pour faire connaître ce projet, l'équipe diffuse les résultats de la recherche par des publications (recherche et ressources) mais aussi en participant à des colloques (recherche, formation, grand public) ou encore par l'encadrement de mémoires de master et thèses.

V. CONCLUSION

Dans cet article, nous avons souhaité présenter le projet Maths à Modeler et comment il articule recherche, formation et diffusion. Il est porté par une équipe qui s'agrandit et se développe en

---

[3] https://www.mathenjeans.fr/
[4] http://mmi-lyon.fr/
[5] https://www.la-grange-des-maths.fr/
[6] http://remuemeningesisere.free.fr/
[7] https://www.cijm.org/salon
[8] www.palais-decouverte.fr/

France et à l'étranger. La motivation du projet peut être résumée par l'envie de proposer à un large public des Situations Recherche qui lui permettent de « chercher comme un chercheur ». Cela permet, d'une part, de travailler la démarche mathématique mais aussi, d'autre part, de faire connaître le métier de chercheur en mathématiques ou encore de donner une autre vision des mathématiques que celle véhiculée classiquement par l'école.
Dans la première partie, nous avons présenté la Situation Recherche « La chasse à la bête » et montré comment des élèves de collège pouvaient s'en emparer pour entrer dans la démarche mathématique : faire des essais, des conjectures, chercher des contre-exemples, réduire le problème, argumenter et prouver.
Dans la deuxième partie, nous nous sommes appuyés sur cet exemple pour montrer les spécificités des Situations Recherche et l'intérêt qu'elles pouvaient avoir pour l'enseignement des mathématiques. Les élèves rencontrent des mathématiques « différentes » de celles habituellement enseignées, qui sont présentées de manière ludique facilitant ainsi la dévolution de la situation. Les preuves y prennent une place importante l'enjeu de découverte étant réel, et le travail sur le raisonnement est facilité par les objets mathématiques « faciles d'accès ».
La troisième partie a montré comment deux champs de recherche, celui des mathématiques discrètes et celui de la didactique des mathématiques, pouvaient se compléter dans ce projet. De plus, ce dernier donne lieu à des recherches de différentes natures. En effet, les recherches permettent de concevoir des Situations Recherche qui elles-mêmes, en retour, ouvrent de nouvelles questions de recherche en didactique des mathématiques. Ces nouvelles recherches sont liées à la spécificité des mathématiques discrètes par exemple ou aboutissent à la construction de nouveaux outils didactiques tels que le « concept-problème ».
Enfin, dans la dernière partie, nous présentons rapidement la constitution de l'équipe et les missions qu'elle se donne dans le cadre du projet Maths à Modeler : des missions de formation, de diffusion et de recherche. Toutes ces missions s'articulent autour des Situations Recherche et se nourrissent les unes les autres. La recherche permet de développer la formation et la diffusion qui, de manière réciproque, apportent de nouvelles questions de recherche.
Parmi ces nouvelles questions, certaines nous donnent des perspectives de recherche. En voici certaines : Quelles spécificités des mathématiques discrètes pour les SiRC ? Quelle formation des enseignants ? Et en particulier, comment faire pour qu'ils s'approprient nos SiRC et les mettent en œuvre dans leurs classes ? Quelles possibilités d'interaction avec d'autres recherches, en particulier en didactique ? Quels apprentissages ont lieu dans les situations de diffusion ou vulgarisation ?

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Arsac, G. & Mante, M. (2007). *Les pratiques du problème ouvert*. SCÉRÉN-CRDP de l'Académie de Lyon.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des Situations Didactiques*. La Pensée Sauvage.

Cartier, L. (2008). *Le graphe comme outil pour enseigner la preuve et la modélisation*. Université Joseph Fourier, Grenoble. http://tel.archives-ouvertes.fr/

Giroud, N. (2011). *Etude de la démarche expérimentale dans les situations de recherche pour la classe.* Université Joseph Fourrier Grenoble. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00649159

Godot, K. (2005). *Situations recherche et jeux mathématiques pour la formation et la vulgarisation. Exemple de la roue aux couleurs.* Université Joseph Fourier. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00102171

Godot, K. (2006). La roue aux couleurs: une situation recherche pour apprendre à chercher dès le cycle 3. *Grand N*, *78*, 31-53.

Grenier, D. (2009). Changer le rapport des élèves aux mathématiques en intégrant l'activité de recherche dans les classes. *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*, 161-178.

Grenier, D. (2012). Une étude didactique du concept de récurrence. *Petit X*, *88*, 27-47.

Grenier, D. & Payan, C. (1998). Spécificité de la preuve et de la modélisation en mathématiques discrètes. *Recherches en didactique des mathématiques*, *18*(2), 59-100.

Grenier, D. & Payan, C. (2003). Situations de recherche en classe, essai de caractérisation et proposition de modélisation. *Cahiers Du Séminaire National de Recherche En Didactique Des Mathématiques*.

Ouvrier-Buffet, C. (2009). Mathématiques Discrètes : un champ d'expérimentation mais aussi un champ des mathématiques. *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*, 31-45.

Ouvrier-Buffet, C. (2014). Discrete mathematics teaching and learning. *Encyclopedia of Mathematics Education,* 181–186.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, *10*(2.3), 133–170.

ETUDE DU PROCESSUS D'INSTITUTIONNALISATION DANS LES PRATIQUES EFFECTIVES DE FIN D'ECOLE PRIMAIRE : LE CAS DE L'ENSEIGNEMENT DES FRACTIONS

Cécile **ALLARD**

LDAR (EA 4434), UA, UCP, UPD, UPEC, URN

cecile.allard@u-pec.fr

Résumé

Au terme d'une première séance sur la découverte des fractions à partir de bandes de papier à plier, une enseignante demande aux élèves ce qu'ils ont appris. Ces derniers répondent qu'ils ont appris à plier des bandes pour fabriquer d'autres bandes plus petites. Ce n'était pas la réponse attendue ! D'autres précisent que deux moitiés reforment la bande entière. Cette réponse parait plus exploitable par l'enseignante. Dépasser le « faire » pour les élèves n'est pas aisé. Conduire et construire des séances qui amènent les élèves à donner du sens aux manipulations, à s'extraire de ce qui est identifié comme « du concret » et du contexte pour conceptualiser des nouveaux nombres requiert de l'enseignant de mobiliser des connaissances didactiques et mathématiques pour choisir des itinéraires cognitifs (Robert et al, 2002) et exposer des connaissances en s'appuyant sur le travail des élèves.

Dans nos travaux de recherche (Allard, 2015), nous avons suivi le parcours de quatre enseignants se destinant à être maitre-formateur. Notre recherche vise ainsi à caractériser le processus d'institutionnalisation dans les pratiques effectives de professeurs expérimentés.

Mots clés

Pratiques, ressources, institutionnalisation, primaire

I. INTRODUCTION

Au terme d'une première séance sur la découverte des fractions à partir de bandes de papier à plier, une enseignante demande aux élèves ce qu'ils ont appris. Ces derniers répondent qu'ils ont appris à plier des bandes pour fabriquer d'autres bandes plus petites. Ce n'était pas la réponse attendue ! D'autres précisent que deux moitiés reforment la bande entière. Cette réponse parait plus exploitable par l'enseignante. Dire que deux moitiés d'une longueur donnée « reconstitue » la longueur de départ est possible mais peut paraître moins aisée que de dire que deux moitiés d'un même gâteau réforment le gâteau découpé.

En appui sur ces exemples, en déduire que le somme de deux fois « un demi » est égale à 1, $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, n'est pas une tâche aussi anodine qu'il y parait. C'est ainsi que Thomas fait remarquer à son enseignante que deux moitiés de deux pommes forment une pomme mais que ces moitiés ne sont pas les mêmes que les deux hémisphères de la terre. Thomas, bon élève de Cm2, est face à un problème connu depuis Piaget : il doit comprendre que les nombres existent en dehors

de ce qu'ils représentent et conceptualiser les fractions (en dehors des contextes d'émergence) comme des nouveaux nombres.
Interroger dans les pratiques effectives des enseignants ce qui relève du processus d'institutionnalisation (Perrin-Glorian, 1993) revient ainsi à étudier ce qui est mis en œuvre pour aider les élèves à s'extraire du contexte, du faire (en cas de manipulation) et pour présenter avec leur participation, des connaissances suffisamment généralisées et décontextualisées. Dépasser le « faire » pour les élèves n'est pas aisé. Conduire et construire des séances qui amènent les élèves à donner du sens aux manipulations, à s'extraire du contexte pour amener à une certaine conceptualisation des nouvelles notions requiert de l'enseignant de mobiliser des connaissances didactiques et mathématiques à la fois pour choisir les itinéraires cognitifs (Robert et al., 2002) et aussi pour exposer en classe des connaissances en s'appuyant sur le travail des élèves (procédures, erreurs).
Dans les parties suivantes, nous synthétisons des résultats et définitions en relation avec l'institutionnalisation. Ces rappels, nous conduisent à définir dans les pratiques deux modalités du processus d'institutionnalisation. Puis, nous présentons notre méthodologie et des éléments d'analyse pour enfin présenter nos résultats et conclure.

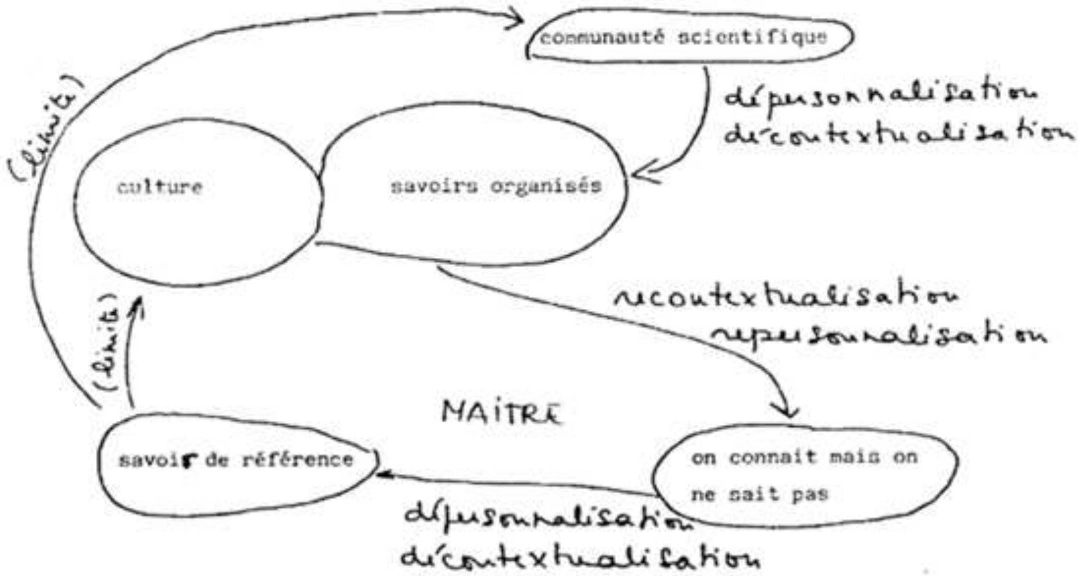
II. INSTITUTIONNALISER

L'objet principal de cette recherche est la caractérisation du processus d'institutionnalisation dans les pratiques effectives des professeurs des écoles en fin d'école primaire. Dans ce texte nous utilisons essentiellement des exemples portant sur l'enseignement des fractions.

1. Processus d'Institutionnalisation (PI) : un processus sous haute tension

Les concepts de dévolution et d'institutionnalisation ne sont pas formulés à l'origine de la Théorie des Situations Didactiques, notée TSD, en 1981. La TSD n'avait pas pour objectif premier l'étude des pratiques mais bien l'étude et l'amélioration des conditions de production du savoir mathématique dans une classe. Deux rôles principaux de l'enseignant sont identifiés à deux moments clefs du travail des élèves : la dévolution et l'institutionnalisation.
En 1986, Brousseau introduit ces deux concepts et leur place dans la TSD. Brousseau (1998) explique plus tard que ces concepts étaient en germe et ajoute que le concept d'institutionnalisation est apparu seulement après avoir posé les bases de la TSD, et un peu malgré lui. Il dégage deux raisons essentielles : l'une est attachée à sa conviction première, qui a évolué, que les apprentissages mathématiques pouvaient se réaliser « naturellement », c'est-à-dire sans intention didactique forte, l'autre raison est attachée à la volonté de construire avant tout des situations les plus a-didactiques possibles car c'est ce qui semblait manquer le plus à l'enseignement ordinaire.
L'institutionnalisation a tout d'abord été définie (Brousseau, 1984) comme ce qui transforme une expérience vécue dans un milieu construit en un « savoir exportable ». Brousseau écrit que la didactique marche à l'envers de la science et illustre cette déclaration par le schéma suivant qui montre par ses flèches un aspect dynamique, qui sera étiqueté plus tard comme un processus, entre différents acteurs et statuts des connaissances. Le processus d'institutionnalisation est alors défini comme le processus qui permet le passage des connaissances en savoir. Par ailleurs, Brousseau fait bien référence à deux institutions : celle de la communauté scientifique qui a validé ce qui va être transmis et celle de la classe qui reconstruit plus rapidement ce qui a été construit par la communauté scientifique. Puis, il

précisera que l'institutionnalisation relève du professeur, institutionnaliser est le moment où le projet du professeur, en termes d'apprentissage d'un savoir, est clairement exposé aux élèves.



La didactique marche à l'envers de la science.

Figure 1 : Description du processus d'institutionnalisation par Brousseau (1984).

Ce schéma montre la position et la fonction de l'enseignant : il est celui qui va rendre possible la dépersonnalisation et la décontextualisation des connaissances et celui qui va établir un savoir de référence commun à la classe en premier lieu. Nous noterons que ce schéma ne précise pas la place des élèves et leur rôle dans ce processus.
Brousseau (1997) affirme la nécessité de phases d'institutionnalisation parce qu'elles donnent à certaines connaissances le statut culturel indispensable du savoir. Il ajoute :

> *« De même que les théorèmes en actes s'évanouissent bientôt en l'absence de formulation et de preuves, les connaissances privées et même publiques restent contextualisées et vont disparaitre dans le flot des souvenirs quotidiens si elles ne sont pas replacées dans un répertoire spécial dont la culture et la société affirment l'importance et l'usage » (p. 9).*

Par ailleurs au fil des années, la caractérisation théorique de l'institutionnalisation s'affine en prenant en compte notamment la distinction entre savoir et connaissances, introduite par Brousseau en didactique des mathématiques dès les années 70, puis repris et affinée par Margolinas & Lappara (2010). Ces auteures tissent les liens entre savoir et institution, elles rappellent le caractère textuel du savoir :

> *« Une connaissance est ce qui réalise l'équilibre entre le sujet et le milieu, ce que le sujet met en jeu quand il investit une situation. Il s'agit d'un concept très large, qui inclut à la fois des connaissances du corps, des connaissances dans l'action, des connaissances de l'interaction, des connaissances mémorisées, etc. Un savoir est d'une autre nature, il s'agit d'une construction sociale et culturelle, qui vit dans une institution et qui est par nature un texte (ce qui ne veut pas dire qu'il soit toujours matériellement écrit). Le savoir est dépersonnalisé, décontextualisé, détemporalisé. Il est formulé, formalisé, validé et mémorisé. Il peut être linéarisé, ce qui correspond à sa nature textuelle. ». (p150)*

L'enseignant, détenteur du savoir, a pour rôle de favoriser les transformations des connaissances, qui ont émergé en situation, en savoir. Pour opérationnaliser et rendre possible

ces transformations, il devra penser et organiser la classe. L'enseignant, en toute conscience, sera conduit à assumer ses rôles lors de la dévolution et de l'institutionnalisation afin de parvenir à maintenir l'équilibre entre exposition de connaissances à l'oral (souvent contextualisées) à des formulations plus générales susceptibles de produire des écrits formalisés, validés et mémorisables. Pour nous, il y a des connaissances formulées lorsqu'un élève dit que deux moitiés de bandes reconstituent une bande entière, ces connaissances n'ont pas encore le statut de savoir (selon les définitions issues de la TSD car trop contextualisées). Cependant ces textes intermédiaires produits par les élèves sont de potentiels point d'appui pour l'enseignant qui est alors en capacité de s'en saisir pour énoncer un texte qui s'éloigne du contexte et des actions tout en aménageant des proximités discursives pouvant faciliter le travail d'appropriation des élèves.
La place des interactions langagières et de leur prise en compte est plus ou moins importante selon les classes. Le contenu de ces interactions expose des bribes d'énoncés exposant des connaissances plus ou moins formulées et formalisées. C'est par exemple le cas du geste qui montre comment utiliser un guide âne : c'est une connaissance qui potentiellement sera plus transférable qu'un discours sur l'usage du guide âne.
Par ailleurs, Centeno et Brousseau (1991) montrent l'importance de la visibilité de références communes. Ils montrent les difficultés à re-mobiliser les connaissances des élèves si la mémoire didactique de la classe est détenue seulement par l'enseignant. Il semble alors convenu qu'institutionnaliser est souvent un besoin ressenti par les enseignants et primordial pour l'apprentissage (ce qui semble être admis mais pas nécessairement prouvé).
Dans notre étude ce qui nous préoccupe ce sont les conditions d'émergence et d'existence de ces textes et l'évaluation du degré de responsabilité des différents acteurs (enseignants/élèves) dans ce processus. Il est alors inévitable de notre point de vue d'étudier les pratiques des enseignants en relation avec les activités des élèves qui conduisent cette communauté (enseignants/élèves) à produire des textes décontextualisés, dépersonnalisés, formulés, validés et mémorisables.
L'enseignant transforme ce qui vient des élèves en le présentant sous une forme générale, décontextualisée et dépersonnalisée, mais en explicitant cette transformation de ce qu'ils ont pu dire ou faire. Cette explicitation de la transformation qui caractérise le processus d'institutionnalisation, noté PI par la suite, s'appuie sur tout ce qui précède et est le point d'orgue du processus démarré bien avant.
Etudier ce processus amène à prendre en considération différentes tensions qui s'expriment dans les pratiques. Il s'agit d'abord de les identifier pour mieux les comprendre et par la même occasion comprendre les activités des élèves telles que les enseignants les provoquent.
Le PI est un processus sous haute tension, il s'inscrit dans un temps long (Perrin, 1993) avec de nombreux cycles de contextualisation et décontextualisation et il est finalisé par un texte (pas nécessairement écrit). Certaines des modalités choisies par l'enseignant vont favoriser l'identification des institutionnalisations qui ne se produisent pas dans les pratiques effectives à des moments bien déterminés (par exemple juste après une phase d'action). Malgré les différentes tensions, nous pensons que ces textes vont permettre de donner un statut officiel aux connaissances partagées par les élèves et les autres acteurs du système éducatif (parents, association d'aides au devoir, etc.).

2. Institutionnaliser dans les pratiques : quelques résultats

Les difficultés à institutionnaliser dans les pratiques ordinaires des professeurs des écoles débutants ou confirmés, ont été identifiées par plusieurs chercheurs (Butlen & al., 2012 ; Margolinas, 1992, 2014 ; Margolinas et Lappara, 2008 ; Coulange, 2012). Ils s'accordent sur ce qu'ils nomment un déficit de l'institutionnalisation au profit de la dévolution, du faire, de

l'action des élèves. Nous pensons que ces auteurs pointent la phase finale du processus car s'il y a eu un enseignement alors le processus d'institutionnalisation a dû être enclenché. En effet, le rôle de l'enseignant consiste à conduire le processus d'institutionnalisation, d'une part, en choisissant une situation suffisamment robuste (Robert, 2013), qui assure également une activité consistante en mathématique, et, d'autre part, à favoriser l'investissement « effectif » de ses élèves notamment à travers les échanges sur leurs procédures et leurs erreurs. Il existe des liens entre la dévolution, le choix des activités et l'institutionnalisation. Ces auteurs notent que le couple dévolution/institutionnalisation est alors qualifié de couple en tension en lien avec un nécessaire changement de posture à assumer de la part du professeur.
Cette tension montre un dysfonctionnement qui conduit *« à reléguer à l'arrière-plan les connaissances et les savoirs »* (Margolinas, 2011, p. 2). Nous ajoutons que ce qui est valorisé à l'école ce sont des savoir-faire des élèves (au sens matériel) : savoir chercher, apprendre à apprendre, manipuler. La doxa encore actuelle impose à l'enseignant d'être à l'arrière-plan et de mettre « les élèves au cœur du système. ». Nous pensons que c'est une des raisons pour lesquelles l'enseignant n'ose plus produire des textes (notamment des traces écrites) dont leur production est souvent soumise à de longs échanges, qui relèvent parfois de négociations, avant de proposer un texte proche de ce que les élèves ont formulé. Enfin, les recherches portant sur l'analyse des pratiques d'enseignants débutants (Butlen et al 2004, 2012) proposent une catégorisation des pratiques en e-genres et i-genres. Les e-genres catégorisent des pratiques d'enseignants qui valorisent la sociabilisation des élèves (via des projets) et les i-genres valorisent l'instruction. Il existe trois i-genres à partir de plusieurs indicateurs et de cinq niveaux des pratiques effectives.
Le i-genre 3 est celui dont l'analyse des pratiques montre l'existence des cinq niveaux ci-dessous :

- niveau 1 : installer la paix scolaire ;
- niveau 2 : choisir des situations plus ou moins robustes (avec potentiel a-didactique) ; proposition de problèmes consistants et aménagement de temps de recherche ;
- niveau 3 : favoriser l'explicitation des procédures ;
- niveaux 4 et 5 : hiérarchiser les procédures, conduire une synthèse et institutionnaliser.

Butlen et al. (op.cit.) ont montré que les enseignants débutants exerçant dans des écoles de milieux très défavorisés dont les pratiques relèvent du i-genre 3 étaient minoritaires.
Cette catégorisation des pratiques a été obtenue à partir de l'analyse de pratiques de professeurs des écoles débutants nommés en zone d'éducation prioritaire. Les auteurs décrivent ainsi des pratiques majoritaires pour lesquelles les enseignants peinent à hiérarchiser les procédures et n'institutionnalisent pas ou peu.
Le travail que nous menons s'inscrit dans ces recherches et en complète certains résultats en étudiant les pratiques des professeurs des écoles maitre-formateur exerçant dans un contexte plus favorisé (mixte) et dont nous avions fait l'hypothèse que leurs pratiques relevaient du i-genre 3. Nous souhaitons décrire entre autres des pratiques d'institutionnalisation d'enseignants dont la paix scolaire[1] (Pézard, 2010) est assurée.

[1] Paix scolaire : adhésion des élèves au projet d'enseignement de l'enseignant. Cette adhésion garantit la paix sociale.

III. Modalites ponctuelles et dynamiques : deux modalites qui permettent de decrire les differents aspects du processus d'institutionnalisation

1. Modalités ponctuelles du processus d'institutionnalisation

L'étude des différents textes que nous venons de citer, nous conduisent à considérer les trois formulations contenant le terme « institutionnalisation » présentes dans la littérature scientifique : institutionnalisation, phase/moment d'institutionnalisation et processus d'institutionnalisation.
Il s'agit dans la suite du paragraphe de distinguer deux modalités de ce processus. Nous appelons modalités du PI tout ce qui relève du processus : les expositions de connaissances quelques soient leur degré de décontextualisation mais aussi en prenant en compte des éléments de gestion de classe pour lesquels des expositions de connaissances sont organisées ou improvisées. La distinction entre modalités ponctuelles et modalités dynamiques repose sur des éléments de gestion et d'indicateurs comme le caractère répétitif de certains gestes comme la distribution cahiers de cours à la fin d'une séance… Nous retenons, par exemple les indicateurs de stabilité (même moment de la séance) ou de la visibilité des institutionnalisations (trace écrite par exemple). Les caractères répétitif et visible permettent d'identifier les modalités ponctuelles.
Nous appelons modalités ponctuelles tout ce qui est le fruit du processus : essentiellement ce qui relève de l'écrit mais aussi de certaines phases de conclusion (énoncé oral proche du texte écrit) et d'autres moments propres à l'enseignant pas forcément explicites mais stables et routiniers comme croiser les bras et demander de ranger les trousses au moment de phases d'institutionnalisation à des moments différents des séances.
L'institutionnalisation renvoie au texte du savoir, écrit ou oral que nous appellerons modalités ponctuelles, c'est-à-dire à ce qu'on apprend ou dit de l'objet d'étude. La phase ou moment d'institutionnalisation est un moment de la séance, conduit par l'enseignant où est présenté le savoir en jeu. Le « processus d'institutionnalisation » décrit par Perrin (1993) renvoie aux deux modalités. Les modalités embarquent, pour nous, la prise en compte des gestes professionnels identifiés comme des gestes de savoirs (Jorro, 2002) parce qu'ils sont situés dans l'action des enseignants inscrites dans des déroulements plus ou moins stables.
Certains moments seront propices à échanger sur des connaissances-en-actes (nouvelles), anciennes et souvent recontextualisées. Perrin et al (2003) notent à ce sujet :

> *« Dans le cas de la transmission par des situations, nous aurons un contrat d'institutionnalisation au moment où le professeur érige les connaissances en savoirs, en référence à la théorie des situations. C'est le moment de l'institutionnalisation, mais cela ne signifie pas que le processus n'a lieu qu'à ce moment-là : des actions d'institutionnalisation se retrouvent avant et après. »* (p. 243)

Cette citation montre bien que l'institutionnalisation relève de moments identifiables (modalités ponctuelles) et de moments plus dynamiques (qui peuvent être entre des modalités ponctuelles). Les phases de rappels et d'institutionnalisation sont des exemples de ce que nous appelons des modalités ponctuelles, elles sont identifiables et sont inscrites dans un espace-temps, elles sont souvent ritualisées.
S'il n'y a qu'un moment dans la pratique d'un enseignant consacré à l'institutionnalisation, nous ne pouvons alors pas parler de processus. Un processus s'inscrit dans une dynamique, dans une mise en relation entre les activités des acteurs et le savoir visé.

Nous identifions les modalités ponctuelles par le fait qu'elles ont lieu à certains moments et sont limitées dans le temps (une phase a un début et une fin). Elles sont parfois identifiables grâce à des gestes qui les annoncent comme croiser les bras, s'assoir sur une chaise, demander aux élèves de ranger leurs affaires, etc. et qui sont propres aux enseignants. Ce sont les répétitions de ces modalités ponctuelles qui permettent aux élèves d'identifier ces moments comme des temps collectifs qui rendent possibles les échanges sur leurs procédures ou bien encore sur ce qu'ils ont appris. Elles sont parfois implicites comme le fait de s'assoir sur une chaise haute qui représente l'emplacement de l'enseignant lorsqu'il annonce un moment d'institutionnalisation sans que celui-ci soit étiqueté ou explicite : « Attention, je vous demande de bien écouter car nous allons construire ensemble la trace écrite. »
Nous venons de décrire ce que sont les modalités ponctuelles du processus d'institutionnalisation. Ces dernières sont observables et souvent matérialisables (affiches, écrits au tableau ou sur un cahier, tec.). De la même manière, nous allons décrire notre outillage méthodologique pour étudier les modalités dynamiques.

2. Modalités dynamiques

Les modalités dynamiques du processus d'institutionnalisation sont moins facilement identifiables que les ponctuelles et posent un problème méthodologique dans le sens où le chercheur doit se doter d'outils pour savoir ce qu'il doit observer et recueillir comme données. Les modalités dynamiques s'installent dans un temps plus long de l'ordre de plusieurs séances et s'expriment entre autres dans les interactions entre enseignants et élèves mais aussi dans des gestes professionnels qui permettent l'articulation entre les séances. Nous les appelons « dynamiques » dans le sens où elles existent essentiellement lors des interactions entre les élèves et les enseignants. Les interactions participent au processus d'institutionnalisation puisqu'elles participent à la modification des énoncés oraux produits par les élèves.
L'évolution des énoncés oraux est un indicateur d'une modalité dynamique. Cette évolution concerne par exemple la modification des énoncés oraux en termes de degrés de décontextualisation ou de l'exemple générique puis vers un texte plus général. Cela nous contraint donc à une analyse des transcriptions des échanges entre les élèves et l'enseignant sur toute la séance.
Etudier les modalités dynamiques imposent l'étude des pratiques sur des temps longs. En effet, c'est l'analyses de séances consécutives qui permet de rendre compte des relations avec les modalités ponctuelles. Nous sommes amenés à étudier l'ensemble des connaissances exposées. Nous utilisons les termes d'exposition de connaissances (Bridoux, Grenier-Boley, Hache et Robert, 2015) en adaptant la définition aux problématiques spécifiques du primaire. Ces auteurs expliquent ce qui relève des expositions de connaissances :

> *« L'exposition des connaissances serait un moment qui peut participer à l'appropriation visée, par la possibilité de familiariser avec les mots (et formalisations) et de faire activer ensuite (ou grâce à ce qui s'est passé avant) des connexions, d'abord provisoires et partielles, entre mots et activités mathématiques – en référence imagée et adaptée aux pseudo-concepts de Vygotski. C'est un processus long, qui doit s'apprécier dans la durée. » (p. 18)*

Les expositions de connaissances sont constitutives du processus d'institutionnalisation et s'inscrivent dans une dynamique sans pour autant, en primaire, être sous une forme formalisée et décontextualisée. Elles peuvent porter sur des savoirs ou des savoir-faire. Par exemple, Petitfour (2015) décrit quatre types de connaissances en géométrie dont des connaissances instrumentales telles connaitre les schèmes d'utilisation d'une règle ou d'une équerre.

Pour analyser les expositions de connaissances, nous les classons selon leur degré de décontextualisation (Butlen et al, 2003), du moins décontextualisée au plus décontextualisée. L'évolution de ces énoncés est un moyen de montrer l'existence de modalité dynamique.
Prenons par exemple, les trois énoncés suivants dont les deux premiers ont été relevés lors d'échanges entre une enseignante et ses élèves, ils sont ici présentés du moins plus décontextualisés au plus décontextualisés (voire généralisé).

Degré 1 : « 1/5 d'une bande et 3/5 de la même bande reconstituent les 4/5 de la bande. »

Degré 2 : « 1/5u+3/5u=4/5u avec u qui représente la bande » vers « 1/5+3/5=4/5, on peut additionner des fractions si elles ont le même dénominateur ».

Degré 3 : « a/p+b/p =(a+b)/p avec (a, b) entiers relatifs et p entier relatif non nul. »

Dans cet exemple, l'énoncé de degré 3 n'est pas accessible à l'école primaire sous cette formalisation, un des énoncés les plus proches pourraient être « Si les fractions ont un même dénominateur alors on peut additionner leurs numérateurs ». Compte tenu des programmes en vigueur il n'est pas possible d'introduire une autre règle quant à l'addition des fractions quelle que soit la valeur du dénominateur.
D'autres auteurs, tel que Sensevy (1996) dans le « Journal des fractions » puis dans le « Journal du nombre » propose une ingénierie qui conduit les élèves à produire des écrits intermédiaires et à les faire évoluer. Il montre ainsi que les écrits provisoires dans ces journaux sont un moyen de rendre visible les modalités dynamiques du PI. D'autre ingénierie, comme celle de Butlen et al (2003) montre que les élèves peuvent améliorer la production de textes de savoir moyennant un travail sur un temps très long (de la fin de l'école jusqu'au collège). Ces travaux montrent l'importance de la production écrite de textes intermédiaires mais ces ingénieries sont assez éloignées des pratiques ordinaires. Nous émettons l'hypothèse que les textes intermédiaires existent (notamment dans les cours dialogués (Hersant, 2004)) mais qu'ils sont essentiellement produits à l'oral ce qui nécessite des outils spécifiques à l'analyse des interactions entre enseignants/élèves mais aussi élèves/élèves.
Pour caractériser l'étude de la production de textes de savoir oraux, nous faisons une analyse en termes des proximités discursives, introduites par Robert & Vandebrouck (2014) qui sont de trois types.
Les proximités ascendantes consistent à s'appuyer sur ce que disent les élèves en substituant ou en ajoutant du vocabulaire, du symbolisme ou des niveaux de formulation plus généraux. Les proximités descendantes sont celles qui permettent d'ancrer l'ancien dans le nouveau. Le professeur articule un discours décontextualisé et le recontextualise si besoin. Il rappelle les conditions d'émergence de la nouvelle connaissance ou un fait saillant qui remobilise les élèves. Les proximités horizontales reprennent sans ajout du professeur ce qui vient d'être énoncé. Ces proximités ont surement un rôle non mathématique même si elles contiennent des mathématiques.
La catégorisation des énoncés selon leur degré de décontextualisation associée à l'étude des proximités va permettre de constater des modifications des expositions de connaissances (du plus décontextualisées vers le moins, de l'exemple vers l'exemple générique, etc.).
La transcription ci-dessous est annotée de manière à montrer comment nous qualifions les interactions selon le type de proximité. Il y a parfois une part d'interprétation, nous tranchons en faveur d'une proximité ou d'un autre en fonction de l'analyse de la séance entière.

Transcription Solène classe de CM1/CM2 : phase d'institutionnalisation

ENS : non c'est marqué mais on ne dit pas un sur deux, on dit la moitié. Là ce sont des quarts et là ce sont des demis.
Euh Mathis, <u>qu'est-ce que tu as appris aujourd'hui</u> ? (induit **une proximité ascendante)**

Chut les autres vous vous taisez et Thomas, dis-le avec des mots, on a travaillé sur quoi aujourd'hui.
Mathis : des quarts
ENS : des quarts, des bandes, Indira tu peux écouter…euh tu as entendu la question Whesley, alors tu réponds à la question
Whesley :..demi, les bandes ?
ENS : les demis…on a appris les bandes ? on n'a pas appris des bandes. On a appris à faire quoi avec les bandes ?
Trois demis…non on n'a pas appris à faire trois demis, on a fait des quarts. (induit **une proximité ascendante)**
Comment ça s'appelle ça ? *(montre une fraction)* ça s'appelle comment ? **(Induit le rappel d'une proximité descendante)**
Eleve : des fractions ?
ENS **: Ce sont des fractions, on a appris à plier des bandes pour obtenir des quarts, des trois quarts dans une bande puis plusieurs fractions permettent de reconstituer une bande entière d'accord. (Une prox. Horizontale)**

Lors de la dernière intervention de l'enseignant (en gras et souligné), nous notons que celle-ci annonce bien l'objet en jeu : « les fractions » puis immédiatement après recontextualise en rappelant l'action : « On a plié des bandes pour obtenir des quarts et des trois ».
Cette intervention est une synthèse de ce qu'ont dit les élèves et n'enrichissent pas beaucoup plus les connaissances des élèves sur cet objet. A ce discours est associé l'écriture au tableau des fractions ¼ et ¾. Les proximités sont ascendantes ou horizontales. Dans la suite de nos analyses c'est l'étude des sommes des proximités et de leur qualification en degré de décontextualisation qui nous conduiront à pouvoir les qualifier globalement sur un temps long et à décrire la dynamique sous-jacente.

3. Une recherche qui s'inscrit dans un temps long

Notre première étude dans le cadre du M2 recherche de Paris VII (Allard, 2011) portait sur l'étude des traces écrites présentes dans des recueils (cahier ou classeur) à dénomination variée (cahier outil, cahier de leçons, classeur mémoire, etc.). Ces écrits souvent appelés « traces écrites » avaient pour fonction commune d'être des textes à apprendre à la maison.
Nous avons continué nos investigations sur la présence et le contenu de ces recueils dans les classes de CM1/CM2. Nous avons pu établir que les écrits n'étaient pas la clé de voûte du processus d'institutionnalisation car très inégalement présents dans les classes.
De 2010 à 2011 des observations ponctuelles dans une dizaine de classes sur des thèmes variés (géométrie, calcul, nombres) nous ont convaincus des difficultés méthodologiques à rendre compte d'un processus sans prise en compte du temps long.
De 2011 à 2014, notre travail de thèse (Allard, 2015) a permis de caractériser les processus d'institutionnalisation relevant des pratiques des maitres-formateurs. Nous avons recueilli des données sur un temps long et selon deux dimensions : sur plusieurs séances consécutives sur le thème des fractions et sur plusieurs années. Cela nous a permis de mettre en évidence des régularités et des variabilités des pratiques entre des enseignants (interpersonnelles) et intrapersonnelles (même enseignante trois années de suite).
Depuis 2015, notre travail s'est étendu à l'étude du processus à d'autres notions et auprès d'un public reconnu par la profession comme moins expert que les maitres-formateurs.
Nous utilisons les concepts de dévolution et d'institutionnalisation empruntés à la théorie des situations didactiques car mis en relief en premier lieu par les différents contributeurs de cette théorie (Brousseau, 1998 ; Margolinas 1992, 2014 ; Margolinas & Laparra, 2008, 2014).
Notre cadre théorique est essentiellement celui de la Double Approche didactique et ergonomique (Robert et Rogalski, 2002). Ce cadre nous outille pour caractériser les pratiques

d'institutionnalisation des professeurs des écoles. Notre travail permet d'établir les logiques qui sous-tendent les pratiques d'institutionnalisation.

IV. METHODOLOGIE ET RECUEIL DE DONNEES

La méthodologie de cette étude permet d'étudier le processus d'institutionnalisation dans ces modalités ponctuelles et dynamiques. Elle est adaptée selon que les données soient, d'une part, des produits finalisés du PI comme les traces écrites, les recueils de leçons, les énoncés verbaux qui renvoient à des modalités ponctuelles ou, d'autre part, des éléments dynamiques du PI comme les énoncés intermédiaires, les expositions de connaissances produites au cours des interactions qui renvoient à des modalités dynamiques.

1. Recueil de ce qui relève des modalités ponctuelles du PI

L'étude réalisée permet de traiter des données recueillies (de 1 à 8 ans selon les classes). Les premières données se réduisaient à récupérer des recueils de leçons et à quelques observations de classe portant sur des domaines variés. Nous avions vite constaté qu'à l'échelle d'une séance de classe, il n'était pas si simple d'observer et de rendre compte des caractéristiques d'un processus. L'observation d'une séance de mathématiques ne permet pas toujours de relever une trace écrite, un affichage ou même un court énoncé à l'oral qui relèverait d'une exposition des connaissances.
Pour analyser ce qui relève des modalités ponctuelles (stable dans les déroulements, repérable comme les traces écrites et les phases de rappels ou des phases d'institutionnalisation) nous avons recueilli l'ensemble des leçons en fin d'année scolaire, photographié à plusieurs moments de l'année les affichages, filmé le plus que possible les séances d'une même séquence. Nous avons, quand cela n'était pas fait, reconstitué les sommaires des recueils et identifié les moments où les affiches étaient élaborées et/ou accrochées.

Choix des notions étudiées

Nous avons dû définir l'étude d'un domaine en particulier. Nous avons choisi celui de l'enseignement des fractions et décimaux qui sont des notions nouvelles en cycle 3. Cibler un domaine *a priori* semble être un bon moyen pour saisir un processus sur une temporalité longue et dont l'analyse nécessite un grain d'analyse fin.
Par ailleurs, nous avons mené une étude comparative d'une dizaine de recueils[2] de leçons issues d'enseignants différents. Elle a mis en évidence que selon les enseignants, pour un même niveau de classe, les domaines des mathématiques n'étaient pas présents dans les recueils : certains recueils ne présentaient aucun écrit en géométrie ou en calcul. Une notion en revanche faisait l'objet d'une trace écrite pour tous les enseignants : les fractions.

Utilisation des vidéos

Les vidéos ont un double usage dans nos analyses, d'une part, pointer d'éventuelles phases de rappels correspondant à une modalité ponctuelle du PI souvent réalisée à l'oral et, d'autre part, relever ce qui est de l'ordre des expositions de connaissances afin d'en déterminer le degré de

[2] Recueil de leçons : document qui appartient à l'élève dans lequel il compile les traces écrites et autres traces destinées à être apprises à la maison ou à être des supports pour l'outiller en classe.

décontextualisation et de qualifier les proximités discursives. Toutes les vidéos sont retranscrites et les énoncés sont codés selon leur degré de décontextualisation, puis un deuxième codage permet de qualifier les proximités discursives.

Choix des enseignants

Les premières années, nous avons suivi sept enseignantes, puis quatre et enfin deux. Butlen et al. (2012) étaient confrontés dans le cas de leurs études longues à la difficulté de suivre des enseignants de REP car ces derniers ne restaient pas suffisamment longtemps dans ces zones sensibles. Nous avons été confrontés à la même difficulté car ces enseignants expérimentés devenaient parfois conseillers pédagogiques et donc ne restaient pas dans leur classe.
Les enseignants suivis sont tous expérimentés (plus de 5 ans d'expérience) et garantissent ainsi la paix scolaire (Charles Pezard, 2010), ils sont appréciés par leurs collègues et sont inscrits dans ce que Mamede (2018) appelle un cercle vertueux de développement professionnel. Ces terrains d'échanges et d'observations peuvent être considérés comme favorables au développement de gestes professionnels permettant de développer un processus d'institutionnalisation.
La comparaison sur du temps long a permis de comparer les expositions de connaissances sur une même notion plusieurs années de suite.

2. Etude des ressources choisies et utilisées par les enseignants

Nous avons complété notre méthodologie par une étude systématique du système de ressources des enseignants en identifiant en premier lieu les manuels utilisés. Dans leurs classes, nous relions le fait qu'un enseignant choisisse une activité dans des manuels et l'accompagnement de ce manuel dans le PI. Nous avons relevé si les traces écrites proposées dans le manuel utilisé étaient reprises ou non par les enseignants. Nous faisons l'hypothèse qu'il y a une relation entre les activités choisies et les caractéristiques du processus d'institutionnalisation. Certains manuels proposent des activités plus robustes[3] que d'autres. La capacité à choisir une activité robuste et, plus généralement, un manuel qui en propose plusieurs, peut montrer que l'enseignant s'appuie sur des connaissances mathématiques et didactiques pour faire ses choix. Trois des quatre enseignants de notre étude utilisent des ressources écrites par des didacticiens souvent conseillées en formation (Allard & Ginouillac, 2015) ou bien rédigées par des auteurs s'appuyant sur des travaux en didactiques des mathématiques. Les différentes collections sont enrichies de courts fascicules exposant des textes de savoir. Ces fascicules sont présents dans les classes observées. La prise en compte des ressources va nous permettre de déterminer les effets de leurs usages sur le processus d'institutionnalisation. Les propositions de ces ressources sont-elles des outils ? Sont-elles intégrées dans les expositions de connaissances des professeurs des écoles ?

[3] La robustesse est identifiée suite à une analyse *a priori* réalisée par le chercheur.

	Solène	Sasha	Julien	Gwen
Capmaths (2003) CM1 et CM2	x	x	x	
Euromaths (2003) CM1 et CM2	x	x	x	
Ermel (1997) CM1 et CM2	x	x	x	
A portée de maths (non renseigné) CM2				x

Tableau 1 : Manuels utilisés par les enseignants.

Quand cela était possible, nous avons relevé les fiches de préparation de la séquence afin de mesurer l'écart entre le prescrit et le réalisé en termes d'institutionnalisation. Est-ce que les expositions de connaissances sont prévues, sont-elles formalisées par un écrit ?
Le corpus ainsi constitué contribue à décrire et débusquer les résistances, les raisons des difficultés à institutionnaliser alors que le processus est conduit par des enseignants dont la gestion de classe est assurée, dont le rapport aux mathématiques est bon.

V. SYNTHESE ET PRINCIPAUX RESULTATS

1. Sur la caractérisation du processus d'institutionnalisation

Les pratiques de Sasha et Solène qui, au moment de l'étude, avaient aux alentours de 15 ans d'expérience relève du i-genre 3[4] (le niveau 5 est présent). Julien et Gwen ont plutôt des pratiques relevant du i-genre 2 pour Julien et parfois du i-genre 1 pour Gwen où seule la paix scolaire est assurée. Le tableau suivant présente les caractérisations des différents processus observés sur plusieurs années.

Sasha (3 années d'observation)	*Le PI est caractérisé par des expositions de connaissance, écrits intermédiaires. Les EC (expositions de connaissances) écrites sont de plus en plus décontextualisées, elles sont détemporalisées, formulées et parfois formalisées. Les proximités descendantes sont présentes et sont proches des écrits du recueil de leçons. Sasha produit à l'écrit comme à l'oral des textes intermédiaires, la dynamique du processus est visible chaque année. L'enseignante s'appuie sur les écrits produits lors de sa préparation. On note la présence de ce texte (pré-écrit) oralisé lors des échanges avec les élèves. Cependant, de nombreuses imprécisions existent dans ces textes et conduisent parfois à énoncer des règles non valides. Exemple : l'unité u est égale à 3/3 et à 1.*
Solène (3 années sur les fractions)	*L'analyse des modalités ponctuelles montrent des expositions de connaissances enrichies qui montent en généralisation lors des interactions. Le PI a essentiellement une existence à l'oral portée par des EC* ***discutées, diffuses et non étiquetées*** *en tant que telles. Les EC sont produites suite à des interactions de plus en plus nombreuses. Les proximités discursives*

[4] I-genre 3 : présence des 5 niveaux : assurer paix scolaire, dévolution (activité consistante), aménage des temps de recherche suffisant, hiérarchise les procédures et institutionnalise.

	ascendantes (des élèves produisent des EC, l'enseignant en propose des reformulations) et horizontales (même niveau de formulation) sont nombreuses. L'évolution des énoncés oraux montre l'existence d'une modalité dynamique.
Julien (1 an)	*Les modalités ponctuelles ne sont pas mises en relation ce qui nous conduit à dire que les modalités dynamiques ne sont pas encore effectives. Julien compile des écrits empruntés à différentes ressources sans les mettre en relation et ne s'appuie pas dessus lors des échanges.* *Le PI est non abouti, les EC sont parfois trop rapidement décontextualisées, parfois hors programme, hors de portée car sans lien avec les activités proposées. Elles sont détemporalisées et dépersonnalisées. Les niveaux de formulation ne sont pas toujours adaptés.*
Gwen (2 ans pour les cahiers, 1 an sur la classe)	*Le PI est tout juste amorcé par la présence de modalités ponctuelles sans articulation entre elles. Gwen a bien* ***l'« intentionnalité » d'institutionnaliser*** *mais les situations proposées ne sont pas assez robustes pour favoriser les modalités dynamiques. Les échanges avec les élèves ne portent pas sur des éléments de savoir mais plutôt sur l'usage d'un stylo, la manière de présenter un travail.* *Les EC orales sont souvent hors de portée des élèves. Les EC écrites sont difficilement mémorisables. L'aspect outil de la notion est seulement envisagé. Ce qui correspond au choix des ressources qui mettent l'accent sur l'aspect outil des mathématiques.*

Tableau 2 : caractérisation du PI des 4 enseignants suivis.

Globalement, les expositions de connaissances de ces quatre enseignants expérimentés sont caractérisées par un processus dont l'existence tient au choix de la situation. Les choix assez pauvres de Gwen le conduisent à produire des traces écrites déconnectées des activités de la classe, et à décontextualiser très rapidement après la phase de recherche. Les autres enseignants accompagnent le processus par la présence de textes intermédiaires plus ou moins en relation avec la situation.
Les expositions de connaissances écrites ou orales globalement sont peu décontextualisées, le processus est majoritairement porté à l'oral. C'est en cela que nous qualifions les expositions de connaissances qualifiées de discutées, diffusées souvent improvisées et non étiquetées en tant que telles.

2. Résultats du côté des pratiques

Le PI relève de gestes professionnels d'un « savoir d'expérience » qui se construit sur un temps long et met en jeu des routines qu'il est difficile ensuite de modifier. Par ailleurs, les modifications des habitus professionnels ont eu un impact sur le PI.
Le PI s'appuie sur des connaissances didactiques déclaratives ou en actes et sur des connaissances mathématiques. Pour que ce processus ait une visibilité en dehors des traces écrites, nous avons mis en évidence l'existence d'habitus professionnels et des gestes de savoir (Forget, 2011) qui parfois restent à construire et déterminent des pratiques d'institutionnalisation
Ce PI est en construction sur un temps long pour les élèves comme pour l'enseignant. Il est en constante évolution et dépasse la dialectique novices-experts. Solène ne formule pas de manière identique les expositions de connaissances d'une année sur l'autre. Nous avons trouvé des explications à cela. Parfois c'est ce qu'elle sait de la classe et des difficultés de certains élèves qui la conduisent à préférer l'usage d'expositions de connaissances contextualisées, parfois

c’est un changement dans ses « habitus » qui ont un impact sur ces gestes. Par exemple, le passage du tableau noir au TNI a divisé par deux la surface pour écrire ce qui ne lui permet plus d’investir le tableau comme elle en avait l’habitude. Ce changement d’« habitus » l’a conduite à multiplier les temps de paroles de ses élèves (trois fois plus).
Pour Sasha, les expositions de connaissances sont plus stables car préalablement formulées à l’écrit mais elles sont imprécises. Sasha a des difficultés à formuler des mathématiques et des règles valides en s’appuyant sur la langue maternelle.
Julien, quant à lui, ne s’appuie pas sur les interactions mais compilent dans un cahier toutes les expositions de connaissances qui semblent répondre à des besoins d’élèves. Il y a donc plusieurs textes sur la même notion formulées différemment. Gwen, montre également son intention d’institutionnaliser mais plutôt comme un passage obligé recommandé en formation. Les gestes et les connaissances didactiques, voire mathématiques pour Gwen, sont en construction.
C’est pourquoi nous pensons qu’opérationnaliser le processus d’institutionnalisation est un problème de la profession et dépasse la dialectique novices-experts.

3. Résultats sur l’usage des ressources et de leurs effets sur le PI

Comme nous l’avons déjà signalé, ces enseignants utilisent des ressources pour préparer la classe. Solène et Sasha les utilisent essentiellement pour trouver des activités qualifiées de robustes et assurent une activité mathématique potentiellement consistante pour les élèves L’analyse des séances sur le temps long montre que les choix effectués permettent un pilotage de la classe par les contenus mathématiques.
Julien semble « piocher » également dans plusieurs ressources, il semble craindre de ne pas avoir « bien choisi » et fait vivre à ses élèves plusieurs situations d’introduction provenant de différents manuels. Les situations d’introduction choisies pour les fractions sont proches de celles de Solène et Sascha, enseignantes plus expérimentées. En revanche, les temps de réinvestissement et de mise en commun sont plus difficiles à gérer pour Julien. Il ne se sent pas soutenu par les guides du maitre et adopte un canevas assez classique d’exercices suivis de corrections sans réelle hiérarchisation des procédures. Les connaissances transmises sont alors assez procédurales.
Gwen utilise un manuel dont les situations sont assez peu consistantes. Pour résoudre les activités choisies, les élèves doivent maitriser les aspects outils (Douady, 1986) des notions. L’activité mathématique est assez pauvre compte tenu des propositions de ce manuel et des choix de Gwen. Les expositions de connaissances effectuées sont déconnectées des activités proposées. C’est finalement un cercle vertueux (ou vicieux) que nous décrivons dans l’usage ou le non-usage de certaines ressources. La capacité à choisir une situation robuste assure ou non une activité mathématique consistante, sous réserve également d’un déroulement et de modalités de travail adéquats. Cette activité mathématique peut en partie compenser le caractère diffus du processus d’institutionnalisation.
Enfin, seul Julien a recours systématiquement aux fascicules proposant des traces écrites mais il ne lie pas ces modalités ponctuelles, discute peu avec ses élèves d’éléments en relation avec les connaissances, si bien que les modalités dynamiques du PI ne sont pas facilement repérables. Solène et Sasha utilisent et s’appuient sur les propositions du Ermel (1999) sans les reprendre à l’identique quand elles utilisent « dico math ou mémo maths ».
Certaines ressources ont donc des effets sur le processus par la qualité des situations qu’elles proposent mais n’outillent pas nécessairement pour les formulations, la hiérarchisation des procédures et le processus d’institutionnalisation (sur les modalités dynamiques). Les modalités ponctuelles sont identifiables pour Sasha, un peu moins par Solène. Les pratiques de Solène se distinguent par des modalités dynamiques très présentes : écrits intermédiaires au tableau, enregistrement de ces écrits sur le Tableau numérique interactif, présence d’affichages

temporaires mais pas ou peu de traces écrites destinées à être mémorisables et aucun appui sur les propositions des ressources pour institutionnaliser.
Pour ces quatre enseignants, il semblerait qu'il y ait une tension entre les modalités ponctuelles et dynamiques. Les ponctuelles sont présentes chez les quatre enseignants de manière plus ou moins importante -quantitativement-. Quant aux modalités dynamiques, [5]elles ne sont pas effectives.
L'étude des proximités discursives montrent qu'il semble difficile pour les enseignants de monter en généralité, c'est-à-dire d'expliciter ce qu'une activité permet de découvrir en termes de savoir.
Trois enseignants sur quatre n'assurent pas une visibilité des expositions des connaissances. C'est à la charge des élèves d'identifier ce qui est de l'ordre du contexte et de l'ordre du savoir.
Par ailleurs, la comparaison des pratiques sur un même contenu montre des variabilités intra et inter personnelles ce qui n'assurent pas que les savoirs enseignés soient les mêmes d'un enseignant à l'autre même lorsque ces derniers utilisent les mêmes ressources.

VI. CONCLUSION

Produire des expositions de connaissances, inscrire un PI dans une dynamique prenant en compte toutes les contraintes du métier est une activité de l'enseignant très complexe qui se construit sur un temps long. Pour le chercheur, le processus d'institutionnalisation est un objet d'étude difficile à étudier et à documenter même lorsque les conditions sont favorables comme dans notre recherche.
L'étude des pratiques de quatre maîtres-formateurs permet de dégager quelques conditions favorables à la conduite du PI. En effet, ces enseignants sont en poste sur le même niveau de classe et dans la même école depuis plusieurs années. Ils sont reconnus par l'institution et en sont conscients. Ce contexte leur permet de tenter d'utiliser des ressources proposant des mathématiques consistantes. Leur expérience des situations, des élèves de l'école et du niveau dans lequel ils enseignent accroissent leur marge de manœuvre et favorisent leurs relations avec les élèves vers une part de responsabilité accrue du côté des élèves.
Le PI relève de gestes professionnels, d'un « savoir d'expérience » qui se construit sur un temps long et met en jeu des routines qu'il est difficile ensuite de modifier. L'existence d'un processus d'institutionnalisation est possible si les enseignants peuvent s'appuyer sur :

- des connaissances didactiques déclaratives ou en actes,
- des connaissances mathématiques des PE,
- des routines (Butlen et al, 2004) et des gestes d'institutionnalisation à construire (Forget, 2011).

Il est difficile de déterminer si ce sont les ressources qui ont un impact sur le PI ou si c'est la stabilité d'un déroulement générateur que nous avons défini comme un ensemble d'habitus professionnels et de gestes identifiés par les élèves (Allard et al, 2019). Institutionnaliser et produire des textes valides, mémorisables malgré des ressources qui en proposent est un problème de la profession. Les auteurs comme (Coulange (2012), Butlen et al (2012), Margolinas et al, 2011 ; Margolinas, 2014) ont montré les difficultés à institutionnaliser dans des classes ordinaires. Les auteurs de ressources ou enseignants ne peuvent s'appuyer sur des textes de savoir de référence adaptée à l'école primaire. Nous pensons que l'élaboration de

[5] Le nombre de leçons varient de 4 pour l'année à 60. L'unité de comptage est grossier : une page d'un grand cahier et un titre.

textes de références établis par un collectif d'enseignants, formateurs, chercheurs devient une nécessité pour avoir des points de repères nationaux. Cette diversité des pratiques d'institutionnalisation et cette absence de texte contribuent à creuser les inégalités scolaires. Les élèves les moins socialement favorisés n'ont pas alors les moyens de mettre les mots voire de conceptualiser des notions sans mot.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ALLARD, C. MANGIANTE, C. WINDER C. (2019 De l'étude de pratiques enseignantes en géométrie aux possibilités d'enrichissement de ces pratiques : focale sur l'exercice de la vigilance didactique. In S. Coppé & E. Roditi (Ed), *Actes de la 19ème école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 301-328). Grenoble : La Pensée Sauvage.

ALLARD, C. (2015). Etude du processus d'institutionnalisation dans les pratiques de fin d'école primaire : le cas de l'enseignement des fractions. Thèse de Doctorat, université de paris Diderot, Paris. https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01249807/document

ALLARD, C & GINOUILLAC, S. (2015). De la ressource à la séance en classe : le cas de la proportionnalité en cycle 3. Actes du 41ième Colloque international de la Copirelem, *quelles ressources pour enrichir les pratiques et améliorer les apprentissages mathématiques à l'école primaire,* Mont de Marsan 18-19-20 juin 2014 (pp. 21-151). ARPEME.

ALLARD, C (2011). Apprends ta leçon, oui mais quelle leçon ? Actes du 38ème Colloque international de la Copirelem, *Faire des mathématiques à l'école : de la formation des enseignants à l'activité des élèves,* Dijon 22-23-24 juin 2011 (pp. 1-18). ARPEME.

BRIDOUX,S., HACHE,C., GRENIER-BOLEY,N. & A. ROBERT (2015). Les moments d'exposition des connaissances en mathématiques (secondaire et début d'université). *Cahier du laboratoire de didactique André Revuz*, n°14.

BUTLEN,D. & CHARLES-PEZARD, M. (2003). Etapes intermédiaires dans le processus de conceptualisation en mathématiques. *Recherches en didactiques des mathématiques*, 23/1, 41-78.

BUTLEN,D., MASSELOT, P.& PEZARD, M .(2004). Illustration des i-genres de pratiques et des recompositions singulières. In Peltier, M-L (Ed) *Dur, dur, dur d'enseigner en ZEP* (pp. 83-99). Grenoble : la pensée Sauvage.

BUTLEN, D.,CHARLES-PEZARD, M. & MASSELOT, P.(2012). *Professeurs des écoles débutants enseignant les mathématiques en ZEP : quelles pratiques ? quelle formation ?* Grenoble : La pensée sauvage.

CHARLES-PEZARD, M. (2010). Installer la paix scolaire, exercer une vigilance didactique. *Recherches en didactiques des mathématiques*, 30-2, 197-261.

BROUSSEAU,G. & CENTENO, J.(1991). Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant. *Recherches en didactiques des mathématiques*, 11/2.3, 167-210.

BROUSSEAU,G.(1984). Le rôle du maitre et l'Institutionnalisation. IIIème école d'été de didactique des mathématiques (pp. 40-44). Grenoble : IMAG. *http://guy-brousseau.com/2376/le-role-du-maitre-et-l%E2%80%99institutionnalisation-1984* site consulté le 16/09/2018

BROUSSEAU,G. (1998). *La théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

COULANGE,L. (2012). *L'ordinaire dans l'enseignement des mathématiques. Les pratiques enseignantes et leurs effets sur les apprentissages des élèves*. Habilitation à diriger des recherches, Université de Paris Diderot, Paris.

DOUADY, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactiques des mathématiques*, 7/2, 5-31

FORGET, A. (2011). *Importer le concept d'institutionnalisation en classe de français : quatre classes aux prises avec une même séquence didactique sur le genre encyclopédique en cinquième année primaire*. Thèse de doctorat. Université de Genève

JORRO,A.(2002). *Professionnaliser le métier d'enseignant*. Paris : ESF.

HERSANT, M. (2004). Caractérisation d'une pratique d'enseignement, le cours dialogué. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, 4(2), 241-258.

MAMEDE, M. (2018). Devenir enseignant : développements professionnels et obstacles à l'adoption de postures réflexives. In Broccolichi, S., Joigneaux, C. & Mierzejewski, S. (Eds), *Le parcours du débutant - Enquêtes sur les premières années d'enseignement à l'école primaire* (pp. 131-157). Arras : Artois Presses Universitaires.

MARGOLINAS, C. (1992). Eléments pour l'analyse du rôle du maître : les phases de conclusion. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 113-158

MARGOLINAS, C & LAPARRA, M. (2011). Des savoirs transparents dans le travail des professeurs à l'école primaire in Rochex, J-Y et Crinon,J.(dir), *La construction des inégalités scolaires. Au cœur des pratiques et des dispositifs d'enseignement* (pp. 19-33). Rennes : Presses Universitaires de Rennes.

MARGOLINAS, C & LAPARRA, M. (2008). Quand la dévolution prend le pas sur l'institutionnalisation : des effets de la transparence des objets du savoir. Les didactiques et leur rapport à l'enseignement et à la formation, Bordeaux, France. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00779656/document

MARGOLINAS, C. (2014). Connaissances et savoirs. Concepts didactiques et perspectives sociologiques. *Revue Française de Pédagogie*, 188, 13-22.

PERRIN-GLORIAN, M.-J. (1993). Questions de didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans des « classes faibles ». *Recherches en didactiques des mathématiques*, 13/1.2, 95-118.

PETITFOUR, E. (2015). *Enseignement de la géométrie à des élèves en difficulté d'apprentissage : étude du processus d'accès à la géométrie d'élèves visuo-spatiaux lors de la transition Cm2-6ème*. Thèse de Doctorat, université de Paris 7, Paris.

ROBERT, A. & ROGALSKI, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématique : une double approche. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences des mathématiques et des technologies*, 2(4), 505-528.

ROBERT, A. & VANDEBROUCK, F. (2014). Proximités-en-acte mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et ZPD des élèves : analyses de séances sur des tâches complexes. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 34 (2/3), 239-285.

ROBERT, A. & VIVIER, L. (2013). Analyser des vidéos sur les pratiques des enseignants du second degré en mathématiques : des utilisations contrastées en recherche en didactique et en formation des formateurs- quelle transposition. *Education et Didactique*, 7-2,115-144.

SENSEVY, G. (1996). Le temps didactique et la durée de l'élève : étude d'un cas au cours moyen : le journal des fractions. *Recherches en didactique des mathématiques*, 16/1, 7-46.

USAGE DES RESSOURCES DANS LES PRATIQUES ORDINAIRES TENSIONS ENTRE LA PREPARATION D'UNE SEQUENCE ET SA REALISATION DANS LA CLASSE DE MATHEMATIQUES

Audrey **DAINA**

Université de Genève et HEP Vaud

audrey.daina@hepl.ch

Résumé

Dans le cadre de notre thèse, nous avons étudié l'usage des ressources pour l'enseignement des mathématiques dans le contexte suisse romand, où les enseignants du primaire disposent de moyens d'enseignement officiels communs et unifiés. Nos analyses des pratiques ordinaires de cinq enseignants genevois s'appuient sur le cadre de la double approche ergonomique et didactique (Robert et Rogalski 2002) et le modèle de la structuration du milieu (Margolinas 2002). Elles ont permis de mettre en évidence une grande variabilité dans les pratiques observées, ce qui nous a conduit à distinguer trois types de profil afin de caractériser l'usage fait de ces ressources (Daina, 2013). Dans le cadre de cette contribution, nous nous intéresserons plus particulièrement aux tensions qui peuvent être identifiées, d'une part, entre le discours de l'enseignant et l'usage de la ressource dans sa pratique effective et, d'autre part, entre le choix de tâches et le projet d'enseignement.

Mots clés

Analyse de pratiques enseignantes ; moyens d'enseignement ; préparation des leçons ; diversité d'approches théoriques

INTRODUCTION

Notre recherche de doctorat (Daina 2013) s'inscrit dans le courant de recherches en didactique des mathématiques qui s'intéresse à l'étude des pratiques enseignantes ordinaires dans une approche compréhensive. Plus particulièrement, nous avions pour objectif de décrire le travail de préparation des leçons en lien avec l'usage des ressources dans le contexte particulier suisse romand. La réalité des pratiques ordinaires étant complexe, nous avons dès le début de notre questionnement abordé la problématique en convoquant différents cadres théoriques (TSD, Double approche, TAD). Dans cette contribution, nous présentons de manière générale le parcours de la thèse dans la première partie, en expliquant comment nos questions de recherches se sont élaborées et en illustrant de quelques exemples notre méthodologie. Dans la deuxième partie, nous développons plus particulièrement la question des tensions qui peuvent exister entre la préparation d'une séquence et sa réalisation en classe, ceci en nous référant au contexte global dans lequel prend place l'enseignement ainsi qu'aux éléments plus particuliers qui concernent chaque enseignant.

I. UNE THESE SUR L'USAGE DES RESSOURCES DANS LES PRATIQUES ORDINAIRES

1. Problématique et dispositif de recherche

A Genève comme dans tous les cantons suisses romands, les enseignants disposent, pour les mathématiques, de moyens d'enseignement officiels communs et unifiés. Pour tous les degrés de la scolarité obligatoire, ces Moyens d'Enseignement Romands pour les Mathématiques (MERM) sont réalisés sous mandat de la Conférence Inter-cantonale de l'Instruction Publique de la Suisse romande et du Tessin (CIIP), l'instance de coordination régionale réunissant les conseillers et conseillères d'Etat en charge de l'éducation dans les différents cantons[1]. Les MERM sont donc approuvés conjointement par tous les cantons romands en vue d'une introduction généralisée. Ils sont rédigés par différents groupes d'auteurs selon les degrés, majoritairement des enseignants expérimentés qui sont accompagnés de conseillers didactiques. Nous avons décrit le processus de rédaction de cette ressource, en comparaison notamment avec le système français, ce qui permet de mieux comprendre le contexte socio-historique qui donne sens à la ressource et à l'usage qui peut en être fait (Arditi & Daina 2012 ; Daina & Dorier 2015). Nous en reprenons les éléments principaux dans le prochain chapitre du texte qui aborde la question des contraintes et des conditions qui influencent l'activité de l'enseignant.

Concernant les degrés 6 à 8 de l'enseignement primaire (élèves de 9 à 12 ans), l'édition des MERM actuellement utilisée dans les classes date des années 1990-2000[2], elle suit d'ailleurs l'ancienne numérotation des degrés (modifié en 2009 avec l'entrée en vigueur du concordat HARMOS) ce qui implique que le moyen d'enseignement intitulé 4ème primaire (4P) est utilisé pour le degré de la 6ème primaire actuel, le 5P pour le degré 7 et le 6P pour le degré 8. Par souci de clarté, nous avons choisi pour rédiger cette contribution de garder la numérotation utilisée dans les ressources MERM, qui était d'ailleurs celle en vigueur en 2008 lors de nos observations : 4P (CM1) – 5P (CM2) – 6P (6e).

Cette version des MERM véhicule des conceptions de l'enseignement/apprentissage clairement orientées selon une approche socio-constructiviste. Constitués majoritairement de «situations-problèmes» directement adressées à l'élève, ces moyens d'enseignement sont organisés sous la forme d'un «recueil d'*activités*[3]». Les situations proposées sont classées par thématiques, mais sont indépendantes les unes des autres et ne suivent aucune hiérarchie ou classement selon des niveaux de difficulté. Le choix des *activités*, ainsi que leur organisation dans une progression, sont à la charge de l'enseignant qui doit faire un travail de préparation important. Pourtant, ceci n'est que très peu mis en avant dans les prescriptions officielles et reste même souvent peu problématisé dans les MERM qui sont très peu prescriptifs et donnent peu d'information sur les possibilités d'organisation des situations proposées.

---

[1] La suisse compte 26 cantons, dont 7 suisses romands. Ils sont souverains en matière d'éducation et disposent de leur propre système scolaire.

[2] L'ensemble de ces moyens d'enseignement sont actuellement en train d'être réécrits et seront progressivement distribués dans les classes dans les quatre prochaines années.

[3] Nous utilisons le terme « activité », (que nous écrirons toujours en italique pour le distinguer de l'usage dans le cadre de la double approche, voir cadre théorique), comme un terme générique pour indiquer de manière générale à la fois ce que d'aucuns appellent des exercices, des situations-problèmes, des activités de recherche, etc. En effet, c'est le terme utilisé dans les MER et dans plusieurs manuels.

Il nous parait donc essentiel d'étudier les pratiques ordinaires concernant le travail de préparation en lien avec cette ressource particulière de manière à rendre visible une part essentielle du travail de l'enseignant. Dans ce but, nous avons observé cinq enseignants genevois à l'occasion de la séquence d'enseignement sur le thème de la notion d'aire : un en 4P (9-10 ans), un en 5P (10-11 ans) et trois en 6P (11-12 ans). Nous avons filmé le déroulement de la séquence en classe (entre 4 et 12 séances selon les classes) et avons réalisé plusieurs entretiens avant et après la séquence.
Notre étude s'est ensuite organisée en deux parties : nous avons d'abord dégagé et analysé les contraintes et conditions de l'enseignement de la notion d'aire dans le contexte genevois puis nous avons analysé les pratiques des cinq enseignants. Nous reprenons ces deux aspects dans la suite du texte avant de développer plus particulièrement la question des tensions entre préparation et réalisation d'une séquence.

2. Une question préalable à l'étude des pratiques

Un premier objectif de notre recherche est de caractériser le contexte dans lequel se trouvent les enseignants genevois lorsqu'ils préparent leurs cours à propos de la notion d'aire. A l'instar de Coulange (2012), nous partons de l'hypothèse qu'il existe « des contraintes et des conditions, extérieures au travail du professeur avec les élèves au sein de la classe, qui influencent et conditionnent son activité » (p. 31). Pour analyser ces contraintes et conditions nous nous référons au cadre de la théorie anthropologique du didactique (TAD). L'étude du contexte institutionnel, des ressources et des caractéristiques inhérentes au savoir en jeu sont menées en amont de l'analyse des pratiques enseignantes.
En nous référant au cadre de la TAD, nous sommes amenés à considérer l'enseignant comme un *individu* qui occupe une *position* dans une *institution*.

> *En venant occuper ces positions, les individus deviennent les sujets des institutions – sujets actifs qui contribuent à faire vivre les institutions par le fait même de leur être assujettis. (Bosch & Chevallard, 1999, p. 82)*

Selon cette première entrée dans le questionnement, nous considérons donc « l'enseignement primaire des mathématiques à Genève » comme une institution que nous allons étudier de manière à mettre en évidence dans quelle mesure et de quelle manière elle détermine et contraint les pratiques enseignantes.
De plus, modéliser l'enseignant comme un sujet d'une institution amène à introduire le concept de *rapport institutionnel au savoir*.

> *Etant donné un objet (par exemple un objet de savoir) et une institution, la notion de rapport renvoie aux pratiques sociales qui se réalisent dans l'institution et qui mettent en jeu l'objet en question, soit donc à «ce qui se fait dans l'institution avec cet objet ». Connaître un objet c'est avoir à faire avec – et souvent avoir affaire à - cet objet. (Bosch & Chevallard, 1999, p. 83)*

Ceci nous conduit à étudier le processus de *transposition didactique* (Chevallard 1991) et à introduire la notion *d'organisation praxéologique* (Bosch & Chevallard, 1999) pour modéliser les pratiques liées aux savoirs (dans notre cas les pratiques liées à la comparaison et la mesure d'aires). Afin de mettre en place notre dispositif de recherche, nous nous sommes inspirée de différentes recherches qui questionnent les pratiques enseignantes en lien avec les institutions, notamment Coulange (2000, 2001) et Ravel (2007).
L'objet de savoir qui est en jeu dans les séances que nous avons observées dans le cadre de notre recherche devient donc un élément central de la problématique. Afin d'identifier les contraintes en jeu, nous nous inspirons du travail de Coulange (2000). Nous cherchons à définir les *contraintes externes génériques* (liées aux dispositifs didactiques généraux) et *les*

contraintes spécifiques (liées aux aspects épistémologiques de l'objet de savoir mathématique à enseigner) en étudiant les documents prescriptifs officiels, les plans d'études et les différentes ressources mises à disposition par l'institution, de manière à mettre en évidence les choix mathématiques et didactiques qui sont privilégiés et tendent à influencer les pratiques enseignantes.
Ceci nous conduit à formuler une première question de recherche : **Quelles sont les contraintes externes génériques que nous pouvons mettre en évidence dans l'analyse du contexte institutionnel ? Quelles sont les contraintes spécifiques relatives à l'enseignement de la notion d'aire ?**
Concernant la première question, nous avons décrit le processus particulier qui sous-tend la création et l'usage des moyens d'enseignement dans le contexte suisse romand (Arditi & Daina 2012 ; Daina & Dorier 2015). Après avoir recensé et étudié l'ensemble des ressources disponibles dans le contexte genevois ainsi que les textes institutionnels qui en sont à l'origine ou les accompagnent, nous avons pu mettre en évidence que les MERM se veulent porteurs d'innovation et ont, entre autres, comme objectif de contribuer à une harmonisation de l'enseignement des mathématiques dans les classes suisses romandes. Parallèlement, ils sont le fruit d'un travail de collaboration qui doit être approuvé par diverses instances cantonales et inter-cantonales, qui interviennent sur le fond et la forme. Ces moyens ne peuvent donc être trop prescriptifs et nécessitent une ouverture afin, par exemple, d'être compatibles avec différents plans d'études. Nous avons montré que les tensions entre volonté d'harmonisation et respect de l'autonomie et des différences de chaque canton contraignent, d'une part, les auteurs de la ressource et ont pour conséquence, d'autre part, le développement de multiples « ressources secondaires » spécifiques à chaque canton. Les enseignants se retrouvent donc au moment de définir les objectifs et planifier leur enseignement des mathématiques face à divers documents, de statuts et de provenances différentes. Nous avons par exemple pu mettre en évidence une difficulté à mettre en évidence une « ligne directrice claire » en termes de choix de transpositions de la notion d'aire dans les différents documents disponibles.
D'un point de vue méthodologique, nous avons construit une *typologie de tâches* qui nous permet d'analyser le contenu proposé dans les ressources et de définir les *contraintes spécifiques* liées à l'enseignement de la notion d'aire. Ceci a impliqué une étude de la notion d'aire d'un point de vue mathématique et didactique et a conduit à réaliser un exemple d'organisation mathématique relative à la notion d'aire, qui sert ensuite de référence pour analyser *la transposition didactique* de la notion d'aire dans les MERM (Daina 2013).
Au terme d'un travail d'analyse à la fois déductif, se basant sur les plans d'études, et inductif, à partir des *activités*, voici les sept types de tâches que nous avons identifiés dans notre analyse:

- T1 Comparer des aires ou des périmètres
- T2 Mesurer une grandeur à partir d'une unité
- T3 Appliquer une formule d'aire à une forme géométrique donnée
- T4 Trouver des polygones de périmètre et/ou d'aire donnés
- T5 Optimiser le partage d'une surface en des surfaces d'aire et/ou de formes données
- T6 Construire un Tangram sous contrainte
- T7 Conversion d'unité de mesure d'aire.

Ceci nous a permis d'analyser les *activités* des MERM que nous avons catégorisées selon le type de tâche auquel elle se rapporte. Nous avons ensuite identifié pour chaque tâche des variables didactiques, signe de la particularité de la tâche au sein du type, et les techniques, hiérarchisées selon les variables identifiées (voir Daina 2012 pour un exemple de l'analyse détaillée *d'une activité*).
Cette analyse nous permet donc de catégoriser chaque *activité* et de mettre en évidence les éléments qui seront intéressants à prendre en compte dans l'analyse de l'organisation des

tâches en scénario et des déroulements en classe, dont nous ne reprenons dans la suite que les éléments principaux concernant la question de la transposition dans les ressources 4P, 5P et 6P.
Une analyse mathématique et didactique de la notion d'aire (Daina 2013) nous a permis de mettre en évidence que, bien que l'usage en mathématiques soit d'identifier aires et mesures grâce au choix d'une unité, les recherches en didactique ont montré qu'un travail sur les grandeurs indépendamment des nombres est essentiel afin de construire du sens autour du concept d'aire et de sa mesure. C'est un choix didactique qui marque une certaine distance par rapport aux pratiques mathématiques au niveau du savoir savant. Il est alors intéressant de mettre en évidence, dans l'étude de la transposition des savoirs mathématiques et didactiques relatifs à la notion d'aire dans les ressources en Suisse romande, quels choix sont valorisés.
Notre analyse des MERM montre qu'en 4P le mesurage n'intervient que comme une technique secondaire dans la plupart des tâches proposées. En effet, les *activités* impliquent principalement des tâches de type T1, comparaison d'aires, et notre analyse des variables didactiques met en évidence que, dans la majorité des *activités*, les techniques de comparaison par inclusion et superposition (éventuellement après découpage et recollement) et de comparaison par pavage sont les premières visées. C'est en 5P puis en 6P qu'intervient le passage progressif de procédures de comparaison et de mesurage par pavage à des procédures de calcul faisant intervenir l'aire en tant que grandeur bidimensionnelle (type de tâches T1 et T2 puis T3). On retrouve donc ici un potentiel d'organisation mathématique qui permet théoriquement de construire du sens autour du concept de grandeur. Cependant, même si les commentaires du livre du maître donnent brièvement quelques informations sur les enjeux de l'enseignement de la notion d'aire, il reste difficile pour l'enseignant de prendre conscience de ce potentiel et faire les bons choix d'activités.
Le concept *d'organisation mathématique* nous permet donc de décrire, par l'analyse des ressources, la réalité mathématique qui peut potentiellement se construire dans une classe. Précisions que dans notre travail nous n'étudions que les organisations mathématiques et donc un aspect restreint de ce niveau de modélisation. En effet, la TAD utilise aussi la notion d'organisation didactique, mais nous avons privilégié d'autres cadres théoriques pour décrire « la manière dont » l'organisation mathématique est proposée en classe.

3. Etudes des pratiques, deux entrées théoriques

L'objectif de notre recherche était de décrire de quelle manière les enseignants préparent leurs cours et utilisent les ressources en tentant d'expliciter leurs choix et de montrer une cohérence dans leur projet. Au regard de la complexité de cette activité qui, d'une part, prend place à la fois dans la classe et en dehors de la classe, d'autre part, dépend comme nous venons de le voir de contraintes et de conditions internes et externes, deux ressources théoriques nous ont permis de mettre en place notre cadre théorique et notre méthodologie d'analyse des pratiques: le cadre de la double approche de Robert et Rogalski (2002) et les travaux de Margolinas (2002) sur la structuration du milieu. Ces deux courants de recherche en didactique des mathématiques proposent en effet d'étudier les pratiques enseignantes en mettant en rapport le travail de préparation et la réalisation effective de l'enseignement dans la classe (voire l'apprentissage des élèves). L'enseignant est alors considéré comme un élément agissant sous l'influence de contraintes, qui se font écho hors et dans la classe.
Nous allons tout d'abord présenter brièvement le cadre théorique de la double approche ainsi que la méthodologie d'analyse qui découle de cette approche théorique. En guise d'illustration, nous reprendrons quelques résultats généraux qui ont déjà été plus largement présentés (Daina 2012 et 2013 ; Daina & Dorier 2015). Nous présenterons dans la deuxième partie le cadre de la structuration du milieu qui nous permettra de développer plus

particulièrement la question des tensions entre la préparation d'une séquence et sa réalisation dans la classe.

Double approche

Le cadre de la double approche s'inscrit dans le contexte global de la Théorie de l'Activité (Robert, 2015). Dans cette théorie, « l'activité est co-déterminée par le sujet et une situation dans laquelle il est engagé qui est composée d'une tâche et d'un contexte » (Roditi, 2010 p.203). La figure ci-dessous, adaptée à partir des travaux de Roditi (2010), permet de se représenter l'activité de préparation des cours.

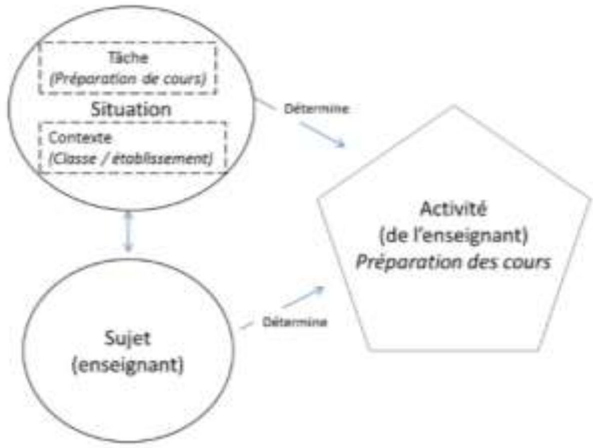


Figure 1 : L'activité de préparation des cours co-déterminée par le sujet et la situation.

Cette approche théorique associe donc le point de vue de la didactique des mathématiques d'une part, et de l'ergonomie cognitive d'autre part.
Afin de décrire les pratiques, nous considérons plusieurs niveaux :

> *Des analyses locales, à partir des déroulements en classe, sont nécessaires pour comprendre les activités potentielles des élèves et détecter des activités de l'enseignant ou de l'enseignante, mais ce sont des analyses plus globales qui permettent de compléter ces informations en reconstituant les fils conducteurs des choix et des décisions, instantanés ou préparés, c'est-à-dire les invariants ou les déterminants. (Robert & Rogalski, 2002, p. 508)*

Robert et Rogalski décrivent ainsi cinq composantes, qui sont prises en compte à différents niveaux de l'analyse des pratiques individuelles.
Deux premières composantes, cognitive et médiative, « sont relatives à ce que l'enseignant provoque effectivement comme activités des élèves, essentiellement en classe » (Robert, 2015).

- La composante cognitive concerne les choix de l'enseignant en matière de contenu : organisation des tâches, de leurs quantités, de leurs ordres, etc. Cette composante résulte de l'étude du projet préalable de l'enseignant (scénario).
- La composante médiative concerne les choix correspondants au déroulement en classe, relatifs au mode d'interaction entre l'enseignant et ses élèves : type d'intervention pour accompagner le travail de l'élève (prévue ou improvisée), modification des tâches, formes de travail imposées par l'enseignant.

La combinaison de ces deux composantes permet de reconstituer « la fréquentation des mathématiques qui est installée, ce qui est valorisé par les scénarios et leur accompagnement et ce qui pourrait manquer » (Robert & Rogalski, 2002, p. 514). Les composantes inférées à

partir d’une ou de plusieurs séances de classe sont ensuite recomposées pour dégager *des logiques d’action*.
Précisons que les pratiques ne se réduisent pas à la somme des composantes, mais identifier certains effets des contraintes correspondant à chacune des composantes permet de reconstituer la cohérence des pratiques des enseignants, c’est-à-dire d’y retrouver des *logiques d’action* (conscientes ou non) qui semblent guider les décisions de l’enseignant (Chesnais, 2009, p. 21).
Cette analyse donne donc une description des activités de l’enseignant. Il reste à interpréter et dégager les déterminants de ces pratiques.
Dans cet objectif, trois autres composantes permettent de décrire le travail de l’enseignant selon différentes dimensions et « donnent accès à la manière dont l’enseignant intègre les déterminants liés à son environnement professionnel, à son histoire, à ses propres représentations. » (Robert, 2015)

- La composante personnelle concerne les propres représentations du professeur en tant qu’individu particulier.
- La composante institutionnelle concerne ce que les pratiques doivent aux programmes, ressources (manuels), horaires, exigences de l’administration. Ces contraintes peuvent s’avérer contradictoires avec ce qu’aurait eu envie de faire l’enseignant.
- La composante sociale concerne ce que les pratiques doivent à la dimension sociale du métier d’enseignant : son inscription dans un établissement particulier, milieu social des élèves, collaborations entre collègues.

Reprenant la méthodologie de Chesnais (2009) nous étudions ces trois composantes à partir des entretiens, de l’étude du contexte institutionnel, du contexte de l’établissement, de documents externes à la classe. Elles sont également inférées à partir des analyses des séquences observées en classe.
Deux questions de recherche guident alors nos analyses : **Quelles fréquentations des mathématiques sont valorisées, selon les scénarios et leurs déroulements locaux, par les différents enseignants ? Quelles hypothèses peut-on formuler concernant les composantes qui déterminent les pratiques des enseignants de notre étude ?**

Deux études de cas afin d’illustrer nos analyses des pratiques dans le cadre de la double approche

Nous ne reprenons pas ici en détail la méthodologie de traitement des données, de création des synopsis et du codage des enregistrements vidéo qui est à la base de nos analyses (voir Daina & Dorier, 2015 ; Daina, 2013), afin de nous centrer sur quelques résultats déterminants par rapport à la problématique des tensions entre préparation d’une séquence et sa réalisation dans la classe de mathématique, ceci pour deux des cinq enseignants que nous avons observés. Précisons de manière générale que les analyses comprennent une analyse globale du projet d’enseignement qui a pour objectif de caractériser la composante cognitive. Le scénario est ainsi reconstitué a posteriori, à partir des vidéos du déroulement en classe de la séquence selon la méthodologie de Roditi (2005). Une fois le scénario reconstitué, il est décrit sous forme d’organisation praxéologique mathématique grâce aux analyses des tâches proposées dans la séquence et à la caractérisation selon le type de tâche. Une deuxième étape de la méthodologie concerne l’analyse locale du déroulement d’une séance, l’objectif étant de caractériser la composante médiative en analysant la succession des phases (consigne, réalisation, mise en commun, etc.), les types d’interactions que l’on peut observer pendant ces phases, l’organisation sociale ainsi définie. Cette analyse détaillée du déroulement d’une séance permet également de mettre en évidence des événements particuliers (emblématiques des pratiques de l’enseignant). L’ensemble de ces observations plus locales sont ensuite mises en regard et éventuellement pondérées avec ce qui s'observe au niveau de la séquence dans sa globalité grâce aux codages des vidéos dans leur ensemble.

Présentation du contexte et des profils des deux enseignantes :

Mathilde et Sophie travaillent dans la même école et l'année de notre observation elles enseignent respectivement dans une classe de 6P et de 5/6P (double degré). Depuis le début de l'année, elles collaborent pour élaborer une planification pour les 6P, dans différentes disciplines (mathématiques, allemand, français, etc.). Sophie prévoit ensuite seule le programme pour les 5P. Elles ont toutes deux obtenu une licence en sciences de l'éducation mention enseignement à l'université de Genève, respectivement en 2002 et 2004. Mathilde enseigne en 6P depuis trois ans. Sophie a principalement enseigné en 5P, c'est la première fois qu'elle a des 6P. Nous avons assisté au rendez-vous durant lequel elles ont planifié, avec une troisième collègue (non observée) la séquence concernant le thème 9 : Aires et volumes. L'enregistrement audio de cette rencontre ainsi que les entretiens pré et post réalisés avec les enseignantes nous permettent de caractériser leur profil.
Lors de cette rencontre les enseignantes se basent sur les MERM et une liste d'*activités* réalisées par Mathilde l'année d'avant, afin de décider du choix d'*activités* qu'elles vont proposer aux élèves dans les deux classes en parallèle. Nous avons pu mettre en évidence que le temps joue comme une contrainte forte dans l'organisation de la séquence (Daina, 2013).
L'analyse des échanges entre les enseignantes, lors de cette rencontre, montre qu'elles parlent peu des objectifs d'enseignement qui semblent implicitement connus et partagés. Notons que les enseignantes n'entrent pas non plus dans une analyse très approfondie des *activité*s. Les propos utilisés pour qualifier les différentes *activité*s restent très superficiels : « celle-ci elle est sympa », « elle est bien, car elle permet de travailler sur tous les polygones » ou « celle-ci est plus compliquée, elle demande un long temps de recherche ». Les raisons plus profondes qui justifient le choix de telle ou telle *activité* par rapport à la construction de la séquence restent implicites. A ce sujet, Mathilde précise lors de l'entretien que ses collègues lui font « confiance », la liste d'*activités* a déjà été proposée les deux années précédentes, et est initialement le fruit d'une ancienne collaboration.
Notons que ni Mathilde, ni Sophie ne gardent de trace écrite de ce travail de préparation, si ce n'est la liste des *activités* proposées et certains éléments de correction qu'elles notent directement au fil des exercices dans leur exemplaire personnel du livre de l'élève. On retrouve chez Sophie le même mode de fonctionnement que chez Mathilde concernant la préparation de l'enseignement, d'abord établir une liste d'*activités* puis préparer plus spécifiquement chaque séance. Sophie parle également de « confiance » ce qui montre l'importance de la collaboration et la place qu'elle tient dans la préparation, en comblant ce qui est ressenti comme un « manque » des MERM.
Cependant, l'étude des propos de Sophie lors du dernier entretien nous permet de mettre en évidence que les objectifs des deux enseignantes sont en fait très différents. Pour Sophie les procédures numériques et notamment l'introduction des techniques de calcul d'aires pour les triangles, les parallélogrammes et les losanges représentent un enjeu important de la séquence, bien que ce ne soit pas au programme de 6P. Il lui paraît important d'avancer le programme de l'année suivante, ce qu'elle juge comme un avantage pour les élèves. De son côté, Mathilde elle, considère que l'objectif principal concerne la compréhension de la notion d'aire et les formules de calcul pour le carré et les rectangles. Elle se base sur cet objectif minimal, car elle sait que dans les épreuves cantonales, épreuve de référence que passent tous les élèves de 6P genevois, il n'y a jamais eu d'exercice qui demande plus au niveau de la notion d'aire.
Il y a donc, d'une part, une distance entre les objectifs que se fixent Sophie et Mathilde. D'autre part, ces objectifs restant totalement implicites dans le travail de collaboration, ils ne

sont pas partagés par les deux enseignantes. L'analyse des scénarios et de leur déroulement va permettre de voir de quelle manière vont évoluer les projets d'enseignement des deux enseignantes qui partent pourtant d'une même liste d'*activités*.

Analyse globale des projets d'enseignement

Matilde et Sophie ont toutes deux consacré 5 séances au thème 9 pour des durées totales quasi identiques de respectivement 6h30 et 6h15. Les schémas ci-dessous permettent d'avoir une vision globale des scénarios de Mathilde et de Sophie avec le détail des références des tâches (L8 se réfère à l'exercice 8 du livre de l'élève, F11 à l'exercice 11 du fichier de l'élève, etc. Tpara est ce que nous avons appelé « une tâche parallèle » et Tprol « une tâche de prolongement », toutes deux sont improvisées par l'enseignante lors du déroulement.)

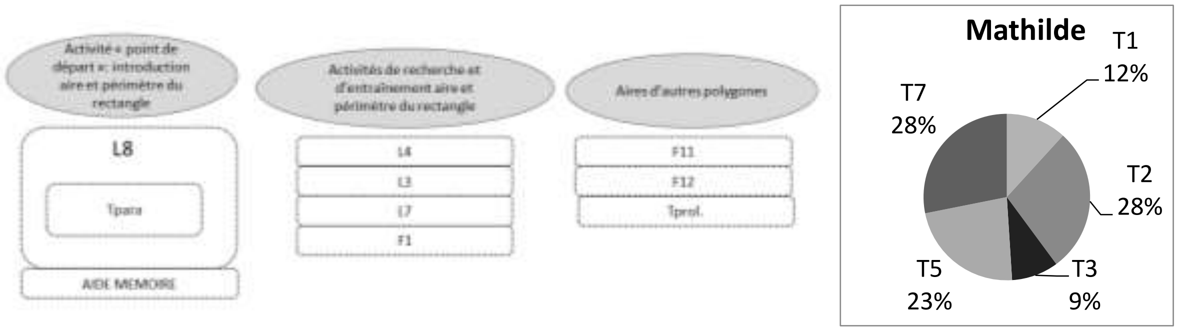


Figure 2 : Structure globale du scénario de ***Mathilde*** *et répartition selon les types de tâches*[4]*.*

L'analyse a priori du scénario de Mathilde nous a permis de mettre en évidence une structure en trois parties : une séance introductive, trois séances consacrées à l'aire du carré et du rectangle et une séance d'introduction à l'aire d'autres polygones. L'étude en termes de type de tâches nous permet de mettre en évidence une cohérence et une adéquation avec ce que proposent les MERM, même si nous notons un surinvestissement du type de tâches T2 qui s'explique par la contrainte de temps qui pousse l'enseignante à aller « à l'essentiel ». Nos observations du déroulement global du scénario montrent de longues phases durant lesquelles le même type de tâche est proposé et une évolution dans les techniques de résolution (Daina, 2013).

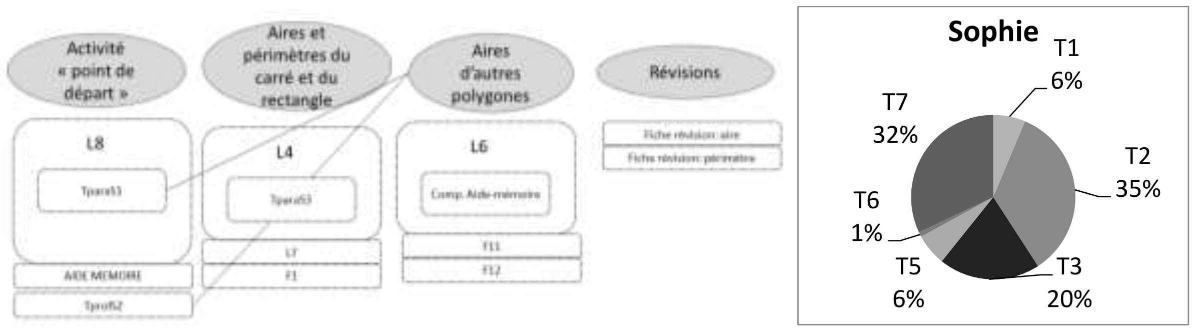


Figure 3 : Structure globale du scénario de ***Sophie*** *et répartition selon les types de tâches.*

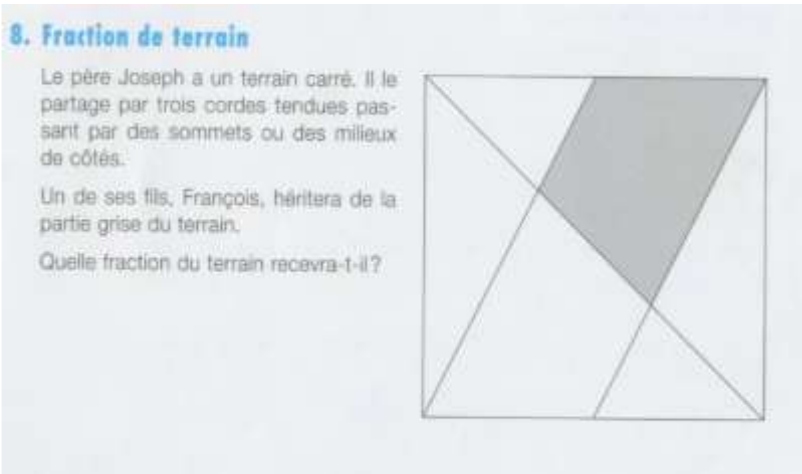
L'analyse a priori du scénario de Sophie nous a permis de mettre en évidence une structure en quatre parties : une *activité* d'introduction, une série d'*activités* sur l'aire et le périmètre de

[4] Pour la répartition des types de tâches, le calcul des pourcentages correspond au temps passé sur un type de tâche par rapport à la durée complète de la séquence (moments de transitions « non mathématiques » non compris). Il tient compte du fait que certaines activités des MERM proposent des sous-tâches et relèvent donc de deux types de tâches (pour plus de détails voir Daina (2013, p.157-158)).

carré et du rectangle, une série d'énoncés d'introduction à la mesure d'aires d'autres polygones réguliers et une séance de révision. La structure du scénario met en évidence que les *activités* des MERM sont souvent mêlées à des tâches parallèles ce qui induit un scénario plutôt éclaté. Nous détaillons par exemple dans la suite que la première tâche parallèle est en fait en lien avec la deuxième partie du scénario sur l'aire d'autres polygones. L'étude en termes de type de tâches montre que Sophie axe principalement son projet autour de trois types de tâches (T2, T7 et T3) qui sont directement destinées à entraîner des techniques numériques (mesurage, application de formules pour les calculs d'aires, changement d'unité).
Bien que Sophie et Mathilde partent du même projet commun, nous voyons bien comment ont évolué les deux scénarios. Alors que le départ est presque identique, l'écart se creuse au fil des séances. Il est pourtant intéressant de noter que dans les entretiens, Mathilde et Sophie ne semblent pas conscientes de ces différences et continueront sans doute à préparer une liste d'*activité* en commun l'année suivante.

Analyse du déroulement d'une séance dans les deux classes

Nous allons à présent nous intéresser au déroulement de la première séance dans les deux classes. Durant cette séance la tâche *Fraction de terrain* (voir ci-dessous) a été proposée dans les deux classes, comme prévu dans le projet que les enseignantes ont élaboré ensemble. Nous avons choisi quelques résultats significatifs afin de montrer que des tensions se font sentir dès l'introduction du thème et qu'il devient problématique pour Sophie de proposer une tâche qui ne porte pas les objectifs personnels qu'elle vise.


8. Fraction de terrain

Le père Joseph a un terrain carré. Il le partage par trois cordes tendues passant par des sommets ou des milieux de côtés.

Un de ses fils, François, héritera de la partie grise du terrain.

Quelle fraction du terrain recevra-t-il?

La procédure visée pour résoudre cette tâche consiste à établir un rapport entre les aires de la surface grisée et de la surface totale. L'équivalence des aires est au cœur de ce problème, mais les connaissances à mettre en jeu ne sont donc pas indiquées explicitement dans l'énoncé.
Le tableau ci-dessous synthétise la succession des phases durant la réalisation de l'*activité* dans les deux classes

Sophie		**Mathilde**	
Phases	*Durée en minutes*	*Phases*	*Durée en minutes*
Consigne	7	Consigne	3
Réalisation individuelle	6	Réalisation individuelle	10
Mise en commun	3	Mise en commun	7
Réalisation individuelle	3	Tâche parallèle (aide mémoire)	19
Mise en commun	8	Réalisation individuelle / correction	39
Tâche parallèle (interruption)	5		
Mise en commun (reprise)	8		
Aide-mémoire	4		
Tâches de prolongement	8		

Nous voyons très clairement ici que, bien que le même énoncé ait été proposé aux élèves, sa gestion en classe est totalement différente entre les deux enseignantes, ce qui fait que l'*activité* des élèves n'est par conséquent pas du même type dans les deux classes.
Dans la classe de Mathilde le nombre de phases est limité. La consigne est très courte. Lors de la mise en commun, les interactions témoignent d'une discussion entre l'enseignante et les élèves, voire entre les élèves seuls qui ont une participation active dans l'avancée de la discussion. Mathilde gère ensuite au niveau individuel l'avancée du projet global à partir de ses interactions avec chaque élève (Daina, 2013). En effet, il est important pour elle de laisser les élèves travailler de manière autonome, de les laisser « se débrouiller ». La mise en commun est un moment de discussion entre elle et ses élèves, les solutions sont partagées, mais elle ne fait aucune validation à ce moment-là. La correction de l'*activité* est gérée de manière individuelle et Mathilde se donne alors la possibilité de voir le travail de chaque élève.
Dans la première séance de Sophie nous observons d'abord un temps de consigne plus long, qui entre en écho avec le souci exprimé par Sophie lors des entretiens de s'assurer que les élèves comprennent bien la consigne, et ne soient pas « bloqués » sans savoir « quoi faire ».
Il apparaît ensuite que les moments de mise en commun et de réalisation individuelle s'enchaînent très rapidement. Ceci est emblématique du mode de fonctionnement de Sophie qui a tendance à guider la réalisation de la tâche. En effet, elle insiste dans les entretiens sur l'importance « d'avancer ensemble ». Aussi, contrairement à ce que nous avons pu observer dans la classe de Mathilde pour la séance 1, ici l'avancée du projet est gérée en collectif. Sophie contrôle globalement le travail des élèves en faisant régulièrement des mises en commun durant lesquelles ils se mettent d'accord sur une stratégie de résolution qui va devenir commune : la décomposition-recomposition de la surface grisée.
Cependant, du fait de ce guidage de l'*activité* des élèves, la tâche est également déviée sur des tâches annexes proposées par Sophie. Ainsi elle oriente l'*activité* des élèves de manière à introduire des connaissances liées aux applications de formules pour calculer l'aire de parallélogrammes, triangles et losanges qui sont des objectifs centraux de son projet global. L'exemple ci-dessous permet d'illustrer l'introduction d'une tâche de prolongement qui montre bien de quelle manière le projet plus personnel de Sophie entre en tension par rapport au déroulement de la tâche principale qui ne sert alors plus que de support matériel pour introduire d'autres connaissances dans un enseignement frontal au tableau.

Dans la continuation de la mise en commun, l'enseignante reprend un schéma réalisé au tableau afin d'illustrer la stratégie de découpage/recollement et propose la consigne ci-dessous :

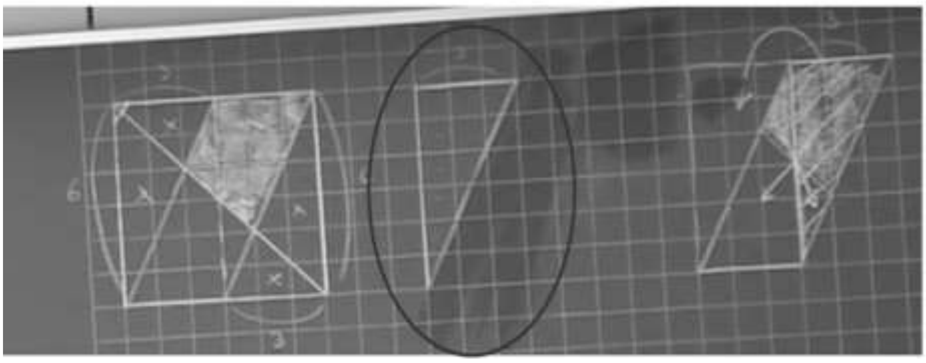


Figure 4 : Photo du tableau dans la classe de Sophie.

	S1-ca-Tprol-Consigne: calculer l'aire du triangle rectangle (reprise schéma *activité* précédente) Ens: je vais vous effacer un petit bout /[…]mon triangle ici / qui me donne l'aire de ce triangle ? / heu là vous savez parce qu'on l'a calculée avant ... on a dit que un triangle vaut quoi ? .../ 9 cm² / vous savez

	que c'est neuf parce qu'on l'a vu /, mais je fais comment / je ne sais pas que ça vaut neuf / je vais même carrément vous changer / on va dire qu'il n'y a pas le trois / comment est-ce que je fais / pour faire l'aire de ce triangle ... je suis un peu embêtée .../ Karen?
La tâche est réalisée en commun, toute la classe participe.	

Les élèves de Sophie n'auront passé que peu de temps sur la tâche *Fraction de terrain*, car la tâche de prolongement intervient à la 27ème minute de la première séance. Nous voyons bien ici que Sophie propose une tâche complémentaire, dans le prolongement du travail fait sur la première *activité*, de manière à aller « plus loin » par rapport aux objectifs prévus dans les moyens officiels et aborder le calcul de l'aire d'un triangle. Cette tâche est problématique, car les élèves connaissent déjà la valeur, qu'ils n'ont pas « calculée avant», comme le stipule Sophie, mais qu'ils ont obtenue grâce à un travail de déduction, de découpage/recollement des différentes surfaces du dessin. Elle va donc changer une donnée du problème. Sophie fait ici preuve d'improvisation, mais les choix qu'elle est amenée à faire sont fortement liés à sa conception du thème et à la manière dont elle a préparé son cours.
Ce mode de gestion a comme conséquence une perte du sens du problème original qui ne devient qu'un prétexte à l'introduction de mini tâches qui visent à introduire des techniques. Ceci pose également des problèmes au niveau de la construction d'un milieu qui puisse devenir significatif pour l'élève.
Les analyses des codages par rapport à l'intégralité de la séquence, les itinéraires cognitifs mis en évidence, l'analyse de la succession des phases, de l'organisation sociale permettent de confirmer les différences entre Mathilde et Sophie et nous observons une grande variabilité dans les pratiques de ces deux enseignantes, ce qui a pour première conséquence que l'*activité* des élèves n'est pas du tout la même dans la classe de Sophie que dans celle de Mathilde, bien que les mêmes *activités* soient proposées lors des deux premières séances. Ce qui questionne le plus reste que ces différences ne semblent pas être la conséquence de choix conscients des enseignantes, qui, malgré leurs différents modes de fonctionnement, trouvent un intérêt à préparer ensemble les séquences. Les entretiens semblent même montrer qu'elles pensent partager les mêmes objectifs, avec un effet fort du contexte institutionnel qui laisse penser que l'usage de la ressource garantit une harmonisation.
Pourtant, aux vues des résultats de nos analyses, des questions nous paraissent importantes : Pourquoi ces deux enseignantes trouvent un intérêt à collaborer ? Comment interpréter ces doubles niveaux de discours ?

II. TENSIONS ENTRE PREPARATION ET REALISATION EN CLASSE

Afin de répondre à ces questions, nous allons à présent nous intéresser à un autre pan de nos analyses qui se réfère au cadre de la structuration du milieu. En modélisant l'activité de l'enseignant en différents niveaux, cette approche nous donne un outil supplémentaire pour comprendre les interactions en jeu dans la préparation et la réalisation en classe d'activités dans le contexte genevois.

1. Structuration du milieu

Nous nous référons ici au modèle de la structuration du milieu élaboré par Margolinas sur la base des travaux de Brousseau (1988, 1996). Dans ce cadre, l'activité du professeur est donc modélisée grâce aux outils de la théorie des situations. La structuration du milieu permet de modéliser l'activité du professeur en interaction avec un milieu décomposé en plusieurs niveaux, résumés dans le tableau qui suit.

Milieu	Elève	Professeur	Situation
M+3 :M-Construction		P+3 : P-Noosphérien	S+3 : Situation Noosphérienne
M+2 : M-Projet		P+2 : P-Constructeur	S+2 : Situation de construction
M+1 : M-Didactique	E+1 : E-Réflexif	P+1 : P-Projeteur	S+1 : Situation de projet
M0 : M-Apprentissage	E0 : Elève	P0 : P-Professeur	S0 : Situation didactique
M-1 : M-Référence	E-1 : E-Apprenant	P-1 : P-Observateur	S-1 : Situation d'apprentissage
M-2 : M-Objectif	E-2 : E-Agissant		S-2 : Situation de référence
M-3 : M-Matériel	E-3 : E-Objectif		S-3 : Situation objective

Margolinas (2002) précise que les milieux supérieurs et inférieurs ne sont pas de même nature.
Les connaissances de l'enseignant évoluent, d'une part, en interaction avec le milieu didactique inférieur (niveau 0). Celui-ci comprend des éléments, comme par exemple la réaction des élèves, qui vont l'obliger à s'adapter, et donc dans une certaine mesure, faire évoluer ses connaissances. On dira alors que ce milieu est de nature *antagoniste*[5] (Margolinas 2002).
Pour ce qui concerne l'interaction entre le professeur et les milieux supérieurs (au niveau +1, +2 et +3), la question est plus complexe. L'hypothèse de Margolinas (2002) consiste à considérer, de manière générale, que le milieu supérieur d'une situation est « le plus souvent » un milieu *allié*, car il ne comprend pas d'autres acteurs que le professeur. En effet, si on considère les situations +1, +2 et +3, le professeur y dispose d'une grande liberté et même s'il est contraint par les programmes, il peut « éviter les confrontations », ce qui le rapproche d'un rapport fictif avec un milieu *allié*. Cependant, Margolinas précise que dans le cas d'un projet en collaboration avec d'autres collègues ou d'un changement de programme la nature du milieu peut changer et jouer le rôle d'un milieu *antagoniste*.
Finalement, il est important de préciser que ce modèle n'est pas temporel, mais structurel. En effet, le tableau présenté ne rend pas compte de la complexité temporelle de l'activité du professeur.
D'un point de vue méthodologique le modèle de la structuration du milieu nous a permis de décrire le filtre au travers duquel l'enseignant est susceptible de prendre des décisions lors des moments de préparation, aussi bien que dans la classe, grâce à une analyse descendante du point de vue du professeur:

> *Dans cette analyse on va tout d'abord considérer la façon dont le professeur est inséré dans son « milieu professionnel » au sens social du terme et quelles sont les valeurs qu'il privilégie dans celles qui sont caractéristiques de cette profession, à une époque donnée, dans un lieu donné. Quand on va examiner la façon dont il construit un thème mathématique, par exemple quand il choisit les documents sur lesquels il va s'appuyer, son interaction avec le milieu noosphérien conduit à considérer que certaines constructions sont plus légitimes […] Le projet de leçon qu'il va construire est lui aussi conditionné par les choix opérés au niveau de la construction du thème […] (Margolinas, 2005, p. 8)*

Ce cadre théorique va donc nous permettre de mettre en évidence les phénomènes liés aux prises de décisions de l'enseignant dans l'action (Comiti, Grenier & Margolinas, 1995) et

[5] « On dira qu'un milieu est de nature antagoniste, s'il est susceptible de produire des rétroactions sur les connaissances du sujet. On dira qu'un milieu est de nature alliée s'il ne permet que l'action du sujet, mais n'est pas susceptible de produire des rétroactions. » (Margolinas 2002, p.148)

ainsi de questionner le lien entre le travail de préparation des cours et les interactions en classe.

2. Le milieu du professeur

Dans l'objectif de décrire plus précisément les éléments qui composent le filtre au travers duquel l'enseignant prend ces décisions, nous avons été amenés dans le cours de nos analyses à approfondir et étendre notre modélisation du concept de milieu du professeur en le considérant selon les composantes que Perrin-Glorian (1999) a distingué afin de caractériser le milieu de l'élève : milieu matériel, milieu social et milieu cognitif. Nous faisons cette analogie avec toutes les précautions liées au fait que le professeur ne se trouve pas dans une situation didactique, contrairement à l'élève.

Milieu matériel

Le milieu de l'élève contient d'abord des objets matériels (milieu matériel) qui jouent comme des *contraintes objectives*. Le milieu matériel contient des connaissances qui sont fournies avec le texte du problème. Cette partie est en principe la même pour tous les élèves.
Dans le cadre de notre travail, ceci nous conduit à émettre l'hypothèse suivante :
Etant donné que dans le contexte suisse romand, les attentes institutionnelles concernant l'enseignement des mathématiques sont véhiculées, en partie, par le biais des moyens MERM, qui sont distribués à tous les enseignants, cette ressource devient un élément déterminant du milieu, car elle permet de diffuser des connaissances nécessaires à la mise en place d'un projet d'enseignement conforme aux attentes institutionnelles.
Les MERM et les plans d'études constituent donc le milieu matériel, car ce sont des éléments communs à tous les enseignants qui jouent comme une contrainte objective. D'autres objets matériels peuvent ensuite s'ajouter selon les cas, cependant ces objets n'ont pas la même valeur, car ils ne sont pas prescrits par l'institution.

Milieu social

Le milieu peut contenir une composante sociale (milieu social), lorsque d'autres acteurs sont impliqués dans l'interaction. Dans le cas de l'élève, cette composante joue un rôle dans le cas d'une situation de formulation ou de validation.
Dans le cas de l'enseignant, le milieu social joue un rôle lorsque l'enseignant se trouve dans une situation de réalisation en classe de son projet (il interagit avec les élèves). Cette composante peut également jouer comme une composante essentielle du milieu lorsque plusieurs enseignants collaborent dans la préparation d'une séquence.

Milieu cognitif

Le milieu de l'élève est constitué de connaissances (milieu cognitif). Le milieu cognitif concerne les connaissances auxquelles le sujet a besoin de faire appel de lui-même. Dans le milieu cognitif, Perrin-Glorian distingue *le milieu potentiel* du *milieu activé (ou effectif).*

> *Le milieu potentiel renvoie au milieu de la théorie anthropologique : c'est l'ensemble des objets pour lesquels le rapport personnel est stable et conforme au rapport institutionnel, lui-même stable. En fait, pour certains élèves ainsi que dans le cas où on met dans le milieu un artefact porteur de savoirs, le milieu potentiel peut déborder le milieu institutionnel.*

> *Le milieu activé renvoie à la théorie des situations : c'est une partie de l'intersection MPS entre le milieu de la situation et le milieu potentiel (milieu potentiel relatif à la situation), la partie qui apporte effectivement des rétroactions aux actions de l'élève [...].*
>
> *Dès l'analyse a priori, on peut prévoir que certaines connaissances supposées dans le milieu institutionnel ne seront pas disponibles pour tous les élèves et distinguer des situations différentes selon les groupes d'élèves, ce qui supposera des apprentissages différents. (Perrin-Glorian 1999, p 295)*

Nous allons reprendre cette distinction pour caractériser le milieu avec lequel interagit l'enseignant lors des moments de préparation en tenant compte du fait que l'enseignant ne se trouve pas dans une situation didactique.

Comme nous l'avons mis en évidence dans notre analyse du contexte genevois, les MERM donnent à l'enseignant une grande responsabilité dans le choix et l'organisation des *activités* qu'il va proposer aux élèves. Lorsque l'enseignant se trouve dans la situation de devoir concevoir une séquence d'enseignement avec cette ressource, il doit donc faire appel (de lui-même) à des connaissances mathématiques, didactiques, pédagogiques, etc. C'est ce que nous mettons en correspondance avec un milieu cognitif.

Afin que l'enseignant puisse remplir cette mission, l'institution et les concepteurs des ressources fournissent à l'enseignant plusieurs outils par le biais du milieu matériel (plans d'études, méthodologies, livres du maître). L'enseignant est supposé construire, à partir de ces textes, des connaissances qui lui permettront de se conformer aux attentes institutionnelles. L'ensemble des connaissances que contiennent ces textes constitue le *milieu institutionnel*. Le *milieu potentiel*, renvoie à la situation d'un enseignant générique qui aurait un rapport personnel stable et conforme au rapport institutionnel.

Se pose alors la question de l'idonéité du rapport personnel des enseignants à ces objets institutionnels, de la même manière qu'elle se pose pour l'élève.

> *Si le rapport personnel de certains élèves n'est pas idoine au rapport institutionnel, [certains] objets de savoirs placés dans le milieu de la situation adidactique risquent de ne pas pouvoir apporter les rétroactions attendues aux actions des élèves. (Ibid., p. 294)*

Le rapport personnel des enseignants à un objet se construit sur la base des formations (initiales et continues), des expériences antérieures de situation d'enseignement, des collaborations, des lectures, des caractéristiques personnelles, etc. C'est ce que nous nommons le *milieu de la situation* pour un professeur particulier (P(x)) qui renvoie donc au rapport personnel qu'un enseignant P a construit par rapport à un objet d'étude x dans diverses situations qui lui sont propres. Le *milieu activé* renvoie à l'intersection MPS entre le *milieu de la situation* de P(x) (S), et le *milieu potentiel* (P) (conforme au milieu institutionnel), il représente la partie des connaissances ou conceptions de l'enseignant qui sont conformes à ce que l'on trouve dans les MERM.

Ceci nous conduit à formuler une seconde hypothèse :

Si les situations qu'a vécues un enseignant ne lui ont pas permis de construire un rapport personnel idoine au rapport institutionnel, il se peut alors que l'usage qu'il fera des MERM ne soit pas conforme aux attentes des concepteurs et plus largement aux attentes institutionnelles.

Les MERM sont par exemple fortement orientées du côté d'une approche socio-constructiviste de l'enseignement/apprentissage, ce qui peut ne pas correspondre aux conceptions de l'enseignant.

Cette idée peut être schématisée comme suit :

Figure 5 : Milieu potentiel, milieu activé, milieu selon la situation de P(x).

Lorsque l'enseignant réfléchit de manière générale à son enseignement (niveau +3), conçoit les grandes lignes de l'enseignement d'un thème particulier (niveau +2), détermine le scénario d'une leçon (niveau +1) ou gère la réalisation du scénario en classe (niveau 0), il le fait en interaction avec le *milieu de la situation* qui lui est propre, dont le *milieu activé* représente la partie qui concerne des objets pour lesquels le rapport personnel de l'enseignant est conforme et stable avec le rapport institutionnel.

Lorsque l'on fait une analyse descendante du point de vue de l'enseignant, il est donc possible de déterminer *a priori* si le milieu avec lequel un enseignant particulier interagit est favorable ou non à la construction d'une séquence en adéquation avec ce qui est attendu par les concepteurs des ressources MERM, ou plus généralement les attentes institutionnelles. A partir de ce schéma, plusieurs cas de figures peuvent être imaginés :

- Si *le milieu potentiel* est inclus dans le *milieu de la situation* de P(x), l'enseignant utilise les ressources en adéquation avec les attentes des concepteurs. Le *milieu activé* et le *milieu potentiel* se confondent.

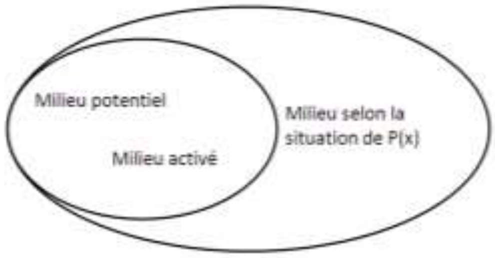


Figure 6 : Adéquation.

- Si le *milieu potentiel* est partiellement inclus dans le *milieu de la situation* de P(x), cela veut dire que le rapport personnel de l'enseignant aux objets introduits par les MERM est partiellement conforme. Il y a donc dans ce cas dans le milieu avec lequel interagit l'enseignant, une tension entre le *milieu potentiel* et le *milieu activé*, car seule une partie des éléments du *milieu potentiel* sont pris en considération ce qui peut être source d'inadéquation ou de non-conformité aux attentes institutionnelles, ceci dans différentes mesures :

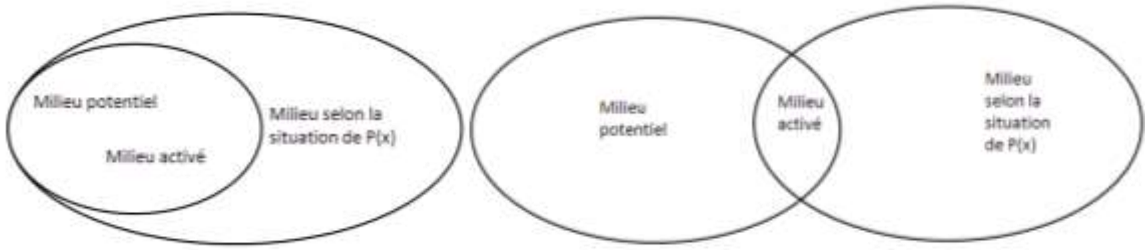


Figure 7 : Différents degrés de conformité par rapport aux MERM.

La question de recherche qui va nous intéresser à présent afin de mieux comprendre la problématique des tensions entre préparation et réalisation en classe concerne la cohérence du projet de l'enseignant et l'adéquation de ses choix par rapport aux particularités des ressources. D'une part, la question de la cohérence s'observe dans l'analyse des interactions entre les différents niveaux sur-didactiques : Quelles sont les conceptions de l'enseignement (+3) ? Comment sont interprétés les plans d'étude (+2) ? Comment le scénario des différentes leçons est-il déterminé (+1) ? D'autre part, ceci questionne l'adéquation entre les conceptions de l'enseignant et les conceptions véhiculées par la ressource aux différents niveaux du modèle (liens entre le milieu potentiel, le milieu activé et le milieu de la situation de P(x)).

Nous synthétisons ces idées dans la question suivante : **Quelle cohérence observe-t-on dans l'analyse descendante du niveau idéologique au niveau didactique ? Comment caractériser le milieu de la situation propre avec lequel interagit l'enseignant ?**

Très concrètement, cette approche nous a permis de proposer une méthodologie *d'étude a priori du point de vue du professeur* qui se base sur les principes de l'analyse descendante et qui permet de mettre en évidence un réseau de contraintes qui pèse sur les choix de l'enseignant.

Dans cet objectif, nous mettons en regard dans notre analyse le *milieu potentiel* (qui renvoie à la situation d'un enseignant générique qui aurait un rapport personnel stable et conforme au rapport institutionnel), *le milieu de la situation de P(x)* (qui renvoie au rapport personnel qu'un enseignant a construit par rapport à un objet d'étude dans diverses situations qui lui sont propres) et *le milieu activé* (qui renvoie à l'intersection MPS entre le milieu de la situation de P(x) (S), et le milieu potentiel (P)).

Notre analyse du contexte genevois et son système de ressources ainsi que notre étude de la transposition didactique de la notion d'aire dans les ressources nous permet de caractériser les attentes institutionnelles, et plus précisément le milieu institutionnel. Ceci nous permet donc de caractériser le milieu potentiel, qui est relatif à la situation « préparer un cours sur la notion d'aire en 6P à Genève » dans laquelle se trouvent les enseignantes. Le tableau ci-dessous permet de présenter de manière synthétique les éléments que l'on relève pour chaque degré dans le *milieu institutionnel.*

Niveau +3	<u>Conception sur l'enseignement apprentissage</u> : orientation socio-constructiviste <u>Rôle de l'enseignant</u> : choisir des situations-problèmes qui vont permettre à l'élève d'apprendre, gérer la dévolution, les phases de verbalisation et de validation.
Niveau +2	<u>MERM</u> - Construction du concept d'aire de rectangle. - Approche des procédures de détermination de l'aire d'un parallélogramme, d'un losange et d'un triangle, en ramenant ces figures par découpages/recollement à un rectangle. <u>Epreuves cantonales</u> Compétences numérique, mesure des aires des carrés et des rectangles.
Niveau +1	<u>Choix d'*activités*</u> *Potentiel* → consolidation des apprentissages, situations-problèmes, mesure d'aire de

	polygones autres que le carré et le rectangle. (cohérent avec niveau +2) plan du thème→ 1er niveau d'organisation des *activités*)

Afin de caractériser le *milieu de la situation de P(x),* nous nous basons sur les comptes rendus des entretiens et nos observations en classe qui permettent dans certains cas d'interpréter ce qui est dit lors des entretiens.
En décrivant le milieu avec lequel interagit l'enseignant en termes de *milieu potentiel*, *milieu activé* et *milieu de la situation de P(x),* nous visons à mettre à jour les tensions liées à une inadéquation entre le rapport personnel de l'enseignant aux objets mathématiques et didactiques relatifs à l'enseignement de la notion d'aire et le rapport institutionnel, que nous analysons à partir des ressources. La présentation de l'analyse pour les deux enseignantes va nous permettre d'illustrer ceci.

3. Analyse *a priori* du point de vue du professeur pour Mathilde

L'analyse a priori du point de vue de Mathilde est vraiment très intéressante, car elle permet de mettre en évidence la dynamique de construction du projet dont l'évolution devient explicite grâce à la collaboration et les interactions qu'elle implique, ce qui permet une cohérence dans *l'analyse descendante* du point de vue du professeur dont nous reprenons le détail par niveau.
Au niveau +3, l'analyse des entretiens montre que Mathilde se réfère directement aux MERM, qu'elle considère comme la ressource principale, à laquelle elle adhère dans une certaine mesure. En effet, elle souligne l'importance de laisser les élèves se confronter seuls aux problèmes qui sont proposés, ce qui correspond tout à fait à la philosophie. Néanmoins, il apparaît également que Mathilde se trouve dans un rapport critique par rapport à cette ressource. Ainsi elle se positionne explicitement contre certaines *activités* dont elle dit qu'elles lui « correspondent » moins. De même, elle prend une certaine distance par rapport à l'approche constructiviste, en précisant qu'elle préfère parfois introduire les éléments théoriques en amont de manière à pouvoir les réinvestir ensuite dans les problèmes.
Dans le cas de Mathilde, une collaboration avec un collègue (Pierre) les années précédentes, semble très importante dans la construction de son rapport personnel à la ressource MERM. En effet, celui-ci semble jouer le rôle de « pont » entre les valeurs de Mathilde et les valeurs des ressources, en rendant explicites certains éléments qui sous-tendent les MERM, ce qui permet ensuite à Mathilde de se positionner en connaissance de cause. Ceci permet la constitution du *milieu activé* avec lequel interagit Mathilde. Notre étude montre bien que Mathilde profite de la collaboration pour s'outiller dans l'usage de la ressource, ce qui garantit une certaine cohérence dans son utilisation (Daina, 2013).
Concernant le niveau +2, nous trouvons peu d'éléments dans le discours de Mathilde qui fassent référence à ce niveau de construction du thème d'étude, ce qui montre que ce niveau est sous-représenté. Le niveau de construction est déterminé par le bas, c'est-à-dire par le choix d'une série d'*activités*. Cependant, aucun indice ne nous permet de mettre en évidence un décalage entre le niveau de construction que sous-tendent les MERM et les prévisions de Mathilde concernant la suite des séances. De plus, la liste d'*activités* a été mise en place et organisée chronologiquement dans une dynamique de collaboration qui prend une importance à tous les niveaux (+3 ; +2 ; +1) ce qui assure une certaine cohérence, même si celle-ci reste implicite.
L'analyse du scénario en lien avec les entretiens a permis de mettre en évidence que les épreuves cantonales jouent également un rôle déterminant à ce niveau. En effet, face à la contrainte du temps, Mathilde va construire le thème autour d'un objectif minimum, l'aire du carré et du rectangle, et laisser de côté tout le deuxième pan du projet qui concerne la mesure de l'aire des autres polygones réguliers.

Si le niveau de construction (+2) se décide en collaboration, les décisions qui sont prises au niveau projet (+1) sont beaucoup plus personnelles et découlent (du moins dans la plupart des cas) d'une analyse plus approfondie des *activités.*
Dans le cas de Mathilde, il est particulièrement intéressant de noter que la collaboration est également importante à ce niveau et que les expériences au niveau 0 dans les classes de ses collègues viennent rétroagir sur son propre niveau de projet de manière significative (Daina, 2013). Le schéma ci-dessous permet d'illustrer ce qui vient d'être présenté.

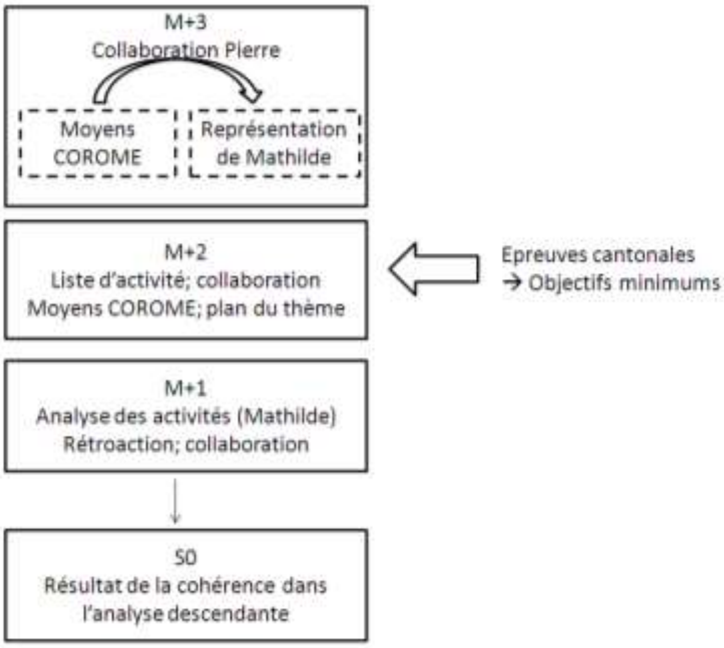


Figure 8 : Analyse a priori du point de vue du professeur pour Mathilde.

Nous retrouvons dans les propos de Mathilde un déséquilibre dans les niveaux de l'activité du professeur. Celle-ci fait en effet peu référence à son projet global lors des entretiens (niveau +2 sous-représenté) et se réfère surtout à la liste d'*activités* qu'elle va proposer (niveau +1). De ce fait, il est difficile de savoir si cette enseignante a un contrôle épistémologique de la construction du thème. Cependant, le travail de collaboration avec son collègue Pierre semble compenser ce déséquilibre, car il apparaît par ailleurs que son projet global d'enseignement de la notion d'aire est cohérent. Nous allons pourtant voir dans la suite que cette sous-représentation du niveau +2 va poser problème dans la collaboration avec Sophie. Nous allons en effet à présent nous intéresser à l'analyse a priori du point de vue du professeur pour Sophie.

4. Analyse *a priori* du point de vue du professeur pour Sophie

Au niveau +3 nous relevons des tensions entre deux référents : les conceptions de Mathilde sur l'enseignement (qui sont à l'origine de la liste qui organise les *activités*) et les conceptions de Sophie sur l'enseignement. Nous découvrons donc ici une tension entre le *milieu potentiel* et le *milieu de la situation* de Sophie, qui sont quasi disjoints. En effet, Sophie témoigne à plusieurs reprises dans les entretiens de conceptions à propos de l'enseignement qui marquent une certaine distance par rapport aux conceptions véhiculées dans la ressource MERM. De même, ses représentations sur l'enseignement de la notion d'aire qui accordent une place centrale aux formules de calcul, montrent que son *rapport personnel* à cet objet de savoir n'est pas conforme au *rapport institutionnel*. Pourtant, dans son travail de collaboration ses

conceptions ne sont pas remises en question ce qui a pour effet la création d'un *milieu activé fictif*.
Dans le cas de Sophie, le *milieu potentiel* du niveau +3, joue un rôle important certes, mais de manière indirecte, car c'est parce que Sophie collabore avec ses collègues et notamment avec Mathilde, que la ressource MERM influence la suite du projet. Dans les faits, Sophie ne fait que peu référence, lors des entretiens, aux conceptions pédagogiques et didactiques présentées dans les MERM. Elle semble donc prendre une certaine distance par rapport à cette ressource. Cependant, rien n'est explicité et nous retrouvons de manière constante deux « niveaux de discours », qui sont nécessaires, dans une certaine mesure, à la collaboration, mais problématiques au niveau de la cohérence du projet.
Au niveau +2, nous pouvons observer une évolution dans la construction du thème entre le début et la fin de nos observations. Dans un premier temps, Sophie délègue la construction du thème dans le travail de collaboration. Il est intéressant de voir dans l'entretien qu'elle précise elle-même « qu'elle fait confiance à ses collègues », ce qui montre bien qu'elle a conscience de l'importance de la collaboration dans cette étape.
Cependant, comme nous l'avons mis en évidence, cette collaboration ne lui permet pas d'entrer dans un véritable travail de fond qui permettrait une explicitation des choix de contenu ou d'organisation de ses contenus. La collaboration se limite en effet au choix des *activités* et à leur organisation chronologique (le niveau de construction du thème est déterminé par le bas) laissant beaucoup d'implicites, que Sophie ne va que partiellement assumer par la suite. Il ne s'agit donc pas du même type de collaboration que celle dont témoigne Mathilde avec son collègue Pierre. Le travail de collaboration va donc permettre de créer, également à ce niveau, un *milieu activé fictif*, avec lequel va interagir Sophie. Elle planifie avec ses collègues une liste d'*activités* selon des objectifs supposés communs. Cependant, ce milieu entre en tension avec ses propres conceptions. Or nous avons pu relever que le projet de Sophie va évoluer au fur et à mesure que les séances se succèdent en classe, dans le sens de ses propres conceptions (Daina 2013).
Au Niveau +1, nous retrouvons donc deux projets qui cohabitent. Durant les deux premières séances, Sophie va suivre le projet mis en place avec ses collègues. Elle va ensuite largement redéfinir les objectifs des *activités* et de fait modifier le projet.

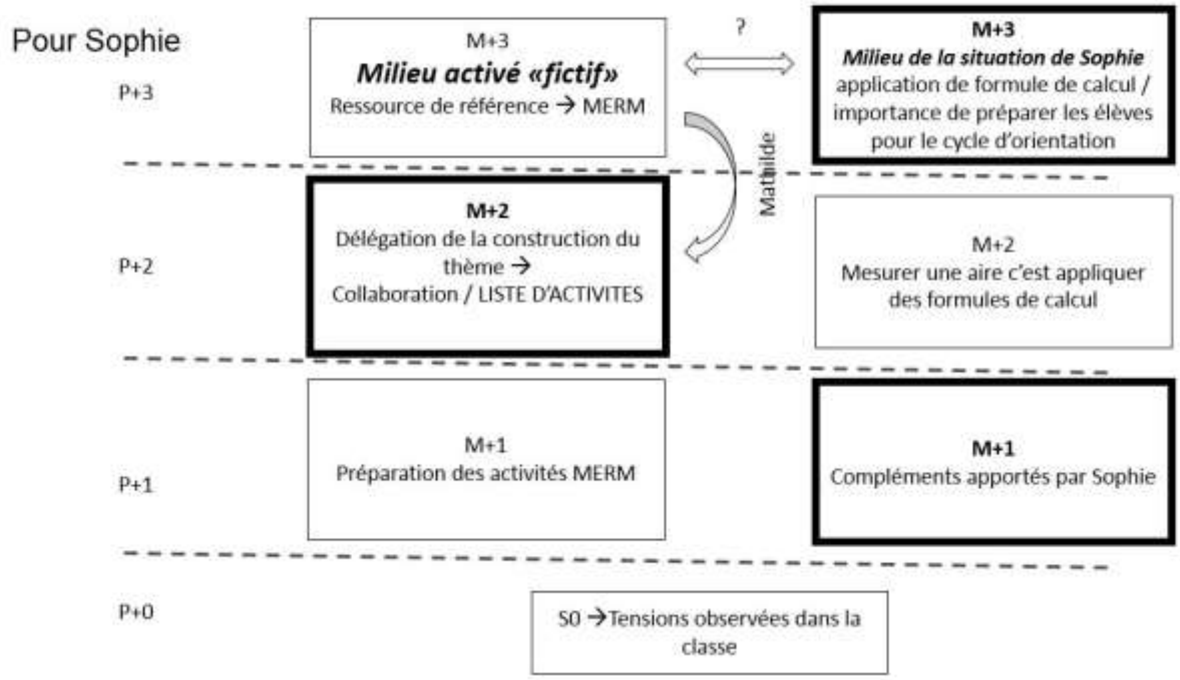


Figure 9 : Analyse a priori du point de vue du professeur pour Sophie.

L'analyse a priori du point de vue du professeur révèle, dans le cas de Sophie, une incohérence dans la descente du niveau idéologique vers la situation didactique. Comme nous l'avons mis en évidence, Mathilde explicite peu les raisons des choix qui ont été faits au niveau des *activités* et de leur organisation (niveau +2 sous représenté), ceci ne permet donc pas à Sophie d'avoir un contrôle épistémologique sur le scénario constitué. Dans cette situation, elle interagit donc avec un *milieu activé fictif*. Elle se conforme à la suite d'*activités* proposées par Mathilde, mais son projet personnel ne poursuit pas les objectifs portés par ses *activités*. De fait, comme nous l'avons mis en évidence, au fil des séances le projet va s'éloigner du projet initial. Ainsi les scénarios proposés dans les deux classes de Sophie et de Mathilde sont très différents comme l'ont montré nos analyses.
Cette incohérence se retrouve d'abord au niveau du projet global. L'analyse de l'itinéraire cognitif met, en effet, en évidence que les trois premières séances introduisent différents types de tâches et techniques de manière déconnectée. Les tensions s'observent ensuite au niveau du déroulement des séances. Comme nous l'avons montré, Sophie fait cohabiter deux projets dans la classe, en parallèle à la tâche principale, elle propose des tâches annexes qui visent des objectifs importants selon son propre projet qui ne sont pas en lien avec les *activités* des MERM choisies dans le travail de collaboration. L'avancée du projet est gérée en commun avec les élèves et nécessite des négociations afin que les élèves adhèrent au projet. Comme nous avons pu le voir, d'énormes tensions s'observent alors durant cette séance et nous avons pu montrer que ce qui pourrait être trop rapidement interprété comme uniquement dû à une pratique inadéquate de la part de Sophie est en fait la conséquence de choix qui prennent sens dans un contexte particulier, une situation très complexe dans laquelle il semble inévitable de parfois laisser exister « un milieu activé fictif », afin de pouvoir faire classe en respectant « en apparence » les attentes institutionnelles.

CONCLUSION

Les résultats de notre étude de cas permettent de décrire finement les origines des tensions qui peuvent s'observer entre la préparation et la réalisation en classe d'une séquence. Les cas de Sophie et Mathilde présentés ici montrent en effet comment, même avec une même ressource et une part de travail de préparation commune, deux enseignantes peuvent en arriver à mettre en scène des *activités* identiques de manières très différentes, ce qui va générer un travail très différent des élèves. Ce qui nous questionne plus particulièrement est le fait que cette variabilité dans les pratiques reste non explicitée voir niée au point que les enseignantes ne semblent pas conscientes de ces différences. Ceci a pour conséquence l'existence de double niveau de discours, de contradictions, de tensions que notre étude permet de mieux comprendre. En effet, modéliser ce processus grâce à la structuration du milieu et en posant la question en termes de cohérence ou non de *l'analyse descendante* nous permet de tenir compte à la fois des aspects de contexte et de la situation personnelle de chaque enseignant.
Si les MERM tiennent un rôle central dans *le milieu* avec lequel interagit chaque enseignant, que ce soit comme ressource ou comme contrainte, leur effet sur les pratiques enseignantes est complexe. Les résultats de nos analyses semblent en effet mettre en évidence une certaine distance entre ce qui est préconisé par les concepteurs des ressources, ce que les enseignants en retiennent, ce qu'ils disent à différents moments de leur activité (double niveau de discours) et finalement ce qui s'observe dans le déroulement local en classe des séquences d'enseignement. Ces observations questionnent premièrement le statut des MERM, qui sont présentés comme porteurs de « l'innovation » et de « l'harmonisation des pratiques ». Il parait

évident, en considérant nos résultats, qu'une cohérence interne et individuelle, que nous avons pu mettre en évidence grâce à *l'analyse descendante* du niveau idéologique (+3) au niveau de la situation didactique (0), semble être une condition essentielle à la possibilité de construire un projet d'enseignement cohérent. Selon nous, la question n'est donc pas de se demander si la ressource pourrait influencer les pratiques, mais plutôt de se demander de quelle manière celle-ci peut participer au développement d'une cohérence individuelle. Ceci pose d'une part la question de la formation initiale et continue et d'autre part, la question de la forme que peut prendre la ressource pour aider au développement de cette cohérence individuelle.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ARDITI, S. & DAINA, A. (2012). Manuels scolaires et pratiques des enseignants en France et en Suisse romande. *Actes du XXXIXème colloque COPIRELEM,* Quimper, 20 – 22 juin 2012.

BOSCH, M. & CHEVALLARD, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en didactique des mathématiques. 19(1),* 77-123.

BROUSSEAU, G. (1988). Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en didactique des mathématiques, 9 (3),* 309-336.

BROUSSEAU, G. (1996). L'enseignant dans la théorie des situations didactiques. In R. Noirfalise & M-J Perrin-Glorian (Ed.), *Actes de la 8ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques* (pp.3-46). IREM de Clermont-Ferrand.

CHESNAIS, A. (2009). *L'enseignement de la symétrie axiale en sixième dans des contextes différents : les pratiques de deux enseignants et les activités des élèves*. Thèse de doctorat, Université Paris Diderot (Paris 7).

CHEVALLARD, Y. (1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

COMITI C., GRENIER D. & MARGOLINAS C. (1995). Niveaux de connaissances en jeu lors d'interactions en situation de classe et modélisation de phénomènes didactiques. In G. Arsac (Eds) *Différents Types de savoirs et leurs articulations* (pp. 91-127). Grenoble : La Pensée Sauvage.

COULANGE, L. (2000). *Etude des pratiques du professeur du double point de vue écologique et économique. Cas de l'enseignement des systèmes d'équations et de la mise en équations en classe de Troisième*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier – Grenoble 1.

COULANGE, L. (2001). Enseigner les systèmes d'équations en Troisième. Une étude économique et écologique. *Recherches en didactique des mathématiques, 31(3),* 305-354.

COULANGE, L. (2012). *L'ordinaire dans l'enseignement des mathématiques. Les pratiques enseignantes et leurs effets sur les apprentissages des élèves*. Note de synthèse en vue de HDR.

DAINA, A. (2012). L'utilisation par les enseignants des ressources en mathématiques : analyse comparative des scenarios de cinq enseignants à Genève. In J-L Dorier et S. Coutat (Ed.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21ème siècle. Actes du Colloque Espace Mathématique Francophone*, http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

DAINA A. (2013). *Utilisation des ressources : de la préparation d'une séquence à sa réalisation en classe de mathématiques. Cinq études de cas sur la notion d'aire dans l'enseignement primaire genevois.* Thèse, FAPSE, Université de Genève.

DAINA, A. & DORIER J.-L. (2015). Une recherche sur l'utilisation des ressources dans le contexte de l'enseignement primaire genevois. *Actes du XXXXIIème colloque COPIRELEM*. Besançon. 17-19 juin 2015.

DAINA, A. (2017). From textbook to classroom: a research on teachers'use of pedagogical resources in the context of primary school in the French speaking part of Switzerland. *Actes du Congrès CERME10, Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.* Dublin

MARGOLINAS, C. (2002). Situations, milieux, connaissances. Analyse de l'activité du professeur. In J-L Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Ed.), *Actes de la 11ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques (pp. 141-157).* Grenoble : La Pensée Sauvage

MARGOLINAS, C. (2005). La situation du professeur et les connaissances en jeu au cours de l'activité mathématique en classe. In E. Simmt et B. Davis (Ed.). *Proceeding of the 2004 Annual Meeting of the Canadian Mathematic Study Group / Groupe canadien d'études en didactique des mathématiques* (pp.3-21).

PERRIN-GLORIAN, M.-J. (1999). Problèmes d'articulation de cadres théoriques : l'exemple du concept de milieu. *Recherches en didactique des mathématiques, 19(3),* 279-321.

RAVEL, L. (2003). *Des programmes à la classe : étude de la transposition didactique interne. Exemple de l'arithmétique en Terminale S spécialité mathématique*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier – Grenoble 1.

ROBERT, A. & ROGALSKI, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Revue Canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies, 2 (4)*, 505-528.

ROBERT, A. & VANDEBROUCK, F. (2003). Des utilisations du tableau par des professeurs de mathématiques en classe de seconde. *Recherches en didactique des mathématiques, 23(3),* 389-424.

ROBERT, A (2015). Une analyse qualitative du travail des enseignants de mathématiques du second degré en classe et pour la classe : éléments méthodologiques. In Y. Lenoir, & R. Esquivel (Ed.). *Procédures méthodologiques en acte dans l'analyse des pratiques d'enseignement : approches internationales* (T.2, pp.373-400). Longueuil : Groupéditions Éditeurs.

RODITI, E. (2005). *Les pratiques enseignantes en mathématiques, entre contraintes et liberté pédagogique*. Paris: L'Harmattan.

RODITI, E. (2008). Des pratiques enseignantes à la fois contraintes personnelles, et pourtant cohérentes. In F. Vandebrouck . *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp. 73-95). Toulouse : Octares Editions.

RODITI, E. (2010). Le développement des pratiques enseignantes en mathématiques d'un professeur d'école : une étude sur dix années d'exercice. In M. Abboud-Blanchard et A. Flückiger. *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques* (PP.201-229). Paris : Université de Paris 7.

LA DYSCALCULIE DÉVELOPPEMENTALE : BASES CÉRÉBRALES ET COGNITIVES

Flora **SCHWARTZ**

Department of Psychiatry and Behavioral Sciences, Stanford University, USA

Email: florasch@stanford.edu

Jérôme **PRADO**

Institut des Sciences Cognitives Marc Jeannerod, UMR 5304, Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS) & Université de Lyon, France

Email: jprado@isc.cnrs.fr

Résumé

L'hétérogénéité du niveau en mathématiques des élèves peut être attribuée à de multiples facteurs socio-économiques, affectifs et motivationnels. Pourtant, il est estimé que de 3% à 7% des enfants et adolescents sont confrontés à des difficultés importantes en mathématiques malgré un environnement familial et scolaire tout à fait adapté. Ces enfants sont susceptibles d'être atteints de dyscalculie, un trouble de l'apprentissage neuro-développemental se caractérisant par des difficultés importantes en mathématiques qui ne sont pas dues à un retard intellectuel ou à un déficit sensoriel. Si les causes de ce trouble sont encore méconnues, cela est en partie dû au profil hétérogène des enfants dyscalculiques, qui ne présentent ni les mêmes difficultés en mathématiques, ni les mêmes atteintes cognitives. Afin d'identifier au mieux les individus à risque et de proposer une prise en charge précoce et adaptée, les études en sciences cognitives et neurosciences se sont multipliées depuis plusieurs années. Dans cette revue, nous décrivons les déficits en mathématiques les plus fréquemment observés chez les enfants dyscalculiques et passons en revue quelques-unes des théories principales expliquant la dyscalculie.

Mots clés : dyscalculie, psychologie cognitive, neurosciences cognitives

La dyscalculie fait partie des troubles des apprentissages scolaires. Elle est définie par un retard sévère d'acquisition des mathématiques, qui n'est lié ni à un retard intellectuel, ni à un retard scolaire général, ni à un autre trouble neurologique ou psychiatrique (Kaufmann & al., 2013; von Aster & Shalev, 2007). Peu connue du grand public, la dyscalculie est souvent présentée comme le pendant de la dyslexie (ou trouble de l'acquisition de la lecture) pour les mathématiques. D'ailleurs, les questions théoriques qui se posent sur la définition de la dyslexie se posent également sur la dyscalculie. Ces questions renvoient à la spécificité des difficultés, à leur sévérité, aux éventuelles comorbidités et aux critères de diagnostic à utiliser. Dans une première partie, nous tentons d'abord de préciser ce qu'est la dyscalculie en présentant les principaux critères de diagnostic et leur variabilité. Nous décrivons ensuite les difficultés en mathématiques rencontrées par les dyscalculiques, puis les déficits cognitifs associés à ce trouble de l'apprentissage. Dans une seconde partie, nous discutons de quelques-unes des principales théories cherchant à expliquer les causes de la dyscalculie.

I. QU’EST-CE QUE LA DYSCALCULIE ?

1. Prévalence, critères de diagnostic et comorbidités

La prévalence de la dyscalculie serait comprise entre 3 et 7%, avec un taux variant de 1 à 10% selon les études démographiques (Devine et al., 2013). Cette variabilité est due à la divergence des critères utilisés pour caractériser un individu comme « dyscalculique ».

Un premier critère essentiel pour identifier la dyscalculie est bien entendu la sévérité des difficultés en mathématiques. Pourtant, il n’existe pas de consensus quant au seuil statistique à appliquer, ni quant à la nature des troubles à observer. Par exemple, les études démographiques considèrent comme seuil pathologique un score en mathématiques qui peut aller du 3ème (Desoete & al., 2004) au 15ème centile (Barbaresi & al., 2005; Dirks & al., 2008). Certaines études estiment que la dyscalculie se caractérise par un retard en mathématiques d’au moins 2 ans rapport aux enfants de même niveau scolaire (Gross-Tsur et al., 1996). Par ailleurs, les troubles ne doivent pas être transitoires mais doivent au contraire persister dans le temps (Mazzocco & Myers, 2003) voire se maintenir après une remédiation (Desoete & al., 2004). Aussi, la nature des tests à effectuer pose question. Faut-il utiliser des tests scolaires, impliquant plusieurs compétences ? Faut-il privilégier des tests de compétences numériques élémentaires (Kaufmann & al., 2013)? En tout cas, le choix des tests de mathématiques influence l’identification des dyscalculiques puisque différentes compétences seront mesurées. L’influence du test utilisé pour le diagnostic dépend en plus du stade développemental (Mazzocco & Myers, 2003). Les différences individuelles sont susceptibles de s’effacer lorsque le test choisi cible des capacités mathématiques précoces, qui auront été acquises par les dyscalculiques. Pour finir, une anxiété aux mathématiques chez certains individus (Ashcraft & Kirk, 2001) risque de dégrader leur performance dans une situation de test, alors que leurs capacités à manipuler les nombres seraient tout à fait dans la norme.

Deuxièmement, puisque la dyscalculie n’est pas sensée venir d’un retard mental, les capacités intellectuelles devraient être prises en compte dans la définition de ce trouble. Notamment, le Quotient Intellectuel (QI) devrait être dans la norme. Il a même été suggéré qu’un écart conséquent entre le QI et le score standardisé en mathématiques constituerait un des critères de diagnostic. Certaines études épidémiologiques qui ont ainsi pris en compte cet écart entre les compétences en mathématiques et le QI global (Barbaresi & al., 2005) ou le QI non-verbal (Lewis et al., 1994) reportent une prévalence de 1,3 à 10%. Cependant, l’importance de cet écart entre QI et niveau en mathématiques a été remise en cause (Mazzocco & Myers, 2003) puisqu’il ne permettrait pas d’identifier de façon plus fiable les individus dyscalculiques. Certains enfants ne présentant pas d’écart entre QI et score en mathématiques sont susceptibles de présenter des troubles en mathématiques aussi pénalisants que les enfants montrant un écart entre QI et score en mathématiques. Ainsi, il serait bénéfique d’utiliser des mesures complémentaires pour détecter la dyscalculie (Mazzocco & Räsänen, 2013).

Une mesure supplémentaire s’avère être le niveau en lecture, qui est souvent testé dans les études de prévalence. Toutefois, les capacités de lecture sont fortement corrélées au niveau en mathématiques (Bull & Scerif, 2001; Devine & al., 2013). D’ailleurs, une proportion importante de dyscalculiques présenterait un retard en lecture (Lewis & al., 1994; Ostad, 1998). Plus précisément, environ la moitié des dyscalculiques présenterait également une dyslexie (Lewis & al., 1994; Ostad, 1998). Un autre trouble fréquemment associé à la dyscalculie est le trouble du déficit de l'attention avec hyperactivité (TDAH), qui pourrait toucher jusqu'à 25% des dyscalculiques (Gross-Tsur & al., 1996). La présence de ces comorbidités représente un enjeu supplémentaire pour le diagnostic de la dyscalculie. En effet, ces comorbidités peuvent rendre la dyscalculie plus difficile à détecter (von Aster & Shalev, 2007). Au contraire, les comorbidités peuvent avoir un effet additif sur les difficultés en mathématiques. Il a été montré que les enfants présentant à la fois une dyscalculie et une dyslexie réussissaient moins bien certaines tâches mathématiques que les « dyscalculiques purs » (von Aster & Shalev, 2007).

Enfin, on peut se demander si les différences culturelles (notamment linguistiques) et le sexe des individus ont un impact sur la prévalence. Cependant, cela ne semble pas être le cas. En effet, plusieurs études ont montré que la dyscalculie toucherait les garçons autant que les filles (Devine & al., 2013; Gross-Tsur & al., 1996; Koumoula & al., 2004). Aussi, une prévalence comparable d'environ 5% a été reportée à travers différents pays avec différentes langues, d'Israël (Gross-Tsur & al., 1996) aux Etats-Unis (Mazzocco & Myers, 2003), en passant par la Grèce (Koumoula & al., 2004), les Pays-Bas (Dirks & al., 2008) et la Belgique (Desoete & al., 2004).

Une meilleure caractérisation de la dyscalculie nécessiterait donc de tester plusieurs compétences mathématiques et leur évolution dans le temps, d'écarter l'anxiété en mathématiques comme principale source de difficulté, de vérifier la présence de comorbidité et d'évaluer les capacités cognitives générales.

2. Les difficultés en mathématiques dans la dyscalculie

Les mathématiques font appel à un large ensemble de compétences, dont certaines sont plus importantes que d'autres à un âge donné. La connaissance du nombre comporte elle-même plusieurs concepts à acquérir, notamment la cardinalité et l'ordinalité, ainsi que plusieurs notations à maîtriser, des entiers naturels aux nombres décimaux et fractions. Apprendre la correspondance entre une quantité numérique, un chiffre arabe et un mot-nombre est déjà un premier défi. Maîtriser l'arithmétique et les notions de base de géométrie sont d'autres défis de l'école primaire. Extraire les informations numériques pertinentes d'un énoncé est une compétence supplémentaire à développer. Toutes ces compétences peuvent être atteintes chez les dyscalculiques. Nous présentons ici les difficultés en mathématiques les plus fréquemment observées chez les dyscalculiques, en gardant à l'esprit que la définition de la dyscalculie varie en fonction des études expérimentales et que les dyscalculiques peuvent également présenter des déficits cognitifs plus généraux (par exemple en mémoire de travail). Nous commençons par les déficits observés lors d'activités numériques non-symboliques, avant d'évoquer les difficultés à maîtriser le comptage et les différentes notations numériques, puis les retards d'acquisition de l'arithmétique.

Représentation non-symbolique des nombres

Les activités numériques non symboliques renvoient à l'estimation et à la manipulation de nombres présentés sous forme de nuages de points ou de collections d'objets, voire de séquence de sons. Une tâche très fréquemment utilisée par les psychologues et neuroscientifiques consiste à comparer deux quantités numériques présentées simultanément ou successivement, ou à estimer la quantité numérique présentée. Les très petits nombres (de 1 à 4) sont généralement étudiés séparément des plus grands nombres puisque leur traitement serait qualitativement différent (Feigenson & al., 2004). En effet, l'être humain aurait une représentation exacte des nombres inférieurs à 4 (le comptage ne serait pas nécessaire). A l’inverse, la représentation des quantités supérieures à 4 est considérée approximative (Feigenson & al., 2004).

D’une part, la représentation approximative des quantités numériques a été largement étudiée chez les dyscalculiques, notamment par des tâches de comparaison. La difficulté de ce type de tâches (illustré par la Figure 1) dépend à la fois de la distance entre les deux quantités et de leur taille. En effet, plus les quantités sont « proches », plus la comparaison est difficile. Par exemple, il est plus difficile de comparer 24 à 28 points que de comparer 24 à 48 points. Mais il est également plus difficile de comparer deux quantités de grande taille que de petite taille. Ainsi, il est plus difficile de comparer 44 à 48 points que 24 à 28 points (même si la distance entre les deux quantités est égale). Ces effets de « distance » et de « taille » peuvent être calculés pour le temps de réponse et le taux de réponses correctes de chaque participant. Il est également possible de combiner ces effets. En effet, plus les deux quantités à comparer augmentent, plus la différence entre ces deux quantités doit augmenter pour qu’elles puissent être distinguées. L’écart minimal nécessaire à la comparaison de deux quantités est variable d’un individu à l’autre et se nomme « l’acuité numérique ». L’acuité numérique obéit à la loi de Weber (van Oeffelen & Vos, 1982), qui postule que la différence de sensibilité sensorielle entre deux stimuli de même type dépend de leur rapport, plus que de leur valeur absolue (Fechner, 1966). L’acuité numérique s’exprime sous forme de fraction ou de nombre décimal (la fraction de weber) obtenue en divisant la différence entre les 2 nombres comparés par le plus petit nombre. Plus l’acuité numérique est élevée, plus l’individu est capable de discriminer des rapports proches de 1. Un déficit de représentation des quantités non-symboliques dans la dyscalculie est suggéré par plusieurs études, mais n’a pas toujours été répliqué. Ainsi, quelques études ont montré que les dyscalculiques auraient une acuité numérique plus faible que les enfants neurotypiques (Mazzocco, Feigenson & Halberda, 2011; Piazza & al., 2010). Les dyscalculiques auraient également un effet de distance plus marqué que les neurotypiques (Mejias & al., 2012; Mussolin, Mejias & Noël, 2010; Price & al., 2007) : la différence de performance entre les comparaisons faciles et difficiles serait plus conséquente. En effet, ils auraient besoin de plus de temps pour les comparaisons difficiles que les neurotypiques. Deux autres études reportent aussi un temps de réponse moyen plus long chez les dyscalculiques (Kucian & al., 2011; Landerl, 2013). En revanche, d’autres travaux n’ont pas trouvé de différences entre tout-venants et dyscalculiques au niveau de la représentation des quantités non-symboliques (De Smedt & Gilmore, 2011; Landerl & Kölle, 2009; Rousselle & Noël, 2007)

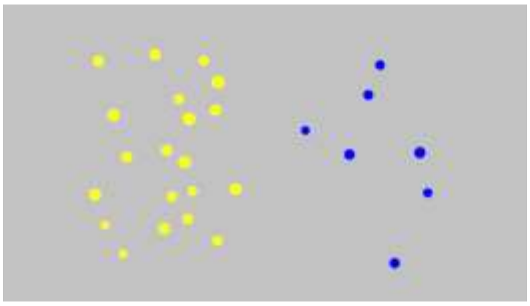


Figure 1 : Tâche typique de comparaison non-symbolique. Le participant doit juger s’il y a plus de points jaunes ou de points bleus.

D’autre part, la reconnaissance exacte des quantités de 1 à 4, appelée « subitizing », a aussi été documentée chez les dyscalculiques. Cette capacité très précoce serait affectée chez les dyscalculiques, qui seraient plus lents à distinguer les petits nombres (Landerl, 2013; Schleifer & Landerl, 2011) et montreraient même un effet de distance (Ashkenazi & al., 2013; Landerl, 2013). Par exemple, reconnaître la quantité 4 serait plus long que reconnaître la quantité 2. A l'inverse, une telle différence est réduite voire inexistante chez les enfants contrôles, qui distinguent aussi rapidement 2 que 4. La latence observée chez les dyscalculiques par rapport aux individus de même âge pourrait venir d'une exploration visuelle moins efficace, comme suggéré par Ashkenazi et al. (2013) et par une étude de cas en eye-tracking (Moeller & al., 2009). Cependant une autre étude récente n'a pas montré de difficulté de subitizing chez les dyscalculiques (Szucs & al., 2013).

En somme, la représentation des quantités non-symboliques semble être une des difficultés associée à la dyscalculie. Ce déficit est toutefois plus controversé que la représentation des quantités symboliques et pourrait dépendre de l'âge des enfants testés (Noël & Rousselle, 2011).

Représentation symbolique des nombres

La maîtrise des mathématiques passe par l'association d'une quantité numérique donnée à un symbole (mot-nombre ou chiffre arabe). Il faut aussi comprendre la correspondance entre différents formats de notation. Le passage d'un format à un autre, ou transcodage, est essentiel à la compréhension du système numérique (Seron & Fayol, 1994). Le système numérique indo-arabe que nous utilisons fonctionne avec un système positionnel en « base 10 » : 10 unités forment une dizaine, 10 dizaines forment une centaine, etc. En d'autres termes, il faut 10 éléments d'un niveau hiérarchique pour passer au niveau hiérarchique suivant. Les différents niveaux hiérarchiques sont notés dans un ordre précis : par exemple, pour « 267 », les unités sont notées à droite du nombre et les centaines à gauches. Ces structures enchâssées rappellent que les mathématiques comportent une dimension syntaxique qui nécessite un apprentissage rigoureux. Les dyscalculiques montreraient un retard dans la maîtrise de cette syntaxe numérique. Ils auraient plus de difficulté à nommer un chiffre arabe présenté (Landerl & al., 2004), ou à écrire un chiffre dicté (**Figure 2**), ainsi qu'à manipuler des nombres à plusieurs chiffres (Andersson, 2010). A un niveau scolaire plus avancé, les dyscalculiques auraient plus de difficulté à lire un nombre décimal et à identifier un nombre rationnel (Mazzocco & Devlin, 2008). Ce retard d'acquisition du système numérique est en lien avec leurs difficultés à comprendre le système positionnel (Andersson, 2010).

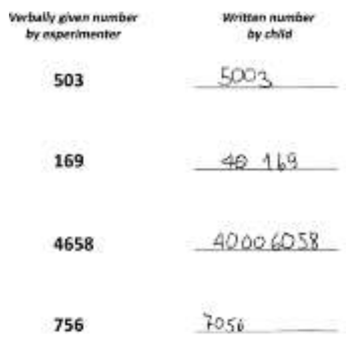


Figure 2 : Exemple d'erreurs commises par un enfant dyscalculique lors d'une dictée de nombres. Le système positionnel n'est que partiellement acquis. (Reproduit à partir de Kucian & von Aster, 2015).

Une maîtrise moins efficace du code associé à chaque quantité numérique devrait (sans surprise) entraîner des difficultés à comparer des nombres présentés sous un format donné. La méthode utilisée pour évaluer cette compétence est la même que celle employée pour les comparaisons non-symboliques. La plupart des études ont montré que la comparaison de nombres sous forme symbolique était plus lente chez les dyscalculiques, aussi bien pour les nombres à un chiffre (De Smedt & Gilmore, 2011; Iuculano & al., 2008; Landerl & al., 2009, 2004; Landerl & Kölle, 2009; Rousselle & Noël, 2007) que pour les nombres à plusieurs chiffres (Landerl & al., 2009; Landerl & Kölle, 2009). L'effet de distance serait également plus marqué chez les enfants dyscalculiques (Ashkenazi, Rubinsten & Henik, 2009; Mussolin, Mejias & Noël, 2010).

Contrairement aux enfants tout-venant, les symboles numériques ne semblent pas non plus évoquer d'intuitions spatiales spécifiques chez les enfants dyscalculiques. En effet, les recherches en psychologie cognitive montrent que les nombres sont généralement associés à un côté ou un autre de l'espace mental selon leur valeur, aussi bien chez l'adulte (Dehaene, Bossini & Giraux, 1993) que chez l'enfant (Berch & al., 1999; Yang & al., 2014). Cette relation est connue sous le nom d'effet « SNARC » (Spatial-Numerical Association of Response Code). Elle est initialement basée sur une différence de temps de réaction lorsque les participants jugent la parité d'un nombre. Plus précisément, le temps de réponse des participants pour les petits nombres est dans l'ensemble plus rapide avec la main gauche qu'avec la main droite. A l'inverse, le temps de réponse pour les grands nombres est dans l'ensemble plus rapide avec la main droite qu'avec la main gauche. Il existe un autre marqueur de ce lien nombres-espace chez l'enfant. Au cours du développement, les enfants apprennent normalement à représenter les nombres sur un espace mental, appelé ligne numérique mentale (Dehaene, 1997). Ceci est généralement testé en demandant à l'enfant de placer un nombre sur une ligne dont les extrémités gauche et droite sont notées respectivement 0 et 100. Au début de l'apprentissage des mathématiques, une partie disproportionnée de la ligne serait occupée par les petits nombres, tandis que les grands nombres seraient compressés à l'extrémité droite de la ligne. Cette représentation s'affine progressivement en fin d'école maternelle et début d'école primaire de sorte que la distance numérique devient proportionnelle à la distance spatiale entre les symboles de la ligne numérique mentale. Le degré de linéarisation de la ligne numérique mentale serait un prédicteur essentiel de l'apprentissage des mathématiques en début d'école primaire (Booth & Siegler, 2006; Gunderson & al., 2012). Ces associations des symboles numériques avec l'espace seraient notamment atteintes chez les dyscalculiques. En premier lieu, les enfants dyscalculiques ne présenteraient pas d'effet SNARC (Bachot et al., 2005). Ensuite, les dyscalculiques présenteraient une ligne numérique mentale immature (Geary & al., 2007 ; Geary & al., 2008).

La manipulation des symboles numériques est donc limitée chez les dyscalculiques, qu'il s'agisse de l'association entre nombres et espace ou du passage d'un format numérique à un autre. Ces différentes anomalies de représentation des nombres se répercutent sur l'apprentissage de l'arithmétique et des notions mathématiques plus complexes.

Apprentissage des faits et procédures arithmétiques

L'apprentissage de l'arithmétique est un des piliers de l'école primaire et mobilise de nombreuses compétences. Une maîtrise solide de l'arithmétique requiert non seulement une exécution sans faille des procédures de calcul, mais aussi une mémorisation de certains faits, de bonnes connaissances conceptuelles et des capacités de résolution de problème (Dowker, 2005). Différentes études ont montré les limites des dyscalculiques dans un ou plusieurs de ces aspects de l'arithmétique.Pour résoudre une opération arithmétique simple comme « 4 + 3 », un large panel de stratégies peut être utilisé (Baroody & Ginsburg, 1986). Il est généralement admis qu'au début de l'apprentissage de l'arithmétique, les enfants ont recours au comptage. Une première stratégie observée à l'école maternelle, le « comptage du tout » consiste à dénombrer les deux opérandes 4 et 3 séparément. Chaque opérande peut être matérialisé par une collection d'objets ou par ses doigts. Ainsi, l'enfant va réciter la séquence numérique en partant de 1 jusqu'à atteindre le cardinal du premier opérande, puis répéter cela pour le second opérande. Pour finir, l'enfant va dénombrer l'ensemble formé par les deux opérandes. Des stratégies de plus en plus efficaces vont rapidement se développer après 5 ans (Carpenter & Moser, 1984; Groen & Parkman, 1972). Par exemple, l'enfant ne comptera qu'à partir du premier terme, jusqu'au résultat. Puis l'enfant choisira de compter à partir du plus grand terme, ce qui lui fera gagner du temps. Enfin, le comptage sur les doigts s'efface progressivement (Carpenter & Moser, 1984) tandis que le recours à la décomposition va également être observé en milieu de primaire (Russell & Ginsburg, 1984). Par exemple, pour calculer « 6 + 7 » alors qu'il connait le résultat de « 6 + 6 », l'enfant va transformer l'opération en « 6 + 6 + 1 ». Ce raccourci permet d'ajouter simplement une unité à un résultat déjà mémorisé. Les stratégies plus rapides vont remplacer progressivement les stratégies élémentaires. Le calcul va donc s'automatiser avec la pratique chez la majorité des élèves d'école primaire. La stratégie considérée comme la plus optimale consiste à récupérer en mémoire le résultat d'opérations (Ashcraft & Fierman, 1982). Ainsi, il est généralement admis que vers l'âge de 10 ans, les enfants récupèrent en mémoire le résultat des opérations simples. Les faits arithmétiques mémorisés formeraient un réseau, dont les éléments seraient plus ou moins fortement associés selon leur proximité sémantique (Ashcraft, 1992).

En revanche, les enfants dyscalculiques continueront souvent à avoir recours à des stratégies immatures pour résoudre les opérations simples. Par exemple, ils continueront à compter sur leurs doigts plus longtemps que leurs pairs (Geary & al., 2000). La stratégie consistant à dénombrer l'ensemble des opérandes est également davantage utilisée (Geary, 2011), alors que la décomposition est moins souvent utilisée (Hanich & al., 2001).

Dans l'ensemble, ces différences de stratégies de résolution chez les dyscalculiques sont associées à des temps de réponse plus longs et/ou à des erreurs plus nombreuses lors de l'exécution des procédures de calcul (Andersson, 2010; Geary, Brown & Samaranayake, 1991; Jordan, Hanich & Kaplan, 2003), y compris lorsque les opérations arithmétiques sont présentées sous forme d'énoncé (Jordan & al., 2003; Jordan & Montani, 1997; Ostad, 1998). L'exécution imprécise des procédures est à mettre en lien avec une connaissance conceptuelle plus faible. En particulier, les dyscalculiques ont une moins bonne maîtrise des principes arithmétiques tels que la commutativité et l'inversion (Andersson, 2010; Jordan et al., 2003). La commutativité désigne le fait que la position des opérandes n'a pas d'influence sur le résultat de l'addition ou de la multiplication (par exemple, « 8 + 7 = 7 + 8 »). L'inversion renvoie à la relation complémentaire entre les opérations, notamment entre l'addition et la soustraction (par exemple, si « 7 + 3 = 10 » alors « 10 - 3 = 7 »). Une compréhension limitée de ces principes arithmétiques peut expliquer un manque d'automatisation des procédures.

Lorsque la stratégie la plus automatisée, à savoir la récupération en mémoire, est utilisée, elle s'avère moins efficace chez les dyscalculiques (Barrouillet, Fayol & Lathulière, 1997; Geary, Hamson & Hoard, 2000; Geary, Brown & Samaranayake, 1991; Russell & Ginsburg, 1984). En particulier, le réseau de faits arithmétiques serait plus sensible aux interférences (Barrouillet & al., 1997). Ceci est suggéré par l'analyse des erreurs commises par exemple lors de la resolution de multiplications (qui reposent généralement sur un apprentissage par cœur) ou d'additions. Les réponses incorrectes proviennent souvent de la table de l'un des opérandes. Par exemple, lors de la résolution de « 8 x 7 », une erreur fréquente est de répondre « 48 », un produit de la table de 8. De même, lors de la résolution de « 3 + 4 », le produit de « 3 x 4 » serait parfois récupéré. Les dyscalculiques seraient plus sujets à ces intrusions lors de la résolution de multiplications (Barrouillet & al., 1997) et d'additions (Geary & al., 2000).

Enfin, si les dyscalculiques montrent des performances nettement inférieures pour les opérations simples, c'est sans surprise également le cas pour les opérations complexes

(Andersson, 2010; Jordan & al., 2003; Russell & Ginsburg, 1984) sur des nombres à plusieurs chiffres ou sur des nombres décimaux. Les erreurs sont susceptibles de venir d'une mauvaise compréhension du système positionnel, entraînant une erreur de placement des nombres lors d'un calcul posé. La **Figure 3** illustre la résolution par un enfant dyscalculique de 11 ans (testé au laboratoire) d'une addition de 3 termes, dont deux nombres décimaux (« 2,50 + 3,25 + 5 = ? »). Ce participant commet l'erreur de placer le dernier terme entier dans une colonne correspondant aux décimales. Son erreur de positionnement le conduit à conclure que « 2,50 + 3,25 + 5 = 5,80 ».

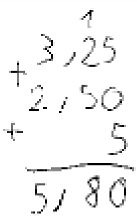


Figure 3 : Exemple de calcul posé par un enfant dyscalculique de 11 ans.

Nous venons de résumer un ensemble de difficultés procédurales, factuelles et conceptuelles rencontrées par les enfants dyscalculiques en mathématiques. Plusieurs études suggèrent un défaut de traitement des quantités non-symboliques (Mazzocco, Feigenson & Halberda, 2011; Piazza & al., 2010), alors que d'autres soulignent davantage le déficit de représentation des quantités symboliques (Rousselle & Noël, 2007). La nature des difficultés en mathématiques et le degré d'atteinte d'une compétence peut donc varier d'un individu à l'autre.

II. LES CAUSES HYPOTHÉTIQUES DE LA DYSCALCULIE

A l'heure actuelle, plusieurs théories proposent d'expliquer les causes de la dyscalculie en combinant des données comportementales et de neuro-imagerie. Nous commençons par présenter une théorie très populaire selon laquelle la dyscalculie serait due à une atteinte spécifique du sens du nombre (Piazza & al., 2010; Wilson & Dehaene, 2007; Butterworth, 2005), puis nous verrons que la dyscalculie pourrait aussi venir d'une incapacité à associer une grandeur numérique à un symbole (Noël & Rousselle 2011). Ces deux hypothèses impliquent que la dyscalculie serait liée à un déficit primaire et spécifique. Nous présentons ensuite quelques théories qui soutiennent que les difficultés mathématiques des dyscalculiques sont causées par des atteintes cognitives plus générales. Celles-ci incluent des troubles visuo-spatiaux (Rourke, 1993; Szucs & al., 2013) ainsi qu'un déficit de ressources attentionnelles et de mémoire de travail (Ashkenazi & Henik 2010; De Visscher & Noël 2013).

1. Un déficit spécifique

Un déficit du sens du nombre

Peut-être l'une des hypothèses parmi les plus populaires postule que la dyscalculie serait liée à une anomalie cérébrale affectant spécifiquement le traitement des quantités numériques non-symboliques. Plus précisément, un dysfonctionnement d'une région cérébrale appelée sillon intra-pariétal (IPS) qui entraînerait des difficultés à reconnaître les quantités numériques non-symboliques, ce qui empêcherait l'acquisition des mathématiques symboliques (Butterworth, 2005; Piazza & al., 2010; Wilson & Dehaene, 2007). Cette hypothèse découle des théories dites du « sens du nombre » (Stanislas Dehaene, 1997; Feigenson & al., 2004) postulant que la représentation des quantités numériques serait une capacité innée, ou en tout cas extrêmement précoce sur le plan du développement. Il est important de noter que les théories diffèrent quant à la définition de « sens du nombre ». Pour certaines, ce « sens du nombre » fait référence à la capacité à traiter et comparer des quantités numériques non-symboliques approximatives (Feigenson & al., 2004). D'autres auteurs définissent le « sens du nombre » comme la capacité à représenter la quantité exacte dans un ensemble (Butterworth, 2005). D'autres encore font la distinction entre les petites quantités exactes et les quantités approximatives (Feigenson & al., 2004) qui seraient traitées selon deux processus distincts, respectivement le subitizing et le système numérique approximatif. Dans tous les cas, ces théories reposent sur l'idée que la faculté à reconnaître les quantités numériques serait très ancienne au niveau de l'évolution. Cette capacité serait partagée par de nombreuses espèces animales, dont les primates non-humains (Brannon & Terrace, 2000), les oiseaux (Brannon et al., 2001), jusqu'aux invertébrés comme les poissons (Agrillo & al., 2009) et les abeilles (Gross et al., 2009). Chez l'homme, les mécanismes de traitement numérique semblent présents dès la naissance (Izard, Sann, Spelke & Streri, 2009). Les bébés seraient capables de subitizing (Wynn, 1992), et pourraient également détecter une différence entre des quantités numériques approximatives (Izard & al., 2009; Xu & Spelke, 2000) et effectuer des opérations approximatives (McCrink & Wynn, 2004). Ces observations comportementales suggèrent que les substrats cérébraux du sens du nombre ont été conservés au cours de l'évolution (Stanislas Dehaene, 1997). En effet, l'implication de l'IPS dans le traitement des nombres a été montrée chez le singe (Nieder & Miller, 2004). Des enregistrements électrophysiologiques ont révélé que des neurones de l'IPS répondent préférentiellement à une quantité numérique donnée. Plus la quantité présentée s'éloigne de la quantité préférée, moins le neurone décharge (Nieder & Miller, 2004). La représentation des quantités numériques viendrait de l'intégration des signaux émis par les différentes populations de neurones sensibles aux différentes quantités numériques. Plus des quantités numériques à comparer seraient éloignées, plus les populations de neurones répondant à chaque quantité seraient distinctes (Dehaene & Changeux, 1993), ce qui faciliterait la comparaison. Chez l'homme, l'IPS répond de la même manière aux différences de quantités numériques (Piazza & al., 2004). La réponse de l'IPS aux quantités numériques s'observe aussi bien dans des conditions passives (Cantlon & al., 2006; Piazza & al., 2004) qu'actives (Dehaene & al., 1999), quel que soit le format des nombres (Pinel et al., 2001) et quelle que soit la modalité de présentation (Eger & al., 2003). De plus, les structures cérébrales impliquées dans le sens du nombre chez l'adulte sont les mêmes chez l'enfant de 4 ans (Cantlon & al., 2006) et chez le bébé de 3 mois (Izard & al., 2008).

Même si les théories du « sens du nombre » postulent que les mécanismes de traitement des quantités numériques sont présents dès la naissance, ces théories ne voient pas ce « sens du nombre » comme une capacité figée. Ainsi, l'acuité numérique (la capacité à différencier des quantités numériques) s'affinerait rapidement au cours des premières années (Halberda & Feigenson, 2008). Alors que le nouveau-né serait sensible à une différence de quantités de 1:3 (Izard & al., 2009), le bébé de 6 mois serait sensible à une différence de 1:2 et le bébé de 9 mois détecterait une différence de 2:3 (Lipton and Spelke, 2003). L'acuité numérique continuerait à progresser au début de l'enfance pour atteindre 3:4 à 3 ans et 5:6 à 5-6 ans (Halberda & Feigenson, 2008). Chez l'adulte, l'acuité numérique serait d'environ 7:8 en moyenne (Barth, Kanwisher & Spelke, 2003) mais pourrait varier de 5:6 à 9:10 selon les individus (Pica, 2004). Les différences inter-individuelles d'acuité numérique chez l'adulte se retrouvent par ailleurs dès le plus jeune âge et seraient relativement stables au cours du développement. Il a par exemple été observé que les bébés disposant d'une moins bonne acuité numérique à 6 mois étaient ceux qui montraient la moins bonne acuité numérique à 9 mois. De telles différences d'acuité numérique pourraient en partie être innées, et dans le même temps liées à un rythme de développement différent (Piazza & al., 2010). Dans tous les cas, les théories du « sens du nombre » soutiennent que la précision avec laquelle les quantités numériques sont représentées chez le jeune enfant serait essentielle à l'acquisition des symboles numériques (Butterworth, 2005; Libertus, Feigenson & Halberda, 2011; Piazza & al., 2010). L'acuité numérique serait effectivement un prédicteur de la réussite en mathématiques à différents stades ontogéniques. Par exemple, la capacité à discriminer des quantités approximatives à 4 ans est corrélée au niveau en mathématiques à 6 ans. Aussi, l'acuité numérique à 14 ans est corrélée à la réussite arithmétique des mêmes individus à 8 ans (Halberda & al., 2008). Cette corrélation positive entre précision du sens du nombre et niveau en mathématiques se maintient même chez l'adulte (Lourenco & al., 2012). A l'extrémité du continuum, plusieurs travaux présentés au chapitre précédent ont montré un déficit d'acuité numérique ou plus globalement un déficit du sens du nombre chez les dyscalculiques (Landerl & al., 2009; Mussolin, Mejias & Noël, 2010; Piazza & al., 2010). Par exemple, Piazza et collègues (2010) ont montré que des enfants dyscalculiques de 10 ans présentaient l'acuité numérique attendue à 5 ans. Il a donc été suggéré que c'est un dysfonctionnement du sens du nombre qui retarderait l'association entre un symbole et sa grandeur numérique chez les dyscalculiques et compliquerait l'acquisition des mathématiques symboliques.

Quelques études de neuro-imagerie ont examiné l'intégrité des substrats cérébraux du « sens du nombre » chez les dyscalculiques. Premièrement, l'IPS présente des atteintes structurales chez ces individus (Rotzer & al., 2008). Au niveau fonctionnel, l'IPS est moins sensible aux variations de quantités numériques chez les dyscalculiques (Mussolin, Mejias & Noël, 2010; Price & al., 2007) et son activité est réduite lors du calcul approximatif (Kucian & al., 2006). Ces quelques études soutiennent l'hypothèse d'une atteinte cérébrale affectant le traitement des quantités numériques dans la dyscalculie.

Les théories du déficit du « sens du nombre » ont donc été appuyées par des données empiriques variées. Cependant, le déficit de représentation des quantités numériques chez les dyscalculiques n'a pas toujours été mis en évidence dans le cas de quantités non-symboliques et s'avère au contraire plus robuste dans le cas de quantités symboliques (De Smedt & al., 2013). Une cause de la dyscalculie pourrait alors être un déficit de représentation des quantités numériques à partir des symboles. L'hypothèse a été nommée « *access-deficit* » ou « déficit d'accès aux quantités numériques » (Rousselle & Noël, 2007).

Un déficit d'accès aux quantités numériques à partir des symboles

Si la précision du système numérique approximatif est un prédicteur de la réussite en mathématiques au cours de la scolarité, les compétences symboliques compteraient davantage (Holloway & Ansari, 2009; Lyons & al., 2014). Une des principales caractéristiques de la dyscalculie est la difficulté à manipuler les symboles numériques, par exemple lors de simples comparaisons ou lors de l'exécution d'un calcul (Geary, Brown & Samaranayake, 1991). D'ailleurs, plusieurs études comportementales ont souligné des difficultés à comparer des nombres sous forme symbolique chez les dyscalculiques en l'absence de déficit de comparaison de nombres sous forme non-symbolique (De Smedt & Gilmore, 2011; Iuculano & al., 2008; Landerl & Kölle, 2009; Rousselle & Noël, 2007). Plus précisément, les difficultés symboliques seraient observées plus tôt que les difficultés à manipuler les quantités numériques approximatives, qui n'émergeraient que vers 9-10 ans (De Smedt & al., 2013). Pour certains chercheurs, cette dissociation suggère que la dyscalculie serait due à un déficit d'accès aux quantités numériques associées aux symboles (Noël & Rousselle, 2011; Rousselle

& Noël, 2007). Pour mieux comprendre cette hypothèse, il faut tout d'abord préciser que la représentation exacte des quantités numériques serait construite, contrairement à la représentation approximative. La signification des premiers adjectifs cardinaux s'acquiert progressivement et successivement (Carey, 2004). Par exemple, l'enfant doit d'abord comprendre que le mot « deux » de la comptine orale correspond uniquement à la cardinalité 2, pour ensuite maîtriser le concept « trois » et comprendre que le mot « trois » renvoie à une unité de plus que le mot « deux ». A un moment du développement, l'enfant réalise qu'il faut ajouter une unité à une cardinalité connue pour atteindre le mot suivant de la comptine numérique (Carey, 2004). La confrontation aux adjectifs cardinaux et symboles numériques permettrait donc l'acquisition d'une représentation exacte des nombres. Les grandeurs numériques sont même automatiquement associées à leur symbole chez les enfants contrôles à l'école primaire (Rubinsten & al., 2002). Or, cette association ne serait pas automatisée chez les dyscalculiques. Quelques travaux ont en effet montré que les adultes dyscalculiques n'accédaient pas automatiquement à la représentation non-symbolique à partir des chiffres arabes. Les participants de ces études devaient réaliser une tâche de Stroop numérique consistant à comparer des chiffres arabes. Le chiffre ayant la plus grande valeur était affiché soit en caractère plus petit que le chiffre ayant la plus petite valeur (5 7), soit en caractère plus grand (5 7). Les participants devaient juger soit la taille physique soit la valeur numérique. En d'autres termes, la quantité numérique interagissait avec un aspect perceptif (facilitation ou interférence). Au contraire des participants contrôles, les adultes dyscalculiques ne montraient pas d'effet d'interférence avec la grandeur numérique lors de la comparaison de taille physique. Ainsi, la présentation d'un chiffre de plus petite valeur en caractère plus grand n'augmentait pas le temps de réaction comme chez les participants contrôles (Ashkenazi, Rubinsten & Henik, 2009; Rubinsten & Henik, 2005). Cela indique que, au contraire des participants contrôles, les dyscalculiques n'accèdent pas automatiquement à la représentation numérique dans cette tâche. Ce résultat suggère un déficit de traitement automatique des symboles numériques et appuie l'hypothèse d'un déficit d'accès aux grandeurs numériques. Des données de neuro-imagerie récentes rejoignent en partie cette théorie en laissant penser que la dyscalculie serait un « syndrome de déconnexion » (Jolles & al., 2016). Les auteurs ont en effet montré une atteinte de la connectivité fonctionnelle entre l'IPS et de nombreuses autres régions cérébrales chez les enfants dyscalculiques, suggérant que le traitement des quantités non-symboliques serait mal synchronisé avec les autres processus (notamment linguistiques) impliqués dans l'arithmétique (Jolles & al., 2016). Ces résultats sont notamment en accord avec le modèle du triple-code selon lequel, chez l'adulte, la représentation analogique des quantités numériques (e.g., ∴) serait connectée à une représentation verbale (e.g., « trois ») et à une représentation visuelle (e.g., « 3 »). Une communication anormale entre ces codes pourrait donc engendrer des difficultés dans le traitement des nombres.

Nous venons d'expliquer que la représentation exacte des nombres serait atteinte chez les dyscalculiques. Cependant, qu'est-ce qui explique le déficit du système numérique approximatif qui émerge vers l'âge de 9-10 ans (De Smedt & al., 2013)? La représentation exacte du nombre, acquise par la confrontation aux symboles, améliorerait le système numérique approximatif (Noël & Rousselle, 2011). Cette proposition est appuyée par des données empiriques indiquant que l'apprentissage des mathématiques formelles améliore l'acuité numérique (Piazza & al., 2013). Chez les indiens Mundurucu d'Amazonie, dont le langage ne comporte pas d'adjectifs cardinaux après 5, une partie de la population suit un enseignement primaire en portugais. Les enfants scolarisés sont alors confrontés aux adjectifs cardinaux portugais et à la correspondance entre un mot, un symbole et un nombre entier. Les enfants scolarisés présentent un système numérique approximatif plus développé que les enfants non-scolarisés, un avantage qui ne semble pas dû à des différences sociales ou cognitives (Piazza & al., 2013). Ainsi, après un développement « programmé » dans les premières années de vie, un environnement culturel riche en symboles numériques permettrait la construction d'une représentation exacte du nombre, ce qui favoriserait l'amélioration du système numérique approximatif (Piazza & al., 2013). A l'inverse, un déficit de traitement symbolique rendrait plus difficile la construction d'une représentation exacte des quantités numériques. Ainsi, la théorie du déficit d'accès permet d'expliquer les différences apparaissant au cours du développement entre dyscalculiques et neurotypiques en ce qui concerne la représentation des quantités non symboliques. Le déficit du « sens du nombre » émergerait progressivement suite à l'affinement du système numérique approximatif par la manipulation des symboles numériques. Ce processus se déroulerait chez les enfants neurotypiques, mais pas chez les dyscalculiques. Cette idée expliquerait pourquoi le déficit de « sens du nombre » ne serait pas observable chez les enfants dyscalculiques avant 9 ans (Noël & Rousselle, 2011). Nous voyons donc que la théorie du déficit d'accès aux quantités numériques à partir des symboles n'est pas totalement incompatible avec les théories du « sens du nombre ». Mais il existe des différences essentielles, en particulier en ce qui concerne la direction du lien entre la représentation exacte et approximatives des nombres.

2. Une dyscalculie secondaire à des déficits généraux

Si la dyscalculie se définit surtout par des difficultés à manipuler les nombres, une grande partie des dyscalculiques présente également des déficits cognitifs plus généraux (Kucian & von Aster, 2015 ; Rubinsten & Henik, 2009). Les difficultés en mathématiques pourraient donc également être attribuables à ces déficits. En particulier, l'une des premières hypothèses avancées pour expliquer la dyscalculie est la présence de troubles visuo-spatiaux (Rourke, 1993).

Les troubles visuo-spatiaux

Dans une série d'études neuropsychologiques, Rourke (1993) a comparé les capacités cognitives de différents groupes d'enfants présentant des déficits en arithmétique en l'absence de retard intellectuel global. L'auteur a dans l'ensemble caractérisé deux groupes d'enfants. Dans un premier groupe, les enfants présentaient un retard en lecture et en arithmétique, le retard en lecture étant plus marqué que le retard en arithmétique. Les enfants de ce groupe avaient un QI verbal inférieur au QI visuo-spatial. De plus, leurs compétences phonologiques étaient inférieures à celles correspondant à leur âge. Au contraire, leurs capacités visuo-spatiales étaient dans la norme. Les enfants du second groupe, en revanche, ne présentaient pas de difficulté de lecture mais leur retard en arithmétique était extrêmement important. Ces enfants montraient un QI verbal normal et un QI visuo-spatial inférieur à la norme. Leurs capacités phonologiques étaient épargnées, mais leurs capacités visuo-spatiales (motrices et perceptives) étaient très atteintes. L'auteur a détaillé les atteintes cognitives chez ce groupe d'enfants : problèmes de coordination motrice, d'orientation droite-gauche, dysgraphie, incapacité à bénéficier d'un feed-back, plus faible perception tactile, représentation des doigts moins développée (agnosie digitale). Ce tableau très similaire au syndrome de Gertsman développemental (Benson & Geschwind, 1970) fait penser à une atteinte de l'hémisphère droit observé en neuropsychologie chez l'adulte. Ce tableau clinique est désigné sous le terme de «dysfonction non-verbale », aussi synonyme de « dyspraxie visuo-spatiale ».

La catégorisation des dyscalculiques en fonction de leur profil cognitif établie par Rourke (1993) se retrouve dans une méta-analyse récente (Szucs, 2016). L'auteur propose de distinguer d'une part les enfants dyscalculiques avec de faibles capacités de mémoire de travail verbale et un retard en lecture, et d'autre part les dyscalculiques avec de faibles capacités de mémoire de travail visuo-spatiale sans retard en lecture (Szucs, 2016). Alors que le premier profil pourrait être qualifié de comorbidité dyslexie-dyscalculie (avec des difficultés en mathématiques secondaires à la dyslexie), le deuxième profil correspond aux symptômes principaux de la dysfonction non-verbale ou dyspraxie visuo-spatiale. Ces conclusions suggèrent également que les difficultés à manipuler les symboles numériques peuvent venir d'une représentation plus fragile de la ligne numérique mentale en mémoire de travail visuo-spatiale, plutôt que de difficultés d'accès au cardinal correspondant (von Aster & Shalev, 2007). En effet, les capacités visuo-spatiales sont liées à la linéarisation de la ligne numérique mentale (Gunderson & al., 2012). Un déplacement efficace le long de la ligne numérique mentale facilite la réalisation de tâches numériques (Fias & van Dijck, 2016). A l'inverse, les individus avec des capacités visuo-spatiales atteintes, comme les patients avec hémi-négligence gauche, montrent un déficit de représentation de la ligne numérique mentale (Zorzi & al., 2002). De la même manière, une anomalie du lien nombres-espace chez les dyscalculiques (Ashkenazi & Henik, 2010; Bachot & al., 2005) pourrait venir de difficultés à se représenter la ligne numérique qui correspond aux nombres à manipuler (Fias & van Dijck, 2016).

Ainsi, ceci soulève l'hypothèse que les difficultés des dyscalculiques ne seraient pas dues à une atteinte d'une capacité isolée comme le « sens du nombre » ou l'accès au sens du nombre, mais plutôt à des déficits cognitifs généraux, notamment en mémoire de travail visuo-spatiale (Rourke 1993; Szucs & al. 2013).

Une hypersensibilité à l'interférence

Dans le cadre des déficits généraux d'attention et de mémoire de travail associés à la dyscalculie, une hypothèse récente offre une explication aux déficits en arithmétique fréquemment rencontrés par les dyscalculiques (Geary, 2004). Les difficultés à maîtriser l'arithmétique élémentaire pourraient venir d'une hypersensibilité à l'interférence (De Visscher & al. 2015; De Visscher & Noël 2014, 2013). Pour mieux comprendre ce dysfonctionnement potentiel de la mémoire de travail et des ressources attentionnelles chez les dyscalculiques, revenons sur les mécanismes de résolution des problèmes arithmétiques.

Les faits arithmétiques seraient stockés en mémoire à long terme, formant un réseau de faits arithmétiques constitué progressivement lors de l'apprentissage du calcul (Campbell, 1995). L'association d'un problème arithmétique et de son résultat serait encodée et ajoutée à ce réseau. Avec la pratique, l'association problème-résultat se renforcerait (Siegler, 1996). La trace mnésique des faits arithmétiques appris se consoliderait. En conséquence, la confrontation à un problème entraînerait la récupération du résultat, qui serait activé temporairement en mémoire de travail (Campbell, 1995). Cependant, la présentation d'un problème activerait non seulement le résultat, mais aussi les faits fortement associés au résultat, c'est-à-dire, sémantiquement proches (Campbell & Timm, 2000). Par exemple, la présentation du problème « 6 x 3 » pourrait activer le résultat « 18 », mais également les réponses non pertinentes « 9 » (confusion avec « 6 + 3 ») ou « 12 » (confusion avec 6 x 2). Ces faits non pertinents, qui peuvent venir de la même table que l'un des opérandes, ou être obtenus en changeant l'opérateur, entreraient en compétition avec le résultat. Plus la similarité entre le résultat et les « compétiteurs » est élevée, plus l'interférence en mémoire de travail est importante (Jonides & Nee, 2006). Un niveau d'interférence important entraînerait donc la formation d'un réseau très fragile en mémoire à long terme (Campbell, 1995). L'inhibition proactive, ou la capacité à résister à l'interférence en mémoire de travail, est donc susceptible d'expliquer des différences de performance en arithmétique (Barrouillet & Lépine, 2005; De Visscher & Noël, 2014). Les individus capables de résister à l'interférence sont en effet en mesure d'encoder un nombre plus important d'associations (Barrouillet & Lépine, 2005). Ces individus s'avèrent également plus performants pour récupérer la solution d'un problème arithmétique (Barrouillet & Lépine, 2005). A l'inverse, les individus avec des déficits sévères en arithmétique élémentaire sont plus affectés par le niveau d'interférence lors de la production ou de la vérification d'un résultat (Barrouillet & al., 1997). Il a également été reporté que ces individus étaient davantage sensibles aux informations non pertinentes dans une tâche de mémoire de travail (Passolunghi & Siegel, 2004). Cette sensibilité accrue à l'interférence pourrait contribuer aux déficits arithmétiques d'une partie des dyscalculiques (De Visscher & al. 2015; De Visscher & Noël 2014, 2013).

Une première étude de cas a mis en évidence des difficultés d'inhibition proactive chez une patiente dyscalculique dont les capacités intellectuelles, phonologiques et visuo-spatiales étaient intactes (De Visscher & Noël, 2013). Ses compétences mathématiques se caractérisaient par des difficultés très marquées en arithmétique, notamment en résolution d'additions et de multiplications simples. En revanche, ses capacités à manipuler les quantités non-symboliques étaient préservées. Ses capacités à résister à l'interférence ont été testées notamment par des tâches d'apprentissage associatif nécessitant de mémoriser des paires d'éléments. Lorsque les éléments d'une paire présentent peu de ressemblance (tels qu'un nom d'objet associé à un nom d'animal), l'interférence est faible. A l'inverse, lorsque les éléments d'une même paire sont similaires (par exemple, un prénom associé à un nom de famille), l'interférence est élevée. La performance de la patiente était similaire à celles d'individus neurotypiques dans la condition de faible interférence. Au contraire, lorsque l'interférence était élevée, la performance de la patiente était très dégradée, aussi bien en rappel immédiat qu'en rappel après délai. Ces résultats indiquent une sensibilité élevée à l'interférence à l'encodage ou à la récupération. En somme, l'ensemble des résultats de cette patiente dyscalculique révèlent un défaut de traitement des informations en mémoire dans un contexte de forte interférence. Bien que les difficultés mentionnées par cette personne soient limitées à l'arithmétique, son déficit ne s'avère pas spécifique au traitement des symboles arithmétiques (De Visscher & Noël, 2013).

L'hypothèse de l'hypersensibilité à l'interférence comme cause des déficits arithmétiques a été confirmée par deux études successives utilisant des paradigmes d'apprentissage associatifs avec différents niveaux d'interférence. Premièrement, les enfants avec déficits en arithmétique élémentaire étaient moins efficaces que leurs pairs pour mémoriser des associations de stimuli visuels familiers dans des conditions de forte interférence entre ces stimuli (De Visscher & Noël, 2014). Les auteurs ont conclu que la sensibilité à l'interférence en mémoire de travail empêcherait les enfants dyscalculiques de se constituer un réseau de faits arithmétiques solide. Cette hypersensibilité à l'interférence pourrait toutefois ne concerner qu'un sous-type de dyscalculiques. Ceci est suggéré par De Visscher et collègues (2015), qui ont testé la résistance à l'interférence chez des adultes dyscalculiques dont les déficits mathématiques étaient soit limités à l'arithmétique, soit généraux. Tandis que les participants avec déficits généraux étaient dans l'ensemble moins performants dans l'apprentissage d'une séquence de syllabes, la mémorisation des participants avec déficits spécifiques en arithmétique dépendait du niveau d'interférence. L'apprentissage s'avérait moins efficace que chez les individus contrôles en cas de forte interférence (De Visscher & al., 2015).

Dans tous les cas, l'hypothèse d'un défaut d'inhibition proactive dans la dyscalculie permet d'expliquer les déficits limités à l'arithmétique, mais ne propose pas d'expliquer l'ensemble des difficultés rencontrées par les dyscalculiques. L'hypothèse de l'hypersensibilité à l'interférence s'appliquerait donc à un sous-type de dyscalculie mais n'exclut pas que d'autres déficits généraux puissent entraîner une dyscalculie (De Visscher & Noël, 2013).

III. CONCLUSION

En conclusion, les théories cognitives cherchant à expliquer la dyscalculie se divisent en deux camps. Pour certaines, la dyscalculie aurait une origine relativement spécifique, liée à un trouble du sens du nombre (Piazza & al., 2010; Wilson & Dehaene, 2007) ou à un déficit d'accès à ce sens du nombre à partir des symboles numériques (Rousselle & Noël, 2007). Pour d'autres, la dyscalculie aurait une origine plus générale, liée par exemple à des troubles visuo-spatiaux (Rourke, 1993; Szucs & al., 2013) ou à des problèmes de mobilisation des ressources attentionnelles (Ashkenazi & Henik, 2010; De Visscher & Noël, 2013). Cette diversité de positions peut d'une certaine façon s'expliquer par l'étendu et la variété des capacités cognitives requises par les activités mathématiques. Ceci se reflète dans l'hétérogénéité des atteintes observées chez les enfants dyscalculiques. C'est pour cette raison que de plus en plus de chercheurs appellent à considérer cette hétérogénéité comme l'une des caractéristiques de la dyscalculie. L'une des hypothèses serait par exemple de considérer qu'il existe des dyscalculies primaires (qui résulteraient de troubles fondamentaux des compétences numériques) et des dyscalculies secondaires (pour lesquelles les difficultés en mathématiques seraient intégralement dues à des troubles non-numériques) (Kaufmann & al., 2013). Dans tous les cas, et même si la recherche a encore beaucoup à faire dans ce domaine, il est clair que le diagnostic et la remédiation de la dyscalculie passe par une individualisation de la prise en charge afin de caractériser au mieux les troubles spécifiques et les comorbidités de chaque enfant.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

AGRILLO, C., DADDA, M., SERENA, G. & BISAZZA, A. (2009). Use of number by fish. *PLoS ONE*, *4*(3), e4786. https://doi.org/10.1371/journal.pone.0004786

ANDERSSON, U. (2010). Skill development in different components of arithmetic and basic cognitive functions: Findings from a 3-year longitudinal study of children with different types of learning difficulties. *Journal of Educational Psychology*, *102*(1), 115-134. https://doi.org/10.1037/a0016838

ASHCRAFT, M. H. (1992). Cognitive arithmetic: A review of data and theory. *Numerical Cognition*, *44*(1), 75-106. https://doi.org/10.1016/0010-0277(92)90051-I

ASHCRAFT, M. H. & FIERMAN, B. A. (1982). Mental addition in third, fourth, and sixth graders. *Journal of Experimental Child Psychology*, *33*(2), 216-234. https://doi.org/10.1016/0022-0965(82)90017-0

ASHCRAFT, M. H. & KIRK, E. P. (2001). The relationships among working memory, math anxiety, and performance. *Journal of Experimental Psychology: General*, *130*(2), 224-237. https://doi.org/10.1037//0096-3445.130.2.224

ASHKENAZI, S. & Henik, A. (2010). A disassociation between physical and mental number bisection in developmental dyscalculia. *Neuropsychologia*, *48*(10), 2861-2868. https://doi.org/10.1016/j.neuropsychologia.2010.05.028

ASHKENAZI, S., MARK-ZIGDON, N. & HENIK, A. (2013). Do subitizing deficits in developmental dyscalculia involve pattern recognition weakness? *Developmental Science*, *16*(1), 35-46. https://doi.org/10.1111/j.1467-7687.2012.01190.x

ASHKENAZI, S., RUBINSTEN, O. & HENIK, A. (2009). Attention, automaticity, and developmental dyscalculia. *Neuropsychology*, *23*(4), 535-540. https://doi.org/10.1037/a0015347

BACHOT, J., GEVERS, W., FIAS, W. & ROEYERS, H. (2005). Number sense in children with visuospatial disabilities: Orientation of the mental number line. *Psychology Science*, *47*(1), 172-183.

BARBARESI, W. J. KATUSIC, S. K., COLLIGAN, R. C., WEAVER, A. L., & JACOBSEN, S. J. (2005). Math learning disorder: Incidence in a population-based birth cohort, 1976–82, Rochester, Minn. *Ambulatory Pediatrics*, *5*(5), 281-289. https://doi.org/10.1367/A04-209R.1

BAROODY, A. J. & GINSBURG, H. P. (1986). The relationship between initial meaningful and mechanical knowledge of arithmetic. *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics.*, 75-112.

BARROUILLET, P., FAYOL, M. & LATHULIÈRE, E. (1997). Selecting between competitors in multiplication tasks: An explanation of the errors produced by adolescents with learning difficulties. *International Journal of Behavioral Development, 21*(2), 253-275. https://doi.org/10.1080/016502597384857

BARROUILLET, P. & LÉPINE, R. (2005). Working memory and children's use of retrieval to solve addition problems. *Journal of Experimental Child Psychology*, *91*(3), 183-204. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2005.03.002

BARTH, H., KANWISHER, N. & SPELKE, E. (2003). The construction of large number representations in adults. *Cognition*, *86*(3), 201‑221. https://doi.org/10.1016/S0010-0277(02)00178-6
BERCH, D. B., FOLEY, E. J., HILL, R. J. & RYAN, P. M. (1999). Extracting parity and magnitude from arabic numerals: developmental changes in number processing and mental representation. *Journal of Experimental Child Psychology*, *74*(4), 286‑308. https://doi.org/10.1006/jecp.1999.2518
BOOTH, J. L. & SIEGLER, R. S. (2006). Developmental and individual differences in pure numerical estimation. *Developmental Psychology*, *42*(1), 189‑201. https://doi.org/10.1037/0012-1649.41.6.189
BRANNON, E. M. & TERRACE, H. S. (2000). Representation of the numerosities 1–9 by rhesus macaques (Macaca mulatta). *Journal of Experimental Psychology: Animal Behavior Processes*, *26*(1), 31‑49. https://doi.org/10.1037/0097-7403.26.1.31
BRANNON, E. M., WUSTHOFF, C. J., GALLISTEL, C. R. & GIBBON, J. (2001). Numerical subtraction in the pigeon: Evidence for a linear subjective number scale. *Psychological Science*, *12*(3), 238‑243. https://doi.org/10.1111/1467-9280.00342
BULL, R. & SCERIF, G. (2001). Executive functioning as a predictor of children's mathematics ability: Inhibition, switching, and working memory. *Developmental Neuropsychology*, *19*(3), 273‑293. https://doi.org/10.1207/S15326942DN1903_3
BUTTERWORTH, B. (2005). Developmental dyscalculia. In *Handbook of Mathematical Cognition* (Psychology Press, p. 455‑467). Hove, UK: J. I. D. Campbell.
CAMPBELL, J. I. D. (1995). Mechanisms of simple addition and multiplication: A modified network-interference theory and simulation. *Mathematical Cognition*, *1*, 121‑164.
CAMPBELL, J. I. D. & TIMM, J. C. (2000). Adults' strategy choices for simple addition: Effects of retrieval interference. *Psychonomic Bulletin & Review*, *7*(4), 692‑699. https://doi.org/10.3758/BF03213008
CANTLON, J. F., BRANNON, E. M., CARTER, E. J. & PELPHREY, K. A. (2006). Functional imaging of numerical processing in adults and 4-y-old children. *PLoS Biology*, *4*(5), e125. https://doi.org/10.1371/journal.pbio.0040125
CAREY, S. (2004). Bootstrapping & the origin of concepts. *Daedalus*, *133*(1), 59‑68. https://doi.org/10.1162/001152604772746701
CARPENTER, T. P. & MOSER, J. M. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. *Journal for Research in Mathematics Education*, *15*(3), 179‑202. https://doi.org/10.2307/748348
DE SMEDT, B. & GILMORE, C. K. (2011). Defective number module or impaired access? Numerical magnitude processing in first graders with mathematical difficulties. *Journal of Experimental Child Psychology*, *108*(2), 278‑292. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2010.09.003
DE SMEDT, B., NOËL, M.-P., GILMORE, C. & ANSARI, D. (2013). How do symbolic and non-symbolic numerical magnitude processing skills relate to individual differences in children's mathematical skills? A review of evidence from brain and behavior. *Trends in Neuroscience and Education*, *2*(2), 48‑55. https://doi.org/10.1016/j.tine.2013.06.001
DE VISSCHER, A. & NOËL, M.-P. (2013). A case study of arithmetic facts dyscalculia caused by a hypersensitivity-to-interference in memory. *Cortex*, *49*(1), 50‑70. https://doi.org/10.1016/j.cortex.2012.01.003
DE VISSCHER, A. & NOËL, M.-P. (2014). Arithmetic facts storage deficit: the hypersensitivity-to-interference in memory hypothesis. *Developmental Science*, *17*(3), 434‑442. https://doi.org/10.1111/desc.12135
DE VISSCHER, A., SZMALEC, A., VAN DER LINDEN, L. & NOËL, M.-P. (2015). Serial-order learning impairment and hypersensitivity-to-interference in dyscalculia. *Cognition*, *144*, 38‑48. https://doi.org/10.1016/j.cognition.2015.07.007
DEHAENE, S., SPELKE, E., PINEL, P., STANESCU, R. & TSIVKIN, S. (1999). Sources of mathematical thinking: Behavioral and brain-imaging evidence. *Science*, *284*(5416), 970. https://doi.org/10.1126/science.284.5416.970
DEHAENE, S. (1997). *The number sense: how the mind creates mathematics*. New York: Oxford University Press.
DEHAENE, S., BOSSINI, S. & GIRAUX, P. (1993). The mental representation of parity and number magnitude. *Journal of Experimental Psychology: General*, *122*(3), 371‑396.
DEHAENE, S. & CHANGEUX, J.-P. (1993). Development of elementary numerical abilities: A neuronal model. *Journal of Cognitive Neuroscience*, *5*(4), 390‑407. https://doi.org/10.1162/jocn.1993.5.4.390
DESOETE, A., ROEYERS, H. & DE CLERCQ, A. (2004). Children with mathematics learning disabilities in Belgium. *Journal of Learning Disabilities*, *37*(1), 50‑61. https://doi.org/10.1177/00222194040370010601
DEVINE, A., SOLTÉSZ, F., NOBES, A., GOSWAMI, U. & SZUCS, D. (2013). Gender differences in developmental dyscalculia depend on diagnostic criteria. *Learning and Instruction*, *27*, 31‑39. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2013.02.004
DIRKS, E., SPYER, G., VAN LIESHOUT, E. C. D. M. & DE SONNEVILLE, L. (2008). Prevalence of combined reading and arithmetic disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, *41*(5), 460‑473. https://doi.org/10.1177/0022219408321128
DOWKER, A. (2005). Early identification and intervention for students with mathematics difficulties. *Journal of Learning Disabilities*, *38*(4), 324‑332. https://doi.org/10.1177/00222194050380040801
EGER, E., STERZER, P., RUSS, M. O., GIRAUD, A.-L. & KLEINSCHMIDT, A. (2003). A Supramodal Number Representation in Human Intraparietal Cortex. *Neuron*, *37*(4), 719‑726. https://doi.org/10.1016/S0896-6273(03)00036-9
FECHNER, G. (1966). *Elements of Psychophysics*. New York, NY: Holt.
FEIGENSON, L., DEHAENE, S. & SPELKE, E. (2004). Core systems of number. *Trends in Cognitive Sciences*, *8*(7), 307‑314. https://doi.org/10.1016/j.tics.2004.05.002

FIAS, W. & VAN DIJCK, J.-P. (2016). The temporary nature of number—space interactions. *Canadian Journal of Experimental Psychology/Revue Canadienne de Psychologie Expérimentale*, *70*(1), 33-40. https://doi.org/10.1037/cep0000071
GEARY, D. C. (2004). Mathematics and Learning Disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, *37*(1), 4‑15. https://doi.org/10.1177/00222194040370010201
GEARY, D. C. (2011). Cognitive predictors of achievement growth in mathematics: A 5-year longitudinal study. *Developmental Psychology*, *47*(6), 1539‑1552. https://doi.org/10.1037/a0025510
GEARY, D. C., BROWN, S. C. & SAMARANAYAKE, V. A. (1991). Cognitive addition: A short longitudinal study of strategy choice and speed-of-processing differences in normal and mathematically disabled children. *Developmental Psychology*, *27*(5), 787‑797. https://doi.org/10.1037/0012-1649.27.5.787
GEARY, D. C., HAMSON, C. O. & HOARD, M. K. (2000). Numerical and arithmetical Cognition: A longitudinal study of process and concept deficits in children with learning disability. *Journal of Experimental Child Psychology*, *77*(3), 236‑263. https://doi.org/10.1006/jecp.2000.2561
GROEN, G. J. & PARKMAN, J. M. (1972). A chronometric analysis of simple addition. *Psychological Review*, *79*(4), 329‑343. https://doi.org/10.1037/h0032950
GROSS, H. J., PAHL, M., SI, A., ZHU, H., TAUTZ, J. & ZHANG, S. (2009). Number-based visual generalisation in the honeybee. *PLoS ONE*, *4*(1), e4263. https://doi.org/10.1371/journal.pone.0004263
GROSS-TSUR, V., MANOR, O. & SHALEV, R. S. (1996). Developmental dyscalculia: Prevalence and demographic features. *Developmental Medicine & Child Neurology*, *38*(1), 25‑33.
GUNDERSON, E. A., RAMIREZ, G., BEILOCK, S. L. & LEVINE, S. C. (2012). The relation between spatial skill and early number knowledge: The role of the linear number line. *Developmental Psychology*, *48*(5), 1229‑1241. https://doi.org/10.1037/a0027433
HALBERDA, J. & FEIGENSON, L. (2008). Developmental change in the acuity of the « number sense »: The approximate number system in 3-, 4-, 5-, and 6-year-olds and adults. *Developmental Psychology*, *44*(5), 1457‑1465. https://doi.org/10.1037/a0012682
HALBERDA, J., MAZZOCCO, M. M. & FEIGENSON, L. (2008). Individual differences in non-verbal number acuity correlate with maths achievement. *Nature*, *455*(7213), 665‑668. https://doi.org/10.1038/nature07246
HANICH, L. B., JORDAN, N. C., KAPLAN, D. & DICK, J. (2001). Performance across different areas of mathematical cognition in children with learning difficulties. *Journal of Educational Psychology*, *93*(3), 615‑626. https://doi.org/10.1037/0022-0663.93.3.615
HOLLOWAY, I. D. & ANSARI, D. (2009). Mapping numerical magnitudes onto symbols: The numerical distance effect and individual differences in children's mathematics achievement. *Journal of Experimental Child Psychology*, *103*(1), 17‑29. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2008.04.001
IUCULANO, T., TANG, J., HALL, C. W. B. & BUTTERWORTH, B. (2008). Core information processing deficits in developmental dyscalculia and low numeracy. *Developmental Science*, *11*(5), 669‑680. https://doi.org/10.1111/j.1467-7687.2008.00716.x
IZARD, V., SANN, C., SPELKE, E. S. & STRERI, A. (2009). Newborn infants perceive abstract numbers. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *106*(25), 10382‑10385. https://doi.org/10.1073/pnas.0812142106
IZARD, V., DEHAENE-LAMBERTZ, G. & DEHAENE, S. (2008). Distinct cerebral pathways for object identity and number in human infants. *PLoS Biology*, *6*(2), e11. https://doi.org/10.1371/journal.pbio.0060011
JOLLES, D., ASHKENAZI, S., KOCHALKA, J., EVANS, T., RICHARDSON, J., ROSENBERG-LEE, M. & MENON, V. (2016). Parietal hyper-connectivity, aberrant brain organization, and circuit-based biomarkers in children with mathematical disabilities. *Developmental Science*, *19*(4), 613‑631. https://doi.org/10.1111/desc.12399
JONIDES, J. & NEE, D. E. (2006). Brain mechanisms of proactive interference in working memory. *Neuroscience*, *139*(1), 181‑193. https://doi.org/10.1016/j.neuroscience.2005.06.042
JORDAN, N. C., HANICH, L. B. & KAPLAN, D. (2003). A longitudinal study of mathematical competencies in children with specific mathematics difficulties versus children with comorbid mathematics and reading difficulties. *Child Development*, *74*(3), 834‑850. https://doi.org/10.1111/1467-8624.00571
JORDAN, N. C. & MONTANI, T. O. (1997). Cognitive arithmetic and problem polving: A comparison of children with specific and general mathematics difficulties. *Journal of Learning Disabilities*, *30*(6), 624‑634. https://doi.org/10.1177/002221949703000606
KAUFMANN, L., MAZZOCCO, M. M., DOWKER, A., VON ASTER, M., GÖBEL, S. M., GRABNER, R. H., HENIK, A., JORDAN, N. C., KARMILOFF-SMITH, A.D., KUCIAN, K., RUBINSTEN, O., SZUCS, D., SHALEV, R. & NUERK, H.-C. (2013). Dyscalculia from a developmental and differential perspective. *Frontiers in Psychology*, *4*. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2013.00516
KOUMOULA, A., TSIRONI, V., STAMOULI, V., BARDANI, I., SIAPATI, S., GRAHAM, A. & VON ASTER, M. (2004). An epidemiological study of number processing and mental calculation in Greek schoolchildren. *Journal of Learning Disabilities*, *37*(5), 377‑388. https://doi.org/10.1177/00222194040370050201
KUCIAN, K., LOENNEKER, T., DIETRICH, T., DOSCH, M. & MARTIN, E. (2006). Impaired neural networks for approximate calculation in dyscalculic children: a functional MRI study. *Behavioral and Brain Functions*, 17.
KUCIAN, K., LOENNEKER, T., MARTIN, E. & VON ASTER, M. (2011). Non-symbolic numerical distance effect in children with and without developmental dyscalculia: A parametric fMRI study. *Developmental Neuropsychology*, *36*(6), 741‑762. https://doi.org/10.1080/87565641.2010.549867
LANDERL, K. (2013). Development of numerical processing in children with typical and dyscalculic arithmetic skills—a longitudinal study. *Frontiers in Psychology*, *4*. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2013.00459

LANDERL, K., BEVAN, A. & BUTTERWORTH, B. (2004). Developmental dyscalculia and basic numerical capacities: a study of 8–9-year-old students. *Cognition*, *93*(2), 99‑125. https://doi.org/10.1016/j.cognition.2003.11.004

LANDERL, K., FUSSENEGGER, B., MOLL, K. & WILLBURGER, E. (2009). Dyslexia and dyscalculia: Two learning disorders with different cognitive profiles. *Journal of Experimental Child Psychology*, *103*(3), 309‑324. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2009.03.006

LANDERL, K. & KÖLLE, C. (2009). Typical and atypical development of basic numerical skills in elementary school. *Journal of Experimental Child Psychology*, *103*(4), 546‑565. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2008.12.006

LEWIS, C., HITCH, G. J. & WALKER, P. (1994). The prevalence of specific arithmetic difficulties and specific reading difficulties in 9- to 10-year-old boys and girls. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, *35*(2), 283‑292. https://doi.org/10.1111/j.1469-7610.1994.tb01162.x

LIBERTUS, M. E., FEIGENSON, L. & HALBERDA, J. (2011). Preschool acuity of the approximate number system correlates with school math ability: Approximate number system and math abilities. *Developmental Science*, *14*(6), 1292‑1300. https://doi.org/10.1111/j.1467-7687.2011.01080.x

LIPTON, J. S. & SPELKE, E. S. (2003). Origins of number sense: Large-number discrimination in human infants. *Psychological Science*, *14*(5), 396‑401. https://doi.org/10.1111/1467-9280.01453

LOURENCO, S. F., BONNY, J. W., FERNANDEZ, E. P. & RAO, S. (2012). Nonsymbolic number and cumulative area representations contribute shared and unique variance to symbolic math competence. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *109*(46), 18737‑18742. https://doi.org/10.1073/pnas.1207212109

LYONS, I. M., PRICE, G. R., VAESSEN, A., BLOMERT, L. & ANSARI, D. (2014). Numerical predictors of arithmetic success in grades 1-6. *Developmental Science*, *17*(5), 714‑726. https://doi.org/10.1111/desc.12152

MAZZOCCO, M. M. M. & DEVLIN, K. T. (2008). Parts and 'holes': gaps in rational number sense among children with vs. without mathematical learning disabilities. *Developmental Science*, *11*(5), 681‑691. https://doi.org/10.1111/j.1467-7687.2008.00717.x

MAZZOCCO, M. M. M., FEIGENSON, L. & HALBERDA, J. (2011). Impaired acuity of the approximate number system underlies mathematical learning disability (Dyscalculia): Impaired numerical acuity contributes to MLD. *Child Development*, *82*(4), 1224‑1237. https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.2011.01608.x

MAZZOCCO, M. M. M. & MYERS, G. F. (2003). Complexities in identifying and defining mathematics learning disability in the primary school-age years. *Annals of Dyslexia*, *53*(1), 218‑253. https://doi.org/10.1007/s11881-003-0011-7

MAZZOCCO, M. M. M. & RÄSÄNEN, P. (2013). Contributions of longitudinal studies to evolving definitions and knowledge of developmental dyscalculia. *Trends in Neuroscience and Education*, *2*(2), 65‑73. https://doi.org/10.1016/j.tine.2013.05.001

MCCRINK, K. & WYNN, K. (2004). Large-number addition and subtraction by 9-Month-old infants. *Psychological Science*, *15*(11), 776‑781. https://doi.org/10.1111/j.0956-7976.2004.00755.x

MEJIAS, S., MUSSOLIN, C., ROUSSELLE, L., GREGOIRE, J. & NOËL, M.-P. (2012). Numerical and nonnumerical estimation in children with and without mathematical learning disabilities. *Child Neuropsychology*, *18*(6), 550‑575. https://doi.org/10.1080/09297049.2011.625355

MOELLER, K., NEUBURGER, S., KAUFMANN, L., LANDERL, K. & NUERK, H.-C. (2009). Basic number processing deficits in developmental dyscalculia: Evidence from eye tracking. *Cognitive Development*, *24*(4), 371‑386. https://doi.org/10.1016/j.cogdev.2009.09.007

MUSSOLIN, C., MEJIAS, S. & NOËL, M.-P. (2010). Symbolic and nonsymbolic number comparison in children with and without dyscalculia. *Cognition*, *115*(1), 10‑25. https://doi.org/10.1016/j.cognition.2009.10.006

NIEDER, A. & MILLER, E. K. (2004). A parieto-frontal network for visual numerical information in the monkey. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *101*(19), 7457‑7462. https://doi.org/10.1073/pnas.0402239101

NOËL, M.-P. & ROUSSELLE, L. (2011). Developmental changes in the profiles of dyscalculia: An explanation based on a double exact-and-approximate number representation model. *Frontiers in Human Neuroscience*, *5*. https://doi.org/10.3389/fnhum.2011.00165

OSTAD, S. A. (1998). Comorbidity between mathematics and spelling difficulties, *23*, 145‑154.

OSTAD, S. A. (1998). Developmental differences in solving simple arithmetic word problems and simple number-fact problems: A comparison of mathematically normal and mathematically disabled children. *Mathematical Cognition*, *4*(1), 1‑19. https://doi.org/10.1080/135467998387389

PASSOLUNGHI, M. C. & SIEGEL, L. S. (2004). Working memory and access to numerical information in children with disability in mathematics. *Journal of Experimental Child Psychology*, *88*(4), 348‑367. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2004.04.002

PIAZZA, M., FACOETTI, A., TRUSSARDI, A. N., BERTELETTI, I., CONTE, S., LUCANGELI, D. & ZORZI, M. (2010). Developmental trajectory of number acuity reveals a severe impairment in developmental dyscalculia. *Cognition*, *116*(1), 33‑41. https://doi.org/10.1016/j.cognition.2010.03.012

PIAZZA, M., IZARD, V., PINEL, P., LE BIHAN, D. & DEHAENE, S. (2004). Tuning curves for approximate numerosity in the human intraparietal sulcus. *Neuron*, *44*(3), 547‑555. https://doi.org/10.1016/j.neuron.2004.10.014

PIAZZA, M., PICA, P., IZARD, V., SPELKE, E. S. & DEHAENE, S. (2013). Education enhances the acuity of the nonverbal approximate number system. *Psychological Science*, *24*(6), 1037‑1043. https://doi.org/10.1177/0956797612464057

PICA, P., LEMER, C., IZARD, V. & DEHAENE, S. (2004). Exact and approximate arithmetic in an Amazonian indigene group. *Science*, *306*(5695), 499-503. https://doi.org/10.1126/science.1102085
PINEL, P., DEHAENE, S., RIVIÈRE, D. & LEBIHAN, D. (2001). Modulation of parietal activation by semantic distance in a number comparison task. *NeuroImage*, *14*(5), 1013-1026. https://doi.org/10.1006/nimg.2001.0913
PRICE, G. R., HOLLOWAY, I., RÄSÄNEN, P., VESTERINEN, M. & ANSARI, D. (2007). Impaired parietal magnitude processing in developmental dyscalculia. *Current Biology*, *17*(24), R1042-R1043. https://doi.org/10.1016/j.cub.2007.10.013
ROTZER, S., KUCIAN, K., MARTIN, E., VON ASTER, M., KLAVER, P. & LOENNEKER, T. (2008). Optimized voxel-based morphometry in children with developmental dyscalculia. *NeuroImage*, *39*(1), 417-422. https://doi.org/10.1016/j.neuroimage.2007.08.045
ROURKE, B. P. (1993). Arithmetic disabilities, specific and otherwise: A neuropsychological perspective. *Journal of Learning Disabilities*, *26*(4), 214-226. https://doi.org/10.1177/002221949302600402
ROUSSELLE, L. & NOËL, M.-P. (2007). Basic numerical skills in children with mathematics learning disabilities: A comparison of symbolic vs non-symbolic number magnitude processing. *Cognition*, *102*(3), 361-395. https://doi.org/10.1016/j.cognition.2006.01.005
RUBINSTEN, O. & HENIK, A. (2005). Automatic activation of internal magnitudes: A study of developmental dyscalculia. *Neuropsychology*, *19*(5), 641-648. https://doi.org/10.1037/0894-4105.19.5.641
RUBINSTEN, O., HENIK, A., BERGER, A. & SHAHAR-SHALEV, S. (2002). The development of internal representations of magnitude and their association with arabic numerals. *Journal of Experimental Child Psychology*, *81*(1), 74-92. https://doi.org/10.1006/jecp.2001.2645
RUSSELL, R. L. & GINSBURG, H. P. (1984). Cognitive analysis of children's mathematics difficulties. *Cognition and Instruction*, *1*(2), 217-244. https://doi.org/10.1207/s1532690xci0102_3
SCHLEIFER, P. & LANDERL, K. (2011). Subitizing and counting in typical and atypical development: Subitizing and counting. *Developmental Science*, *14*(2), 280-291. https://doi.org/10.1111/j.1467-7687.2010.00976.x
SERON, X., & FAYOL, M. (1994). Number transcoding in children: A functional analysis. *British Journal of Developmental Psychology*, *12*(3), 281-300. https://doi.org/10.1111/j.2044-835X.1994.tb00635.x
SIEGLER, R. S. (1996). *Emerging minds: The process of change in children's thinking*. New York: Oxford University Press.
SZUCS, D., DEVINE, A., SOLTESZ, F., NOBES, A. & GABRIEL, F. (2013). Developmental dyscalculia is related to visuo-spatial memory and inhibition impairment. *Cortex*, *49*(10), 2674-2688. https://doi.org/10.1016/j.cortex.2013.06.007
VAN OEFFELEN, M. P. & VOS, P. G. (1982). A probabilistic model for the discrimination of visual number. *Perception & Psychophysics*, *32*(2), 163-170. https://doi.org/10.3758/BF03204275
VON ASTER, M. G. & SHALEV, R. S. (2007). Number development and developmental dyscalculia. *Developmental Medicine & Child Neurology*, *49*(11), 868-873. https://doi.org/10.1111/j.1469-8749.2007.00868.x
WILSON, A. J. & DEHAENE, S. (2007). Number sense and developmental dyscalculia. In Coch D., Dawson G., Fischer K. W. (Eds.) (pp. 212-238). *Human behavior, learning, and the developing brain: Atypical development*. New York, NY: Guilford Press.
WYNN, K. (1992). Addition and subtraction by human infants. *Nature*, *358*(6389), 749-750. https://doi.org/10.1038/358749a0
XU, F. & SPELKE, E. S. (2000). Large number discrimination in 6-month-old infants. *Cognition*, *74*(1), B1-B11. https://doi.org/10.1016/S0010-0277(99)00066-9
YANG, T., CHEN, C., ZHOU, X., XU, J., DONG, Q. & CHEN, C. (2014). Development of spatial representation of numbers: A study of the SNARC effect in Chinese children. *Journal of Experimental Child Psychology*, *117*, 1-11. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2013.08.011
ZORZI, M., PRIFTIS, K. & UMILTÀ, C. (2002). Brain damage: Neglect disrupts the mental number line. *Nature*, *417*(6885), 138-139. https://doi.org/10.1038/417138a

Difficultés d'apprentissage en mathématiques : un regard didactique

Thierry **DIAS**

Haute École Pédagogique du canton de Vaud

thierry.dias@hepl.ch

Résumé

Depuis plusieurs années, nous cherchons à analyser et comprendre les liens qui existent entre les difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques (Dias & Deruaz, 2012) en choisissant un ancrage didactique qui nous paraît essentiel dans une telle problématique. Nos travaux ont d'abord investigué la dimension expérimentale des mathématiques (Dias, 2008) avant de se centrer davantage sur la question épistémologique de ses objets et de la spécificité des environnements didactiques (Dias, 2015). Au cours de ces différentes études, nous avons progressivement rejoint le consensus international sur les difficultés récurrentes qui existent dans la définition de ces troubles d'apprentissage (Lewis & Fisher, 2016) notamment du fait de l'absence de critères objectifs dans leur repérage. Afin de renforcer la dimension didactique dans l'étude des *mathematical learning disabilities* (MLD), nous avons récemment opté pour la création d'une équipe internationale de recherche (RITEAM[1]) dont les objectifs seront de bâtir des outils de repérage des élèves MLD ainsi que des protocoles d'intervention et d'aide à destination de tous les enseignants.

Mots clés

Difficultés d'apprentissage, troubles d'apprentissage, MLD, mathématiques

L'enseignement et l'apprentissage des mathématiques entretiennent des relations complexes qui ne peuvent se définir comme simplement causales (tout enseignement implique des apprentissages) mais plutôt corrélationnelles surtout lorsque l'on évoque leurs dysfonctionnements (il existe des difficultés d'enseignement et des difficultés d'apprentissages que l'on peut mettre en liens). L'étude de ces relations est une interrogation lancinante qui nourrit nos travaux de recherche et de formation en didactique des mathématiques depuis de nombreuses années. Nous considérons en effet que l'ancrage didactique est pour le moins légitime dans une telle perspective de compréhension d'un phénomène éducatif de première importance notamment en France. Dans l'article qui suit nous interrogerons successivement les notions de conceptualisation, d'interaction et d'environnement puis de repérage des troubles avant de présenter trois axes de recherche faisant partie d'une problématique inhérente à la création d'une équipe internationale de recherche.

[1] http://www.riteam.ch

I. DIFFICULTES D'ENSEIGNEMENT OU D'APPRENTISSAGE ?

Lorsque l'on parle de difficultés scolaires on ajoute régulièrement le terme d'élève en formant ainsi un syntagme insécable : 'les élèves en difficulté'. Pourtant, force est de constater qu'il n'y a pas d'élève sans institution scolaire. En conséquence, toute étude dans ce domaine nous conduit à considérer au moins deux autres axes de recherche ne portant pas sur l'élève : celui du savoir et celui de l'enseignement. Ceci nous fournit deux bonnes raisons d'adopter des points de vue différents sur ce qui fait résistance au projet d'apprentissage d'un sujet élève. Depuis plusieurs années, une interrogation lancinante nous anime : quels sont les liens qui existent entre difficultés d'enseignement et d'apprentissage. Ceci nous conduit à postuler sur la légitimité d'un triple ancrage théorique pour mener des études. Ces trois références ouvrent des espaces d'analyses différents sur les raisons des difficultés constatées dans les processus d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques.
Nous commencerons par celui de la dimension épistémologique qui nous permettra de mettre en évidence que la diversité empirique des objets de savoir proposée dans les situations d'apprentissage heurte parfois la conception axiomatique des théories référentes. Dans un deuxième temps, nous convoquerons la dimension didactique pour étudier le rôle de l'environnement[2] des situations d'apprentissage : dans quelles conditions est-il à même de révéler les potentiels des élèves malgré les contraintes qu'il impose ? Enfin, comme il n'est évidemment pas question d'abandonner toute interrogation portant sur les difficultés intrinsèques aux élèves, nous présenterons une réflexion portant sur des travaux récents en cognition mathématique concernant les différences entre la notion de trouble et celle de difficulté.

1. Objets sensibles et objets théoriques : comprendre les obstacles à la conceptualisation

La première source de difficulté d'enseignement et d'apprentissage que nous avons étudiée est celle qui est en rapport directe avec la dimension épistémologique de ses objets. Nous avons ainsi mis en évidence que le mode d'existence des objets mathématiques dans le contexte scolaire n'était possible que dans une dialectique autour de deux pôles : la diversité empirique et l'axiomatique théorique (Dias, 2014). Selon nous (Dias, 2008), c'est le recours à une dimension expérimentale qui permet de nombreux allers et retours entre des objets sensibles (plus ou moins familiers) et des objets théoriques (plus ou moins formalisés) par des confrontations (adéquates ou non), des vérifications, des argumentations (prouver, convaincre). Les va-et-vient se font entre les faits objectifs et les savoirs conceptuels par divers processus tels que l'interprétation et la modélisation. Cette dialectique est source de nombreuses difficultés dans les projets d'enseignement et apprentissages, notamment en raison de phénomènes didactiques très implicites. Les élèves interagissent parfois avec des choses (matériel tangible par exemple) que leurs enseignants perçoivent comme des notions ou des concepts sans rendre explicite ce changement de statut. Mais si les billes du boulier restent des perles colorées, elles ne prendront pas la valeur d'une grandeur numérique sur laquelle on peut opérer.

[2] Nous utilisons la terminologie d'environnement didactique et non pas celui de situation didactique dans la perspective de mieux prendre en compte l'ensemble des éléments constitutifs du processus enseignement apprentissage, y compris dans sa dimension institutionnelle.

Objets sensibles	Objets théoriques
Monde sensible : diversité empirique	Théorie : système organisé de savoirs
ce que les sens peuvent percevoir	ce que la cognition peut concevoir
Objets matériels du monde ordinaire : « choses » Objets de la nature, objets fabriqués ou générés par l'homme Dessins sur feuille de papier ou écran d'ordinateur: Ecritures, figures, courbes, graphiques….	S'insèrent dans une théorie, une axiomatique et font l'objet d'une définition mathématique. Sont caractérisés par des propriétés et des relations mathématiques. Leur existence revêt un caractère de nécessité qui est assurée par la non contradiction.

Tableau 1 : Typologie dichotomique des objets mathématiques.

Nous nous accordons à dire que l'existence des objets mathématiques relève pour partie des interprétations que les sujets en font : les élèvent agissent sur des signes, sur du matériel et éventuellement en parlent. Le professeur qui sait des choses sur ces actes ou ces mots décide (ou non) de qualifier de mathématique ces actes et ces mots, et ainsi participe au processus d'exhibition des savoirs.

Chaque fait ou phénomène empirique doit faire l'objet d'une variété d'expériences (des situations de référence), d'interactions et d'échanges au cours desquelles les signes (signifiants) permettant de dénoter les objets (signifiés) participeront progressivement à la conceptualisation. La création des situations susceptibles de mettre en œuvre un tel processus de conceptualisation (Vergnaud, 2011) est un projet didactique qui comporte son lot de difficultés pour l'enseignant comme pour les élèves. Pour assurer le passage des « choses » (objets sensibles) du divers empirique à la conceptualisation des objets théoriques, ce sont des allers et retours organisés (par des connaissances didactiques) qui sont nécessaires. Nous rejoignons ainsi Berthelot et Salin (1992) dans leur analyse de l'enseignement de la géométrie en tant que discipline scolaire :

> *« La question de l'initiation des élèves à la géométrie se trouve ainsi transformée : ce n'est plus seulement un saut direct de la problématique pratique à la problématique géométrique qui peut être envisagé ; on peut aussi concevoir d'aménager l'entrée dans la problématique de modélisation, puis des aller-retours entre cette problématique, où les concepts de la géométrie ont un statut d'outil et commencent à figurer dans des raisonnements, et la problématique de la géométrie, où ils sont considérés comme des objets. » (p. 362)*

Une part importante des dysfonctionnements dans le processus d'enseignement et apprentissage peut donc être attribuée à cette dimension épistémologique. Il est en effet très ambitieux de garantir à la fois une robustesse des situations de référence et une utilisation rigoureuse des signes en tant que signifiants explicites des objets théoriques qu'ils représentent.

2. Environnement didactique : localiser les dysfonctionnements

Contraintes et potentiels

Depuis plusieurs années, nous explorons également la mise en œuvre d'environnements didactiques propices aux expériences des sujets, en pariant sur leur rencontre possible avec la diversité des phénomènes empiriques puis sur leur capacité à comprendre notamment par le biais de la stabilisation des invariants dans les actes, les signes et les objets rencontrés. La

mise en œuvre de ce type de situations ancrées sur l'action des sujets et leurs interactions intersubjectives est également source d'interrogation puisqu'elles engendrent un certain nombre de difficultés. Par exemple, chaque environnement matériel choisi se veut porteur d'un certain potentiel significatif des objets théoriques qu'il représente, il est donc construit sur l'idée de son adaptation à différents niveaux de connaissances. Ce postulat de ressources différenciées intègre l'acceptation de processus d'apprentissages « à plusieurs vitesses » qui se heurte cependant à une dimension institutionnelle tendant à repérer au plus tôt les difficultés des élèves. Comment peut-on à la fois respecter des rythmes d'apprentissages différents laissant une place suffisante aux erreurs, aux doutes et aux essais, et assurer un repérage précoce des comportements « dys » ? Cette pression institutionnelle engendrée par la volonté du diagnostic de « dyscalculie » est elle-même renforcée par les contraintes liées à la dimension sélective des mathématiques dans les curricula scolaires. L'échec en mathématiques n'est en effet peu ou pas toléré et ce dès les premières années du cursus scolaire.
L'incompatibilité entre la recherche des environnements les plus propices à des rythmes d'apprentissage respectueux du temps nécessaire à chaque sujet et les contraintes d'un système scolaire privilégiant la réussite précoce en mathématique est un dilemme mettant en grande difficulté les enseignants et bien entendu leurs élèves.

Une problématique environnementale

En matière de dysfonctionnement du processus enseigner-apprendre, la problématique de l'environnement didactique nous semble particulièrement propice à l'étude des effets réciproques des difficultés d'apprentissage des élèves et d'enseignement des enseignants en mathématiques. Cet environnement consiste schématiquement en une mise à disposition par l'enseignant d'un milieu d'apprentissage destiné aux interactions avec les élèves. Les savoirs mathématiques de référence sont des enjeux de la résolution des problèmes rencontrées dans les tâches proposées. En référence à une théorie de l'apprentissage par adaptation, les élèves doivent mobiliser leurs ressources cognitives qui doivent s'avérer provisoirement insuffisantes pour dénouer immédiatement les énigmes rencontrées. Ce processus peut être observé de la même manière concernant les apprentissages au métier d'enseignant. Il est en effet lui aussi soumis à la rencontre d'une certain nombre de situations professionnelles qui, malgré une préparation adaptée, peuvent le laisser provisoirement dans des positions relativement inconfortables. Dans un article sur cette problématique (Dias et Deruaz, 2012) nous avions montré en quoi la rencontre des difficultés d'enseignement et d'apprentissages, lorsqu'elles sont simultanées, pouvaient conduire à des impasses parfois douloureuses. Des déstabilisations sont en effet possibles dans les deux camps : des élèves en difficulté d'apprentissage peuvent conduire à des déstabilisations des démarches d'enseignement, et des enseignants en difficulté peuvent également, par la non maîtrise de certaines connaissances didactiques engendrer des erreurs chez leurs élèves en étant alors dans l'incapacité d'y remédier.
La finalité de ce type d'étude consiste à repérer (pour mieux les éviter) les potentiels de rencontre entre deux pôles dys : dyscalculie et dysmathématie (Dias et Deruaz, 2012). In fine, il semble que les dysfonctionnements relatifs à l'inefficacité du processus d'enseignement / apprentissage semblent en partie neutralisables par l'action sur certains éléments constitutifs des environnements didactiques :

- les registres de représentations des objets de savoirs (milieu matériel et symbolique),
- le type de contrat didactique lié notamment aux types de tâches et de problèmes, aux dispositifs sociaux utilisés et aux démarches d'enseignement (constructiviste, explicite par exemples).

La localisation des causes d'un dysfonctionnement dans le processus enseigner-apprendre est un problème complexe. Nous souhaitons à ce jour surtout outiller les enseignants pour qu'ils adoptent des changements de points de vue sur la question : les trois pôles du triangle didactique peuvent servir de point d'ancrage et de compréhension.

3. Difficulté ou trouble d'apprentissage : dimension cognitive

Évoquer plus spécifiquement les difficultés d'apprentissage en mathématiques des élèves conduit de manière assez légitime sur le terrain cognitif en raison d'une recherche de la dimension intrinsèque de leurs causes. Dans ce champ scientifique de référence, les débats vont bon train sur l'origine de ces dysfonctionnements qui sont alors souvent catégorisés comme des troubles, une terminologie bien différente de celle de difficulté comme nous allons l'explorer un peu plus loin. Nous verrons également que les sujets d'exploration sont nombreux en sciences cognitives lorsqu'il s'agit de caractériser ces troubles : définition, classification et modèles explicatifs. Les outils de la didactique sont une fois encore nécessaires pour comprendre et pour étayer ces problématiques, ce sera l'objet de nos futurs travaux comme nous le développerons dans la dernière partie de cet article.

Une terminologie diversifiée et indéfinie

Même si le terme *dyscalculie* semble parfois s'imposer dans certaines communautés éducatives françaises lorsque l'on évoque les troubles des apprentissages mathématiques, il est primordial pour tout professionnel de savoir que cette terminologie est loin de faire consensus sur le plan scientifique. De nombreuses tentatives de dénotation ont eu lieu ces dernières années en passant par un très large spectre : dyscalculie, difficulté, dysfonctionnement cognitif, innumérisme (Vannetzel, 2012), troubles sévères ou spécifiques par exemples. A l'heure actuelle, c'est plutôt la notion de handicap d'apprentissage qui semble vouloir s'imposer selon la terminologie anglosaxone *mathematical learning disabilities*. Deux référentiels reconnus dans le champ des troubles de la cognition confirment cette errance langagière.
La Classification Internationale des Maladies (CIM version 11) emploie la terminologie de difficulté :

> *Developmental learning disorder with impairment in mathematics is characterized by significant and persistent difficulties in learning academic skills related to mathematics or arithmetic, such as number sense, memorization of number facts, accurate calculation, fluent calculation, and accurate mathematic reasoning.*

Le manuel diagnostique et statistique des troubles mentaux (DSM version 5) classe quant à lui l'ensemble des dysfonctionnements relatifs aux apprentissages dans la catégorie des troubles en leur associant des critères de sévérité (léger, modéré ou sévère). Notons quand même que dans la liste des critères de diagnostic, c'est bien la notion de difficulté qui est alors utilisée :

> *Difficulties mastering number sense, number facts, or calculation (e.g., has poor understanding of numbers, their magnitude, and relationships; counts on fingers to add single-digit numbers instead of recalling the math fact as peers do; gets lost in the midst of arithmetic computation and may switch procedures).*
>
> *Difficulties with mathematical reasoning (e.g., has severe difficulty applying mathematical concepts, facts, or procedures to solve quantitative problems).*

Cette diversité terminologique pose bien entendu des questions qui dépasse la sémantique, raison pour laquelle il nous semble important d'essayer de clarifier ces définitions en prenant pour base de réflexion la dialectique nécessaire entre difficulté et trouble.

Troubles et difficultés

Pour distinguer ces deux termes, nous proposons d'utiliser une référence liée à la durée de leurs manifestations. La difficulté (parfois désignée avec le synonyme de *low achievement* dans la littérature anglo-saxonne) est provisoire et contextuelle. Elle peut être découverte lors de certains apprentissages, mais doit faire l'objet de plusieurs vérifications du fait de son caractère contextuel. Elle relève donc d'un processus d'adaptation ou de re-médiation locale, limité dans le temps. Le trouble est quant à lui à la fois durable et avéré. Il doit être diagnostiqué selon un processus spécifique à la pathologie de référence si tant est qu'on puisse la définir avec un protocole stabilisé ce qui n'est pas vraiment le cas à l'heure actuelle (Peteers, 2017). Il relève de processus d'adaptations et de compensations scolaires importants, réguliers et surtout spécifiques. L'objectif d'une telle classification est essentiellement de définir des rôles différenciés des acteurs quant à la prise en charge des élèves.

Des sujets d'exploration et de recherche multiples

Pour clore cette première partie, nous présentons une brève revue de littérature anglo-saxonne qui nous permet d'étayer ici l'état des questions scientifiques concernant les troubles d'apprentissage en mathématiques dans le champ de la cognition. Cette recension provient d'une recherche utilisant l'expression MLD dans les articles scientifiques des revues du champ « mathematic education » en utilisant un filtre sur les 15 dernières années. Nous relatons seulement trois de ces problématiques ici, sachant que d'autres travaux permettront à moyen terme d'en exposer davantage (voir plus loin dans la présentation de l'équipe Riteam).

- Une grande hétérogénéité dans les processus de définition des MLD (Lewis & Fisher, 2016) :

> *« The field's understanding of MLD is predicated on researchers' ability to accurately identify students with an MLD. Currently there is no accepted consensus definition of MLD. » (Lewis& Fischer, 2016, p.339)*

- De nombreuses interrogations sur les critères de classification des MLD notamment en raison de leur manque de définition (Mazzocco & Myers, 2003) :

> *« In view of the lack of consensus in defining and measuring MD, the present report is not based on an a priori definition of MD; instead the focus of the report is to assess the outcome of using different criteria to define or classify MD. » (Mazzocco & Mayers, 2003, p.224)*

- Des modèles explicatifs des MLD diversifiés (Karagiannakis, Baccaglini-Frank, & Roussos, 2016) :

> *« The lack of consensus to identify the central characteristics of an MLD as well as the comorbidity and het- erogeneity that characterize the MLD students (Bartelet, Ansari, Vaessen, & Blomert, 2014; Szűcs & Goswami, 2013; Watson & Gable, 2013) have also led researchers to propose various models in order to explain different MLD subtypes. » (Karagiannakis, Baccaglini-Frank & Petros Roussos, 2016, p.116)*

Comme on vient de le voir dans un premier temps, les études actuelles sur les difficultés ou les troubles des apprentissages en mathématiques montrent que de nombreuses problématiques sont encore à investiguer : définition et classification, recherche de leurs causes, outils de repérages, modèles explicatifs, prises en charges adaptées, etc. Les outils de la didactique et de l'épistémologie semblent encore peu mobilisés même si la question de la spécificité de leurs objets et des environnements d'apprentissage ont fait l'objet de travaux montrant d'ores et déjà leur intérêt.

II. NOUVELLES PERSPECTIVES DE RECHERCHE

Dans une publication récente (Dias & Ouvrier-Buffet, 2018) nous avons présenté les objectifs de la constitution de notre équipe de recherche internationale sur les troubles d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques (RITEAM). Nous souhaitons ici revenir sur les problématiques de recherche ainsi que sur leurs perspectives à moyen terme. Trois axes structurent nos travaux notamment en fonction des questions repérées dans la revue de littérature. Ils seront accompagnés pour chacun d'eux d'une première liste de questions de recherche corrélées à ces problématiques.

1. Dispositifs et outils de repérage des MLD

Le repérage des MLD fait l'objet d'une pluralité de paradigmes selon les domaines scientifiques de référence et leurs cadres de référence théorique. Les outils et les dispositifs de repérage sont pour le moins très divers (Peteers, 2017) et doivent désormais faire l'objet selon nous d'études comportant un regard didactique davantage centré sur le couple savoir/connaissance en mathématique.
Questions de recherche associées

- Quels sont les outils utilisés pour diagnostiquer les MLD et de quelles disciplines scientifiques sont-ils issus ? Quels sont leurs fondements théoriques, à quelles définitions des MLD correspondent-ils ? Qu'évaluent-ils et quelle est leur portée ?
- Quelles sont les connaissances, les représentations et les conceptions des enseignants sur les MLD ? Quels sont leurs modes d'action (signalement et action) ?
- Quels pays sont investis plus précisément dans ces processus de repérage ? Existe-t-il des spécificités culturelles, langagières ?

2. Étude des spécificités de l'activité mathématique des élèves MLD dans des situations d'apprentissage

L'activité mathématique est entendue ici comme la résultante d'un processus cognitif combinant raisonnement et processus visuo-praxiques qui doit être étudié dans sa spécificité en regard des objets de la discipline des mathématiques. Il nous semble en effet primordial d'explorer les processus spécifiques de l'activité cognitive des élèves lorsqu'ils font et qu'ils apprennent des mathématiques afin de distinguer par exemple ce qui relève des erreurs nécessaires dans un apprentissage par adaptation et des erreurs ou échecs signes de dysfonctionnements plus sévères. Le domaine de l'analyse du raisonnement mathématique paraît être par exemple une clef de compréhension dans cet axe de recherche.
Questions de recherche associées

- Comment définir les composantes des raisonnements mathématiques nécessaires à un élève, à un étudiant, et au futur citoyen ?
- Comment caractériser les types de problèmes mathématiques permettant de mobiliser ces composantes ?
- Quelles sont les spécificités des environnements d'apprentissage susceptibles de mieux s'appuyer sur les potentiels d'apprentissage et de raisonnement des élèves ?
- Quelles sont les indices permettant de distinguer les erreurs constitutives d'un apprentissage de celles qui révèlent des difficultés ? Une typologie est-elle envisageable ?

3. Processus et dispositifs de soutien et d'étayage auprès des élèves MLD

Les dispositifs et les outils d'étayage (Dias, Sermier-Dessemontet & Dénervaud, 2016) nécessaires à un apprentissage par adaptation doivent faire l'objet de propositions didactiques spécifiques dans le cas des élèves MLD. Les politiques éducatives d'inclusion scolaire nécessitent actuellement le développement de processus d'adaptation, de compensation et de remédiations innovants pour répondre aux demandes légitimes de tous les enseignants. L'amélioration des dispositifs de repérage peuvent en effet conduire à augmenter le nombre d'élèves signalés scolairement comme ayant des besoins spécifiques et exercer une pression grandissante sur les enseignants (Deruaz & Dias, 2016).
Questions de recherche

- Quelles formations professionnelles, quelles pratiques enseignantes, quels gestes professionnels sont-ils liés à ces dispositifs ? Peut-on en faire une typologie ?
- Quelles nouvelles propositions concrètes de processus de re-médiation, de dispositifs et d'outils de soutien sont concevables et applicables (notamment dans le cadre de la formation des enseignants) ?
- Quelles collaborations entre les différentes catégories d'acteurs éducatifs sont nécessaires lors des prises en charge des élèves en difficultés ?

III. CONCLUSION

Les liens entre les difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques doivent faire l'objet d'un regard didactique toujours plus précis dans le contexte international des politiques éducatives privilégiant la notion d'inclusion scolaire. Les élèves ayant des besoins spécifiques rencontrent de plus en plus souvent des enseignants non spécialistes ni du repérage ni de la prise en charge de leurs difficultés, voire parfois de leurs troubles. Afin d'être à même de proposer des dispositifs et des outils améliorant les conditions de travail des professeurs lorsqu'ils enseignent des mathématiques, la collaboration entre les différents acteurs du système éducatif doit s'appuyer sur des études scientifiques. Notre équipe de recherche RITEAM s'emploiera donc à fédérer ce type de collaboration en poursuivant un triple objectif : améliorer la construction d'outils de repérage des difficultés et des troubles d'apprentissage, comprendre la spécificité cognitive de l'activité mathématique d'un sujet apprenant les mathématiques, et construire des outils d'aide à la prise en charge des élèves ayant besoin d'une scolarité spécifique.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BERTHELOT, R. & SALIN, M.-H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*. Thèse de doctorat, Université Sciences et Technologies-Bordeaux I, Bordeaux, France. Repéré à https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00414065/document

DERUAZ, M. & DIAS, T. (2016). Elèves en difficultés ? Dyscalculiques ? *Petit x*, *101*, 7-35.

DIAS, T. & OUVRIER-BUFFET, C. (2018). Perspectives de recherches sur les difficultés d'apprentissage en mathématiques. *Revue de Mathématiques pour l'école*, *229*, 47-53.

DIAS, T. (2015). Des mathématiques expérimentales pour révéler le potentiel de tous les élèves. *La nouvelle revue de l'adaptation et de la scolarisation*, *65*, 151–161. Retrieved from http://www.cairn.info/resume.php?ID_ARTICLE=NRAS_065_0151

DIAS, T. (2014). La diversité empirique pour faire exister les objets mathématiques. In *Mathematics and reality* (Vol. 24/1). Lyon: Aldon, G., Di Paola, B., Fazio, C. Consulté à l'adresse http://math.unipa.it/~grim/quaderno24_suppl_1.htm

DIAS, T. (2008). *La dimension expérimentale des mathématiques : un levier pour l'enseignement et l'apprentissage*. Thèse de doctorat. Claude Bernard Lyon 1, Lyon. Consulté à l'adresse http://hal.archives-ouvertes.fr/tel-00635724/

DIAS, T., SERMIER DESSEMONTET, R. & DENERVAUD, S. (2016). Etayer les élèves à besoins particuliers dans la résolution de problèmes : un modèle d'analyse. *Math-Ecole*, *225*, 4-9.

DIAS, T. & DERUAZ, M. (2012). Dyscalculie: et si les enseignants reprenaient la main? *ANAE. Approche Neuropsychologique Des Apprentissages Chez L'enfant*, *120–21*, 529–534.

KARAGIANNAKIS, G. N., BACCAGLINI-FRANK, A. E. & ROUSSOS, P. (2016). Detecting strengths and weaknesses in learning mathematics through a model classifying mathematical skills. *Australian Journal of Learning Difficulties*, *21*(2), 115–141. https://doi.org/10.1080/19404158.2017.1289963

LEWIS, K. E. & FISHER, M. B. (2016). Taking Stock of 40 Years of Research on Mathematical Learning Disability: Methodological Issues and Future Directions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *47*(4), 338–371. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.47.4.0338

MAZZOCCO, M. M. M. & MYERS, G. F. (2003). Complexities in identifying and defining mathematics learning disability in the primary school-age years. *Annals of Dyslexia, 53(1)*, 218–253. https://doi.org/10.1007/s11881-003-0011-7

PETEERS, F. (sous presse). Un trouble à l'interface entre différents champs disciplinaires (didactique des mathématiques, psychologie et sciences cognitives) : la dyscalculie. In S. Coppé & E. Roditi (Eds), *Actes de la XIXè école d'été de didactique des mathématiques.* Grenoble: La Pensée Sauvage.

VANNETZEL, L. (2012). Dyscalculiques ou laissés pour compte ? *ANAE. Approche Neuropsychologique Des Apprentissages Chez L'enfant*, *120–121*, 497–502.

VERGNAUD, G. (2011). Savoirs théoriques et savoirs d'action. In J. Barbier (dir), *Au fond de l'action, la conceptualisation* (pp. 275-292). Paris: Presses Universitaires de France.

DISCOURS NOOSPHERIEN DANS LE CHAMP DE L'ADAPTATION SCOLAIRE AU QUEBEC : CERTAINS EXEMPLES DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

Gustavo **BARALLOBRES**

GEMAS, Université de Québec à Montréal et Laboratoire CeDS

(Cultures et Diffusion des Savoirs, EA-7440), Bordeaux

barallobres.gustavo@uqam.ca

Laurie **Bergeron**

Université de Québec à Montréal, GEMAS

bergeron.laurie.2@uqam.ca

Résumé

Un mode de régulation du système éducatif au Québec centré sur l'évaluation et la performance affecte particulièrement le champ de l'adaptation scolaire. Nous analyserons l'évolution de certains des modèles dominants dans ce champ (psycho-médical, neuro-éducatif) et les difficultés des modèles didactiques à évoluer à l'intérieur de ce contexte institutionnel. L'analyse des documents officiels et des ouvrages pédagogiques concernant la question des difficultés d'abstraction en mathématiques permettra d'illustrer la manière dont les différents discours institutionnels influencent les pratiques d'enseignement des mathématiques en adaptation scolaire.

Mots clés : difficultés d'apprentissage, pratiques efficaces, inhibition, didactique des mathématiques

I. INTRODUCTION

Depuis la parution de la politique de l'adaptation scolaire (MELS, 1999), le ministère de l'Éducation du Québec propose que la réussite des élèves en difficulté d'apprentissage soit envisagée différemment selon leurs capacités. Dès lors, celle-ci est définie de façon plus large : « la réussite c'est l'obtention de résultats observables, mesurables et reconnus qui rendent compte de l'évolution de l'élève, des progrès continus enregistrés » (MELS, 1999, p. 17). Malgré tout, la réussite se concrétise et se mesure finalement par l'obtention du diplôme d'études secondaires (DES) ou de formation professionnelle (MELS, 2006a). Dans sa lutte contre le décrochage, le ministère de l'Éducation a instauré des voies d'action visant un taux de diplomation de 90 % dès 2030 (MEES, 2017) : interventions et accompagnement des élèves en difficultés pour les mener à l'obtention d'un diplôme ou d'une qualification ; efforts « sincères » (MELS, 1999, p.18) que doivent fournir les différents acteurs pour favoriser cette augmentation, etc. Nos analyses des différentes politiques et programmes ministériels (MELS, 1999 ; MELS, 2006b ; MEES, 2017, dans Bergeron, 2017) montrent que les actions proposées centrées sur la performance du système éducatif ne font aucunement référence à la « nature » des apprentissages envisagés: il s'agit plutôt de réussite à différents types d'examens puisque ce sont les bulletins ainsi que les résultats aux épreuves standardisées les indicateurs de performance des écoles (Cowley, 2014 ; MEES, 2016).

Malgré la mise en place depuis bientôt 30 ans de programmes et de mesures pour assurer l'accès à la classe ordinaire, la prévention des difficultés et le succès pour tous, il semblerait que les élèves identifiés « en difficulté » cheminant en classe spéciale soient moins nombreux à obtenir un diplôme que leurs pairs intégrés en classe ordinaire et que le taux d'intégration de ces élèves n'augmente pas (MELS, 2006a). À ce sujet, une analyse des cheminements d'élèves en difficulté montre que les élèves débutant leur secondaire en classe ordinaire sont plus nombreux à obtenir un diplôme que ceux qui le débutent dans une classe de cheminement particulier (MELS, 2006a) : un élève en difficulté d'apprentissage qui débute sa scolarité au secondaire en classe ordinaire à 12 ans aurait 5 fois plus de chance d'obtenir un diplôme qu'un élève de même profile qui le débute en classe de cheminement particulier. La classe de cheminement particulier a pour objectif d'aider les élèves ayant des difficultés à rattraper leur retard et vise à réintégrer les élèves au secteur régulier ; cependant, seulement la moitié des élèves commençant leur secondaire dans ce type de classe accède à la classe ordinaire et 68 % des élèves de 12 ans qui débutent leur secondaire en classe ordinaire arrivent à s'y maintenir.

Les injonctions ministérielles demandent aux enseignants de favoriser la réussite de tous et d'adapter leur enseignement en fonction des besoins et des capacités de chaque élève. Les politiques concernant l'adaptation scolaire au Québec (MELS, 1999) reposent sur une approche individualisée visant l'identification et la catégorisation des élèves handicapés ou en difficulté d'adaptation et d'apprentissage (EHDAA), grandement inspirée du modèle biomédical, faisant en sorte que l'on identifie chez ceux-ci un problème et ses manifestations, tout en tentant d'en expliquer les origines possiblement biologiques pour finalement prescrire un « traitement » pour les « guérir ». Pour chaque trouble et handicap est attribué un code de difficulté qui définit les conditions pour le diagnostic ainsi que les limitations et manifestations sur le plan scolaire qui y sont liées (MELS, 2007). Outre les différents troubles et handicaps définis, une autre catégorie d'élève est incluse chez les EHDAA : il s'agit des élèves en difficulté d'apprentissage. À l'inverse des troubles et des handicaps, la définition des élèves en difficulté d'apprentissage ne s'appuie pas sur des modèles médicaux. L'élève en difficultés d'apprentissage est défini comme (MELS, 2007, p.24):

Celui dont l'analyse de sa situation démontre que les mesures de remédiation mises en place, par l'enseignante ou l'enseignant ou par les autres intervenantes ou intervenants durant une période significative, n'ont pas permis à l'élève de progresser suffisamment dans ses apprentissages pour lui permettre d'atteindre les exigences minimales de réussite du cycle en langue d'enseignement et en mathématique conformément au Programme de formation de l'école québécoise.

Il faut remarquer qu'aucune précision n'est donnée sur la période de temps minimale pour attester qu'un élève est en difficulté d'apprentissage.

Bien que la définition d'élève en difficulté ne s'inscrit pas dans un modèle médical, le traitement des difficultés et l'enseignement proposé s'inspirent fortement de ces modèles. En conséquence, la formation initiale et continue des intervenants de ce domaine (enseignants et orthopédagogues) repose en sa majorité sur une approche psychologique au sein duquel les difficultés sont généralement interprétées comme étant associées à des dysfonctionnements cognitifs des élèves et les pratiques d'enseignement sont conçues comme des processus génériques non déterminés par la spécificité des savoirs à transmettre (Bergeron, 2017). Bien que les contenus varient d'une université à l'autre, Martinez (1999) soulevait qu'une grande partie de la formation des maîtres en enseignement en adaptation scolaire portait sur des contenus provenant de la psychologie cognitive. Il n'est alors pas étonnant que les tâches et préoccupations des enseignants en activité se situent plus sur le plan des difficultés des élèves que sur celui des contenus à enseigner (Giroux, 1999). D'ailleurs, l'apport de la didactique dans le cursus en enseignement en adaptation scolaire et sociale est souvent remis en question (Giroux, 1999).

De par son approche systémique, la didactique des mathématiques propose une analyse des problèmes concernant les élèves en difficulté qui tient compte des éléments tels que des phénomènes spécifiques d'enseignement/apprentissages ainsi que des conditions didactiques et non didactiques inhérentes aux situations d'enseignement (Roiné, 2005, 2009 ; Sarrazy et Roiné, 2006 ; Giroux, 2013 ; Perrin-Glorian,1993 ; Salin, 2007; Bloch et Salin, 2004). Les travaux dans l'espace francophone ont montré que les élèves de l'adaptation scolaire ne vivent pas le même historique scolaire que ceux des classes ordinaires (Barallobres, 2017 ; Bloch et Salin, 2004 ; Conne, 2003 ; Conne, Favre et Giroux, 2006 ; Favre, 1997 ; Giroux, 2013 ; Toullec-Théry, 2006 ; Roiné, 2009, 2010). Ils ont constaté, entre autres, qu'il y a une prévalence de la règle au détriment de la compréhension, ce qui conduit à une pré-algorithmisation des savoirs en jeu (Bloch et Salin, 2004 ; Giroux, René de Cotret, 2001) et un surinvestissement de certains savoirs identifiés comme emblématiques (les algorithmes de calcul) au profit d'autres savoirs (la géométrie, par exemple) (Conne, 2003 ; Conne, Favre et Giroux, 2006). Enfin, pour rendre accessibles les savoirs aux élèves et surmonter les difficultés et en tenant compte des stratégies promues récemment mentionnées, les enseignants vont bien souvent morceler les tâches et en choisir certaines qui sont axées sur des contenus en lien avec la vie quotidienne, visant ainsi la concrétisation des savoirs (Barallobres, 2009 ; Giroux, 2013 ; Roiné, 2010). Plusieurs de ces phénomènes didactiques découlent de l'échec potentiel anticipé par les enseignants (Favre, 2003) et du système qui les amène à modifier leurs pratiques (Roiné, 2014). Une logique d'adaptation (Giroux, 2013) semble s'installer dans ces classes, conséquence, entre autres, d'injonctions largement promues qui visent la réponse aux besoins de chaque élève et qui finalement, contribuent à un amoindrissement des savoirs. Ces phénomènes font en sorte que les élèves en difficulté d'apprentissage vivent un parcours différencié, appauvri et inégalitaire de par les propositions didactiques et les interactions stigmatisantes qui font partie de leur cheminement au sein de l'institution scolaire (Roiné, 2009, 2010, 2015).

La centration sur les caractéristiques des élèves, l'illusion de transparence des savoirs sous laquelle la psychologie cognitive construit ses propos, ainsi que la centration sur la réussite scolaire comme indicatif du progrès et des apprentissages amènent à un inversement épistémologique (Bardini, 2003) ou historique (Chevallard, 2009) faisant en sorte que l'enseignement des mathématiques auprès des élèves « en difficulté » se réduit à la présentation des règles avant la présentation de problèmes. Cette inversion pourrait être interprétée comme une résultante de l'influence des modèles pédagogiques adaptés favorisant un enseignement explicite des « concepts » (Bergeron, 2017). En voulant agir sur les processus cognitifs des élèves, la situation didactique par laquelle l'élève interagit avec le milieu dans le but d'acquérir un savoir spécifique est négligée (Giroux, 2014 ; Sarrazy, 2002 ; Roiné, 2009). Les enseignants deviennent ainsi « aveugles aux conditions didactiques nécessaires pour permettre aux élèves la compréhension de l'usage des savoirs mathématiques enseignés » (Roiné, 2009, p.255).

Notre analyse porte sur l'évolution de certains modèles dominants dans le champ de l'adaptation scolaire (psycho-médical, neuro-éducatif) et les difficultés pour l'approche didactique à évoluer à l'intérieur d'un contexte institutionnel où un cadre mentaliste prévaut. L'analyse des documents officiels et des ouvrages pédagogiques concernant la question des difficultés d'abstraction permettra d'illustrer la manière dont les différents discours institutionnels et pédagogiques influencent et pénètrent les pratiques d'enseignement des mathématiques en adaptation scolaire.

II. ÉVOLUTION HISTORIQUE DU CHAMP DE L'ADAPTATION SCOLAIRE AU QUEBEC

Par l'entremise d'une analyse sociohistorique, Gonçalves et Lessard (2013) identifient deux caractéristiques essentielles dans l'évolution du champ de l'adaptation scolaire au Québec :

- Premièrement, un changement dans le mode de régulation du système éducatif attribuant une part importante du pouvoir à des acteurs externes (évaluations et comparaisons nationales et internationales des systèmes éducatifs en contexte maintenant concurrentiel) et visant le rehaussement de la performance des institutions scolaires, ce qui renouvelle une tension propre au champ de l'adaptation scolaire entre équité et inclusion ;

- Deuxièmement, la persistance tout au long de la structuration du champ des médecins, psychologues et psychiatres, légitimée par la promotion, explicite ou implicite, des approches psycho-médicales dans le traitement des difficultés d'apprentissage.

Ils soulignent trois périodes importantes : 1963-1977, 1978-1994 et 1995-2010. La première période réfère à la démocratisation de l'éducation ainsi qu'à la mise en place du champ de l'adaptation scolaire, la deuxième correspond à la normalisation du système en réponse au courant de l'inclusion scolaire et finalement, la dernière (et encore actuelle) est caractérisée par la différenciation pédagogique et donc, une dénormalisation du champ de l'adaptation scolaire.

La démocratisation de l'éducation mise en place au cours des années soixante fait en sorte qu'un nombre important d'élèves en difficulté est pris en charge par le système scolaire par le biais de la création de classes spéciales, de la formation des professionnels dédiés à cette population et de la mise en place de dispositifs d'identification fondés sur des savoirs issus de la psychologie et la médecine. Les élèves handicapés et en difficulté d'apprentissage sont identifiés à partir de diagnostics d'orientation clinique et l'organisation des dispositifs de remédiation se réalise en général en dehors de la classe ordinaire. Dès lors, la formation des nouveaux professionnels à l'université est inspirée par la psychologie et appuyée sur une approche psychomédicale et clinique, ce qui implique une moindre place aux savoirs disciplinaires et didactiques dans la formation desdits professionnels.

À partir de 1978, le modèle psychomédical est fortement critiqué pour sa tendance à marginaliser les élèves identifiés en difficultés (Gonçalves et Lessard, 2013). Dès lors, est mise en place, une approche systémique inspirée de la pédagogie différenciée centrée sur les besoins spécifiques des élèves où on vise l'intégration. Des dispositifs mixtes sont donc mis en place (à l'intérieur et à l'extérieur de la classe) visant le retour des élèves en difficulté aux classes ordinaires. Dès lors, le rôle des professionnels de l'adaptation scolaire est davantage centré sur le soutien des enseignants du système régulier. Ce changement est accompagné d'un mouvement international qui fait la promotion des politiques éducatives d'intégration qui rapidement demande une intégration pleine en classe ordinaire afin d'assurer un parcours scolaire le plus normal possible. Au Québec, cet idéal d'intégration est mis en difficulté par l'émergence de deux tensions : d'une part, le droit de scolarisation des élèves en difficulté semble menacer celui des autres élèves (le manque de services appropriés surcharge les enseignants) et, d'autre part, la multiplication de professionnels de l'adaptation scolaire à l'intérieur de la classe est vue comme une menace par les enseignants. Sans compter que même au sein de ce paradigme d'intégration, les syndicats réclament des diagnostics de meilleure qualité nécessaires au suivi de l'élève et à la détermination des ressources appropriées pour orienter les interventions.

Un contexte international promouvant la production de « résultats mesurables » dans le but de distinguer « ce qui marche » et « ce qui ne marche pas » marque le passage à l'étape actuelle, en renouvelant une tension propre au champ de l'adaptation scolaire entre inclusion, équité et performance du système éducatif. Cette période est fortement inspirée des méthodes de la médecine pour organiser les dispositifs d'intervention auprès des élèves HDAA. En effet, l'intervention comprend le dépistage précoce des difficultés via l'évaluation diagnostique et l'élaboration d'un plan d'intervention (caractérisé par l'action à court terme, facilitant ainsi l'évaluation de l'efficacité de l'intervention). L'évaluation de la réussite éducative et de la qualité des services, en vue de reddition de comptes (ibid, 2013), devient la norme dans les modes de régulation du système éducatif où l'approche client est désormais prégnante. Dans ce contexte, les paramètres fondamentaux du système de financement de l'aide scolaire reposent sur les diagnostics basés sur des savoirs psycho-médicaux. Si bien les programmes universitaires incorporent des contenus didactiques dans la formation des intervenants en adaptation scolaire, les contenus psychologiques occupent une place bien plus importante.

Dans cette période, la légitimité des politiques éducatives est fondée sur une conception de la science caractérisée par la production de savoirs validés empiriquement de manière « objective », où la méthode des essais contrôlés randomisés constitue l'étalon or permettant d'instituer un discours de vérité. Le champ de l'adaptation scolaire plaide pour un système éducatif fondé sur des données probantes qui permettraient de montrer « scientifiquement » l'efficacité des interventions ainsi que sur une formation des enseignants basée sur la recherche. Dans la recherche d'efficacité et de gestion prévisionnelle de risques, la médecine et la psychologie bénéficient d'une légitimation sociale, d'où leur rôle référentiel (Gonçalves et Lessard, 2013).

III. LES PRATIQUES EFFICACES INSPIREES DE L'APPROCHE PSYCHO-MEDICALE ET LES DONNEES PROBANTES

Fonder les politiques éducatives en adaptation scolaire sur des savoirs validés empiriquement de manière « objective » semble être aujourd'hui une norme incontestable : qui pourrait s'opposer au fait qu'un volume important de données expérimentales supposément solides permette d'attribuer un statut particulier aux résultats des recherches et favoriser donc la prise impartiale de décisions, par la distinction entre ce qui « marche » et ce qui « ne marche pas »? La question du pluralisme interprétatif n'est qu'une affaire de nostalgiques : la vraie science n'avance que dans une seule direction (rappelons qu'Habermas avait nommé cela « la prétention positiviste à l'universalité », consistant à définir un modèle unitaire de scientificité universel, celui de la Science). Ainsi, la production de savoirs en éducation est fortement contrainte par des questions méthodologiques : c'est la méthode qui détermine ce qui est susceptible d'être un objet de recherche scientifique et non les questions et les problèmes qui émergent du champ spécifique. La fiabilité de l'outil (l'arsenal) méthodologique établit une hiérarchie entre les différents types de recherches, au-delà de la nature spécifique des objets caractéristiques de l'éducation.

Dans une analyse historique sur le développement des politiques de la preuve dans le domaine de l'éducation, Normand (2015) montre que leur émergence est associée à l'activisme de la droite américaine promouvant la sortie d'un modèle éducatif inspiré d'une politique de solidarité collective par le remplacement à paradigme à caractère économique (imputabilité des secteurs publics) basé sur l'optimisation de ressources et sur l'efficacité dans le traitement de problèmes éducatifs. Normand (2006) qualifie cette démarche comme une entreprise réduction de complexité du système scolaire afin de la rendre gérable comme appui aux décisions politiques et orientés par la recherche de réponses à court terme (guidés par l'urgence décisionnelle imposée par les courts mandats). Dès lors, toute question de valeur éducative est évacuée, car elle est difficilement objectivable et mesurable.

Sur la base de certaines études mettant en rapport les retards scolaires et le décrochage au secondaire, Bissonette, Richard, Gauthier et Bouchard (2010) soutiennent la nécessité de privilégier des interventions précoces dans la scolarité des élèves via l'identification des pratiques pédagogiques les plus susceptibles d'améliorer la performance scolaire de ceux dont les probabilités de décrocher sont élevées (pratiques efficaces basées sur des données probantes). Ces idéologues des « pratiques efficaces » -dispositifs issus de la recherche de « haute qualité » permettant d'améliorer les résultats scolaires des élèves dans un contexte d'enseignement - ne définissent toutefois pas la notion de « pratique. Ce qui se dégage de leurs écrits réfère à l'application d'un ensemble de règles, de techniques et des prescriptions permettant d'effectuer une activité ; une formation adéquate des enseignants basée sur des recherches de « haute qualité » (donnée évidemment par les éminents chercheurs œuvrant dans le domaine des pratiques efficaces, pour éviter des distorsions) garantirait alors l'efficacité de leurs actions. Il existerait donc des pratiques connues des chercheurs en éducation représentants de la Science à mobiliser dans toutes les classes, pour tous les élèves, quel que soit l'ordre d'enseignement, la discipline enseignée, le savoir concerné, le contexte organisationnel, culturel, social et économique local et global. L'enseignant n'aurait ainsi qu'à puiser dans ce réservoir de bonnes pratiques, à les adapter quelque peu à la situation pour enfin constater une amélioration de la performance des élèves aux examens ministériels ou aux tests internationaux. Ces résultats correspondent à ce que les sciences de la gestion qualifient d'outputs (en gestion, les outputs sont des résultats à court terme, tangibles, permettant de mesurer l'état du système) (MEES, 2017).

Cette conception de pratique d'enseignement évacue toute dimension culturelle et sociale recouvrant les intentions, les représentations, les idéologies et présuppose que l'apprentissage est le produit prévisible d'un enseignement basé sur des gestes identifiables et explicitables et que les actions effectives des acteurs engagés dans la relation éducative (en particulier, celles des élèves) et les arrière-plans culturels et sociaux ne jouent qu'un rôle secondaire.

Sous cette hypothèse, l'agir de l'élève n'aurait pas d'impact sur l'action de l'enseignant et sur les apprentissages obtenus, ce qui va à l'encontre de plusieurs recherches sur l'analyse des pratiques d'enseignement des mathématiques (Mercier, 1985 ; Brousseau, 1990). Jean Brun (2008) montre bien que les élèves ne sont pas seulement soumis à des contrôles externes venus des interventions organisées à dessein pour provoquer des apprentissages, mais qu'ils exercent des contrôles internes par l'intermédiaire des schèmes. Cette notion de pratique présume aussi que l'accumulation de ces micro-résultats serait garante d'un apprentissage à haute valeur ajoutée, que d'autres actions de l'enseignant que celles prévues par les dispositifs d'enseignement étudiés n'influencent pas les apprentissages des élèves -ce qui s'oppose à des résultats de recherches concernant l'obsolescence des situations didactiques- et que la reproduction d'une pratique d'enseignement n'a pas d'effets sur les résultats obtenus et sur les significations des objets de savoirs élaborés -ce qui va à l'encontre aussi des résultats obtenus en didactique des mathématiques (Arsac et Mante,1988; Artigue, 1989; Brousseau, 1990; Mercier, 1985). Il est important de remarquer que ces présupposés non explicités, guidant les observations réalisées et les données recueillies, ne sont pas validés empiriquement. La prétendue « objectivité » des résultats de recherche est teintée, dès le début, par des supposés épistémologiques qui sont le produit d'accords intersubjectifs ne pouvant être validés empiriquement.

C'est la prétention d'indépendance d'une subjectivité trop humaine qui rendrait les pratiques efficaces transférables et reproductibles. Pourtant, une dissociation explicite de la pratique enseignante et du sujet praticien (sujet épistémique, rationnel, mais également sujet désirant) relève d'une entreprise de rationalisation et de technicisation de l'enseignement qui, au terme de cette logique, pourrait même proposer de décharger les humains de tâche même d'enseigner -d'instruire, de former et d'éduquer- (Grossmann, 2009). Il convient de signaler que cette conception de pratique ne fait pas l'unanimité dans le domaine de l'éducation ; Beillerot (2003), par exemple, considère que si bien la pratique inclut l'idée de l'application, elle dépasse le niveau du « faire » et des gestes des acteurs impliqués :

> *La pratique est tout à la fois la règle d'action (technique, morale, religieuse) et son exercice ou sa mise en œuvre. C'est la double dimension de la notion de pratique qui la rend précieuse : d'un côté, les gestes, les conduites, les langages ; de l'autre, à travers les règles, ce sont les objectifs, les stratégies, les idéologies qui sont invoqués. Les pratiques ont donc pour nous une réalité sociale, elles transforment la matière ou agissent sur des êtres humains, elles renvoient au travail au sens large. (p.23)*

D'ailleurs, Hammersley (2002) montre bien que les pratiques d'enseignement sont soumises à une diversité de jugements en situation, en conséquence, non réductibles strictement à l'application de règles prédéfinie tout comme d'autres travaux sur l'obsolescence des situations didactiques (Brousseau, 1989), sur les phénomènes de variabilité didactique (Masselot et Robert, 2007), de mémoire didactique (Brousseau et Centeno, 1991) et sur la reproductibilité de situations didactiques (Artigue, 1989, Arsac et Mante, 1988) en rendent compte. Les jugements des praticiens s'inscrivent dans des contraintes de nature diverse ainsi que dans des temporalités multiples, et ils se situent à la base des ajustements permanents des actions, par le biais des interprétations in situ, dans l'urgence de la pratique (Bourdieu, 1980). Presque tous les auteurs mentionnés s'accordent sur le fait que les « savoir-faire » du praticien s'élaborent dans l'action.

1. Mais, qu'est-ce que la recherche de « haute qualité » fondant les pratiques efficaces ?

En se basant sur une classification proposée par Ellis et Fouts (1993), Bisonnette et al. (2010) distinguent trois types de recherches. Celles de niveau 1, de types descriptif (qualitatif, quantitatif ou corrélationnel) ayant par but de décrire un phénomène ou d'observer une corrélation possible entre deux variables. Ces recherches ne permettent en aucun cas d'établir des liens de cause effet ou de vérifier des hypothèses. Dans les recherches de niveau 2, un modèle, théorie ou hypothèse, élaborés à partir des recherches du type 1, font l'objet d'une mise à l'épreuve en salle de classe à l'aide de groupes expérimentaux et témoins (contrôles). Il s'agit de mesurer statistiquement les effets sur la performance scolaire des élèves des stratégies pédagogiques élaborées dans le contexte d'un cadre théorique explicite ou implicite. Selon les auteurs, ces recherches permettraient d'établir une relation de cause à effet entre deux ou plusieurs variables. Enfin, les recherches de niveau 3 visent à évaluer les effets des interventions pédagogiques recommandées à partir des résultats obtenus par des études de niveau 2, à large échelle dans des contextes de plus grande envergure. Le degré de validité interne est moins élevé que celles de niveau 2 en raison des difficultés inhérentes au contrôle des variables. Cependant, le degré de validité externe serait supérieur, compte tenu de la taille de l'échantillon et des contextes à l'intérieur desquels de telles études sont réalisées. Selon Gauthier (2006), pour répondre aux questions concernant l'efficacité d'une intervention, les études de niveaux 2 et 3 seraient les plus appropriées. Pour Bissonnette et ses collègues (2010), il en va même d'un impératif éthique et moral quant au choix des pratiques d'enseignement afin d'éviter de gaspiller de larges sommes d'argent (et non de causer préjudice à des élèves).

La méthode privilégiée dans les recherches de niveau 2 met l'accent sur une forme d'objectivité et de neutralité procédurale et repose sur un modèle de rationalité instrumentale au sein duquel la neutralité, la transparence et l'objectivité des décisions sont garanties par un usage systématique de règles de procédure et des méthodes rigoureuses (Saussez et Lessard, 2009). La notion de « donnée probante » apparaît comme une figure fondamentale dans la caractérisation de cette méthode. En ce qui concerne particulièrement l'objectivité, les « **données objectives** » sont définies comme étant celles que tout évaluateur identifierait et interprèterait de façon similaire » (traduction libre de l'International Reading Association, p. 18). On voit bien que si « tout » évaluateur identifie et interprète les données de façon similaire, soit les données « parlent » d'elles-mêmes et imposent aux chercheurs la lecture à réaliser (ce qui nous plonge avec violence dans un empirisme naïf que peu de chercheurs seraient disposés à soutenir), soit il existe un consensus autour des critères d'interprétation (un paradigme dominant, un seul cadre interprétatif) permettant, par exemple, de définir ce que serait un « lecteur compétent » ou ce que signifierait « connaître les fractions », ce qui est loin d'être le cas en éducation. En l'absence d'un tel accord interne, les indicateurs en question sont définis en fonction des références externes (tests standardisés, tests internationaux). La question n'est que déplacée : dans la quête obsessionnelle et illusoire d'impartialité, les tests sont modelés et produits à l'image de l'objectivité que l'on cherche à établir. L'objectivité défendue par le paradigme des données probantes n'est pas indépendante des présupposés épistémologiques que nous avons déjà mentionnés ; d'autres présupposés ne sont pas questionnés et sont même cachés derrière la méthodologie adoptée. Par exemple, la discussion autour de la question « qu'est-ce que savoir lire ? » est complètement évacuée et elle est remplacée par la formulation d'items mesurables ou par l'adoption en vrac des évaluations ministérielles ou internationales laissant ainsi entrevoir cette question comme étant réglée et faisant consensus.

On pourrait répliquer nos arguments en affirmant que les données probantes sont celles que tout évaluateur partageant les mêmes théories identifierait et interprèterait de façon similaire. Cependant, comment vérifie-t-on le partage d'une théorie ? De plus, le fait d'appartenir à un même paradigme ne garantit pas une « interprétation similaire », puisqu'évidemment l'interprétation de chaque chercheur ne découle pas « mécaniquement » de l'usage de la théorie.

Notre analyse n'implique aucunement un glissement vers un relativisme qui nierait toute question de validité ; il s'agit principalement d'attirer l'attention sur le fait que l'objectivité n'est qu'une forme d'intersubjectivité interne propre à des modes de production de connaissances d'une communauté de chercheurs partageant un certain cadre théorique :

> *On ne saurait « dé-subjectiviser » la connaissance humaine qu'en présupposant une connaissance-étalon comme le Savoir absolu. Il y a dans le scientisme positiviste comme l'assurance d'un pathos de vérité scientifique qui prend parfois des accents théologiques – comme si Dieu n'avait pu mourir que pour céder sa place à une hypostase de « la Science » […] Le statut ambigu des énoncés de base témoigne des difficultés de cette notion d'objectivité. Les protocoles d'expérience font seulement l'objet d'un consensus intersubjectif, révocable à tout moment, entre les scientifiques (Popper). L'objectivité de l'expérience se révèle donc être de l'ordre de l'intersubjectivité : intersubjectivité empirique du constant de l'observation et intersubjectivité transcendantale ou logique-linguistique de sa formulation (tout énoncé comporte des expressions générales qui restent nécessairement hypothétiques, car elles dépassent « toute expérience possible. »* (Habermas,1979, p 5)

2. Quelles sont les caractéristiques des pratiques efficaces promues par l'approche psycho-médicale ?

En général, les pratiques proposées ne sont pas spécifiques aux savoirs à enseigner, puisqu'elles adoptent une hypothèse cognitiviste postulant l'universalité des opérations de la pensée, l'existence de mécanismes de production de connaissances transférables d'un domaine de savoir à un autre, présupposant ainsi que les processus cognitifs permettant la manipulation de représentations mentales sont des conditions préalables au développement de la connaissance (Bronckart, 2007). Dans ce contexte, l'intervention doit être dirigée vers ces processus cognitifs et les difficultés d'apprentissage sont interprétées comme une défaillance desdits processus. Une analyse de divers documents concernant les interventions nous a permis de repérer certaines propositions récurrentes (Bergeron, 2017) : réduire une tâche complexe à des tâches simples (sous l'hypothèse que l'accès à une tâche complexe se fait par le moyen de l'accumulation des tâches intermédiaires) ; favoriser la manipulation d'objets concrets (sous l'hypothèse que l'accès aux processus d'abstraction se fait par l'intermédiaire de la manipulation d'objets physiques, sans précisions sur la nature de ladite manipulation) ; utiliser des dessins, des analogies ; etc.

En ce qui concerne l'enseignement des mathématiques, sur les onze méta-analyses analysées par Bissonnette et al. (2010), seulement trois concernent les stratégies d'enseignement dans ce domaine ; toutes en viennent sensiblement aux mêmes résultats : promouvoir l'enseignement directif/explicite des règles et des concepts mathématiques qui semble être la meilleure modalité d'enseignement à adopter avec des élèves en difficulté (Bergeron, 2017). Il s'agit d'un enseignement structuré et dirigé par l'enseignant qui procède du simple vers le complexe et se déroule habituellement en trois étapes : le modelage, la pratique dirigée et la pratique autonome (Rosenshine et Stevens, 1986). Dans ce contexte, l'apprentissage se traduit par la possibilité de réutilisation des savoirs appris dans de nouvelles situations ; la notion de « transfert » y joue un rôle central. Selon Côté et ses collègues (2013), la définition de transfert la plus utilisée en psychologie cognitive est la suivante : « capacité qu'a un apprenant de résoudre de nouvelles situations en mobilisant les connaissances apprises antérieurement dans des situations différentes (Frenay, 1994, p.73) » (p.75). Ces auteurs signalent aussi :

> *[...] le concept de "similarité" demeure un élément central dans la majorité des théories traditionnelles pourtant sur le transfert, c'est-à-dire que des éléments de la situation à résoudre doivent être mis en correspondance avec des éléments emmagasinés en mémoire, lors d'une situation précédente afin que le transfert puisse être réalisé. (ibid, p.75)*

Toujours selon ces auteurs, l'automatisation de certaines procédures diminuerait la charge cognitive, libèrerait la mémoire de travail et par conséquent permettrait aux sujets de consacrer des ressources cognitives au transfert. Cependant, aucune explication n'est fournie concernant la manière dont le travail répétitif fait à partir du modelage permet ensuite d'aborder des situations nouvelles : celui-ci ne serait destiné qu'à libérer la mémoire de travail ; les liens entre les situations anciennes et les situations nouvelles resteraient à charge de l'élève lui-même et ni la spécificité des savoirs ni l'organisation didactique de l'ensemble de situations ne sont mentionnés en tant qu'éléments intervenants dans l'établissement desdits liens. Comment définir la « similarité » de deux situations mathématiques ? Quels paramètres sont-ils utilisés ? Comment l'élève reconnait-il cette similarité ?... Aucune réponse n'est donnée à ce type de questions.

Il est fondamental de remarquer que les études sur les pratiques efficaces en mathématiques ne portent que sur des objets de savoir particuliers (en général un algorithme de calcul) et sont ensuite généralisées sans justification à l'ensemble des mathématiques. Par ailleurs, les auteurs ne mentionnent point les caractéristiques des instruments utilisés pour mesurer l'effet de l'intervention. Ce qui semble importer pour qualifier une modalité d'enseignement comme étant efficace est le fait que les élèves aient réussi la tâche sans questionner la nature des apprentissages effectifs.

IV. 3. L'APPROCHE NEURO-ÉDUCATIVE

Une nouvelle discipline, la « neuro-éducation », dit se situer à la rencontre de la psychologie, des neurosciences, des sciences cognitives et des sciences de l'éducation et se propose de mieux structurer les environnements d'apprentissage à partir des résultats obtenus sur le cerveau et de mieux adapter les méthodes pédagogiques en fonction de l'activité naturelle de nos fonctions cérébrales (Gaussel et Reverdy, 2013). Selon Masson (2014), l'architecture cérébrale impose des contraintes à la façon dont certains apprentissages scolaires peuvent prendre place : par exemple, une hypothèse suggère que l'architecture cérébrale initiale de l'apprenant limiterait l'évolution des conceptions non scientifiques sur plusieurs phénomènes naturels. L'imagerie cérébrale permettrait de montrer que les conceptions non scientifiques des élèves ne disparaissent peut-être jamais de leur cerveau, parce qu'elles découleraient d'intuitions fondamentales inscrites sous la forme de réseaux de neurones solidement établis, et que les étudiants avancés auraient recours à un contrôle cognitif et comportemental permettant aux sujets de résister aux automatismes, aux tentations ou aux interférences, l'inhibition (Houdé, 2000). Les tenants de cette approche affirment aussi que les façons d'enseigner peuvent avoir un effet sur la plasticité, le recyclage neuronal, la capacité d'inhibition des élèves et sur leur fonctionnement cérébral (par exemple, le fait de prévenir les apprenants de l'existence de pièges et de leur apprendre à identifier les réponses tentantes, mais incorrectes a un impact sur le fonctionnement cérébral et sur la capacité à recourir à l'inhibition pour corriger des erreurs fréquentes).

L'idée du conditionnement de la production de savoirs par des contraintes imposées par la structure cérébrale avait été déjà avancée par Dehaene (2010) pour qui les problématiques qui ont conduit l'humanité à produire ces savoirs semblent être négligeables :

> *Les outils mathématiques que sont les nombres ont évolué à la fois par le cerveau et pour le cerveau. Par le cerveau, parce qu'il est clair que l'histoire des nombres a été limitée par la capacité du cerveau humain à inventer des principes nouveaux de numération. Pour le cerveau, parce que seules ont été transmises aux générations suivantes les inventions qui s'adaptaient étroitement aux capacités perceptives et mnésiques humaines et qui, de ce fait, accroissaient les capacités de calcul de l'humanité.* (p.129)

Étrangement, les savoirs mémorisés et transmis par l'humanité (bien que conditionnés par la biologie) ne seraient pas sélectionnés selon leur utilité sociale ou leur efficacité dans la résolution de problèmes, mais plutôt strictement en fonction de leur adéquation aux capacités de l'espèce, au « cerveau » à lui seul, comme en témoigne le titre du paragraphe précédent: « Le cerveau, moteur de l'évolution culturelle ».

Il est important de souligner que cette hypothèse concernant les contraintes imposées par l'architecture cérébrale conduit à des affirmations difficilement tenables d'un point de vue théorique. En effet, les concepts évoqués par les différents auteurs mentionnés sont imprécis : aucune définition d'« intuition » n'est fournie et aucune distinction n'est faite entre les intuitions concernant des domaines différents. D'ailleurs, aucune observation, même par imagerie cérébrale, ne peut valider l'affirmation selon laquelle l'architecture des intuitions fondamentales serait inscrite dans le cerveau. Finalement, à partir de cas particuliers relatifs à des savoirs spécifiques (des aspects très ponctuels concernant la lecture ou des savoirs arithmétiques très précis), la neuro-éducation produit des généralisations abusives en introduisant, par exemple, la notion d'inhibition pour l'apprentissage de n'importe quel objet de savoir (et pour la résolution de toutes sortes de problèmes) (Barallobres, 2018).

La mise à l'écart de la nature des savoirs à apprendre, parmi la multitude d'autres aspects ignorés caractérisant la relation didactique et la relation éducative, se manifeste dans les conclusions proposées par Masson (2015) : la fonction de l'enseignant n'est plus celle d'aider les élèves à participer à une pratique socialement partagée, mais de les aider à développer des connexions neuronales pour apprendre n'importe quel concept. La structuration des environnements d'apprentissage (objectif déclaré de la neuro-éducation) n'a pas comme finalité de préserver la signification des pratiques scientifiques dans le contexte scolaire, mais celle d'améliorer le fonctionnement du cerveau (le recyclage de neurones, par exemple).

Malgré le fait de postuler l'interdisciplinarité et d'attribuer une place spécifique aux sciences de l'éducation, la prédominance du point de vue neuroscientifique est évidente. En effet, la définition même d'apprentissage qui a été proposée ne fait intervenir que des modifications structurelles au sens des réseaux cérébraux (Dehaene, 2011) : l'indicateur de l'existence d'apprentissage est le recyclage des neurones. Toute discussion concernant ce que signifierait, par exemple, « savoir compter » est réduite à l'activation ou pas d'une aire cérébrale. Autrement dit, la nature de ce qui est appris ne compte pas dans la définition donnée. Bien que les recherches en neurosciences cognitives concernant les mathématiques portent sur des questions très spécifiques, à savoir les origines biologiques et non l'enseignement ni l'apprentissage, Dehaene et d'autres auteurs (e.g. Masson, 2014; Houdé, 2011) s'aventurent sur le terrain de l'enseignement :

> *Nous ne pouvons guère espérer améliorer l'architecture de notre cerveau. Mais nous pouvons modifier nos méthodes d'enseignement et même nos pratiques mathématiques, afin de mieux les adapter aux contraintes de notre biologie. (Dehaene, p.150., 1997 ; 2010)*

1. Quelles sont les caractéristiques des pratiques d'intervention pour les élèves en difficulté promues par l'approche neuro-éducative ?

En faisant appel à des études neuro-scientifiques, Houdé (2015) propose des modèles pour l'éducation et les apprentissages scolaires :

> *L'éducation, les apprentissages scolaires, entre autres la lecture, reposeraient ainsi en grande partie sur le développement et le renforcement d'une fonction essentielle de notre cerveau : la capacité à résister aux automatismes de pensée, comme la généralisation en miroir, quand le recours au raisonnement logique devient nécessaire. (Houdé, 2015, p. 47)*

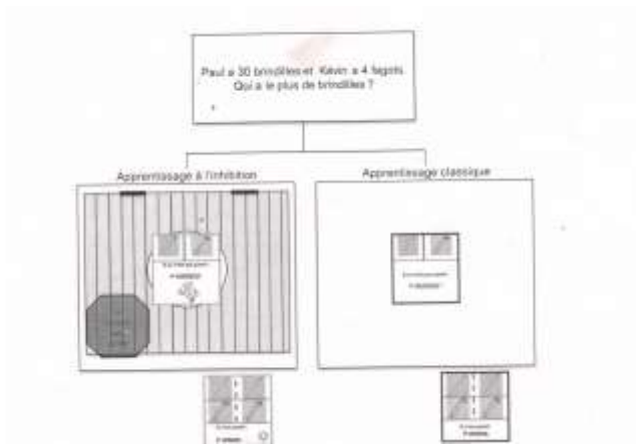
L'équipe d'Houdé propose une démarche pédagogique d'apprentissage à l'inhibition (approche métacognitive) centrée sur le contrôle cognitif et la détection de conflit et destinée à bloquer temporairement des stratégies sur-apprises ou automatisée qui deviennent efficaces en certaines situations (Lubin, et al., 2012). Le contrôle par l'inhibition est qualifié par Houdé (2011) comme l'intelligence « fluide » du cerveau qui, au contraire de l'automatisation par la pratique, permet de changer la stratégie de raisonnement par l'inhibition des automatismes. Dans cette « forme d'apprentissage », il s'agit d'exercer l'élève à activer la stratégie pertinente (appelé algorithme), mais surtout à inhiber celle qui ne l'est pas (appelé heuristique) pour résoudre un problème afin de corriger ses erreurs, à l'aide d'alertes exécutives verbales (par exemple, « Attention, dans ce type de tâche, il y a un piège ») et un dispositif didactique permettant la manipulation (sous l'hypothèse que l'action et la manipulation sont importantes dans les processus pédagogiques) (Lubin, et al., 2012).

Un des exemples donnés par les auteurs concerne ce qu'ils appellent « l'apprentissage de la dizaine chez des élèves de 6-7 ans ». Ils affirment qu'« acquérir une compréhension de la base 10 des nombres est nécessaire pour pouvoir réaliser des calculs sur des nombres supérieurs à dix » (p. 64) et qu'une des erreurs fréquentes qui entreraient en compétition « une heuristique » et « un algorithme » consiste à comparer deux collections présentées dans des unités différentes (18 unités par rapport à 2 dizaines : en comparant les nombres, les élèves affirment que 18 est plus grand que 2). Les auteurs identifient comme stratégie adéquate (algorithme) : « je transforme si nécessaire dans la même unité avant de comparer » et comme stratégie erronée : « je compare directement les nombres sans vérifier qu'ils sont dans la même unité » et considèrent que l'erreur pourrait ne pas être associée à un défaut de compréhension de la notion, mais à un défaut d'inhibition d'une connaissance antérieure. La stratégie pédagogique est la suivante :

1. L'enseignant présente une situation problème, les élèves sont invités à répondre par écrit et à illustrer comment ils ont procédé sur une feuille. Une mise en commun permet d'identifier les stratégies adéquates et l'enseignant met ensuite en évidence le piège dans cette situation :

> *Attention, dans ce type d'exercice, il y a un piège! Le piège c'est de comparer seulement les nombres, sans avoir vérifié avant que l'on parle bien de la même chose! (p. 66).*

2. Lors de la seconde séance, l'enseignant rappelle la situation problème, la stratégie correcte et le piège à éviter. Il s'agit maintenant d'utiliser un dispositif didactique composé d'une carte rouge en forme d'arrêt symbolisant l'heuristique/piège, une carte verte symbolisant l'algorithme/ réponse adéquate et l'attrape-piège (voir figure ci-dessous, Lubin, et al., 2012, p 68).



L'enseignant donne une carte-réponse verte à deux faces qui correspond à ce qu'il faut faire : sur une face est indiqué « si c'est pareil, je compare » et sur l'autre face, « si ce n'est pas pareil, je transforme » et pour ne pas tomber dans le piège, on met la carte rouge « je compare sans vérifier » sous les rayures, c'est l'attrape-piège. Pour chaque situation présentée lors de la première séance, on placera la carte verte au milieu de l'attrape-piège, en montrant la face qui correspond à la stratégie adéquate.

3. Lors de la troisième séance, un travail individuel est proposé avec d'autres situations et les élèves sont incités à utiliser la carte piège, la carte stratégie et l'attrape-piège s'ils le souhaitent. Une correction collective s'ensuit en explicitant l'unité dans laquelle on compare et en utilisant le matériel didactique.

Ce dispositif didactique expérimental, « original et novateur » selon les auteurs, serait bénéfique pour tous les domaines d'apprentissage, est réutilisé dans une recherche plus récente (Roell, et al, 2017) concernant la comparaison des nombres décimaux : il s'agit d'inhiber la stratégie heuristique « un plus grand nombre de chiffres implique un nombre plus grand » (par exemple, les élèves affirment que 1,45 est plus grand que 1,5). Malgré le fait que les auteurs parlent de l'importance de la « compréhension » et de la « conceptualisation » des nombres naturels et des nombres décimaux pour la poursuite académique des élèves, le travail effectué se réduit à la répétition de la « bonne stratégie » et au rejet de la mauvaise stratégie par le moyen des indices didactiques présents dans le matériel construit et par l'intervention directe de l'enseignant. Mentionnons également que cette stratégie d'enseignement est qualifiée d'efficace et de novatrice en comparaison avec des méthodes comme la répétition de la tâche et à une explication « cognitive et logique » du problème à résoudre par l'enseignant (Houdé, 2011). Aucune question n'est posée concernant la nature de la compréhension et de la conceptualisation que ce type de stratégies favoriserait. Ces auteurs ignorent les travaux développés depuis plus de 50 ans en didactique des mathématiques et, évidemment, semblent ne jamais avoir entendu le mot « contrat didactique ». Ce qui importe c'est l'injection de la « bonne stratégie » dans la tête des élèves à la manière d'un médicament, sans conflit et sans douleur. L'évaluation de cette stratégie d'enseignement est d'ailleurs toujours effectuée à court terme, par une méthodologie pré-test/post-test à laquelle bien des didacticiens ont renoncé, car « l'on ne sait tester que les apprentissages que l'on anticipe, parce que l'on ne sait pas tester la vie des savoirs appris, ni dans le temps ni dans les situations où ils sont utilisables » (Mercier et Buty, 2004, p.1).

V. L'APPROCHE DIDACTIQUE

Depuis les premiers travaux du courant français en didactique des mathématiques, les chercheurs font la distinction entre connaissances et savoirs (en tant que mémoire collective et collectivement constituée) et mettent en évidence que ce ne sont pas les savoirs l'objet de la transmission (enseignement), mais surtout la re-production de l'expérience permettant de désigner le savoir. Comme Sarrazy (2015) le remarque, « il ne s'agit pas de refaire encore (sur le modèle de l'enseignant), mais bien de faire de nouveau » (p. 6). Cette distinction entre connaissances et savoirs faite par la théorie de situations didactiques (Brousseau, 1990) permet de préciser la notion de « compréhension » d'un savoir spécifique par le biais des usages des connaissances associées et de leurs fonctions. Dans les modèles récemment présentés, les enseignants se substituent à leurs élèves pour les faire apprendre : de manière directe, dans l'enseignement explicite ou par les moyens des dispositifs didactiques qui anticipent l'enjeu didactique, dans l'apprentissage par inhibition. Le concept de contrat didactique ainsi que les paradoxes du contrat (Brousseau, 1990 ; Sarrazy, 1995) rendent compte des difficultés que cette substitution pose à la nature des apprentissages obtenus : « plus le maitre cherche à enseigner l'usage d'une règle, plus il réduit la possibilité de son usage » (Sarrazy, 1996, p.570). L'apprentissage se manifeste dans l'usage des connaissances dans de nouvelles situations et par l'entremise de conduites nouvelles s'accordant aux contraintes des situations et aux savoirs enseignés (ce qui est loin d'être la copie de ce que l'enseignant a montré). Cependant, aucune des propositions d'enseignement récemment analysées ne fournissent des explications concernant la manière dont de ce qui a été appris par répétition peut être réutilisé dans des situations nouvelles. Au contraire, les différentes théories didactiques prévoient, dans les dispositifs d'enseignement, une organisation du milieu permettant des moments de travail autonome et élaborent des concepts (adidacticité, dévolution, institutionnalisation, phases de réinvestissement) et des explications théoriques justifiant la possibilité d'utilisation de ce qui a été appris dans des situations nouvelles.

La question de la nature des apprentissages obtenus (les significations) a été toujours une préoccupation centrale de la didactique des mathématiques et comme Sarrazy (2015) le souligne, « cette question n'est pas seulement scientifique, elle est aussi foncièrement et noblement politique, car elle pose inévitablement celle de savoir quel type d'hommes et de femmes l'École doit former » (p. 14). Nous réitérons donc cette question à la lumière des constats précédents : l'école doit-elle former des femmes et des hommes dans l'incertitude nécessaire et propre à l'apprentissage ou dressés à suivre les indications d'autrui pour entrer (à coup de marteau) dans le « bon chemin » vers la connaissance ?

D'autre part, les didactiques disciplinaires (Brousseau, 1990 ; Chevallard, 1989 ; Bronckart, 2007 ; etc.) ont mis en évidence que les recherches concernant la structuration des environnements d'apprentissage requièrent, dans la définition des leurs objets, la prise en compte de plusieurs variables et de leur interaction. À l'intérieur même d'un domaine scientifique, la spécificité de l'algèbre, par rapport à celle de la géométrie, pose des problèmes d'enseignement complètement différents qui ne peuvent se réduire à l'activation ou pas des aires cérébrales liées aux mathématiques. En particulier, la didactique des mathématiques montre que l'analyse des relations des élèves à l'égard des objets de savoir ne peut ignorer des contrats implicites régulant l'action didactique (Brousseau, 1990). De plus, l'adaptation des méthodes pédagogiques en fonction de l'activité naturelle de nos fonctions cérébrales ne peut ignorer les usages sociaux des savoirs : les mathématiques enseignées font partie d'une pratique sociale plus large que la pratique scolaire.

Considérant que l'étude d'une pratique d'enseignement ne peut se réduire à l'analyse de ses effets sur le cerveau des élèves et adoptant une approche systémique qui considère que connaître les mathématiques ne saurait se réduire à la connaissance de théorèmes ou d'algorithmes, mais à reconnaître leurs conditions d'usage, la didactique des mathématiques se propose d'étudier les conditions de l'installation dans le système didactique de situations d'enseignement qui engagent l'élève à produire des connaissances mathématiques. L'analyse de ces conditions, fondée en partie sur des aspects cognitifs et sur le développement des élèves, ne s'y réduit pas ; elle donne une place fondamentale à la nature du savoir mathématique et aux interactions élève-savoir-enseignant au sein du système didactique (Chevallard, 1985). Dans ce contexte, les propositions venant de la psychologie ou de la neuro-didactique, du type « manipuler des objets », « découper les tâches dans des petites tâches », se traduisent par une analyse spécifique du milieu.

En ce qui concerne les difficultés d'apprentissage, divers auteurs en didactique de mathématiques (Bloch et Salin, 2004 ; Deblois, 2003 ; Giroux, 2014 ; Roiné, 2009 ; Sarrazy, 2002 ; etc.) s'éloignent d'une interprétation des difficultés d'apprentissage exclusivement en termes de déficits cognitifs et proposent que les interventions d'enseignement ne portent pas sur les processus cognitifs ou les « spécificités » des élèves, mais sur les situations didactiques favorisant l'établissement de relations entre connaissance et situations. Les fonctions du savoir mathématique jouent un rôle essentiel autant dans l'interprétation des difficultés que dans la construction des environnements d'enseignement/apprentissage.

Enfin, remarquons que l'explicitation n'est pas absente dans les modèles didactiques, mais qu'elle prend de formes différentes : Brousseau (1990) souligne l'importance de l'explication des modèles implicites d'action pour qu'ils perdurent dans le temps et puissent être réinvestis dans des nouvelles situations et élabore des situations spécifiques (les situations de formulation) pour le rendre possible ; l'auteur introduit aussi la notion d'institutionnalisation favorisant le passage des connaissances de leur rôle de moyen de résolution d'un problème à celui de référence pour des utilisations futures. Brousseau (1990) introduit la notion d'obstacle comme :

> *Un ensemble de difficultés d'un actant (sujet ou institution), liées à "sa" conception d'une notion. Cette conception a été établie par une activité et par une adaptation correctes, mais dans des conditions particulières, qui l'ont déformée ou qui en ont limité la portée. Les difficultés créées par cette conception sont liées par des "raisonnements", mais aussi par les nombreuses circonstances où cette conception intervient. Ainsi la conception résiste au simple apprentissage d'une connaissance plus correcte. Les difficultés semblent disparaître, mais elles réapparaissent de façon inattendue et causent des erreurs par des relations insoupçonnées. L'identification et l'inclusion explicite du rejet d'un obstacle dans la nouvelle connaissance sont généralement des conditions nécessaires à son usage correct. (p.135)*

La notion d'obstacle rejoint celle d'erreur récurrente mentionnée par Houdé (2000) ; cependant, en didactique des mathématiques, le dépassement de certaines difficultés associées à ces obstacles ne met pas l'accent sur une capacité ou un contrôle cognitif et comportemental (Houdé, 2000), mais sur un rejet explicite de l'obstacle dans le contexte de situations mettant en évidence les conditions d'usage des connaissances. Le rejet passe par le contrôle (par des connaissances) des situations didactiques et non pas par le récit (ou un entrainement guidé) de la bonne réponse.

VI. Un discours essentialiste qui transcende le champ de l'adaptation scolaire au Québec : le cas de l'abstraction

Dans le cadre de ce texte, nous avons montré, à l'aide d'une analyse de l'évolution du champ de l'adaptation scolaire, que le système d'éducation spécialisée est imprégné de l'analogie au monde de la médecine et que celle-ci implique un regard et un traitement particulier des « difficultés d'apprentissage » qui évacue toutes questions d'ordre didactique. En effet, la prégnance du discours médical ainsi que la légitimité qui lui est accordée se repère dans les programmes éducatifs du Québec. Dès lors, l'apprentissage et les difficultés d'apprentissage en mathématiques sont traités comme des phénomènes strictement cognitifs ; en particulier, l'apprentissage est considéré comme une appropriation individuelle et non comme une démarche collective, ce qui entraîne des recommandations orientées sur l'individualisation de l'enseignement et le traitement des capacités cognitives des élèves (Roiné, 2015).

Dans différents discours de l'adaptation scolaire au Québec, il est fréquemment mentionné que les élèves ont des « difficultés d'abstraction » qui entravent les apprentissages en mathématiques. Toutefois, bien que plusieurs pistes d'interventions soient proposées pour remédier aux « difficultés des élèves », la notion d'abstraction ou de difficultés d'abstraction en mathématiques qui émerge de ces discours reste floue. Afin de mieux comprendre la trame sous-jacente aux injonctions orientant les pratiques d'enseignement des mathématiques en adaptation scolaire (discours institutionnels et pédagogiques), nous avons cherché, par l'entremise d'une analyse sémantique conceptuelle de contenu (Mucchielli, 2006), à identifier certains de leurs fondements théoriques et idéologiques (Bergeron, 2017).

Nos analyses nous ont permis de constater que l'abstraction est présentée comme étant du ressort de l'élève et en lien étroit à ses capacités cognitives, métacognitives, constituée notamment d'expériences « personnelles ». La nature des expériences, le rôle de l'enseignant et l'apport de la culture ne sont nullement mentionnés. L'abstraction est alors présentée comme un processus qui s'apprend, qui se transmet, qui se programme par le biais de stratégies cognitives et métacognitives, donc de règles à suivre.

> *Dans un premier temps,* ***l'objectif de la métacognition a été d'amener les élèves à prendre conscience de la succession des opérations mentales qui conduisent à l'abstraction et à la généralisation.*** *(Bath, p. 141)*

Quant à elles, les difficultés d'abstraction sont liées à une certaine rigidité cognitive de l'élève ainsi qu'à des troubles de langage :

> *[…] Difficultés associées : Déficit de la mémoire et/ou autres fonctions exécutives ; Difficultés de perception du temps* ***; Rigidité/Difficultés de généralisation ; Difficultés d'abstraction****. (CS de la Seigneurie-des-milles-îles, p. 19)*

Dans la plupart des discours officiels (ministère de l'Éducation, commissions scolaires) et pédagogiques (***Un cerveau pour apprendre les mathématiques,*** David A-Sousa, 2010 et ***L'apprentissage de l'abstraction,*** Britt-Mari Barth, 2013), l'abstraction en mathématiques est majoritairement perçue comme un processus générique qui est appuyé ou même extrait de l'expérience sensorielle : en conséquence, il serait préférable que les situations d'enseignement soient en lien avec le quotidien des élèves, de segmenter les tâches, de passer par le concret pour ensuite abstraire et de miser sur la manipulation d'objets concrets et cela, peu importe la nature des objets mathématiques en question.

> *De plus, si la spécificité de la mathématique, comme langage et comme outil d'abstraction, exige de traiter de façon abstraite les relations entre les objets ou les éléments de situations,* ***son***

> ***enseignement au secondaire <u>est plus efficace</u> lorsqu'il prend appui sur des objets concrets ou des éléments de situations tirées de la réalité****. (PFEQ, 1er cycle, 2006, p. 232)*

Dans un tel contexte, le rôle de l'enseignant est de gérer les processus mentaux des élèves et il devient en premier lieu responsable du bon développement intellectuel de l'élève.

> *Pour amener l'élève à réussir dans ses activités mathématiques****, l'enseignant doit l'aider à gérer ses processus mentaux*** *et lui donner fréquemment l'occasion de s'interroger sur ce qu'il apprend et sur la manière dont il apprend (Programme de formation de l'école québécoise, (PFEQ, 2e cycle, 2006, p.16)*

L'évacuation de considérations didactiques s'effectue au profit d'une vision centrée sur la cognition de l'élève où l'enseignant n'est plus porteur du savoir dont il est spécialiste, mais il devient un « motivateur » d'élèves.

> *Par conséquent, les enseignants de mathématiques devraient chercher à créer des classes où les élèves sont motivés,* ***car les apprenants motivés traitent activement l'information****, ont une meilleure compréhension de la matière et ont de meilleures aptitudes en résolution de problèmes.* ***Une telle approche répond aussi au besoin des élèves de participer activement à leur apprentissage*** **. (A.Sousa,2010, p. 133, * en référence à A.Sousa, 2002)*

Nos conclusions rejoignent en tout point celles de Roiné (2009) : « c'est en effet le cerveau de l'élève qui est mis au centre du système éducatif » (p.96). En cohésion avec l'idéologie mentaliste, les difficultés d'abstraction sont imputables à la cognition et, plus précisément, à des défauts cognitifs de l'élève. Écartant le fait que les objets de savoirs peuvent en eux-mêmes générer des difficultés (Fisher, 2009), les difficultés d'abstraction sont attribuées à des origines fonctionnelles, biologiques ou neurologiques. Dans certains cas, elles sont la résultante d'un manque de motivation et de volonté de l'élève.

Dans ce sens, puisque les élèves ont des « difficultés d'abstraction », des mécanismes de « réduction d'abstraction » basés sur la manipulation matérielle d'objets physiques sont mis en place, sous l'hypothèse que ces manipulations rendraient visibles les propriétés et les relations cherchées, celles-ci étant supposément contenues dans l'objet en question :

> *Présenter les problèmes par étapes simples ; Enseigner les étapes et les gestes ; Pratiquer le modelage (montrer à l'élève la démarche à voix haute) […] Favoriser l'expérimentation concrète et la manipulation […]* ***Partir du concret vers l'abstrait (et non l'inverse)****. (CS de Laval, 2013, p. 50)*

Les interventions dites efficaces pour traiter les difficultés d'abstraction sont en fait des interventions destinées à éviter et contourner les obstacles; dans ce contexte, elles réfèrent à certains phénomènes didactiques repérés au sein recherches en milieu francophone tels que la prévalence de la règle et le morcèlement des tâches (Bloch et Salin, 2004 ; Conne, 2003 ; Conne, Favre et Giroux, 2006 ; Giroux, 2013). En particulier, la prévalence accordée à la manipulation et au concret semble être le principal point phare à suivre par les enseignants dans l'organisation de l'enseignement des mathématiques. Les implications de cette concrétisation des savoirs par rapport aux significations construites ont été partiellement identifiées par certains auteurs (Barallobres, 2009 ; Giroux, 2013 ; Roiné, 2010).

VII. REMARQUES FINALES

Les discours officiels légitiment les analyses des difficultés d'apprentissage en mathématique centrées sur le fonctionnement cognitif des élèves et proposent, en même temps, un ensemble de procédures et d'orientations guidées par ces analyses. Malgré quelques résistances à la « médicalisation de l'éducation », force est de constater que la figure du médecin et de la médecine (d'une certaine médecine) structure fortement l'imaginaire de ce que devrait être l'agir d'enseignant en adaptation scolaire. Une enquête informelle menée auprès de 33 étudiantes de maîtrise en orthopédagogie (février, 2018) identifie trois éléments essentiels dans le travail orthopédagogue : évaluation, diagnostic, intervention.

Comme Brousseau (1996) l'explicite, les procédés ostensifs sont souvent efficaces et économiques dans la vie courante et fonctionnent assez bien pour faire identifier une personne, une espèce animale ou un type d'objet, à l'aide d'un répertoire de reconnaissance « universel », en même temps qu'ils sont exigés banalement dans les rapports institutionnels élémentaires. Dans l'actuel paradigme éducatif à caractère économique et obsédé par la performance aux évaluations (surtout internationales), l'enseignement explicite resurgit en tant que technique « efficace » pour certaines formes de connaissances à condition qu'elles soient réinvesties immédiatement. En faisant fi de toutes les théories sur le langage (linguistiques, philosophiques, sociologiques), Gauthier et al. (2013) prétendent évacuer la question des rapports complexes entre l'implicite et l'explicite en affirmant que par le dire (rendre explicite pour les élèves les intentions et les objectifs visés dans la leçon et rendre explicites et accessibles les connaissances antérieures dont ils auront besoin), on éviterait les fausses interprétations, les « mal entendus », le non-dit. De plus, la non considération de la spécificité des savoirs (rappelons que les promoteurs de l'enseignement explicite ne sont pas des spécialistes disciplinaires), l'indifférence aux processus d'apprentissage à long terme et aux phénomènes d'enseignement conditionnant les significations des connaissances élaborées et l'adoption du concept banal de « transfert » (Côté et al., 2013) conduit à une extension non fondée de cette méthode à n'importe quel objet de savoir.

D'ailleurs, la fascination que provoquent chez le grand public les découvertes sur le fonctionnement du cerveau, l'illusion de trouver toutes les réponses aux questions que l'humanité se pose depuis des siècles dans des images cérébrales, la recherche d'explications par des mécanismes neuronaux mesurables, à l'occasion visibles, placent les neurosciences comme candidates à fonder « scientifiquement » et « solidement » une science de l'apprentissage. Sous l'hypothèse que les difficultés (d'apprentissage, d'adaptation, etc.) ont leur origine dans le « cerveau », les neurosciences éducatives développent une méthodologie de recherche extrêmement exigüe, basée sur l'analyse des différences cérébrales entre cerveaux « affectés » et cerveaux « normaux » (remarquons que la définition des critères de « normalité » est elle-même la marque d'une orientation épistémologique forte souvent laissée étouffée). Ces orientations épistémologiques et idéologiques ont évidemment des conséquences éducatives. Supposer, par exemple, que les causes des difficultés d'apprentissage sont à chercher dans le cerveau des élèves implique de faire carrément l'impasse sur la spécificité des savoirs, le rôle de la culture, le contenu sémantique (et non pas seulement syntaxique) de la pensée, la place de l'enseignement, le poids des institutions, etc. Les phénomènes éducatifs sont dès lors interprétés dans un cadre strictement naturaliste.

Analyser et étudier la complexité de la pratique d'enseignement, comme le fait la didactique des mathématiques, d'un point de vue systémique, sans faire appel aux techniques de management appliquées à l'école ou à celles de la recherche médicale, en développant des éléments théoriques pour interpréter ce que l'on observe, adoptant comme mode de production de connaissance la confrontation d'interprétations et de paradigmes va à l'encontre de « la prétention positiviste à l'universalité » (Habermas) et de la vénération de La Science comme la nouvelle religion des temps modernes.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

A. SOUSA, D. (2010). *Un cerveau pour apprendre les mathématiques*. Montréal : Chenelière Éducation.

ARSAC, G. & MANTE, M. (1988). Le rôle du professeur, Aspects pratiques et théoriques, reproductibilité. Cahiers du Séminaire de Didactique des mathématiques et de l'informatique. Grenoble : LSD-IMAG, pp. 79-105.

ARTIGUE, M. (1989). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 9*(3), 281-308.

BARALLOBRES, G. (2009). Caractéristiques des pratiques algébriques dans les manuels scolaires québécois. *Petit x*, 80, 55-76.

BARALLOBRES, G. (2017). Ciertos fenómenos didácticos que caracterizan las dificultades de aprendizaje en la transición de la aritmética al álgebra en la escuela secundaria. *Revista Union*. *51*, 27-47.

BARALLOBRES, G. (2018). Réflexions sur les liens entre neurosciences, mathématiques et éducation. *McGill Journal of Education*. Sous presse.

BARDINI, C. (2003). *Le rapport au symbolisme algébrique : une approche didactique et épistémologique*. Thèse de Doctorat. Université Paris-Diderot-Paris VII.

BARTH, B. M. (2013). *L'apprentissage de l'abstraction* (2e éd.). Montréal : Chenelière Éducation.

BEILLEROT, J. (2003). L'analyse des pratiques professionnelles: pourquoi cette expression? *Cahiers pédagogiques. Cercle de Recherche et d'Action Pédagogiques, 346,* 12-13. En ligne : http://www.cahiers-pedagogiques.com/L-analyse-des-pratiques-professionnelles-pourquoi-cette-expression

BERGERON, L. (2017). *Difficultés d'abstraction en mathématiques : certains fondements théoriques et idéologiques du discours noosphérien de l'adaptation scolaire*. Mémoire de maîtrise. Université du Québec à Montréal.

BISSONNETTE, S., RICHARD, M., GAUTHIER, C. & BOUCHARD, C. (2010). Quelles sont les stratégies d'enseignement efficaces favorisant les apprentissages fondamentaux auprès des élèves en difficulté de niveau élémentaire ? Résultats d'une méga-analyse. *Revue de recherche appliquée sur l'apprentissage*, *3*(1), 1-35.

BLOCH, I. & SALIN, M-H. (2004). *Contrats, milieux, représentations : études des particularités de l'AIS*. Actes du séminaire national de didactique des mathématiques de l'ARDM, Paris : Université de Paris 7.

BOURDIEU, P. (1980). *Le sens pratique*. Paris : Éditions de Minuit.

BRONCKART, J.P. (2007). De l'activité collective à l'action et à la pensée individuelles pour une psychologie fermement vygotskienne. In M. Merri (dir.), *Activité humaine et conceptualisation : questions à Gérard Vergnaud* (pp. 121-141). Toulouse : Presses Universitaires du Mirail.

BROUSSEAU, G. (1996). *Théorie des situations didactiques*, Cours donné à l'Université de Montréal en juin 1997 à l'occasion de la remise du doctorat *honoris causa* à G. Brousseau.

BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

BROUSSEAU, G. (1990). Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 9*(3), 309-336.

BROUSSEAU G. & CENTENO J. (1991). Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant. *Recherches en Didactique des Mathématiques (éd.) La Pensée sauvage, 11* (2.3), 167-210.

BRUN, J. (2008). Pour les débats de RDM. *Recherche en didactique des mathématiques, 28*(1), 67-69.

CHEVALLARD, Y. (1985). *La transposition didactique - Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD, Y. (1989). On Didactic Transposition Theory : Some Introductory Notes. In International Symposium on Research and Development in Mathematics (pp. 51-62). Bratislava, Czechoslavakia.

CHEVALLARD, Y. (1991). *La transposition didactique*. Grenoble : La pensée sauvage.

CHEVALLARD, Y. (2009, mars). *Quel avenir pour les mathématiques au collège et au lycée ? Les mathématiques dans la cité*. Exposé présenté dans le cadre des conférences de la famille mathématique (IUFM) Académie d'Aix-Marseille.

COMMISSION SCOLAIRE DE LAVAL. (2013). *Vers des pratiques pédagogiques adaptées : guide d'accompagnement*. Laval : l'auteur. Récupéré de http://www.aqifga.com/spip/IMG/pdf/GUIDE_EBP_Nov2013.pdf

COMMISSION SCOLAIRE DE LA SEIGNEURIE-DES-MILLES-ÎLES. (s.d). *Les difficultés d'apprentissage*. Saint-Eustache : CSSMI.

CONNE, F. (1992). Savoir et connaissance dans la perspective dans la perspective de la transposition didactique. *Recherches en Didactiques des Mathématiques, 12*(2), 221-270.

CONNE, F. (2003). Interactions de connaissances et investissement de savoir dans l'enseignement des mathématiques en institutions et classes spécialisées, *ACELF, 31*(2), 82-102.

CONNE, F., FAVRE, J-M. & GIROUX, J. (2006). Répliques didactiques aux difficultés d'apprentissage en mathématiques : le cas des interactions de connaissances dans l'enseignement spécialisé. In P.A Doudin, L. Lafortune (dir.), *Intervenir auprès d'élèves ayant des besoins particuliers : quelle formation à l'enseignement ?* (pp.117-142). Québec : Presses Universitaires du Québec.

COTE, M.-F., MERCIER, J. & LAPLANTE, L. (2013). L'efficacité d'une intervention orthopédagogique sur le transfert des apprentissages en lecture : étude de trois cas d'élèves en difficulté. *Revue Canadienne de l'Éducation, 36*(3), 72–107. Récupéré de http://www.jstor.org/stable/canajeducrevucan.36.3.72

COWLEY, P. (2014). *Bulletin des écoles secondaire du Québec 2014*. Repéré à https://www.fraserinstitute.org/sites/default/files/quebec-secondary-school-rankings-20140.pdf

DEBLOIS, L. (2003, Juin). Les enjeux d'une formation continue chez des orthopédagogues. *20e Congrès de l'Association Internationale pour la Pédagogie Universitaire (*AIPU). Sherbrooke.

DEHAENE, S. (1997). *La bosse des maths*. Paris : Odile Jacob.

DEHAENE, S. (2010). *La bosse des maths 15 ans après*. Paris : Odile Jacob

DEHAENE, S. (2011). *Apprendre à lire - Des sciences cognitives à la salle de classe*, Paris : Odile Jacob.

ELLIS A. & FOUTS J. (1993). *Research on educational innovations*. Princeton: Eye on Education.

FAVRE, J-M. (1997). *L'échec, le temps, la multiplication : étude des effets de deux contraintes didactiques sur l'enseignement et l'apprentissage de la multiplication dans une classe spécialisée, par comparaison avec l'enseignement et l'apprentissage de la même opération dans une classe primaire*. Mémoire de maîtrise. Université de Genève.

FAVRE, J-M. (2003, mars). Étude des effets de deux contraintes didactiques sur l'enseignement de la multiplication dans une classe d'enseignement spécialisé. In Actes du Séminaire national, ARDM (pp.109-126). Paris : Université Paris Diderot.

FISCHER, J.-P. (2009). Six questions ou propositions pour cerner la notion de dyscalculie développementale. *ANAE Approche Neuropsychologique des Apprentissages chez l'Enfant*, *21*(102), 117-133.

FRENAY, M. (1994). *Apprentissage et transfert dans un contexte universitaire*, Thèse de doctorat non publiée. Louvain-la-Neuve : université catholique de Louvain.

GAUSSEL, M. & REVERDY, C. (2013). Neurosciences et éducation: la bataille des cerveaux. *Dossier de veille de l'IFÉ*, *86*, 1-40. Réupéré de https://ife.ens-lyon.fr/vst/DA-Veille/86-septembre-2013.pdf

GAUTHIER, C., BISSONETTE S. & RICHARD, M. (2013). *Enseignement explicite et réussite des élèves*. Bruxelles : De boeck.

GIROUX, J. (1999). La formation professionnelle à l'enseignement des mathématiques en adaptation scolaire : quel rôle peut jouer la didactique ? In A. Jeannel, J.P. Martinez et G. Boutin (dir.). *Les recherches enseignées en espaces francophones, Sciences en construction et enseignement universitaire* (pp. 159–180). Montréal : Groupe Lire.

GIROUX, J. (2004). Échanges langagiers et interactions de connaissances dans l'enseignement des mathématiques en classe d'adaptation scolaire. *Revue des sciences de l'éducation*, *30*(2), 303–327. DOI:10.7202/012671ar

GIROUX, J. (2013). Étude des rapports enseignement/apprentissage des mathématiques dans le contexte de l'adaptation scolaire : Problématique et repères didactiques. *Education& didactique*, *7*(1), 59-86.

GIROUX, J. (2014). Les difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques : historique et perspectives théoriques. In C. Mary et L. Theis (éds), *Recherches sur les difficultés d'enseignement et d'apprentissage en mathématiques.* (pp. 11-44). Presses de l'Université du Québec.

GIROUX, J. & RENE DE COTRET, S. (2001). *Le temps didactique en classe de doubleurs*. *Actes de l'AFDEC, 7 et 8 juin 1999*, Montréal : Université de Montréal.

GONÇALVES, G. & LESSARD, C. (2013). L'Évolution du champ de l'adaptation scolaire au Québec : politiques, savoir légitimes et enjeux actuels. *Canadian Journal of Education/Revue canadienne de l'éducation*, *36*(4), 327-373. Récupéré de http://journals.sfu.ca/cje/index.php/cje-rce/article/view/1352

GROSSMANN, S. (2009). Les dispositifs groupaux d'analyse des pratiques au service du développement professionnel des enseignants. Quelles analyses ? Quelles pratiques ? Quel professionnel? *Canadian Journal of Education*, *32*(4), 764–796.

HABERMAS, J. (1979). *Connaissance et intérêt*. Paris : Gallimard.

HAMMERSLEY, M. (2002) *Educational research, policymaking and practice.* London: Paul Chapman/Sage.

HOUDÉ, O. (2000). La genèse de la cognition. In O. Houdé et C. Meljac (Eds.), *L'esprit piagétien*. (pp. 127-148). Paris: PUF (2ème édition en 2004).

HOUDE, O. (2011). Imagerie cérébrale, cognition et pédagogie-Imagerie et cognition (6). *Médecine/sciences, 27*(5), 535-539.

HOUDÉ, O. (2015). Cognitive development during infancy and early childhood across cultures. In J.D. Wright (Ed.), *International Encyclopedia of the Social and Behavioral Sciences*, (2nd Ed) (pp. 43-50). Oxford: Elsevier Science.

LUBIN, A., LANOE, C., PINEAU, A. & ROSSI, S. (2012). Apprendre à inhiber : une pédagogie innovante au service des apprentissages scolaires fondamentaux (mathématiques et orthographe) chez des élèves de 6 à 11 ans. *Neuroéducation, 1* (1), 55–84.

MARTINEZ, G. (1999). Les programmes universitaires en EASS, ASS ou en orthopédagogie : chronique annoncée d'une rupture entre les cycles. In A. Jeannel, J.P. Martinez et G. Boutin (dir.). *Les recherches enseignées en espaces francophones, Sciences en construction et enseignement universitaire.* (pp. 51-72). Montréal : Groupe Lire.

MARY, C. (2003). Interventions orthopédagogiques sous l'angle du contrat didactique. *Éducation et francophonie, 31*(2), 103-124.

MASSELOT, P. & ROBERT, A. (2007). Le rôle des organisateurs dans nos analyses didactiques de pratiques de professeurs enseignant les mathématiques, *Recherche et Formation* (56), 15-31.

MASSON, S. (2014). Cerveau, apprentissage et enseignement. Mieux connaître le cerveau peut-il nous aider à mieux enseigner ? *Éducation Canada, 54*(4), 40-43.

MASSON, S. (2015). Les apports de la neuroéducation à l'enseignement : des neuromythes aux découvertes actuelles. *A.N.A.E, 134*, 11-22.

MERCIER, A. (1985). Le temps des systèmes didactiques. En ligne : https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01397032/document

MERCIER, A. & BUTY, C. (2004). Evaluer et comprendre les effets de l'enseignement sur les apprentissages des élèves: problématiques et méthodes en didactique des mathématiques et des sciences. *Revue française de pédagogie, 148*, 47-59.

MINISTERE DE L'ÉDUCATION DU LOISIR ET DU SPORT. (1999). *Une école adaptée à tous ces élèves : Politique de l'adaptation scolaire*. Québec : Les publications du Québec.

MINISTERE DE L'ÉDUCATION DU LOISIR ET DU SPORT. (2006a). *Classe ordinaire et cheminement particulier de formation temporaire*. *Analyse du cheminement scolaire des élèves en difficulté d'adaptation ou d'apprentissage à leur arrivée au secondaire*. Québec : Les publications du Québec.

MINISTERE DE L'ÉDUCATION DU LOISIR ET DU SPORT. (2006b). *Programme de formation de l'école québécoise : Domaine de la mathématique et de la technologie, enseignement secondaire, 1er cycle*. Québec : Les publications du Québec. Récupéré de http://www1.education.gouv.qc.ca/sections/programmeFormation/secondaire1/pdf/chapitre061v2.pdf

MINISTERE DE L'ÉDUCATION DU LOISIR ET DU SPORT. (2007). *L'organisation des services éducatifs aux élèves à risque et aux élèves handicapés ou en difficulté d'adaptation ou d'apprentissage*. Québec : Les publications du Québec.

MINISTERE DE L'ÉDUCATION DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET RECHERCHE. (2016). *Voie 2- Établir des cibles de réussite pour chaque commission scolaire et en assurer le suivi*. Récupéré de http://www.education.gouv.qc.ca/dossiers-thematiques/lutte-contre-le-decrochage-et-reussite-scolaire/strategie-daction-visant-la-perseverance-et-la-reussite-scolaires/treize-voies-de-la-reussite/2/

MINISTERE DE L'ÉDUCATION ET DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR. (2017). Document de consultation : Pour la création d'un institut d'excellence en éducation. Québec : Les publications du Québec.

MUCCHIELLI, R. (2006). *L'analyse de contenu des documents et des communications* (9e éd.). Issy-les-Moulineaux : Les éditions ESF.

NORMAND, R. (2006). Les qualités de la recherche ou les enjeux du travail de la preuve en éducation. *Éducation et sociétés, 18(*2), 73-91.

NORMAND, R. (2015). « Qu'est-ce qui marche ? » : De la santé à l'éducation, la fabrication d'une politique européenne de la preuve. In Actes du colloque du Congrès National de l'Association Française de Science Politique AFSP (s.p). Aix-en-Provence.

PERRIN-GLORIAN, M.-J. (1993). Questions didactiques à partir de l'enseignement des mathématiques dans des classes faibles. *Recherches en didactique des mathématiques, 1.2*(13), 5–118.

ROELL, M., VIAROUGE A., HOUDÉ, O. & BORST, G. (2017). Inhibitory control and decimal number comparison in school-aged children. *PLoS ONE*, *12*(11) https://doi.org/10.1371/journal.pone.0188276

ROINE, C. (2005). *Étude des effets didactiques des idéologies* pédagogiques : Contribution à une approche anthropo-didactique des phénomènes d'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire. Mémoire de maîtrise. Université de Bordeaux 2.

ROINE, C. (2009). *Cécité didactique et discours noosphériens dans les pratiques d'enseignement en SEGPA : Une contribution à la question des inégalités*. Thèse de doctorat. Université de Bordeaux 2.

ROINE, C. (2010). Caractérisation des difficultés en mathématiques des élèves de SEGPA. *La nouvelle revue de l'adaptation et de la scolarisation, 4*, 73-87.

ROINE, C. (2014). Les paradoxes de l'aide aux « élèves en difficulté » dans l'enseignement des mathématiques. In C. Mary et L. Theis (dir.), *Recherches sur les difficultés d'enseignement et d'apprentissage en mathématiques* (pp. 45-62). Presses de l'Université du Québec.

ROINE, C. (2015). La fabrication de l'élève en difficulté. Postulats et méthodes pour l'analyse d'une catégorisation dans le champ scolaire. *Éducation et socialisation, Les cahiers du CERFEE,* (37). DOI : 10.4000/edso.1138

ROSENSHINE, B. & STEVENS, R. (1986). Teaching functions. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (3rded.) (pp. 376-391). New York: Macmillan.

SALIN, M.-H. (2007). À la recherche de milieux adaptés à l'enseignement des mathématiques pour des élèves en grande difficulté scolaire. In J. Giroux et D. Gauthier (dirs.), *Difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques* (pp. 195–217). Montréal, QC : Bande didactique.

SARRAZY, B. (1995). Note de synthèse [Le contrat didactique]. *Revue française de pédagogie*, *112*(1), 85-118.

SARRAZY, B. (1996). *La sensibilité au contrat didactique : Rôle des arrière-plans dans la résolution de problèmes d'arithmétique au cycle trois*, Thèse de doctorat, Université de Bordeaux II, Bordeaux.

SARRAZY, B. (1997). Sens et situations : Une mise en question de l'enseignement des stratégies méta-cognitives en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, *17*(2), 135-166.

SARRAZY, B. (2002). *Approche anthropo-didactique des phénomènes d'enseignement des mathématiques : Contribution à l'étude des inégalités scolaires à l'école élémentaire.* Habilitation à diriger des thèses. Université Victor Segalen Bordeaux 2.

SARRAZY, B. & ROINE, C. (2006, mai). Du déficient léger à l'élève en difficulté : Des effets de la différenciation structurelle sur différenciation didactique. *Colloque espace mathématique francophone.* Actes de colloque, Sherbrooke, 27-31 mai 2006. Sherbrooke : EMF.

SARRAZY, B. (2015). Règles, obéissance et transgression : L'enjeu de leurs rapports pour l'enseignement des mathématiques. *Chroniques*, 1-16. UQAM. Récupéré de http://chroniques.uqam.ca/index.php/2016/02/01/sarrazy2015transgression/

SAUSSEZ, F. & LESSARD, C. (2009). Entre orthodoxie et pluralisme, les enjeux de l'éducation basée sur la preuve. *Revue française de pédagogie. Recherches en éducation*, *168*, 111-136. https://doi.org/10.4000/rfp.1804

TOULLEC-THERY, M. (2006). *Aider les élèves « peu performants » en mathématiques à l'école primaire : quelles actions des professeurs ? Étude in situ des professeurs des écoles de classes ordinaires et de maîtres spécialisés à dominante pédagogique*. Thèse de doctorat. Université de Rennes 2.

CONCEPTION D'UN DISPOSITIF POUR ETUDIER LES DECISIONS DIDACTIQUES D'UN ENSEIGNANT DANS UN EIAH

Nathalie **BRASSET**

Laboratoire d'Informatique de Grenoble, Université Grenoble Alpes

nathalie.brasset@univ-grenoble-alpes.fr

Mots clés

Décisions didactiques, EIAH, ingénierie didactique, numération, école primaire

Le texte qui suit est composé de trois parties : la première présente l'objet de ma recherche, la deuxième ma méthodologie ou plus précisément la spécificité de mon ingénierie didactique et la dernière partie présente rapidement la forme des résultats obtenus.

Mon travail de recherche porte sur les décisions didactiques de l'enseignant, l'objectif étant de concevoir un modèle de ces décisions, en situation didactique, dans un EIAH. Un tel modèle est utile, par exemple, pour développer un système capable d'accompagner l'enseignant dans sa pratique.

En classe, nous pouvons observer les interactions élèves-enseignants, elles correspondent à une suite d'actions alternant des actions de l'enseignant d'une part et de l'élève d'autre part. Une action de l'enseignant suite à une action de l'élève correspond à une rétroaction : c'est le résultat d'une décision didactique. Afin d'étudier les actions de l'enseignant lors d'une séance d'exercices, nous avons construit un dispositif composé : (1) d'un outil de simulation dont les fondements sont didactiques et (2) d'un outil d'orchestration1. Via notre dispositif nous avons accès aux actions de l'enseignant sachant les informations consultées concernant la production de l'élève et pouvons inférer sur ses décisions didactiques.

Nous précisons dans cette partie quelques éléments de notre méthodologie afin de mieux comprendre l'importance de la conception du dispositif dans notre travail. Dans chacune des quatre phases2 de notre ingénierie didactique nous retrouvons deux niveaux : l'un concernant le savoir (la numération en cycle 2) et l'autre concernant l'objet d'étude (les décisions didactiques des enseignants en classe). La spécificité de cette ingénierie est le travail coopératif chercheurs-enseignants lors des phases d'analyse et de conception. Dans ces deux phases, nous avons choisi d'impliquer les enseignants au niveau du savoir en nous fondant sur leurs pratiques et limiter de cette façon l'interprétation qu'ils pourraient faire d'une situation construite par le chercheur.

Nos analyses préalables sont ainsi de deux types : d'une part, un travail théorique concernant la numération en cycle 2 - nous reprenons dans le cadre du formalisme T4TEL3 une partie du

[1] Orchestration au sens de (Dillenbourg, 2013).

[2] Analyses préalables ; phase de conception ; expérimentation ; Analyse a posteriori, validation (Artigue, 1988).

[3] « T4TEL s'inscrit dans la Théorie Anthropologique du Didactique (Chevallard, 1992, 1999) et plus spécifiquement dans l'approche praxéologique (Bosch et Chevallard, 1999) : ce modèle calculable représente une

travail de (Tempier, 2013) sur la numération – et, d'autre part, un travail empirique sur les décisions didactiques et l'enseignement de la numération dans des classes données. Nous avons travaillé avec des enseignants afin de comprendre leurs pratiques et d'établir l'ensemble des rétroactions qu'ils envisageaient par rapport à des productions ou des procédures d'élèves données. Nous avons, ainsi, constitué un cahier des charges pour l'outil de simulation côté élève et l'outil d'orchestration côté enseignant. L'outil de simulation permet de proposer tous les types d'exercices que les enseignants soumettent à leurs élèves avec le matériel tangible ainsi que de nouveaux exercices qui présentent un réel intérêt didactique puisqu'ils permettent de travailler le principe de position et le principe décimal de façon indépendante ou à des niveaux de difficulté plus ou moins élevés. L'outil d'orchestration (Wang, 2016), suffisamment simple d'utilisation pour ne pas perturber nos observations, permet d'informer l'enseignant des productions des élèves au fur et à mesure et d'organiser l'activité des élèves en temps réel. Cet outil ne contraint pas l'enseignant mais lui permet au contraire de nouvelles actions. Ce travail avec les enseignants sur deux années scolaires nous a donc permis de construire un dispositif d'observation des décisions didactiques constitué d'outils familiers pour les élèves et leur enseignant.

Via ce dispositif nous recueillons d'une part les actions des élèves et d'autre part celles de l'enseignant ; en étudiant les régularités des couples (actions d'un élève ; action de l'enseignant) observés et en complétant par des données externes du point de vue de l'ingénierie (observations de séances ordinaires) nous accédons aux décisions didactiques de l'enseignant et montrons l'importance des connaissances de type épistémique[4] mais également de type histoire didactique[5] dans ses prises de décisions (Brasset, 2017) .

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ARTIGUE, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *9*(3), 281–308.

BESSOT, A., CHAACHOUA, H., GEOFFROY, C., GIRAULT, I., HERITIER, C., JOLIVET, S.,& WAJEMAN, C. (2013). Décisions didactiques des enseignants de sciences. In *Problèmes du rapport scolaire et social aux mathématiques : identification des causes et propositions de solutions*.

BRASSET, N. (2017). *Les décisions didactiques d'un enseignant dans un EIAH. Etude de facteurs de type histoire didactique.* Université Grenoble Alpes.

CHAACHOUA, H., & BESSOT, A. (2016). La notion de variable dans le modèle praxéologique. In *Le paradigme du questionnement du monde dans la recherche et l'enseignement*.

DILLENBOURG, P. (2013). Design for classroom orchestration. *Computers & Education*, *69*, 485-492.

TEMPIER, F. (2013). *La numération décimale à l'école primaire. Une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource*. Paris-Diderot - Paris VII.

WANG, P. (2016). *Chao: Un framework pour le développement de systèmes supportant l'orchestration d'activités sur tablettes en classe*. Université Grenoble Alpes.

formalisation et une extension du modèle praxéologique répondant à la double exigence, celle de calculabilité d'une part et celle de production de différents services EIAH d'autre part. »(Chaachoua & Bessot, 2016).

[4] Rapport personnel de l'enseignant par rapport au savoir et à l'apprentissage (Bessot et al., 2013).

[5] Histoire partagée entre l'enseignant et les élèves à propos du savoir enjeu d'apprentissage (Bessot et al., 2013)

LES FONCTIONS SINUS ET COSINUS DANS LE SECONDAIRE EN FRANCE ET AU CAMBODGE

Ratha **LOENG**
Université Paris Diderot - Paris 7
loengratha@hotmail.com

Résumé

La trigonométrie et les fonctions trigonométriques sont intéressantes mais peu traitées en didactique des mathématiques. Nous nous intéressons à l'apprentissage par les élèves de ces concepts mathématiques dans l'enseignement secondaire.
Pour notre étude, nous choisissons la Théorie Anthropologique du Didactique comme cadre théorique. Nous déterminons les organisations mathématiques locales (ou régionales) correspondant à la trigonométrie du triangle, à la trigonométrie du cercle trigonométrique et enfin aux fonctions trigonométriques à partir de l'étude des programmes français et cambodgiens d'enseignement de la trigonométrie et des fonctions sinus et cosinus dans le secondaire, à quoi nous associons un travail sur une sélection de manuels. Nous élaborons à l'aide des outils de la Double Approche didactique et ergonomique un questionnaire destiné à des élèves de Terminale Scientifique. L'ensemble des résultats nous conduit à concevoir, à l'aide des outils de la Théorie des Situations Didactiques, une situation didactique qui a pour but de faire découvrir les notions de fonctions sinus et cosinus au niveau de la Terminale Scientifique en France et au niveau 11e (1re S en France) au Cambodge.

Mots clés

Trigonométrie, passage du concept, fonctions, secondaire, questionnaire, situation didactique

I. TRIGONOMETRIE – FONCTIONS SINUS ET COSINUS

1. Questionnaire – Exemples de difficultés d'élèves

Situation didactique (Terminale Scientifique)

Nous travaillons sur une organisation mathématique (OM) locale (ou régionale) des manuels de mathématiques français et cambodgiens. Nous faisons le choix de définir trois OM différentes : **(1)** Trigonométrie du triangle, située dans le domaine « Géométrie » ; **(2)** Trigonométrie du cercle trigonométrique, située dans le domaine « Géométrie de coordonnées » ; **(3)** Fonctions sinus et cosinus, situées dans le domaine « Analyse ».
L'analyse des manuels nous conduit à élaborer un questionnaire pour soulever les difficultés, attendues ou non, des élèves en Terminale Scientifique sur les savoirs appris liés à la trigonométrie et aux fonctions trigonométriques. L'étude sur l'OM de la Théorie Anthropologique du Didactique (Chevallard, 1999), avec les types de tâches clefs repérés, nous

aide à affiner le choix des six questions du questionnaire sous forme d'exercices. Nous choisissons la Double Approche didactique et ergonomique (Robert, 2008) qui nous fournit des outils fins pour l'analyse *a priori* et l'analyse *a posteriori* sur les connaissances en jeu. Dans ce poster, nous montrons, avec quelques exemples, certaines difficultés remarquables revélant une grande confusion chez un certain nombre d'élèves en Terminale Scientifique.

Grâce aux résultats obtenus au questionnaire et à l'étude sur l'OM des manuels, nous posons la question suivante : l'introduction du radian (nouvelle unité de mesure des angles) est-elle génératrice d'une confusion entre les objets **angle**, **longueur** et **nombre réel** avec des changements de cadres non explicités lors du passage « des savoirs à enseigner » à « des savoirs enseignés » puis à « des savoirs appris » ?

Nous élaborons alors une situation didactique, en Terminale Scientifique en France et en 11^{e} (1re S en France) au Cambodge, dont les objectifs sont, d'une part, de faire réfléchir les élèves sur le fait que l'on définit ces notions à partir de la longueur d'un arc du cercle trigonométrique, et d'autre part, d'expliciter aussi clairement que possible la périodicité d'une fonction et de faire éviter une confusion possible entre angles (cercle trigonométrique) et nombres réels (courbe représentative) à $2k\pi$ près. La situation didactique débute dans un cercle de rayon R ; à partir du cercle trigonométrique vu en 2de et en 1re Scientifique, les élèves travaillent sur les fonctions a et b définies par les coordonnées d'un point sur le cercle (sans rappeler qu'il s'agit des cosinus et sinus) en complétant un tableau de valeur sur les trois premiers tours (pour faire apparaître la notion de périodicité), un tableau de variation sur les deux premiers tours et un tableau de signe. La suite du travail se poursuit sur un logiciel de géométrie dynamique (GeoGebra) afin de mettre en évidence le lien entre le repérage sur le cercle trigonométrique et les courbes représentatives des fonctions cosinus et sinus avec l'intérêt de restreindre l'étude au cas particulier $R = 1$.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

CEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 19(2).

ROBERT, A. (2008). Partie1 - Chapitre 2 – Une méthodologie pour analyser les activités (possibles) des élèves en classe. La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants. *OCTARES* 2008.

LOENG, R. (2017). Learning sine and cosine in French secondary schools. CERME 10, Feb 2017, Dublin, Ireland.

ELABORATION ET USAGES D'UN MODELE MULTIDIMENSIONNEL D'ANALYSE DES RAISONNEMENTS EN CLASSE DE MATHEMATIQUES

Patrick **GIBEL**

Université de Bordeaux

Patrick.Gibel@u-bordeaux.fr

Résumé

Dans le cadre de l'apprentissage des mathématiques, les raisonnements occupent une place centrale compte tenu des multiples fonctions qu'ils recouvrent, parmi elles on peut citer : décider de l'utilisation d'une connaissance, conjecturer, contrôler, communiquer, expliquer, argumenter, prouver et démontrer. Pour permettre aux élèves et aux étudiants d'accéder à ces différentes fonctions et de progresser dans la pratique du raisonnement, il est nécessaire que les enseignants leur fassent vivre des dispositifs et des ingénieries didactiques spécifiques visant à produire des raisonnements en réponse aux situations proposées.

Nous montrons l'adéquation des cadres théoriques mobilisés, la Théorie des Situations Didactiques de G. Brousseau et la sémiotique de C.S. Peirce, afin d'élaborer un modèle multidimensionnel d'analyse des raisonnements en classe de mathématiques. Nous justifions que trois axes sont nécessaires en vue d'analyser les raisonnements produits par les élèves et par l'enseignant dans des situations comportant une dimension recherche (situation à dimension adidactique). Le premier axe est attaché au niveau de milieu dans la situation, niveau auquel sont liés la forme et le statut logique des énoncés émis ; le deuxième concerne les fonctions du raisonnement ; le troisième est un axe de nature sémiotique basé sur l'analyse des représentations.

Ce modèle permet d'étudier *a priori* et *a posteriori* les effets de différentes ingénieries et dispositifs didactiques, mis en œuvre dans l'enseignement primaire, secondaire et supérieur, sur le développement de la capacité des élèves et des étudiants à concevoir et à faire usage de raisonnements, dans des conditions qui le justifient.

Mots clés

Raisonnement, preuve, démonstration, théorie des situations, ingénierie, apprentissage

I. INTRODUCTION

Le terme raisonnement a plusieurs acceptions : « D'un côté il désigne les activités ou démarches qui consistent à raisonner. De l'autre, il désigne les produits ou les résultats de ces activités. » (Blanché, 1973). Dans notre étude des différentes formes de raisonnements, élaborés au cours d'une séquence en classe de mathématiques, cette distinction est essentielle. En effet, en didactique des mathématiques, les conditions dans lesquelles l'élève est conduit à élaborer un raisonnement doivent être prises en compte dans l'analyse des raisonnements produits.

Dans le cadre de l'apprentissage des mathématiques, le raisonnement produit est généré par le raisonnement activité ; de même il est adéquat de modéliser le raisonnement activité, en Théorie des Situations Didactiques, comme résultant du fonctionnement des connaissances du sujet, confronté à une situation mathématique. Pour étudier les raisonnements en classe de mathématiques, nous tiendrons compte d'une part des conditions dans lesquelles ils ont été élaborés et d'autre part des raisons pour lesquelles ils ont été produits. Nous proposerons dans la première partie de cet écrit une modélisation de l'activité raisonnement, en lien avec le fonctionnement du « répertoire didactique » de l'élève qui en est l'auteur.

Notre étude se limite au cadre de la didactique des mathématiques, dans le sens où nous nous intéresserons essentiellement aux connaissances et aux savoirs mobilisés ou susceptibles d'être mobilisés par les acteurs de la relation didactique, élèves et enseignant, dans le but d'étudier les différentes formes de raisonnements, valides ou erronés, apparaissant en situation didactique ; nous prendrons soin de définir précisément les conditions dans lesquelles les raisonnements ont été produits.

Par ailleurs le raisonnement produit est ce qui permet d'établir, dans des conditions particulières, des démonstrations correspondant à des raisonnements « officiels » c'est-à-dire officiellement reconnus par la communauté des mathématiciens comme raisonnements mathématiques.

Lorsqu'on souhaite étudier les raisonnements en classe de mathématiques, la première question est : pourquoi l'étude des raisonnements en didactique des mathématiques ne peut-elle pas se limiter à l'étude des raisonnements logiques et mathématiques formels « stricto sensu » ?

L'enseignement du raisonnement a pu se concevoir précédemment comme l'exposé et la reproduction de démonstration(s), cependant pour la majorité des enseignants le plus souvent c'est la production « naturelle » de raisonnements qui est recherchée, principalement par la confrontation de l'élève à l'activité de résolution de problèmes.

De plus, pour éviter le phénomène de conditionnement, les professeurs ont fréquemment recours à des situations plus « ouvertes ». Dans le cadre de cet écrit, nous nous intéresserons plus particulièrement aux situations adidactiques et aux situations à dimension adidactique (Bloch, 1999 ; Mercier, 1995), c'est-à-dire comportant une dimension recherche. Cependant leur mise en œuvre présente, pour les différents acteurs de la relation didactique , un certain nombre d'inconvénients et de difficultés : l'élève , confronté à ce type de situation, est soumis à de nombreuses incertitudes, il est donc amené à prendre de multiples décisions ; l'enseignant, quant à lui, doit d'une part analyser et gérer les décisions des élèves, interpréter les différentes formes de raisonnements produits et d'autre part évaluer la réalité de leurs acquis, du point de vue des connaissances et des savoirs mobilisés.

Dans la première partie, nous définirons en didactique des mathématiques ce que nous entendons par « raisonnement », en précisant les caractères qui permettent d'identifier les différentes formes de raisonnements produits, en regard de leurs fonctions en classe de mathématiques.

Dans la seconde partie, nous présenterons le modèle d'analyse des raisonnements en décrivant précisément ses différentes dimensions et ensuite nous expliciterons ses principales fonctions.

II. LES RAISONNEMENTS EN CLASSE DE MATHEMATIQUE

Cette première partie a pour finalité d'identifier et de caractériser les raisonnements en classe de mathématiques. La méthodologie mise en œuvre repose principalement sur l'analyse des raisonnements dans le cadre de la Théorie des situations didactiques, cependant compte-tenu de la diversité des formes de raisonnements et de la complexité du formalisme mathématique il apparait nécessaire d'avoir recours à la mise en œuvre d'une analyse sémiotique. Pour cela nous justifierons la pertinence de la sémiotique de C.S. Pierce afin d'analyser les formes de raisonnements élaborés par les élèves et par l'enseignant.

1. Identification et caractérisations des raisonnements

Notre étude s'inscrit dans une recherche visant à déterminer les principaux caractères de la situation ainsi que leurs rapports avec les différentes formes de raisonnements apparaissant dans le déroulement d'une séquence dont la situation centrale est à dimension adidactique. Ces raisonnements se traduisent par des éléments langagiers, calculatoires, scripturaux, graphiques, qui sont habituellement interprétés comme des signes appartenant à un registre de représentation, ou comme des éléments d'une phase de preuve ou de démonstration. Par conséquent en classe de mathématiques, le terme « raisonnement » tend à couvrir un champ beaucoup plus vaste que celui des raisonnements formels, logiques ou mathématiques. C'est pour cette raison que nous avons choisi comme définition initiale, celle proposée par Oléron (1977) :

> *Un raisonnement est un enchaînement, une combinaison ou une confrontation d'énoncés ou de représentations respectant des contraintes susceptibles d'être explicitées, et conduits en fonction d'un but. (p.10)*

Dans le cadre de notre étude en didactique des mathématiques, pour que nous puissions affirmer que tel observable est l'indice d'un raisonnement, dont certains éléments sont parfois en partie implicites, il a été nécessaire de dépasser la définition formelle, pour examiner les conditions dans lesquelles le « raisonnement supposé » peut être considéré, par le chercheur, comme un « raisonnement effectif ». C'est sur ce principe que nous allons nous appuyer pour mettre en place une méthodologie visant à identifier précisément les différentes formes de raisonnements, valides ou erronés, que les acteurs, enseignant et élèves, mettent en œuvre lors du déroulement d'une séquence de classe.

Identification des raisonnements en classe de mathématiques

Une précédente recherche sur l'usage et le traitement des raisonnements des élèves par les professeurs lors de la mise en œuvre de situations problèmes en classe ordinaire (Brousseau & Gibel, 2005), nous a permis d'établir que souvent en situation didactique, le professeur relève, dans les formulations des élèves, des indices et les interprète davantage en fonction de leur utilité pour le déroulement de la séquence, que du point de vue du projet initial de l'élève qui en est l'auteur. Par conséquent pour pouvoir déterminer et analyser objectivement les raisonnements produits pas les élèves et l'enseignant, le chercheur doit donc suivre une autre voie. Ce dernier doit adopter une méthodologie particulière que nous allons nous attacher à caractériser. Le chercheur doit assez fréquemment montrer que tel raisonnement complet, dont il ne perçoit parfois qu'une partie ou que des indices, est bien celui qu'il convient d'attribuer à son auteur.

Le chercheur doit établir que la production du raisonnement, prêté au sujet, est motivée par une intention de la part de ce dernier, qu'elle répond (ou tente de répondre) à un but, qu'elle lui apporte un avantage dans les conditions qu'il perçoit, et avec les connaissances dont il dispose.

La détermination d'un raisonnement produit par un sujet : notion de situation

Ainsi, comme nous l'avons explicité (Brousseau & Gibel, 2005), parmi toutes les conditions qui accompagnent la production d'un supposé raisonnement, quelques-unes seulement - le moins possibles - peuvent servir à le déterminer et à le justifier. Ces conditions ne sont pas quelconques. Elles forment un ensemble cohérent qui est appelé « situation » en Théorie des Situations Didactiques.

> *La situation est une partie seulement du contexte, ou de l'environnement de l'action de l'élève ou du professeur et elle comprend, mais pas seulement, une sorte de question à laquelle le raisonnement de l'élève est une réponse. Elle n'est réduite ni à l'action du sujet, ni à la connaissance qui la motive mais elle les met en relation rationnelle. Une situation peut expliquer pourquoi un raisonnement faux a été produit par d'autres causes qu'une erreur ou une insuffisance du sujet. (p.16)*

Ce point de vue est différent de celui qui prévaut légitimement chez les professeurs où les seuls raisonnements vraiment utilisables sont les raisonnements entièrement corrects. Un raisonnement faux n'est qu'assez exceptionnellement un objet d'étude. La Théorie des Situations Didactiques a pour objet l'étude et la modélisation des situations ainsi définies. Elle est un instrument pour rechercher les explications minimales des faits observés, qui sont compatibles avec les faits connus.
De nombreux enseignants ont coutume de faire dévolution aux élèves de situations de recherche, basées sur des ingénieries préalablement expérimentées, ayant fait l'objet de publications à destination des enseignants. Ils justifient le choix de ce type de situation par le fait qu'elles permettent aux élèves d'élaborer une ou plusieurs procédures, basées sur leurs connaissances et leurs savoirs, d'éprouver leur(s) procédure(s) mais aussi de prendre conscience des décisions qui sous-tendent leur raisonnement.

Le raisonnement de l'élève dans la résolution d'un problème classique

Le raisonnement effectivement utilisé par l'élève est le résultat d'une activité mentale différente de la solution standard, et il répond à une situation dont l'énoncé du problème n'est qu'une composante. Il agit pour trouver la solution demandée mais n'a pas à rendre compte de ses tentatives.

> *Donc l'observateur tout comme le professeur, doit interpréter ce que les élèves ont produit dans un système plus large et plus complexe, s'il veut avoir une chance d'interroger ou d'expliquer pourquoi ils ont produit tel ou tel raisonnement, qu'il soit correct et adéquat ou non. Aussi, pour analyser avec eux leurs productions, le professeur doit considérer, au moins implicitement, qu'ils sont confrontés à des conditions réelles plus ouvertes que le texte du problème (i. e. une situation d'action dont le milieu est la situation objective). C'est à ce niveau qu'appartiennent les justifications tactiques, stratégiques, ou ergonomiques à propos du bien-fondé, de l'adéquation, du choix des inférences ou de leur enchaînement qui ne figurent pas dans la solution standard. (Ibid., p.19)*

Les raisonnements effectifs

Les raisonnements que nous étudierons dans le cadre de l'apprentissage des mathématiques sont essentiellement modélisables par des inférences, plus précisément par une suite finie d'inférences (associées aux différents pas de raisonnement i.e. aux différentes étapes du

raisonnement) dont l'articulation est en adéquation avec les règles de la logique mathématique. Mais cette caractérisation doit nécessairement être complétée car nous voulons pouvoir distinguer les raisonnements effectifs des citations et intégrer des raisonnements qui se manifestent par des activités non verbales aussi bien que par des assertions, ce qui nous amène à formuler la définition suivante :
Un raisonnement est donc une relation R entre deux éléments A et B telle que :

- A désigne une condition ou un fait observé, contingent ;
- B est une conséquence ou une décision ou un fait prévu ;
- R est une relation, une règle, plus généralement une connaissance empruntée à un répertoire considéré comme connu, accepté. La relation R conduit l'actant, dans la circonstance A, à prendre la décision B ou à prévoir le fait B ou à énoncer que le fait B est vrai.

Un raisonnement effectif comprend de plus un agent E, élève ou professeur, qui utilise la relation R ainsi qu'un projet déterminé par une situation S dont la réalisation exige l'usage de cette relation.
On peut dire que pour réaliser le projet déterminé par la situation, le sujet utilise la relation R qui permet d'inférer B de la condition A. Ce projet peut être convenu et explicité par l'agent ou il peut lui être prêté par le chercheur à partir d'indices.
Afin de pouvoir étudier les moyens utilisés par l'enseignant pour gérer les raisonnements apparaissant dans les productions des élèves, il convient de définir ce qui, pour le chercheur, est assimilable à un « raisonnement », pour cela il faut :
- Identifier des observables (textes, gestes, paroles, dessins, etc.) produits par un élève, par plusieurs élèves en interaction ou par l'enseignant.
- Relier ces observables par une relation « rationnelle » telle que cette relation s'exprime dans le langage du chercheur, différent a priori de celui des protagonistes. De plus cette dernière attribue à ces observables un rôle dans la réalisation du projet proposé par la situation convenue ou dans celle de l'un de ses modèles qui ont la charge de représenter les intentions possibles des protagonistes. Cette relation peut être hypothétique ou formelle.
- Identifier un actant : professeur, élève ou groupe d'élèves à qui est attribué l'établissement de la relation dans le cadre d'un projet qui lui est prêté.
- S'il s'agit d'une hypothèse, établir qu'elle est valide, en montrant, éventuellement à l'aide d'autres indices, qu'elle est la moins improbable des explications.
Il est à noter que parmi les raisonnements détectés par le chercheur, certains d'entre eux peuvent être attribués à un ou à plusieurs des protagonistes bien que ces derniers ne les aient pas nécessairement identifiés comme tel.

Classification des raisonnements d'après leur fonction et le type de situation associée

En conclusion du paragraphe précédent, un raisonnement est identifié par sa fonction dans une situation, autrement dit par le rôle qu'il y joue. Cependant un raisonnement peut avoir des fonctions différentes, par exemple décider d'une action à effectuer, informer, communiquer, expliquer, prouver. Elles sont différenciées, en Théorie des Situations Didactiques, par des modèles de situations mathématiques (situation d'action, situation de formulation, situation de validation) généraux mais différents. Pour une présentation plus détaillée nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage de Brousseau (1998).
De plus, à un moment donné du déroulement d'une leçon, on peut identifier, suivant les intentions des participants, un très grand nombre de situations plus ou moins « emboîtées ». Dans la deuxième partie de cet écrit, nous expliciterons et illustrerons cette notion de « situations emboîtées », dont la définition repose sur le concept de schéma de la structuration du milieu créé initialement par Brousseau et très fréquemment utilisé dans le cadre des recherches en Théorie des Situations Didactiques. Les raisonnements qui apparaissent dans les

situations didactiques se rapportent à leurs différentes composantes, telles que décrites dans la Théorie des Situations Didactiques (Brousseau,1998).
Afin d'analyser les raisonnements produits par les élèves et par l'enseignant, il convient d'étudier les connaissances et les savoirs, valides ou erronés, mobilisés afin de les produire. Aussi nous avons été conduits à modéliser le fonctionnement des connaissances du sujet, ce que nous allons à présent développer dans le paragraphe suivant.

2. Modélisation du fonctionnement des connaissances du sujet en Théorie des Situations Didactiques

Définition de la notion de répertoire didactique

L'ensemble des moyens que le professeur pense pouvoir attendre des élèves, par suite de son enseignement, constitue ce que nous appelons le répertoire didactique de la classe (Gibel, 2004). Par conséquent l'enseignant identifie un répertoire qu'il juge légitime d'utiliser dans la relation didactique compte tenu des institutionnalisations antérieures, afin de produire la solution ou la réponse attendue.

> *La prise « officielle » par l'élève de l'objet de la connaissance et par le maître de l'apprentissage de l'élève est un phénomène social très important et une phase essentielle du processus didactique : cette double reconnaissance est l'objet de l'INSTITUTIONNALISATION.*
>
> *L'institutionnalisation porte aussi bien sur une situation d'action –on reconnaît la valeur d'une procédure qui va devenir un moyen de référence- que sur la formulation. Il y a des formulations que l'on va conserver (« ça se dit comme ça », « celles-là valent la peine d'être retenues »). Et pour les preuves, de la même façon, il faut identifier ce qu'on retient des propriétés des objets qu'on a rencontrés. (Brousseau, 1988, p.311)*

Le répertoire didactique de la classe ne se limite pas à l'ensemble des connaissances et des savoirs, c'est aussi l'ensemble des moyens qui vont permettre à l'élève de générer de nouvelles connaissances, de nouvelles formules.
Le répertoire didactique de la classe doit être élaboré de manière à permettre à l'élève d'organiser la collection des formules dont il dispose. Ainsi il permet à l'élève de faire l'inventaire de l'ensemble des formules, en lui offrant ainsi la possibilité de retrouver des tâches, des actions, des méthodes, des formulations et des justifications. Sa fonction est d'en faciliter l'usage en donnant à l'élève les moyens de produire ou de retrouver et donc de mettre en œuvre, au moment voulu, c'est-à-dire lorsque les conditions didactiques le rendent nécessaires, une action, une suite d'actions, une formulation ou une justification, parfois déjà rencontrée, déjà apprise c'est-à-dire ayant donc fait l'objet d'une institutionnalisation.

Utilisation du répertoire didactique du sujet dans la production de décisions

Le répertoire didactique d'un élève, autrement dit le répertoire utilisé par un élève lorsqu'il est confronté à une situation, peut bien évidemment différer du répertoire didactique de la classe. Comme Comiti, Grenier et Margolinas (1995) nous considérons que le répertoire didactique d'un élève peut être différent du répertoire didactique de la classe ; ceci est d'autant plus flagrant lorsqu'il y a dédoublement de situation.
Considérons une situation et l'ensemble des moyens de résolution que le sujet est susceptible d'utiliser compte-tenu du répertoire didactique de la classe ; dans cet ensemble on peut distinguer deux catégories de moyens (Gibel, 2004) :
- Un moyen direct c'est-à-dire la connaissance elle-même qui permet de résoudre directement la situation.

- Des moyens indirects qui correspondent à l'établissement de cette connaissance par le sujet. La connaissance résulte alors du fonctionnement du système organisateur.
Nous distinguons trois niveaux dans le répertoire didactique :
• le système produit i.e. le registre des formules ;
• le système organisateur utilisé afin de générer de nouvelles connaissances ou de réactiver des connaissances anciennes ;
• le répertoire de décision qui est assimilable à un répertoire de savoirs en relation avec un ensemble de situations. Ce répertoire de décision commande le répertoire d'action de l'élève.
Nous préciserons, par la présentation d'une modélisation, le lien entre répertoire de décision et répertoire d'action dans la section suivante (I.4).

3. L'analyse sémiotique de Pierce et la notion de répertoire de représentation

Précédemment nous avons mis en évidence que les raisonnements apparaissant en situation de classe peuvent se traduire sous des formes très diverses : éléments langagiers, calculatoires, scripturaux, graphiques que nous nous devons d'interpréter en référence à différents registres de représentation (Duval, 1996). Par conséquent l'analyse sémiotique constitue l'une des dimensions de notre modèle, complétant naturellement celles précédemment exposées : d'une part la fonction des raisonnements, d'autre part le niveau de milieu correspondant autrement dit les conditions dans lesquelles le raisonnement a été élaboré. Les représentations sémiotiques ne sont mobilisées et développées que dans la mesure où elles peuvent être transformées en d'autres représentations sémiotiques comme le souligne Duval (2006) :

> *Ce sont ces transformations sémiotiques qui sont importantes et non les relations fondamentales explicitées dans les différentes théories sémiotiques. (p.49)*

De plus l'auteur met en lumière cette nécessité inhérente aux pratiques mathématiques en ce qui concerne les signes : les possibilités de transformation des représentations.

> *Cette exigence a commandé le développement d'un symbolisme spécifique aux mathématiques, avec la représentation des nombres, avec l'Algèbre, avec l'Analyse. Elle traduit le fait que la fonction primordiale des signes et des représentations en mathématiques, n'est ni la communication, ni l'évocation d'objets absents mais le traitement d'informations, c'est-à-dire la transformation intrinsèque de leurs représentations en d'autres représentations pour produire de nouvelles informations ou de nouvelles connaissances. (p.57)*

Ce qui va nous intéresser c'est effectivement la transformation de la représentation des objets tant du point de vue des signes utilisés que du point de vue de leur(s) statut(s) dans la relation didactique. La sémiotique de Pierce est particulièrement appropriée à notre projet. En effet elle nous permettra d'étudier précisément l'évolution et les transformations des signes, utilisés par les différents acteurs, en lien avec les différentes situations d'action, de formulation et de validation.
Selon Pierce (1978), trois catégories sont en effet nécessaires pour rendre compte de l'expérience humaine. Elles sont désignées comme « priméité », « secondéité » et « tiercéité ». La priméité est de l'ordre du possible : les signes peuvent être vus comme des icônes. La secondéité peut être assimilée à la catégorie de l'expérience, du fait, de l'action-réaction, les signes en sont des indices. La tiercéité est le régime de la règle et de la loi, de la médiation et les signes apparaissent avec un statut de symbole-argument.
Dans notre usage de la sémiotique Peircienne nous utiliserons les trois désignations : icône, indice et symbole-argument. Par exemple dans l'analyse de séquence « Le nombre le plus grand » publiée dans Gibel, (2015), un calcul arithmétique rédigé sous la forme d'une opération

posée ou d'un calcul « en ligne » peut être assimilé à une icône. Cette dernière traduit et manifeste une action du sujet confronté à la situation de jeu ; un indice est de l'ordre d'une proposition, par exemple la formulation d'une méthode générale, même si celle-ci est incomplète ; un symbole-argument est de l'ordre d'une preuve mathématique qu'il s'agisse d'une preuve de nature pragmatique, sémantique ou syntaxique.
Comme le souligne Evraert-Desmedt (1990), l'interprétation d'un signe par un interprétant est étroitement liée à l'expérience, formée par d'autres signes toujours antécédents. Par conséquent l'analyse sémiotique nécessite de prendre en compte les signes en lien avec les connaissances et les savoirs antérieurs, c'est la raison pour laquelle nous allons à présent définir la notion de « répertoire de représentation ».

Le répertoire de représentation

Le répertoire de représentation, de la classe et de chaque élève, est une composante du répertoire didactique. Il est constitué de signes, schémas, symboles, figures ; nous y incluons également les outils et leur(s) usage(s). Il convient également d'y adjoindre les éléments langagiers (énoncés oraux et/ou écrits), permettant de nommer les objets rencontrés, de formuler les propriétés et les résultats.
Le répertoire de représentation comporte deux composantes liées à la chronogenèse pour la première et au milieu de la situation pour la seconde :
- la composante liée au répertoire antérieur c'est-à-dire les différentes formules énoncées et les différents usages liés aux connaissances antérieures ;
- une composante qui apparaît lorsque l'enseignant dévolue aux élèves une situation d'apprentissage : l'élève mobilise, par confrontation aux différents milieux, des connaissances de son répertoire didactique. Cette utilisation des connaissances lui permet de manifester et de construire de nouvelles représentations, liées à la situation, à partir des éléments de représentation dont il dispose.
Nous allons à présent nous centrer sur l'utilisation du répertoire de représentation.

4. Utilisation du répertoire de représentation du sujet dans la production de décisions

Rappelons que selon Brun (1994) les représentations sont "l'interface entre connaissances et situation", ce qui est en adéquation avec la notion de répertoire de représentation tel que nous l'avons précédemment défini.
De plus il précise :

> *Si l'on suit le fonctionnement des schèmes au fur et à mesure du développement de l'enfant, l'apparition de la fonction sémiotique à un moment de ce développement fournit les éléments nouveaux à ce fonctionnement, ce sont les représentations de type sémiotique. Les sujets peuvent s'appuyer sur des signifiants qu'ils peuvent distinguer des signifiés. Les représentations sémiotiques jouent donc un rôle éminemment fonctionnel, même si elles restent subordonnées aux opérations.*
>
> *Dans le processus de formation des connaissances en situation, la représentation est instrumentale et consiste à désigner les objets, à réfléchir les buts et les moyens, à planifier, à répondre aux problèmes de communication et de validation qui peuvent se poser en situation. (p.74)*

Il nous importe alors de nous demander si les représentations sont différenciées, relativement aux connaissances, ou amalgamées ; notre but est aussi d'éclairer la façon dont elles se constituent en répertoires – répertoire initial, puis répertoire final à l'issue de la situation. Une façon de répondre à cette question est de s'appuyer sur la définition de répertoire didactique en

distinguant deux types d'objets : d'une part la collection de formules que nous appelons registre de formules, et d'autre part ce qui permet de l'organiser et de l'utiliser que nous désignons par système organisateur. Le système organisateur est ce qui permet à l'élève de retrouver ou de réactiver des formules déjà rencontrées dans des situations antérieures, mais aussi de générer de nouvelles formules en articulant entre eux certains énoncés, ou en les combinant entre eux afin de répondre à la situation.
Une composante essentielle de l'usage des raisonnements en situation concerne les décisions que prend l'élève ou qu'il est susceptible de prendre lorsqu'il est en situation d'apprentissage. Dans la modélisation du fonctionnement des connaissances, en théorie des situations (Gibel, ibidem; Conne, 1992), celles-ci apparaissent comme les moyens hypothétiques, pour le sujet, de prendre des décisions.
Il convient alors de distinguer:
1- Les connaissances mobilisables ou disponibles, ainsi que les nomme Robert (1998) : ce sont les moyens de résoudre la situation que l'actant est susceptible de mobiliser pour produire le résultat attendu. Ces moyens sont déduits du répertoire didactique de la classe et contribuent à l'élaboration de l'analyse a priori de la situation, d'où leur nom.
2- Les connaissances effectives de l'actant : elles se manifestent, se traduisent par les actions effectives du sujet confronté à la situation (ce que Robert appelle des adaptations).
Le répertoire de représentation, tel que nous l'avons défini précédemment, réfère à la capacité du sujet à utiliser son système organisateur pour répondre à une situation afin de :
1) Percevoir et s'approprier les relations entre les différents objets qui définissent le milieu objectif (l'élève doit se représenter la situation objective).
2) Faire le lien entre la situation dévolue et les situations rencontrées précédemment.
3) Décider des formules qu'il convient de mobiliser, de réactiver ou de combiner afin d'agir sur la situation. Les actions du sujet résultent alors du fonctionnement du système générateur de son répertoire de représentation.
Dans la relation didactique, le statut de raisonnement attribué à une production dépend de l'état de connaissances du sujet qui en est l'auteur. Tout raisonnement, étudié d'un point de vue didactique, est basé sur une pratique sociale de référence qui indique quel répertoire le sujet a le droit d'utiliser. L'établissement d'un résultat, quelle que soit sa nature, peut relever pour certains sujets de l'utilisation directe d'un savoir de leur répertoire didactique et cependant, nécessiter pour d'autres sujets l'élaboration d'un raisonnement basé sur une combinaison de savoirs, une confrontation d'énoncés ou de représentations et respectant certaines contraintes. Cependant dans l'hypothèse où le savoir convoqué appartient au répertoire didactique de la classe, l'enseignant ne reconnaitra pas l'établissement du résultat comme résultant d'un raisonnement. En effet la production du raisonnement n'apparaît pas, dans ce cas, comme une performance « originale », puisque les élèves sont censés être en mesure de l'utiliser. De même si l'élève produit à la demande explicite de l'enseignant un raisonnement, déjà formulé précédemment à de multiples reprises, l'enseignant ne lui accordera pas le statut de raisonnement, il aura le statut de justification idoine.
Par conséquent l'étude des raisonnements en didactique des mathématiques, nécessite pour le chercheur la prise en compte des conditions, qui définissent la situation, dans lesquelles le supposé raisonnement est produit mais également du répertoire didactique de la classe dont les élèves sont censés disposer.
Les ingénieries didactiques étudiées (Bloch & Gibel, 2011), (Gibel, 2015), (Gibel & Henry, 2017), (Gibel, 2017), (Lalaude-Labayle, 2016) dans le cadre de ma note de synthèse (Gibel, 2018), reposent sur la dévolution aux élèves d'une situation de nature adidactique ou à dimension adidactique. Leurs résolutions nécessitent, l'usage de leur répertoire de représentation. En effet les élèves ou les étudiants, pour répondre à la situation, devront se référer à des situations rencontrées précédemment. Ainsi, par l'usage de leur répertoire de

représentation, ils décideront de la mise en œuvre d'une suite d'actions sur le milieu matériel. Cette suite d'actions, valides ou erronées, relève de l'usage de leur répertoire d'action. Le résultat obtenu conduit les élèves ou les étudiants à modifier leur répertoire de représentation.
Le schéma ci-après permet de modéliser le fonctionnement du répertoire didactique de l'élève confronté à une situation adidactique (situation d'action) ou à dimension adidactique.

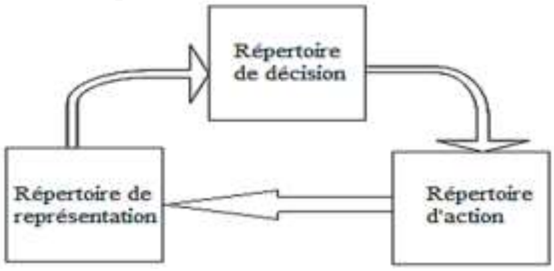


Figure 1 : Modélisation du fonctionnement du répertoire didactique de l'élève en situation d'apprentissage.

Le schéma ci-dessus a été initialement élaboré dans un contexte particulier d'analyse des raisonnements (Gibel & Ennassef, 2012). Dans le cadre de l'élaboration de ma note de synthèse (Gibel, 2018), en tenant compte des résultats des recherches que nous avons produits dans des contextes d'enseignement variés et à des niveaux d'enseignement différents, ce schéma nous apparaît adéquat pour modéliser plus généralement le fonctionnement des connaissances du sujet confronté à une situation d'action.
L'objet de cet écrit est de présenter notre modèle d'analyse des raisonnements en explicitant les axes d'analyse que nous avons privilégiés afin d'étudier les différentes formes de raisonnements, résultant de la mise en œuvre d'une ingénierie1ou d'un dispositif didactique en classe de mathématiques.
Dans cette première partie, nous avons présenté une modélisation du fonctionnement des connaissances du sujet étroitement liée à la mise en œuvre de son répertoire didactique. En effet l'identification d'un raisonnement produit en classe de mathématiques nécessite pour le chercheur la prise en compte du répertoire didactique dont les élèves sont censés disposés mais également des conditions, qui définissent la situation dans laquelle le « supposé raisonnement » a été produit.

II LE MODELE D'ANALYSE DES RAISONNEMENTS

Dans cette deuxième partie, nous justifierons qu'en Théorie des Situations Didactiques l'identification des conditions de production d'un raisonnement est rendue possible par la mise en œuvre du schéma de la structuration du milieu. En effet à un moment donné du déroulement d'une leçon, comme l'indique Margolinas (1998) ainsi que Brousseau et Gibel (2005) on peut identifier un grand nombre de situations plus ou moins emboitées ; le schéma de la structuration du milieu nous permet de caractériser chacune d'elles. Il donne ainsi la possibilité de décrire chacune des situations emboîtées, nous pouvons ainsi expliciter les conditions dans lesquelles un raisonnement est susceptible d'être produit. De plus, comme indiqué précédemment les fonctions du raisonnement jouent un rôle déterminant dans l'analyse de ces derniers, elles sont

[1] Incluant une situation adidactique ou à dimension adidactique.

étroitement liées aux conditions de sa production. Nous justifierons pourquoi la fonction d'un raisonnement constitue l'une des dimensions de notre modèle d'analyse.
Dans la première partie, nous avons établi que l'analyse sémiotique permet de rendre compte des connaissances et des savoirs mobilisés au regard du répertoire de représentation mobilisé par l'élève par confrontation au(x) milieu(x). Cette dernière dimension joue un rôle déterminant dans l'analyse des raisonnements. De plus nous avons mis en lumière, l'importance accordée à l'évolution et à la transformation des signes (Duval, 2006) au cours d'une leçon, nous justifierons ainsi l'intérêt de cette dimension.
Pour clore cette deuxième partie, nous expliciterons la validité et l'intérêt du modèle en mettant en évidence ses différentes fonctions du point de vue de la recherche en didactique.

1. La Théorie des Situations Didactiques comme fondement de notre modèle

L'analyse des raisonnements en situation de validation

L'analyse fine des raisonnements produits en situation de validation ne peut se restreindre à une analyse en termes de calcul propositionnel basée sur la logique dialogique de Lorenzen (1967), comme l'indique Durand-Guerrier (2007). Cette dernière met en évidence que le modèle de Lorenzen ne suffit pas pour comprendre et analyser l'activité mathématique en situation de validation et elle fait l'hypothèse que ce modèle

> *contribue à donner de l'activité mathématique une image déformée, en exacerbant le travail sur les énoncés au détriment du travail sur les objets, leurs propriétés et les relations mutuelles qu'ils entretiennent. (p.23)*

Barrier (2008), s'appuyant sur cette précédente recherche, met à son tour en évidence la limite du modèle de Lorenzen pour l'analyse de situation de validation explicite et justifie ainsi la nécessité de proposer un modèle qui tienne compte de la dimension sémantique des raisonnements produits par les élèves. Il insiste sur le fait qu'il n'est pas possible, lors de l'analyse fine des dialogues en situation de validation, de séparer le travail sur les objets, qui constituent le milieu, du travail sur les énoncés produits par les élèves. Afin d'intégrer cette dimension sémantique, Barrier fait le choix d'analyser les interactions entre élèves en utilisant la sémantique de Hintikka et Sandu (1997) permettant ainsi de conjuguer l'analyse syntaxique et l'analyse sémantique des raisonnements.
Cette nécessité de tenir compte, lors de l'analyse des raisonnements, de la dimension sémantique, a contribué à conforter et justifier notre décision de prendre la TSD comme fondement de notre modèle. En effet cette dernière offre la possibilité d'analyser les actions du sujet sur les différents milieux, permettant ainsi de prendre en compte la dimension sémantique des raisonnements.

2. Catégorisation des raisonnements selon les niveaux de milieux

Une fréquente justification de la construction de situations d'enseignement issues de situations fondamentales d'un savoir dans la TSD a été donnée par le bénéfice de ce type de situations sur les possibilités d'amener les élèves à entrer dans une démarche de preuve (Legrand, 1997). L'élaboration et l'analyse *a priori* de ces situations se basent sur l'étude des niveaux de milieux organisés ; l'analyse *a posteriori* permet au chercheur de déterminer s'il y a ou non une concordance du déroulement effectif avec la situation anticipée.
Il est nécessaire de distinguer dans l'analyse didactique d'une leçon : la situation proprement mathématique (la situation objective), de la situation d'action du sujet (situation à laquelle est confrontée l'élève), de la situation d'apprentissage autonome (sur quoi elle porte, en terme

d'enjeux didactiques) et de la situation didactique (manière dont l'enseignant conduit la leçon : ses interventions, les arguments qu'il utilise).
Les professeurs pensent qu'il est important de provoquer des apprentissages dans des situations d'action autonomes plutôt que de les obtenir de façon formelle pour ensuite les associer artificiellement à des descriptions de circonstances d'utilisation. Ils essaient ainsi de simuler les processus « naturels » de production et d'usage des connaissances. Mais nous savons que la méthode constructiviste radicale présente elle aussi de graves insuffisances. Théoriquement il n'y a aucune possibilité qu'une connaissance développée en situation autonome ait les mêmes propriétés qu'un savoir culturel. Son apprentissage doit nécessairement être complété par des activités didactiques spécifiques.
Le modèle de structuration du milieu utilisé est celui de Bloch (2006), issu précédemment du modèle de Margolinas (1998), modifié afin de tenir compte du rôle du professeur dans les niveaux adidactiques de milieux. Dans ce travail nous nous intéressons à l'analyse des fonctionnalités des différents niveaux de milieux et aux résultats de la mise en œuvre dans la contingence (Bloch, 2006).
Le tableau résume les niveaux de milieux – de M+3 à M-3. Les niveaux de milieux de M-1 à M-3 correspondent à la situation *expérimentale*. Les niveaux associés aux indices strictement négatifs sont ceux qui nous intéressent tout particulièrement dans la configuration que nous étudions i.e. l'apparition d'un processus de preuve dans la mise en œuvre d'une situation à dimension adidactique. En effet c'est au niveau de l'articulation entre le milieu objectif (qu'il vaudrait peut-être mieux appeler *milieu heuristique*) et le milieu de référence que nous nous attendons à voir apparaître et se développer les raisonnements attendus.

M+3:M-Construction		P+3:P-Noosphérien	*S+3: Situation noosphérienne*
M+2: M-Projet		P+3:P-Constructeur	*S+2: Situation de construction*
M+1:M-Didactique	E+1:E-Réflexif	P1: P-Projeteur	*S+1: Situation de projet*
M0:M-Apprentissage	**E0: Elève**	**P0: Professeur**	***S0: Situation didactique***
M-1:M-Référence	E-1:E-Apprenant	P-1: P-Observateur	*S-1: Situation d'apprentissage*
➢ M-2: M- Objectif	E-2: E-Agissant	P-2 : P Dévolueur observateur	*S-2: Situation de référence*
➢ M-3: M- Matériel	E-3: E-Objectif		*S-3: Situation objective*

Tableau 1 : Tableau de la structuration du milieu (Bloch, 2006).

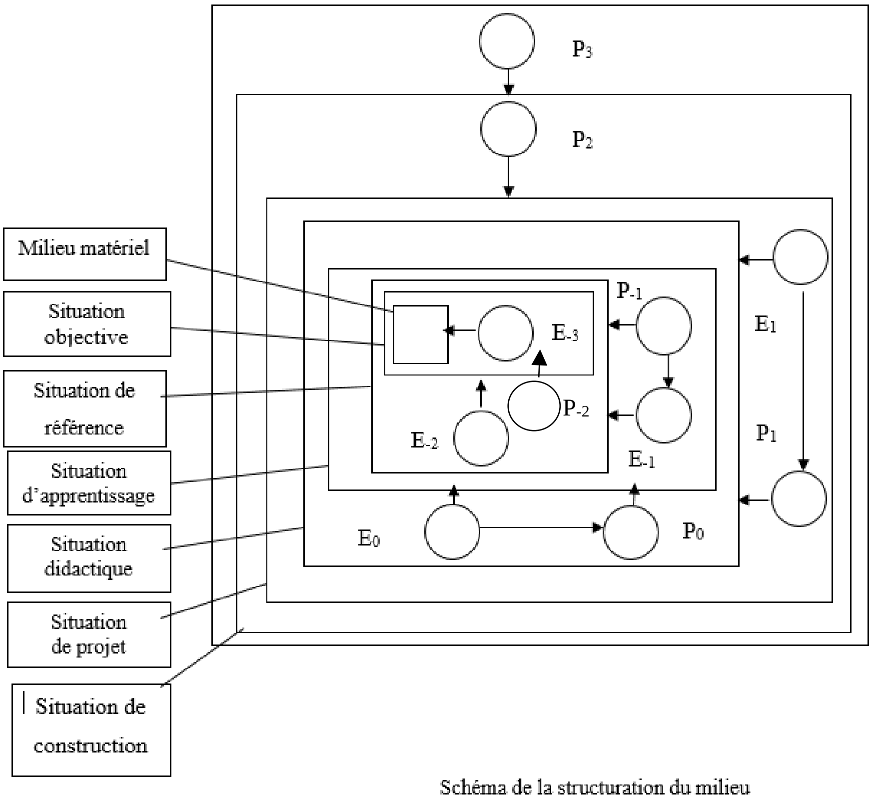


Figure 2 : Schéma de la structuration du milieu.

Ce modèle, associé au schéma de la structuration du milieu, permet ainsi de :
- représenter des déroulements effectifs de leçons ;
- concevoir des situations effectivement réalisables ;
- rendre compte des transformations du savoir observables au cours d'un apprentissage local ou d'une genèse historique;
- étudier les conditions théoriques du fonctionnement d'un savoir.

Il faut remarquer que pour chacune des situations emboîtées (situation objective, situation de référence, situation d'apprentissage, situation didactique, situation de projet, situation de construction), les savoirs et les connaissances de l'enseignant et de l'enseigné sont différents, même lorsqu'il s'agit de la même notion mathématique.

En ce qui concerne l'analyse des fonctions didactiques du raisonnement et de ses éléments, la combinatoire s'articule autour des trois types de situations que sont : l'action, la formulation et la validation.

La modélisation du fonctionnement des connaissances du sujet par l'usage de son répertoire didactique conduit à spécifier les conditions de son utilisation en définissant trois composantes du répertoire didactique : le répertoire d'action, le répertoire de formulation et le répertoire de validation.

Nous allons à présent énoncer les principes fondamentaux du schéma :
- L'objet et les moyens d'une activité sont différents.
- Une action porte sur un objet ; elle est déterminée par un *répertoire d'actions* du sujet et par une situation, elle-même étant définie par des conditions et un but à atteindre.
- Une formulation conduit à représenter les objets, les actions et les conditions de la situation d'action dans l'optique où cette dernière sert d'objet à la communication à l'aide du répertoire didactique dans lequel il y a des objets, des actions, des procédures et des déclarations.

Ce schéma devrait nous permettre de distinguer une action et une modification de cette action dans la mesure où elle peut être justifiée par le sujet, en effet elles vont apparaître sur le schéma à des niveaux différents.
Nous distinguerons la performance de l'élève qu'il s'agisse d'une action, d'un message ou d'un énoncé, du répertoire didactique à l'aide duquel elle est produite.
Ce qui était considéré comme un moyen au niveau N est alors considéré comme un objet au niveau N+1 : la structure du schéma transforme en objet ce qui était le moyen au niveau précédent.

- **Le sujet agissant et le milieu objectif**

Ci-dessous, E_{-3} désigne l'élève objectif et E_{-2}, l'élève agissant. (M_{-3}, E_{-3}) définissent le milieu objectif pour E_{-2}.

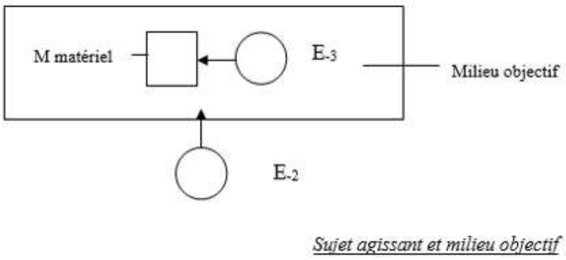


Figure 3 : Sujet agissant et milieu objectif.

Dans le cadre des règles, l'élève va, à l'aide de son *répertoire* de connaissances, établir une action, en général une action sur les objets. Ce qui motive l'action sur les objets c'est le répertoire didactique dont dispose l'élève.

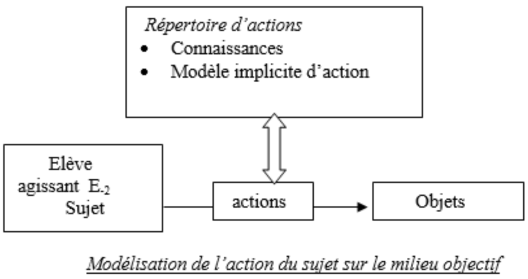


Figure 4 : Modélisation de l'action du sujet sur le milieu objectif.

Certaines actions du sujet sont entièrement déterminées par la situation : l'élève n'a pas réellement de choix à effectuer. Pour que l'élève ait le choix, il faut qu'il y ait plusieurs possibilités effectives, c'est-à-dire il faut pouvoir observer que, dans des conditions similaires, certains élèves font différemment. Il y a choix s'il y a plusieurs possibilités effectives.
On peut envisager à ce niveau (M-2) que le sujet effectue à la demande de l'enseignant une communication inhérente à ses actions c'est-à-dire aux actions sur les objets eux–mêmes.

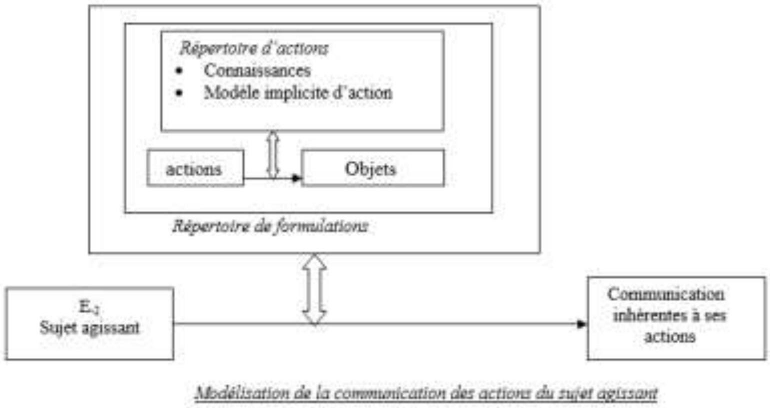


Figure 5 : Modélisation de la communication des actions du sujet agissant.

Comme indiqué dans (Gibel, 2008, p.23) une communication inhérente aux actions des élèves vise à amener les élèves à prendre position relativement aux différentes procédures proposées. Cette prise de position nécessite de la part des élèves une capacité à analyser les productions en fonction de différents critères :

- la pertinence : ce dont l'élève parle est réalisé dans la situation qui lui a été dévolue.
- l'adéquation : la procédure mise en œuvre permet d'obtenir la solution ;
- la complexité : le nombre de pas du raisonnement produit ;
- la consistance : ce n'est pas contradictoire avec ce qui a été institutionnalisé précédemment, c'est-à-dire avec le répertoire de connaissances de la classe ;
- la validité : consistance et adéquation. L'élève utilise ses connaissances conformément aux règles d'usage du répertoire didactique pour réaliser l'attendu.

➢ Le sujet apprenant et le milieu de référence

Niveau (M-1) : Le sujet apprenant et le milieu de référence.
E_{-3} désigne l'élève objectif, E_{-2} l'élève agissant ;
(M_{-3}, E_{-3}) définit le milieu objectif ;
(M_{-2}, E_{-2}) constitue le milieu de référence pour le sujet apprenant E_{-1}.

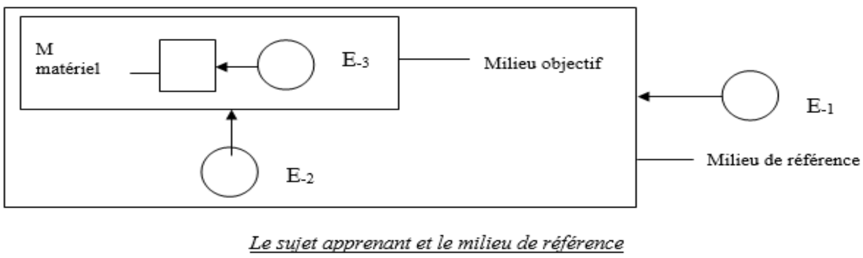


Figure 6 : Le sujet agissant et le milieu de référence.

La situation vise à permettre au sujet apprenant, E_{-1} d'analyser sa suite de décisions. Pour lui, les conditions font partie de son objet d'étude. Il a un *répertoire* de règles d'apprentissage, de connaissances, de savoirs. Il va prendre en compte les objets, les règles mais également les conditions de son travail. Cette prise en considération par le sujet apprenant, de ses actions sur les objets en regard des conditions se situe à un deuxième niveau par rapport à l'analyse de ses actions sur les objets. Elle est déterminante en ce qui concerne le rapport du sujet à la situation. Nous allons à présent modéliser les différentes formes d'actions du sujet apprenant, en proposant le schéma suivant :

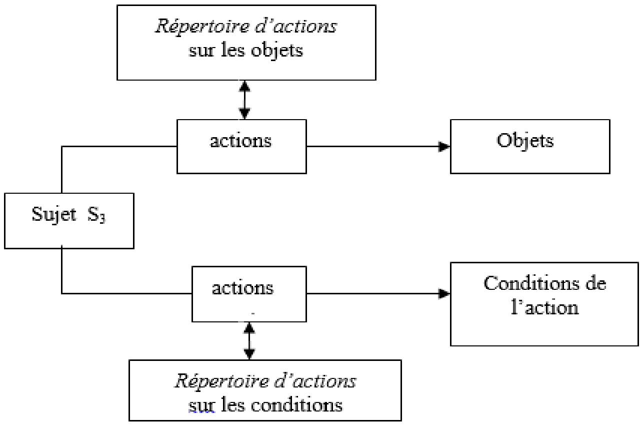


Figure 7 : Modélisation des actions du sujet apprenant.

Le sujet apprenant est amené à produire deux types d'actions qu'il convient de distinguer : d'une part une action sur les objets, d'autre part une action sur les conditions de l'action, autrement dit l'élève est conduit à envisager une modification des conditions dans lesquelles il va utiliser les objets. Ce qui fait fonctionner cet outil d'analyse, c'est le fait que l'on traduise les situations en terme de conditions.

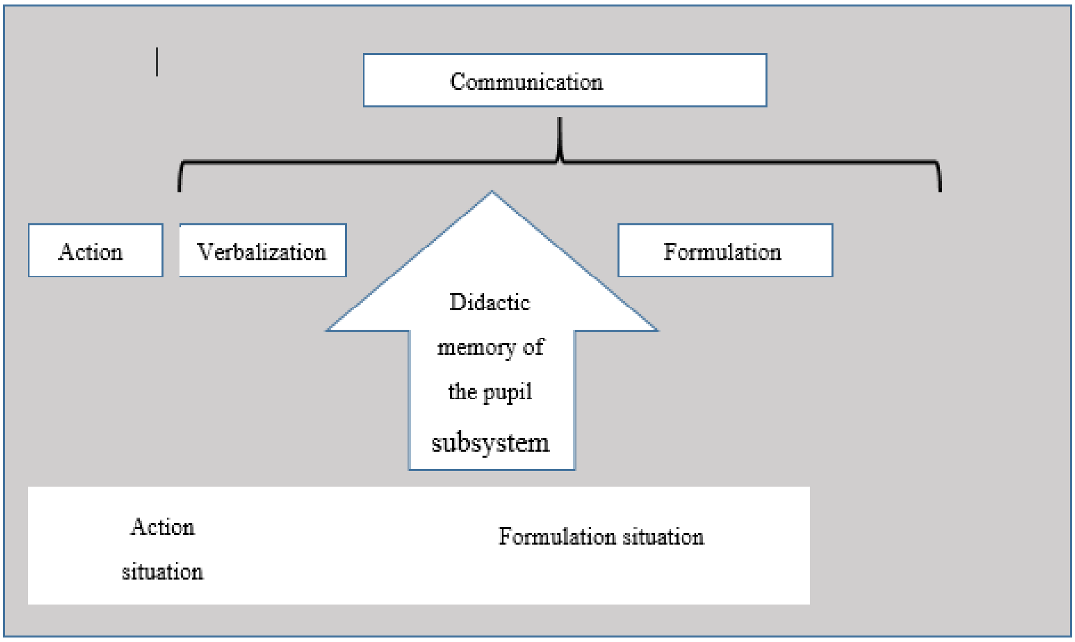


Figure 8: Place de la verbalisation et de la formulation en TSD (Flückiger, 2005).

Bringing a past didactic event to the foreground and comparing it to the present calls upon memory. Such episodes are pupils-initiated and are hence referred to as the pupil's didactic memory. One of its functionalities is to create the conditions for moving from an action situation to a formulation situation. (Flückiger, 2005, p.71)

Le schéma ci-dessus proposé par Flückiger (2005) précise le moment où l'élève fait fonctionner sa « mémoire didactique[2] », permettant ainsi la modification de l'usage de la connaissance mobilisée (en situation d'action et de verbalisation des actions), en vue d'une formulation[3] de sa procédure. Cette modélisation est selon nous à rapprocher du fonctionnement du répertoire didactique (plus précisément du système organisateur) de l'élève, lorsque ce dernier procède à

[2] Il s'agit de la mémoire didactique du sous-système « élève » telle que définie par Flückiger (2005).
[3] Qui est assimilable à une justification de sa procédure.

une confrontation d'énoncés ou de représentations, en vue de prendre en compte les conditions d'utilisation des objets dans la formulation d'un raisonnement.

- **L'élève et la situation d'apprentissage**

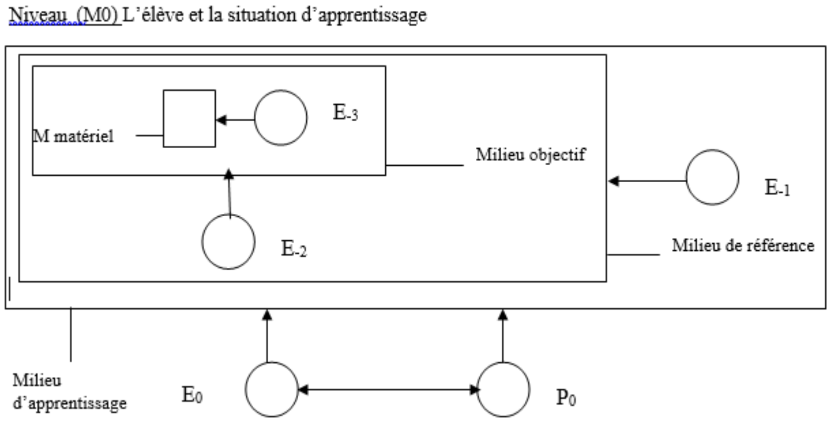


Figure 9 : L'élève en situation d'apprentissage.

Le niveau (M0) est celui des assertions. Au niveau précédent, (M-1), nous étions au niveau des relations mathématiques, la vérité était évidente, la relation était vraie ou fausse mais il n'y avait pas de jugement. Or dans la situation étudiée l'autre arrive avec une culture, avec des exigences qui ne sont pas celles de la situation. Par conséquent à ce niveau, l'action est remplacée par des déclarations sur des variables, il s'agit de déclarations sur les rapports aux connaissances.

D'après l'analyse didactique effectuée dans la section précédente, nous savons que des étapes de la situation peuvent être à l'origine de raisonnements mathématiques (Bloch & Gibel, 2011) : la confrontation à un milieu heuristique (milieu objectif) pour leur élaboration ; le passage à un milieu de référence pour établir la généricité des méthodes et le caractère de nécessité des propriétés trouvées. Les interventions de l'enseignant (P-régulateur), dans la situation d'apprentissage, sont destinées le plus souvent à maintenir le caractère adidactique de la situation en relançant l'activité par un éventuel retour à une situation de jeu (situation d'action) ou par la *formulation* d'une explication nécessaire à la compréhension d'une proposition formulée par un élève. Bloch (1999) dans son article sur l'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève précise le rôle de l'enseignant :

> *Dans la mesure où le milieu de la situation n'assure pas de façon suffisamment adidactique la production de connaissances, nous nous tournons vers l'activité du professeur et les connaissances qu'il met en œuvre, pour comprendre le fonctionnement de la situation pour l'élève. (p.4)*

3. Les dimensions du modèle d'analyse des raisonnements

Nous allons à présent expliciter les éléments qui structurent le modèle en regard des niveaux de milieux. Compte–tenu des analyses didactiques effectuées précédemment, nous avons été amenés à privilégier trois axes qui orientent et structurent notre analyse des raisonnements dans chacune des situations décrites précédemment. Ces axes réfèrent à des niveaux de modélisation différents des raisonnements en jeu dans le déroulement de la situation : modélisation globale relative aux niveaux de milieux, et modélisation locale au niveau des arguments produits dans le travail et les échanges en classe, ainsi qu'au niveau des signes émergents de ce travail.

- ✓ Le premier axe est lié au milieu de la situation : dans une situation comportant une dimension adidactique[4], les élèves donnent à voir des raisonnements qui dépendent fortement du niveau de milieu où ils se situent.
- ✓ Le deuxième axe est l'analyse des fonctions du raisonnement, pointée ci-dessus comme nécessaire. Nous nous attacherons à montrer comment les fonctions du raisonnement sont liées à des niveaux de milieux et comment ces fonctions *manifestent* aussi ces niveaux de milieux, de sorte qu'ils peuvent servir au repérage de la position des élèves dans chacun de ces niveaux.
- ✓ Le troisième axe est celui des signes et des représentations observables. Ces observables se donnent à voir dans des formes différentes qui affectent le déroulement de la situation. La nature des signes et le statut logique du raisonnement sont à prendre en compte pour l'efficacité, l'idonéité aux attendus et le rôle dans la situation. L'analyse des signes est réalisée au regard du répertoire de représentation mobilisé par l'auteur du raisonnement. Il s'agit de prendre pour objet d'étude l'usage du répertoire didactique et de son niveau d'actualisation. Ainsi nous pourrons analyser *a priori* les connaissances et les savoirs, valides ou erronées, susceptibles d'être produits et déterminer ceux que l'enseignant pourra institutionnaliser, en regard de chacun des niveaux de milieu.

Ces trois axes apparaissent nécessaires et complémentaires pour effectuer une analyse très précise des différentes formes de raisonnements qui sont susceptibles d'être produits en regard de leur(s) fonctions et des conditions de leur production par les élèves (et/ou par l'enseignant au niveau M0). Ils constituent les dimensions de notre modèle d'analyse des raisonnements.

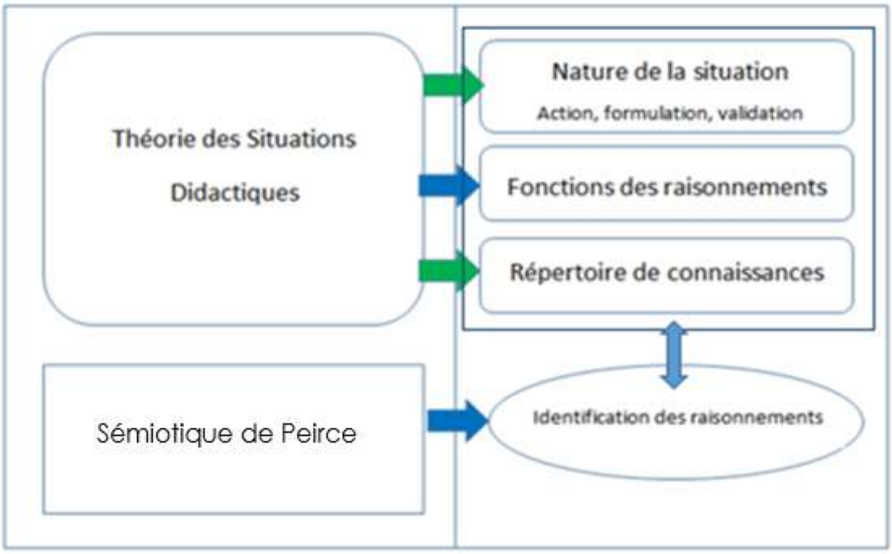


Figure 10 : schéma du modèle d'analyse des raisonnements.

Le schéma présenté ci-dessous permet d'illustrer les principaux axes qui structurent notre modèle d'analyse des raisonnements en lien avec les théories mobilisées : la Théorie des Situations Didactiques et la sémiotique de C.S. Pierce.

Le tableau 2 présente de façon synthétique le modèle utilisé[5] ; il indique les signes et raisonnements attendus dans chaque niveau de milieu, à partir de l'analyse a priori réalisée pour la situation prévue[6].

---

[4] ou à dimension adidactique.

[5] dans sa dimension prédictive.

[6] La situation mathématique qui a contribué à l'élaboration du tableau 2 est la situation du flocon de Von Koch (Bloch et Gibel, 2011).

Nous avons codé en « SYNT » ou « SEM » les dimensions possibles, syntaxiques ou sémantiques, rencontrées dans les différents niveaux d'argumentation. Remarquons cependant que les dimensions syntaxique et sémantique ne sont pas spécifiques du niveau d'adéquation à la situation : en effet, des élèves peuvent fort bien utiliser leurs connaissances anciennes de façon syntaxique mais ne pas entrer dans les requis de la situation, ce qui rendra ces essais peu opérants ; par ailleurs le travail syntaxique, une fois mis en forme, joue un indéniable rôle sémantique, que tous les mathématiciens (re)connaissent.
Durand-Guerrier (2010) définit précisément les dimensions sémantiques, syntaxiques et pragmatiques :

> *semantics concerns the relation between signs and objects they refer to ; syntax concerns the rules of integration of signs in a given system, and pragmatics the relationship between subjects and signs (Morris, 1938 - Eco, 1971). (Durand-Guerrier, 2010)*

	Milieu M_{-2}	Milieu M_{-1}	Milieu M_0
Fonctions des raisonnements	R1.1 SEM - Intuition sur un dessin - Décision de calcul - Moyen heuristique - Exhibition d'un exemple ou d'un contre-exemple	R1.2 SYNT/SEM - Calculs génériques - Formulation de conjectures étayées - Décision sur un objet math.	R1.3 SYNT - Formalisation des preuves dans la théorie mathématique requise (avec aide du P éventuellement)
Niveaux d'utilisation des symboles	R2.1 SEM Icônes ou indices dépendant du contexte (schémas, intuitions…)	R2.2 SYNT/SEM Arguments 'locaux' ou plus génériques : indices, calculs	R2.3 SYNT Arguments formels spécifiques
Niveau d'actualisation du répertoire	R3.1 SYNT/SEM - Utilisation ponctuelle de connaissances anciennes - Enrichissement au niveau heuristique : calculs, conjectures ponctuelles	R3.2 SYNT/SEM Enrichissement au niveau argumentaire : - des énoncés - du système organisateur	R3.3 SYNT - Formalisation des preuves - Introduction d'ostensifs organisés - Intégration des éléments théoriques du domaine math.

Tableau 2 : Le modèle milieux/répertoire/symboles (Bloch et Gibel, 2011).

Ce modèle nous permettra de caractériser précisément les formes et les fonctions des raisonnements qui sont susceptibles d'être produits, en situation, par les élèves et l'enseignant, ainsi ce modèle a une fonction prédictive. Nous effectuerons ensuite grâce à cet outil une analyse *a posteriori* très précise des raisonnements produits, en les analysant en regard de chacune des dimensions qui structurent le modèle.
Dans la section suivante nous allons nous attacher à préciser les différentes fonctions de ce modèle.

4. Les principales fonctions du modèle

La fonction prédictive du modèle

Le modèle a été construit de façon à mettre en lumière, à partir de l'analyse *a priori* de la situation réalisée dans le cadre de la Théorie des situations didactiques, les différentes formes et les différentes fonctions des raisonnements susceptibles d'apparaitre dans la relation didactique, en lien avec les différents niveaux de milieu correspondants. Ces derniers seront déterminés par la réalisation d'une analyse ascendante des niveaux de milieux détaillée, élaborée de façon à rendre visible les différentes situations emboîtées associées aux différents sujets confrontés aux milieux correspondants.

On en déduit que l'analyse *a priori* détaillée de la séquence et l'analyse des niveaux de milieux constituent des points d'appuis essentiels pour envisager plus précisément les formes de raisonnements que les élèves sont susceptibles de produire. En effet le chercheur pour pouvoir interpréter les différents observables, en lien avec chacune des situations, doit avoir préalablement envisagé précisément les formes de raisonnements. De plus l'observateur, en s'appuyant sur une analyse fine des niveaux de milieu, est en mesure de repérer dans la production des raisonnements des élèves un changement de niveau de milieu ; notamment le retour à une confrontation à la situation objective ou bien le passage de la situation didactique à le situation d'apprentissage. Il nous apparaît essentiel de repérer le raisonnement en lien avec sa fonction, le rôle qu'il joue est étroitement lié à la situation dans laquelle il a été produit. C'est en ce sens que nous pouvons dire que le modèle d'analyse des raisonnements a pour le chercheur une fonction prédictive.

Dans la première ligne du tableau 2, nous explicitons, selon le niveau de milieu où se situent les élèves, les différentes fonctions que recouvrent les raisonnements :

- ✓ au niveau « heuristique » M_{-2} (milieu objectif), les fonctions sont assimilables à des calculs exploratoires, des conjectures, des initiatives, des dessins,…,
- ✓ au niveau M_{-1}, (milieu de référence), les fonctions des raisonnements peuvent être des déclarations de formules, des propriétés, et des début de justification) ;
- ✓ nous étudierons aussi le niveau M_0, en effet dans une situation à dimension adidactique, l'institutionnalisation n'est pas l'exclusivité du professeur, en effet celui-ci s'appuie fortement sur les productions des élèves.

La deuxième ligne du tableau met en relation les productions des élèves et la nature des signes associées. La dialectique signes/milieux est relativement prévisibles : au niveau M_{-2} sont associées plutôt des productions de type heuristique, et au niveau M_{-1} des formules, des assertions générales, conjectures déjà formalisées et au niveau M_0 les signes sont majoritairement des arguments formels spécifiques.

La troisième ligne traduit l'actualisation du répertoire de représentation, en particulier l'abandon de procédures anciennes ou intuitives et l'adoption de preuve assimilables à des preuves mathématiques.

Dans l'hypothèse où le chercheur souhaite communiquer l'ingénierie à un enseignant, dans le but que ce dernier fasse vivre la séquence à ses élèves, le modèle[7] permet alors de mettre en évidence les différentes formes de raisonnements valides ou erronés que les élèves pourraient produire, lors de chacune des phases. Cette connaissance des formes de raisonnements apparaît alors comme un élément particulièrement utile à l'enseignant pour effectuer une gestion didactique pertinente des différentes phases.

Le modèle offre donc la possibilité à l'enseignant de réfléchir préalablement aux formes et aux fonctions des raisonnements que ses élèves seront susceptibles de produire et ainsi de lui permettre d'envisager une gestion plus efficace, c'est-à-dire prenant en compte le plus fidèlement possible le projet initial de l'élève lors des phases de validation et d'institutionnalisation.

Il va aussi d'une certaine façon faciliter la tâche d'analyse didactique du chercheur confronté à l'analyse *a posteriori* de la séquence ; c'est ce que nous allons préciser dans le paragraphe suivant.

[7] Le modèle est mis en œuvre par le chercheur.

La fonction explicative du modèle

Nous avons élaboré ce modèle afin d'analyser les observables qui traduisent la mise en œuvre effective des raisonnements des élèves et des étudiants, ainsi que leur(s) fonction(s) lors de chacune des phases de la séquence. Pour chacune des phases du déroulement de la séquence étudiée, nous voulons grâce au modèle, identifier les situations correspondantes et ainsi déterminer le rôle que joue le raisonnement dans la situation correspondante.

- La méthodologie de l'analyse *a posteriori*

En didactique, l'objet qui nous intéresse principalement est ciblé : l'action qui fait l'objet principal de l'analyse est centrée sur une connaissance et sur ses répliques, celle que le professeur veut enseigner, celle qu'il met en scène effectivement et celle que les élèves ou les étudiants donnent comme sens au déroulement.

Notre ambition n'est pas de rendre compte lors de l'analyse *a posteriori* de la totalité des événements didactiques qui se sont produits au cours de la séance, ni de montrer en détail comment on peut obtenir un tel compte rendu par des réductions sensibles mais assez respectueuses de la méthode et de la contingence. Nous allons nous centrer sur les raisonnements produits au cours de chacun des épisodes étudiés : les conditions de leur production (autrement dit l'identification su niveau de milieu), leurs fonctions en situation (en lien avec le niveau de milieu) et leurs effets sur l'avancement de la leçon du point de vue de l'actualisation du répertoire didactique. Cette étude des raisonnements repose sur une analyse sémiotique des signes émergents, en lien avec le répertoire de représentation mobilisé par l'élève.

- Les axes privilégiés lors de l'analyse *a posteriori*

Le modèle permet de déterminer si les enjeux didactiques de chacune des phases de la séquence sont en adéquation avec le projet de l'enseignant, mais également, de préciser en situation de validation, la nature et le rôle des arguments (raisonnements argumentatifs) produits par un ou plusieurs élèves ainsi que leurs effets sur le déroulement de la séquence notamment du point de vue de la conviction des élèves.

Du point de l'identification des connaissances et des savoirs, le modèle offre la possibilité d'identifier, le plus fidèlement possible, les connaissances et les savoirs, valides ou erronés, que les élèves ont mobilisé afin de produire leur raisonnement par confrontation aux différents milieux. Il nous semble important de déterminer l'évolution du répertoire didactique de la classe, au fil la séquence, en repérant les savoirs pour lesquels l'enseignant a choisi d'enclencher un processus d'institutionnalisation.

De plus la fonction explicative du modèle est déterminante car ce dernier permet de percevoir, plus précisément de donner à voir les écarts existant entre le projet de séquence initial et la réalité du déroulement et ce de différents points de vue ayant une même visée : comprendre les raisons pour lesquelles certaines phases n'ont pas produit les effets attendus du point de vue des apprentissages et du point de vue des comportements et les raisons pour lesquelles les phases, plus précisément la confrontation des élèves aux situations emboîtées a permis (ou non) de favoriser la pratique du raisonnement et d'enrichir le répertoire didactique de la classe en permettant aux élèves d'accéder aux véritables raisons de savoir.

CONCLUSION

La Théorie des Situations Didactique a joué un rôle déterminant dans l'élaboration de ce modèle. Elle nous a permis de caractériser les raisonnements en intégrant les conditions de leur élaboration grâce à l'identification des niveaux de milieux et nous a fourni un cadre et un outillage adéquat à la réalisation d'analyse *a priori* détaillée des situations. De plus, elle nous a amené à construire une caractérisation des fonctions des raisonnements en lien avec les situations et elle a également contribué à définir la notion de répertoire de représentation[8].

La sémiotique de C.S. Pierce a eu un rôle décisif lors de la construction du modèle. En effet elle a permis d'identifier certaines formes de raisonnement nécessitant une analyse très précise des signes ; de plus leur analyse permet de mettre en lumière l'évolution du répertoire de représentation lors du déroulement de la séquence ou du dispositif didactique.

L'originalité et l'intérêt du modèle d'analyse des raisonnements sont essentiellement dus au fait qu'il résulte de la combinaison de ces cadres théoriques permettant ainsi de recouvrir une dimension d'analyse globale et une dimension d'analyse locale. L'analyse globale est liée à l'identification du niveau de milieu qui définit et traduit le statut logique des énoncés en regard de leurs fonctions, l'analyse locale repose sur une identification peircienne des signes donnant ainsi à voir l'usage et l'évolution du répertoire de représentation.

Nous avons expérimenté et éprouvé la pertinence de notre modèle dans différents domaines des mathématiques et à différents niveaux d'enseignement : l'Arithmétique au primaire (Gibel, 2015), la Géométrie à la transition primaire-secondaire (Gibel & Blanquart, 2017), l'Analyse dans le secondaire (Bloch & Gibel, 2011), (Gibel, 2017) ainsi que l'Algèbre linéaire dans l'enseignement supérieur (Lalaude-Labayle, 2016). Le modèle nous a permis d'étudier les nombreuses difficultés auxquelles sont confrontés les élèves dans l'enseignement primaire et secondaire, ainsi que les étudiants en Classes Préparatoires et à l'entrée à l'Université. Il apparaît comme un outil adéquat pour analyser précisément l'origine des erreurs des élèves et des étudiants.

Dans le cadre d'un contexte d'enseignement d'évolution des programmes et des pratiques, les TICE apparaissent comme des outils incontournables dans l'enseignement secondaire et supérieur. D'un point de vue didactique, elles offrent la possibilité de faciliter les changements de cadres et ainsi d'éclairer différemment un même objet mathématique (Gibel, 2017). L'utilisation du modèle, par sa dimension sémiotique, permet d'envisager l'élaboration de séquences et de dispositifs intégrant des changements de cadres et d'éventuels changement de registres pour une compréhension approfondie des concepts mathématiques par le biais d'un usage raisonné en situation. Il nous semble nécessaire de combiner deux dimensions du raisonnement : la dimension sémantique et la dimension syntaxique qui apparaissent indissociables afin de permettre aux élèves et aux étudiants d'accéder au sens des objets mathématiques (Bloch & Gibel, 2016), (Gibel, 2017).

Concernant les projets de recherche en cours, un de nos objectifs est de contribuer à une réflexion, dans le cadre de la lutte contre l'échec en licence, visant à mettre dans une perspective de réussite les étudiants en difficulté dans le domaine de l'Analyse. Notre ambition est d'élaborer avec les enseignants des classes de L1, L2 et L3 scientifiques, des situations d'enseignement/apprentissage consistantes, issues pour certaines d'entre elles d'ingénieries élaborées précédemment, afin de permettre l'acquisition de connaissances et de savoirs signifiants pour les étudiants dans le domaine des équations différentielles, et plus généralement de l'Analyse. Le modèle d'analyse des raisonnements pourra ainsi nous permettre d'évaluer en amont la pertinence et l'adéquation des situations envisagées.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BALACHEFF, N. (1987). Processus de preuve et situation de validation. *Educational Studies in Mathematics, 18(2)*, 147-176.

[8] à partir de la notion de répertoire didactique.

BARRIER, T. (2008). Sémantique selon la théorie des jeux et situations de validation en mathématiques. *Education et didactique*, *2*, 35-58.

BLANCHE, R. (1973). *Le raisonnement*. Paris : Presses Universitaires de France.

Bloch, I. (1999). L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en Première scientifique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19(2)*, 135-193.

BLOCH, I. (2005). Dimension adidactique et connaissance nécessaire : un exemple de 'retournement' d'une situation. In M. H. Salin, P. Clanché & B. Sarrazy (Eds.) *Sur la Théorie des Situations Didactiques* (pp.143-152). Grenoble : La Pensée Sauvage.

BLOCH, I. (2006). *Quelques apports de la théorie des situations à la didactique des mathématiques dans l'enseignement secondaire et supérieur.* Note de synthèse l'Habilitation à Diriger les Recherches de l'Université Paris 7.

BLOCH, I. & GIBEL, P. (2011). Un modèle d'analyse des raisonnements dans les situations didactiques : étude des niveaux de preuves dans une situation d'enseignement de la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *31(2)*, 191-228.

BLOCH, I. & GIBEL, P. (2016). A model to analyse the complexity of calculus knowledge at the beginning of University course. Two examples: parametric curves and differential equation. In E. Nardi, C. Winsløw & T. Hausberger (Eds.), *Proceedings of the First Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics* (pp. 43-53). France : Montpellier.

BROUSSEAU G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7(2)*, 33-115.

BROUSSEAU G. (1988). Les différents rôles du maître. *Bulletin de l'AMQ*, 14-24.

BROUSSEAU, G. (1998). *La théorie des situations didactiques.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

BROUSSEAU, G. & GIBEL, P. (2005). Didactical Handling of Students' Reasoning Processes in Problem Solving Situations. *Educational Studies in Mathematics, 59(3)*, 13-58.

BRUN, J. (1990). La résolution de problèmes arithmétiques : bilan et perspectives. *Maths-école*, *141*, 2-15.

BRUN, J. (1994). Évolution des rapports entre la psychologie du développement cognitif et la didactique des mathématiques. In M. Artigue, R. Gras, C. Laborde & P. Tavignot (Eds.), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France* (pp. 67-83). Grenoble : La Pensée Sauvage.

CONNE, F. (1992). Savoirs et connaissances dans la perspective de la transposition didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *12(2)*, 221-270.

DURAND-GUERRIER, V. (2007). Retour sur le schéma de la validation explicite dans la théorie des situations didactiques. In A. Rouchier (Ed.), *Actes du colloque Didactiques : quelles références épistémologiques ? (Cédérom.).* Bordeaux: IUFM d'Aquitaine.

DURAND-GUERRIER, V. (2008). Truth versus validity in mathematical proof. *ZDM mathematical education, 40,* 373-384.

DURAND-GUERRIER, V. (2010). Semantic perspective in mathematics education. A model theoretic point of view. In *Proceedings of International Congress of Mathematical Education 11*. Mexique : Mexico.

DUVAL, R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *16(3),* 349-382.

DUVAL, R. (2006). Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques ? *Relime*, Numéro spécial, 45-81.

ECO, U. (1980). *Signo.* Milan : A. Mandatori. *Le signe*, 1988 pour la traduction française. Bruxelles : Labor.

EVERAERT-DESMEDT, N. (1990). *Le processus interprétatif : introduction à la sémiotique de C.S. Peirce.* Liège : Pierre Mardaga.

FLÜCKIGER, A. (2005). Macro-situation and numerical knowledge building: the role of pupils didactic memory in classrooms interactions. *Educational Studies in Mathematics, 59(3)*, 13-58.

GIBEL, P. (2004). *Fonctions et statuts des différentes formes de raisonnement dans la relation didactique en classe de mathématiques.* Thèse de l'Université Bordeaux 2, Bordeaux.

GIBEL, P. (2008). Analyse en théorie des situations d'une séquence destinée à développer les pratiques du raisonnement en classe de mathématiques. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *13*, 5-39.

GIBEL, P. (2015). Mise en œuvre d'un modèle d'analyse des raisonnements en classe de mathématiques à l'école primaire. *Education et Didactique*, *9-2*, 51-72.

GIBEL, P. (2017). Analyse clinique d'une situation d'apprentissage visant la sensibilisation au concept de limite par les élèves de Première Scientifique. In A. Bessot (Ed.) *Actes du sixième Colloque International de Didactique-Université de pédagogie* (pp. 323-338). Vietnam : Hô Chi Minh ville.

GIBEL, P. (2018). *Elaboration et usages d'un modèle multidimensionnel d'analyse des raisonnements en classe de mathématiques*. Note de synthèse de l'Habilitation à Diriger les Recherches de l'Université de Pau et des Pays de l'Adour.

GIBEL, P. & BLANQUART-HENRY, S. (2017). Favoriser l'appropriation des propriétés géométriques des quadrilatères à l'école primaire : Étude d'une situation d'apprentissage dans le méso-espace. *Revue des Sciences de l'Education, 43(1)*, 37-84.

GIBEL, P. & ENNASSEF, M. (2012). Analyse en Théorie des Situations Didactiques d'une séquence visant à évaluer et à renforcer la compréhension du système décimal. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 17,* 87-116.

HINTIKKA, J., SANDU, J. (1997). Game-Theoretical Semantics. In J. Van Benthem, A. Ter Meulen (Eds.) *Handbook of Logic and Language* (pp.361-410). Amsterdam: Elsevier.

LALAUDE-LABAYLE, M. (2016). *L'enseignement de l'algèbre linéaire au niveau universitaire - Analyse didactique et épistémologique.* Thèse de l'Université de Pau et des Pays de l'Adour.

LEGRAND, M. (1997). La problématique des situations fondamentales. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 16(2),* 221-279.

LORENZEN, P. (1967). *Métamathématiques.* Paris : Gauthier-Villars.

MARGOLINAS, C. (1998). Étude de situations didactiques "ordinaires" à l'aide du concept de milieu : détermination d'une situation du professeur. *Actes de la 8ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques.*

MERCIER, A. (1995). Les effets de l'intervention enseignante dans le milieu des situations adidactiques. In C. Margolinas (Ed.) *Les débats de didactique de mathématiques* (pp.157-168). Grenoble : La Pensée Sauvage.

MORRIS, C.W. (1938). *Foundations of the theory of signs*. Chicago : Chicago university press.

PIERCE, C. S. (1978). *Écrits sur le signe (traduction et commentaires de Deledalle, G.).* Paris : Seuil.

ROBERT, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 18(2)*, 139-190.

VALIDATION EMPIRIQUE, EXPLICATION ET DEMONSTRATION

Thomas **BARRIER**
Université Libre de Bruxelles (ULB)
tbarrier@ulb.ac.be
Azzedine **HAJJI**
Centre de Recherche en Sciences de l'Education (CRSE)
ahajji@ulb.ac.be

Résumé

Les processus d'élaboration des démonstrations reposent sur des pratiques discursives spécifiques et notamment certaines manières de manipuler les exemples et les contre-exemples (Barrier, 2016 ; Barrier & Hajji 2019). Prolongeant une inspiration de Brousseau faisant référence à la logique dialogique de Lorenzen, nous proposons une modélisation explicite de ces processus à même de caractériser les positions énonciatives en jeu (Barrier, Durand-Guerrier & Mesnil, 2019). Nous mettons en particulier en évidence la manière dont le travail empirique peut s'articuler de manière féconde avec le discours déductif, ces aspects étant selon nous parfois minorés (focalisation sur l'empirisme naïf ou réduction du potentiel de ce travail à la production de conjecture). Cette réflexion sera instanciée dans deux domaines mathématiques en particulier : l'arithmétique des entiers et la géométrie plane. Enfin, nous discuterons des potentiels obstacles qui pourraient inhiber un processus d'enquête empirique orienté vers la construction d'explications et de démonstrations.

Mots clés

Démonstration, exemple, logique dialogique, position énonciative, géométrie, arithmétique

REFERENCES

BARRIER, T. (2016). Les exemples dans l'élaboration des démonstrations mathématiques : une approche sémantique et dialogique. *Recherches en Education, 27*, 94-117.

BARRIER, T., DURAND-GUERRIER, V. & MESNIL, Z. (2019). L'analyse logique comme outil pour les études didactiques en mathématique. *Education et Didactique*, *13*(1), 61-81.

BARRIER, T., HAJJI, A. (2019). Exemple, explication et processus de démonstration. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 24*, 47-74.

UNE THEORIE VYGOTSKIENNE DE L'ENSEIGNEMENT-APPRENTISSAGE : LA THEORIE DE L'OBJECTIVATION

Luis **RADFORD**

Université Laurentienne, Canada

Lradford@laurentian.ca

Résumé

Cet article vise à faire un survol de la théorie de l'objectivation (TO). La TO s'inscrit dans l'éventail des théories éducatives socioculturelles contemporaines. Inspirée des travaux de Vygotski et de son école, sa spécificité réside dans les fondements dialectico-matérialistes qui la sous-tendent, fondements qui permettent de repenser à la fois les mathématiques et l'enseignement, et l'apprentissage des mathématiques. Dans la TO, l'apprentissage fait partie d'un projet éducatif qui est à la fois social, historique, culturel et politique et dont le but est la coproduction de subjectivités critiques et éthiques. Plus précisément, l'apprentissage est considéré comme une série de processus sans fin, d'inscription de l'individu dans un monde social, culturel et historique en constante évolution. Ces processus, qui sont à la fois des processus de rencontre avec des savoirs culturels et de création des individus, incluent ce que, dans la TO, on appelle des processus d'objectivation et de subjectivation. De nature interreliée, ces deux processus sont issus de l'activité conjointe des enseignants et des élèves, activité à travers laquelle les mathématiques se révèlent et apparaissent concrètement à la conscience des individus, car, opposée aux épistémologies idéalistes et rationalistes, la TO conçoit les mathématiques comme une entité à la fois idéale et concrète : les mathématiques sont visuelles, tactiles, matérielles, symboliques, gestuelles et kinesthésiques. C'est dans cette rencontre critique, poétique, sensible et sensuelle avec les mathématiques — rencontre progressive, incarnée, discursive, subversive, symbolique et matérielle — que se tissent les processus d'objectivation et de subjectivation et que l'apprentissage a lieu.

Mots clés

Enseignement, apprentissage, Vygotski, objectivation, subjectivation

I. INTRODUCTION

Qu'on le veuille ou pas, toute théorie de l'apprentissage se situe à l'intérieur d'un paradigme éducatif. La théorie de l'objectivation n'est pas une exception. Elle s'inscrit dans l'éventail des théories éducatives socioculturelles qui ont commencé à émerger vers la fin des années 1980 et au début des années 1990 dans le domaine de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques. Les théories socioculturelles ont émergé, en particulier, en réponse au besoin de redéfinir l'apprentissage d'une manière plus ample que ce qu'offraient à l'époque les paradigmes éducatifs en cours, plus particulièrement le paradigme constructiviste d'origine piagetienne et le paradigme technico-instrumental. D'une grande influence notamment dans le monde anglo-saxon, ces paradigmes offraient, en effet, des repères conceptuels et pratiques pour comprendre l'apprentissage mathématique des élèves et pour organiser l'enseignement. Ces deux paradigmes ont été eux-mêmes l'objet d'une lente évolution tout au long du 20e siècle. Pour mieux comprendre la théorie de l'objectivation et le paradigme qui lui a donné naissance, commençons par faire un court rappel de ces deux paradigmes prépondérants du 20e siècle.

1. Le paradigme technico-instrumental

Rappelons qu'au début du 20e siècle, plusieurs pays autour du monde s'étaient engagés dans une réforme éducative dont le but était d'outiller les jeunes générations à faire face aux problèmes que posait l'industrialisation. C'est l'époque où l'éducation mathématique va se profiler comme un projet sociétal explicite, car l'industrialisation ne peut avoir lieu sans les mathématiques. C'est justement cette idée qu'exprime en 1914 Émile Borel : « Sans les principes de la mécanique, la géométrie analytique et le calcul différentiel, rien n'existerait de ce qui constitue la civilisation moderne » (p. 205). On arrivait, par cette voie, à l'idée que le futur d'un pays reposait sur une éducation mathématique scolaire adéquate. La conséquence était que les mathématiques ne pouvaient plus continuer à être considérées comme un luxe pour les élites. Il fallait aussi éduquer les masses. En parlant du rôle des enseignants dans le contexte des nouvelles exigences sociales, Carlo Bourlet (1910) disait que ce rôle

> *est terriblement lourd, il est capital, puisqu'il s'agit de rendre possible et d'accélérer le progrès de l'Humanité tout entière. Ainsi conçu de ce point de vue général, notre devoir nous apparaît sous un nouvel aspect. Il ne s'agit plus de l'individu, mais de la société ; et, lorsque nous cherchons la solution d'un problème d'enseignement, nous devons choisir une méthode non pas suivant sa valeur éducative pour l'élève isolé, mais uniquement suivant sa puissance vulgarisatrice pour la masse. (p. 374)*

Dans la terminologie de l'histoire de l'éducation, le nom généralement donné aux réformes éducatives qui s'en sont suivies en Europe et dans d'autres pays du monde qui s'étaient embarqués dans la voie de l'industrialisation est le *progressisme* (Darling et Nordenbo, 2002). À travers ces réformes, les pays se voyaient marcher vers *la* civilisation, entendue comme progrès technologique. Dans l'Amérique du Nord, le progressisme a donné lieu à deux mouvements différents : le progressisme administratif et le progressisme pédagogique (Tyack, 1974). Le paradigme technico-instrumental est la personnification du progressisme administratif. Il s'organise selon le principe de l'efficacité sociale « in order to make it more efficient in meeting the needs of economy and society, by preparing students to play effective adult roles in work, family and community » (Labaree, 2005, p. 281). Le paradigme technico-instrumental conçoit l'école comme une sorte d'entreprise dont la mission est de produire les sujets dont avaient besoin ces sociétés de l'époque. Ce paradigme n'a pas disparu. Il s'est transformé. Il constitue les bases du mouvement contemporain qui voit l'école comme une entreprise (Laval, 2004) ou comme une usine de production de sujets pour le monde du travail, un mouvement qui conçoit l'enfant comme un capital humain, c'est-à-dire un humain qui participe à la production et consommation de biens, à la création du capital sous toutes ses formes, un humain qu'on voit aujourd'hui sous le prisme de la compétence. L'école y est vue

> *sous l'angle des valeurs, des intérêts et des logiques des propriétaires et des entrepreneurs. La principale préoccupation est de savoir comment les écoles peuvent préparer les futurs travailleurs pour les entreprises et comment cette préparation de la main-d'œuvre peut préparer le terrain pour « gagner » la concurrence économique mondiale entre les nations. (Saltman, 2018, p. xiii)*

Sur le plan pédagogique, ce paradigme débouche sur une conception de l'éducation mathématique que Neyland (2003) appelle « the forensic metaphor » :

> *It is the way of viewing mathematics education that results from the sustained and unrestrained application of the scientific model as a tool of analysis in the service of, or in response to, instrumental rationality as a mode of thought. (p. 548)*

Les mathématiques y sont vues comme un ensemble de règles et des procédures à appliquer et son enseignement est souvent conçu comme la *transmission des savoirs* : le professeur est détenteur des savoirs qu'il verse comme dans un contenant vide. Imaginé comme contenant vide, l'élève attrape le savoir par l'entremise d'exercices répétitifs.

2. Le paradigme centré sur l'élève

Le paradigme centré sur l'élève est la personnification du progressisme pédagogique. Dans une large mesure, ce paradigme s'est constitué en réponse au paradigme technico-instrumental ; il s'est présenté comme sa négation, son antithèse. Ce paradigme puise ses idées dans une conception romantique de l'enfant, une conception qui vient d'une pédagogie inspirée des conceptions du siècle des Lumières selon laquelle

> *the child is neither a scaled-down, ignorant version of the adult nor a formless piece of clay in need of molding, rather, the child is a special being in its own right with unique, trustworthy—indeed holy—impulses that should be allowed to develop and run their course.* (Hirsch, 1996, p. 74)

Dans un livre publié en 1928, *The child-centered school,* Rugg et Shumaker, deux des partisans du paradigme que nous discutons ici, soutiennent que la mission de l'école doit s'articuler autour de l'autonomie de l'élève ; l'école doit assurer « le développement de la personnalité, de l'individualité » ; l'école doit cultiver « la capacité individuelle [des élèves] et [aider ceux-ci] à s'exprimer de manière créative » (Rugg et Shumaker, 1969, pp. 57-58).

L'opposition classique entre l'élève et le professeur remonte aux idées prônées par ce paradigme. Rugg et Shumaker (1969) parlent de « l'initiative des enfants contre l'initiative des enseignants » (p. 56). Cette dichotomie vis-à-vis de l'action des actants en salle de classe a offert à ce paradigme la base conceptuelle et méthodologique de l'action pédagogique. Elle sert à envisager une forme prétendument émancipatrice de production de connaissances en classe où les élèves prennent le contrôle des idées qu'ils produisent et s'en approprient (Radford, 2012).

Les idées éducatives de ce paradigme ont fait leur chemin au cours du 20^{e} siècle et ont eu une influence dans les réflexions sur l'enseignement des mathématiques. On les retrouve, en effet, en tant que fil conducteur des discussions véhiculées vers la fin des années 1960 et tout au long des années 1970, quand on a commencé à prôner des mathématiques d'après lesquelles il ne s'agit plus de montrer à l'élève comment résoudre de problèmes, mais de le laisser essayer par lui-même.

Un bon nombre d'articles publiés dans la nouvelle revue *Educational Studies in Mathematics*, créée en 1968, portent en effet sur des méthodes qui vont permettre aux élèves de reconstruire les mathématiques par eux-mêmes. Dans un des premiers livres de théorisation de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques, le livre *Mathematics as an Educational Task*, son auteur, Hans Freudenthal (1973), dit : « the pupil himself should re-invent mathematics » (p. 118). « The stress is shifted from teaching to learning, from the teacher's action to the pupil's . . . The pupil must perform the action » (p. 110). Dans un passage du même livre, Freudenthal va jusqu'à dire que « Betraying a secret that could be discovered by the child itself is bad pedagogics; it is even a crime » (p. 417).

C'est à partir de l'idée selon laquelle l'élève doit être au *centre* de l'apprentissage et du principe de *l'autonomie de l'élève* que le constructivisme nord-américain a formulé ses fondements théoriques au cours des années 1980. Petit à petit les constructivistes ont fini par formuler le slogan clé des années 1990 : c'est l'élève qui construit son propre savoir ; personne d'autre (le professeur y compris ; en fait, surtout le professeur) ne peut pas le faire à sa place. Avec le constructivisme, on a fini par considérer le savoir comme une affaire tout à fait privée, *subjective*. Et, comme conséquence du principe d'autonomie de l'élève, on a fini par adopter l'idée de l'opposition entre l'enseignant et l'élève. Historiquement parlant, le constructivisme nord-américain est l'une de deux premières théories explicitement formulées sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, l'autre étant bien sûr la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1997a). Il faudra, peut-être, ne pas oublier de mentionner ici le travail colossal que Elkonin and Davydov menaient en Russie depuis les années 1960 (Dougherty & Simon, 2014).

On voit, de ce qui précède, que, dès leur naissance, les deux paradigmes — le technico-instrumentale et celui centré sur l'élève — ont été marqués par l'émergence d'une nouvelle forme de conscience : la conscience d'un individu qui se situe pour ou contre la technification de la vie et de la compréhension de ses propres possibilités dans la transformation de la nature. Il s'agit d'une conscience qui participe (directement ou indirectement) au déplacement des valeurs classiques, représentées précédemment par la littérature et la philosophie et l'apparition de nouvelles valeurs promues par les mathématiques, les sciences et la technologie. Mais, au cours des années 1980 et 1990, on a vu émerger lentement d'autres manières de penser l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, quand un besoin urgent s'est fait sentir sur deux plans différents. D'abord, de par sa nature utilitariste, le paradigme technico-instrumental faisait fi du contexte social, historique et culturel de l'apprentissage. Il en allait de même du paradigme centré sur l'élève, mais pour des raisons différentes : enfermé dans un subjectivisme extrême, le paradigme centré sur l'élève ne pouvait pas offrir une approximation à l'apprentissage qui tiendrait compte du rôle qu'y joue la culture et l'historicité des savoirs. On a donc vu émerger des réflexions qui tentaient de contrer les approches individualistes qui ont dominé l'éducation mathématique dans le monde anglo-saxon et leurs sphères régionales d'influence (voir Lerman, 1996). Mais on a vu aussi émerger des réflexions concomitantes qui se sont prononcées sur la conception eurocentrique des mathématiques que véhiculaient normalement les réflexions sur l'enseignement et l'apprentissage (voir par exemple Bishop, 1988 ; D'Ambrosio, 1985). C'est ainsi qu'on a commencé à chercher d'autres voies qui prendraient en compte l'effet de la culture et de l'histoire, par exemple, par l'entremise des artefacts culturels et de la langue. Si la langue avait déjà été objet de considération, elle y figurait souvent en tant qu'outil de conceptualisation (Vergnaud, 1990 ; Laborde, Puig et Nunez, 1996). Il s'agissait maintenant de la voir surtout comme porteuse d'une *vision du monde*.

Plusieurs chercheurs se sont tournés vers la sociologie alors que d'autres sont allés puiser dans les travaux de Vygotski, Leont'ev et Bakhtin, des assises pour développer de nouvelles idées — c'est le cas notamment de Bartolini Bussi (1991), Boéro, Pedemonte et Robotti (1997) et Lerman, 1996).

Au début du nouveau millénaire, Restivo et Bauchspies (2006) affirmaient, avec étonnement et satisfaction, que

> *The 1990s could be called The Decade of Sociology in mathematics education. It was during those years that the sociology of mathematics became a core ingredient of discourse in mathematics education and the philosophy of mathematics and mathematics education.* (p.197)

L'apparition du paradigme socioculturel a donné lieu à une série de tensions, car le paradigme constructiviste, c'est-à-dire, le paradigme centré sur le projet de l'autonomie de l'élève s'est vu mis en cause. Et en effet, le 20e siècle s'est clos avec ce que Anna Sfard (1999) a appelé dans la conférence PME de l'an 1999 « *La guerre des paradigmes* ».

II. LA THÉORIE DE L'OBJECTIVATION

La théorie de l'objectivation émerge précisément de ce contexte historique et se situe dans le paradigme socioculturel. Elle émerge en opposition au constructivisme et essaie de décrire et de comprendre l'apprentissage des mathématiques comme un processus collectif, culturel et historique.

Mais que veut dire au juste une théorie socioculturelle ? *Grosso modo*, on peut dire que les théories socioculturelles sont celles qui soutiennent que les idées et les individus sont des productions culturelles. Un corollaire qui dérive de cette position théorique est que les idées changent d'une culture à l'autre. Il peut y avoir des adaptations, des emprunts, comme les Grecs ont fait des Mésopotamiens, mais, dans un sens très profond, la rationalité grecque et la rationalité mésopotamienne sont différentes. En d'autres mots, la rationalité est une des caractéristiques de la culture qui la produit.

Or, même si on adopte le point de caractérisation des approches socioculturelles qui vient d'être mentionné, on trouve des divergences à l'intérieur de ces approches. Là où les théories socioculturelles commencent à diverger, c'est dans la manière dont elles rendent compte de l'union consubstantielle des idées et des formes d'être des individus à la culture. Il y en a qui vont voir dans le langage le point d'ancrage entre l'individu et la culture. C'est une option. C'est celle qu'adopte Anna Sfard (2008), par exemple. Mais il y a une autre option : le point d'ancrage n'est pas le langage, mais la *praxis*, l'activité sensible des individus. On verra dans un moment que c'est dans la praxis historico-sociale que la théorie de l'objectivation voit le lien entre l'individu, la pensée et la culture.

En effet, la théorie de l'objectivation puise ses fondements philosophiques dans le matérialisme de la praxis. C'est-à-dire, dans la philosophie de Hegel (1991), de Marx (1982) et d'Ilyenkov (1977) et dans ses nouveaux développements (p. ex., Fischbach, 2014, 2015 ; Sève, 2004). Elle puise des éléments de la psychologie historico-culturelle de Vygotsky (1985). Elle emprunte et raffine son concept d'activité de l'idée de praxis introduite par Marx dans les fameuses *Thèses sur Feuerbach* (Macherey, 2008) et de la théorie de l'activité de Leontiev (1984). Et, enfin, la théorie de l'objectivation articule sa conception de l'éducation à partir des travaux de Paulo Freire (2016).

Des spécificités qui la distinguent d'autres approches socioculturelles, mentionnons-en trois ici : il y a d'abord *sa conception des mathématiques*, sa *conception de l'éducation mathématique* et sa *conception de l'apprentissage.*

1. La conception des mathématiques

Comment la TO conçoit-elle les mathématiques ? Il faut se rappeler que dans le matérialisme hégélien, tout savoir est conçu comme une entité en mouvement perpétuel. Son mode d'existence primaire est celui d'une possibilité : possibilité d'agir ou de penser de certaines manières ; par exemple, comment cultiver la terre, comment résoudre des équations. Quand on résout effectivement une équation, on met en mouvement ce qui n'était que possibilité. On *réalise* cette possibilité. Le moment dialectique est précisément la transformation de la possibilité en actualité, c'est-à-dire, la transformation du possible en quelque chose de *réel*, de concret. L'argent en tant qu'argent est possibilité. Le moment dialectique, c'est quand il s'échange en marchandise, quand on achète quelque chose ; c'est là qu'il se transforme ; c'est là qu'il s'actualise.

Dans ce même ordre d'idées, les mathématiques dans la théorie de l'objectivation apparaissent comme une entité historico-culturelle en mouvement, à la fois possibilité et réalisation et, donc,

une entité à la fois idéale et concrète, réalisée ou matérialisée dans l'activité humaine : c'est à ce titre que les mathématiques sont à la fois idéelles et visuelles, tactiles, matérielles, symboliques, gestuelles et kinesthésiques.
En termes plus généraux, ce qui est idéel ou possibilité dans une culture à un moment donné, c'est le *savoir*. Ce qui se matérialise de ce savoir, c'est ce que dans la TO on appelle la *connaissance*. On comprend alors que ni le savoir ni la connaissance ne sont des entités subjectives. Tout comme le savoir, la connaissance est une entité historico-culturelle. Par contre, la réfraction du savoir dans la conscience du sujet par la médiation de la connaissance est une entité subjective. Cette entité subjective est ce que nous appelons le *concept*. En d'autres termes, le concept est la version subjective du savoir tel que celui-ci se réfracte dans la conscience du sujet par l'entremise de la connaissance. En effet, le savoir comme tel, le savoir *en soi* (le savoir algébrique, par exemple) ne se donne pas à la conscience directement. Il ne devient objet sensible, c'est-à-dire objet de conscience ou de pensée, que par l'effet d'une *médiation*, où il apparaît en tant qu'objet transformé : il apparaît comme connaissance. Nous avons donc une épistémologie non pas à deux niveaux, mais à trois niveaux : le savoir, la connaissance, et le concept. Nous reviendrons sur cette épistémologie à trois niveaux dans un moment. Pour l'instant arrêtons-nous sur la conception de l'éducation à l'intérieur de laquelle s'inscrit la théorie de l'objectivation.

2. La conception de l'éducation mathématique

La théorie de l'objectivation conçoit l'éducation mathématique comme un projet politique, sociétal, historique et culturel visant la création des sujets réflexifs et éthiques qui se positionnent de façon critique dans des pratiques mathématiques historiquement et culturellement constituées, et qui réfléchissent à de nouvelles possibilités d'action et de réflexion.
Ce n'est donc pas l'acquisition d'un savoir ou sa diffusion au sein d'une société qui justifie, dans la théorie de l'objectivation, l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Ce qui justifie le fait que chaque jour l'élève traverse le seuil de l'école, c'est la transformation que l'école devrait opérer sur l'élève afin de le rendre un sujet éthique, réflexif et engagé. Et dans ce projet sociétal, les mathématiques ont certainement un rôle prépondérant à jouer : elles peuvent offrir à l'élève des éléments clés pour se penser en tant qu'humain et pour saisir et appréhender de façon critique en même temps la société et le monde.

3. La conception de l'apprentissage

On voit que, dans la théorie de l'objectivation, l'accent n'est pas seulement mis sur le contenu mathématique. L'accent n'est pas seulement mis sur le savoir, mais *aussi* sur l'être. Ceci amène la théorie à définir l'apprentissage comme un événement ayant lieu le long de deux axes : celui des savoirs culturels et celui du sujet. L'apprentissage perd, par-là, le caractère purement technique et disciplinaire qu'on retrouve dans d'autres théories qui limitent l'apprentissage à l'axe du savoir. Il s'agit ici d'un sujet dans ses prises avec des savoirs culturels. Mais il ne s'agit ici ni d'un sujet épistémique ni d'un sujet psychologique. Il s'agit d'un sujet humain, concret, qui, en apprenant, vit, respire, jouit et souffre avec d'autres. Il ne s'agit pas d'un sujet déjà donné, point d'origine de la conceptualisation et du sens, comme on le retrouve dans le constructivisme, par exemple, mais d'un sujet en devenir, en transformation.
Définir donc l'apprentissage comme événement culturel axé à la fois sur le savoir et l'être nous amène à introduire deux processus interreliés pour rendre compte, d'une part des prises du sujet avec le savoir culturel et, d'autre part, des transformations que subit le sujet comme résultat de sa rencontre avec le savoir. Ce sont, respectivement, les processus d'objectivation et de subjectivation.

III. PROCESSUS D'OBJECTIVATION ET DE SUBJECTIVATION

Arrêtons-nous d'abord sur les processus d'objectivation. Le point de départ est le constat suivant : du point de vue ontogénétique, quand chacun de nous est né, on s'est retrouvé devant un monde déjà constitué ; un monde en changement, certes, mais déjà peuplé par des objets matériels et idéels, c'est-à-dire un monde déjà organisé selon une diversité de systèmes de pensée (pensée scientifique, mathématique, artistique, légale, esthétique, etc.).

Ces systèmes de pensée constituent le savoir. Pour l'enfant, le savoir apparaît comme une capacité générative culturelle et historique d'actions. C'est-à-dire une capacité *latente* à faire des choses et à penser d'une certaine manière — une capacité latente que nous pourrions ou non rencontrer au cours de notre vie, en fonction du réseau culturel, historique et politique d'accès au savoir opérant dans la société. Notre *rencontre* avec des systèmes de pensée constitués culturellement et historiquement (par exemple, mathématiques, scientifiques, esthétiques, juridiques, etc.) est ce qu'on appelle l'*objectivation*.

Pour comprendre le sens de cette rencontre, gardons à l'esprit que le terme « objectivation » fait référence à l'idée que, avant notre rencontre avec le savoir, le savoir se présente à nous comme quelque chose de différent de nous-mêmes : quelque chose de nouveau et d'inconnu ; quelque chose qui, dans son *altérité*, nous résiste ou nous oppose, c'est-à-dire, nous *objecte*. C'est ce qu'exprime le terme latin *objectare*, qui veut dire « placer devant » et auquel la théorie emprunte son nom[1]. Avant notre rencontre avec le savoir, la savoir est le signe d'une *différence*. *Object*-ivation est la tentative d'effacer cette différence. Mais comme le savoir est une forme idéelle (générale) en constante évolution (constamment recréée, raffinée et étendue), la différence que la rencontre tente d'effacer n'est pas totalement réalisable. Il y a toujours un résidu, un surplus qui dépasse nos rencontres toujours locales, contextuelles et concrètes avec le savoir. En conséquence, l'objectivation est toujours partielle, une tentative interminable de saisir le savoir — de devenir conscient de celui-ci.

En termes plus techniques et opérationnels, l'objectivation est un processus social, corporel, matériel et symbolique de prise de conscience du savoir, c'est-à-dire, des formes historiquement et culturellement constituées d'action, d'expression et de pensée.

Or, Cette rencontre peut être quelque chose d'excitant ou quelque chose d'ennuyeux ou de frustrant. Ce qui la rend l'un ou l'autre, c'est la nature de l'*activité* d'enseignement et d'apprentissage.

Par exemple, dans l'enseignement magistral, il y a des processus d'objectivation, car les élèves rencontrent un savoir ; mais dans ce paradigme, ces processus sont très pauvres. En fait, ils sont aliénants. Pourquoi ? Parce que dans les activités d'apprentissage de ce paradigme, l'élève se limite à copier ce que dicte le maître. Ces activités d'apprentissage réduisent l'élève à l'imitation et à l'obéissance.

Dans la théorie de l'objectivation, nous visons à produire des activités d'enseignement et d'apprentissage qui soient riches du point de vue du savoir étudié, mais aussi riches du point de vue des transformations possibles des sujets impliqués dans l'activité.

---

[1] Il convient de faire la différence entre les verbes suivants : *objecter* et *objectiver*. Le deuxième verbe veut plutôt dire rendre objet l'action du sujet (c'est le sens que Sfard retient dans son travail), ce qui amène à une vue chosiste du monde. La théorie de l'objectivation va dans une autre direction : c'est-à-dire, comme nous venons de le dire, dans la direction insinuée par le verbe *objecter*. C'est pour cela que, dans nos interprétations de l'apprentissage nous ne disons pas que l'élève a objectivé un savoir. Pour rester fidèles à la philosophie du matérialisme de la praxis, nous disons plutôt que les élèves s'engagent dans des processus d'objectivation, c'est-à-dire dans des processus de *rencontre* avec un savoir historico-culturel.

Dans les activités que nous visons à promouvoir en salle de classe, nous visons à ce que l'objectivation apparaisse comme un processus critique, poétique, sensible et sensuel de rencontre avec les mathématiques. Il s'agit pour nous de promouvoir les conditions pour qu'il y ait une rencontre progressive, incarnée, discursive, subversive, affective, symbolique et matérielle avec le savoir culturel.

Revenons maintenant aux processus de subjectivation. Nous partons ici du constat que les salles de classe ne produisent pas que des savoirs ; elles produisent aussi des subjectivités, c'est-à-dire des êtres humains uniques. Dans la théorie de l'objectivation, l'étude de la production de subjectivités en classe s'effectue à travers les processus de subjectivation : des processus où, se co-produisant à partir des moyens, des contraintes et des possibilités offerts par la culture et l'histoire, les professeurs et les élèves *parviennent à la présence*.

Que veut dire parvenir à la présence ? Cela veut dire que la question n'est pas simplement de se trouver additivement dans le monde social, comme quand on fait l'ajout mathématique d'un élément à un ensemble. Parvenir à la présence renvoie à l'idée que l'élève, par son engagement et participation dans les activités de salle de classe, en vient à y occuper un espace et à y jouer un rôle. Par son agir, l'élève s'y positionne en même temps qu'il y est positionné par l'agir des autres.

Derrière le concept de parvenir à la présence se trouve une conception dialectique entre la culture et l'individu. Ce qui signifie que de la même manière que les individus produisent la culture, la culture, à travers ses réseaux sociaux de distribution du savoir et du pouvoir, produise ses individus. L'individu et la culture sont des entités coïncidentes en perpétuel changement, l'une devenant continuellement l'autre et vice-versa. Dans ce mouvement dialectique, tant les élèves que les professeurs sont considérés comme des subjectivités en devenir, comme des ouvertures sur le monde. Les professeurs et les élèves sont conceptualisés comme des projets de vie inachevés et en évolution constante, à la recherche d'eux-mêmes, engagés ensemble dans une même activité où ils souffrent, luttent et trouvent ensemble jouissance et épanouissement.

On se rend compte que cette façon de voir le sujet humain est très différente des épistémologies classiques. *Celles-ci prennent le sujet pour acquis*. C'est-à-dire, le sujet y figure comme un *fait* qui n'est pas problématisé. Dans les épistémologies classiques (rationalistes comme celles de Descartes, Leibniz, Kant, et empiristes, comme celles de Hume, Locke, etc.) le sujet est considéré comme *déjà* donné. C'est une entité toute faite en commerce avec les objets du savoir. Ce n'est pas le cas dans le matérialisme de la praxis en général et dans la théorie de l'objectivation, en particulier. Marx (1980) disait justement qu'au départ, à notre naissance, on fait partie d'un troupeau. « L'homme commence seulement à s'individualiser par le procès historique. Il apparaît à l'origine comme *être générique, être tribal, animal de troupeau* – mais nullement comme *ζωον πολιτικο'ν* au sens politique » (p. 433). Humain, on le devient. Et comment est-ce qu'on devient humain ? À travers d'un processus sans fin d'inscription continuelle dans le monde social. Et ce processus a un nom technique très spécifique : *praxis*, ou activité, l'activité sensible. C'est par l'activité pratique, sensible, matérielle que nous nous produisons quotidiennement en tant qu'humains.

IV. TRAVAIL CONJOINT

C'est ce concept d'activité qui vient d'être mentionné, qui, transposé au domaine de l'éducation, constitue la catégorie ontologique fondamentale de la théorie de l'objectivation. Voici quelques caractéristiques principales de ce concept d'activité et du repositionnement des acteurs qu'il apporte.

Premièrement, le professeur n'est pas considéré comme un détenteur de savoirs ; quelqu'un qui est là pour livrer ces savoirs aux élèves, comme c'est le cas de l'enseignement traditionnel. Le professeur n'est pas considéré non plus comme un échafaudeur de stratégies au service des élèves. Cette conception du professeur le fait apparaître comme *patriarche* du savoir. Curieusement, plusieurs approches socioculturelles suivent cette voie ; on parle alors du professeur comme *médiateur*, c'est-à-dire comme une entité détachée qui, depuis son trône de savant, regarde l'élève faire, lui venant en aide quand le besoin se fait sentir. De leur côté, dans la théorie de l'objectivation, les élèves n'apparaissent ni comme des sujets passifs recevant des connaissances, comme c'est le cas dans l'enseignement traditionnel, ni comme les auteurs de leurs propres connaissances, à la manière du constructivisme.

Deuxièmement, l'enseignement et l'apprentissage ne sont pas considérés comme deux activités distinctes, l'une exercée par le professeur (l'activité du professeur) et l'autre par l'élève (l'activité de l'élève). Dans la théorie de l'objectivation, l'enseignement et l'apprentissage sont conceptualisés comme une *seule et même* activité : la même activité pour enseignants et élèves, l'activité d'enseignement-apprentissage[2]. Nous dépassons ainsi la fameuse opposition professeur-élève qui, tel que mentionné dans une section précédente, a été à la base des projets éducatifs du 20e siècle qui voyaient dans l'autonomie de l'élève la clé de l'apprentissage, opposition qui a trouvé sa plus haute expression dans le constructivisme nord-américain.

Pour mieux comprendre cette conceptualisation de l'activité d'enseignement-apprentissage, il nous faut revenir au concept de savoir dans la théorie de l'objectivation et le rapport de celui-ci à l'activité. Comme nous l'avons déjà indiqué ci-dessus, le savoir est un système historico-culturel de capacités génératives d'actions et de réflexion, des manières d'agir et de penser le monde. Comme capacité générative, comme potentiel d'actions, le savoir ne peut pas se montrer comme tel. Hegel disait qu'il est sans forme, impuissant[3]. Le savoir ne peut pas se donner *en soi* à la conscience. Nous disions ci-dessus que pour se rendre objet de conscience, il faut l'effet d'une *médiation*, laquelle le fera *apparaître* dans la réalité concrète. Cette médiation, ce qui le fait apparaître, c'est justement l'*activité de salle de classe*. Et ce qui apparaît, c'est ce que nous avons appelé ci-dessus la *connaissance*. La connaissance est dans ce sens une forme évoluée du savoir, sa version tangible. C'est la manifestation ou incarnation du savoir.

Nous nous retrouvons ici un peu dans la même situation que la musique. La 7e symphonie de Beethoven n'est pas l'ensemble de signes sur une partition. La partition est un *texte sémiotique* et non pas la musique comme telle. De même, les mathématiques ne sont pas les signes qui figurent sur une feuille de papier ou dans un livre. Ces signes sont justement cela : des *signes* ou des *traces* d'une activité. Pour rencontrer la 7e symphonie, il faut l'activité d'un orchestre. Ce que l'orchestre produit à travers cette activité, c'est la musique sensible. C'est pareil avec les mathématiques (Radford, 2019). Le professeur a beau savoir sa leçon d'un bout à l'autre, il est simplement incapable d'injecter les mathématiques dans la tête des élèves. Il faut alors que le professeur *et* les élèves produisent les mathématiques *ensemble*, comme les musiciens jouent et font apparaître *ensemble* la 7e symphonie dans une salle de concerts. Bref, l'activité met en mouvement le savoir (mathématique, musical, etc.), le transformant ainsi en entité sensible à la conscience : cette entité transformée est la connaissance.

[2] Bien sûr, ceci ne veut pas dire que le professeur fait les mêmes choses que les élèves. Il y a certainement une *division du travail* ; mais à la place de les opposer, cette division du travail oriente l'action des élèves et du professeur dans une *même direction*, dans la production de ce que Hegel (2001) appelait « une œuvre commune ». La relation entre le professeur et l'élève apparaît ainsi non pas comme une relation d'opposition, mais comme relation *d'égalité dans la différence*.

[3] "It is only by [the individuals'] activity that … abstract characteristics generally, are realized, actualized ; for of themselves [i.e., as generals, like the characteristics of knowledge] they are powerless." (Hegel, 2001, p. 36)

Or, le concept d'activité auquel nous faisons référence ici ne réduit pas l'activité à l'activité du sujet, à ce que le sujet fait ou dit. Il ne réduit pas l'activité à la coordination d'actions de plusieurs sujets, même pas à une coordination de coordinations d'actions de plusieurs sujets. Cette ligne de pensée réduit l'activité à une conception *fonctionnelle* et *technique*. Dans la théorie de l'objectivation, l'activité est la *base* de la vie des individus. C'est ce que Marx (1982) exprime quand il dit dans *L'Idéologie Allemande* que l'activité ne peut être envisagée « sous le seul aspect de la reproduction de l'existence physique des individus » (p. 1055). L'activité est une manière déterminée à travers laquelle les individus *manifestent* leur vie. « Ainsi les individus manifestent-ils leur vie, ainsi sont-ils. » Ce qu'ils sont —leur vie — coïncide donc avec leur activité, « avec *ce qu'ils* produisent aussi bien qu'avec la façon *dont ils* […] produisent » (Marx, 1982, p. 1055 ; voir aussi le commentaire de Fischback, 2014, pp. 49–50), idée que Leontiev (ou Leont'ev) (1984) résume en disant que « C'est l'activité de l'homme [sic] qui constitue la substance de sa conscience » (p. 174).
À la place donc de réduire l'activité à une coordination plus ou moins technique d'actions, nous la concevons comme un système dynamique qui est mis en mouvement collectivement par l'énergie et les efforts des individus quand ceux-ci se lancent à la recherche de quelque chose de *commun*. L'activité est un système à la fois sensible, matériel, idéel, affectif et émotionnel que forment les individus et qui, en même temps les enveloppe et les dépasse. Pour éviter toute confusion avec d'autres sens du terme activité, dans la théorie de l'objectivation, l'activité dans ce dernier sens est appelée *travail conjoint* (ou labeur conjoint) du professeur et des élèves[4].
Le travail conjoint est la catégorie principale de la théorie de l'objectivation et son unité d'analyse. L'activité sensible et matérielle, entendue comme travail conjoint, est considérée comme le domaine ultime de l'expérience esthétique, de la subjectivité et du savoir. Elle affirme le rôle ontologique et épistémologique fondamental de la matière, du corps, du mouvement, de l'action, du rythme, de la passion et de la sensation dans ce que c'est que d'être humain (Radford, 2016).

V. UN EXEMPLE

L'exemple qui suit provient d'une classe de 3[e] année (élèves de 8–9 ans) que nous avons suivi dans le cadre d'une recherche longitudinale de cinq ans portant sur le développement de la pensée algébrique chez des jeunes enfants (Radford, 2014). En suivant les principes de la théorie de l'objectivation, pour favoriser un apprentissage collectif conceptuellement profond, nous essayons de mettre sur pied des formes sophistiquées de coopération humaine. En fait, laissés à eux-mêmes, les élèves importent à l'école des formes de relations humaines qu'ils trouvent dans la société et leur milieu. Transposées à l'école, ces formes de relations humaines sont souvent guidées par une éthique consensuelle de pouvoir et de soumission. Sans être

[4] La théorie de l'action conjointe souligne elle aussi l'importance à considérer de manière reliée l'action du professeur et celle de l'élève. Celle-ci considère l'action comme entité qui s'organise « au prisme des savoirs ».

> *Si la description [de l'action] est centrée sur les savoirs tels qu'ils sont déployés dans les transactions, c'est parce qu'il est postulé que ce qui donne leur forme à ces transactions … ce sont leurs contenus, et que ces contenus sont des contenus de savoirs, des contenus épistémiques.* (Sensevy, 2007, pp. 16-17)

La théorie de l'objectivation prend une route différente. L'attention porte non pas sur l'action, mais sur *l'activité* (au sens dialectique élaboré ci-dessus). Ce qu'on cherche à expliquer (l'*explanandum*) est l'enseignement-apprentissage dont l'*explanans* (ce qui explique) est précisément l'activité. De plus, on considère l'activité au prisme non pas seulement du *savoir*, mais, en harmonie avec le projet éducatif général, aussi au prisme de l'*être*.

nécessairement explicite, cette éthique amène les élèves à se soumettre à l'autorité du professeur et de reproduire les connaissances que celui-ci attend —comme dans « le cas Gaël » (Brousseau, 1980). Du même coup, cette éthique positionne le professeur comme le détenteur du savoir et lui octroie la responsabilité de transmettre ce savoir aux élèves, donnant souvent comme résultat la sorte de contrat didactique et ses « paradoxes » mise en évidence par Brousseau (voir, par exemple, Brousseau, 1997b ; Sarrazy, 1995). Pour contrer ce type de rapports humains hantés par des phénomènes comme l'« Effet Topaze » (Brousseau, 1983), dans nos leçons, le professeur fait un effort explicite pour que les formes d'interaction de la classe suivent ce que nous appelons une « éthique communautaire ». Cette éthique opère sur une conception de la salle de classe en tant qu'espace public des débats. Elle est axée autour de trois vecteurs : la responsabilité, le soin de l'autre et l'engagement au travail conjoint. Ces vecteurs donnent donc une orientation éthique spécifique à l'activité d'enseignement-apprentissage. Ils centrent cette activité non seulement autour du pôle du savoir (comme c'est le cas dans la théorie de l'action conjointe), mais aussi autour du pôle de l'être.

En effet, *l'engagement au travail conjoint* est plus qu'une attitude : il se montre par l'action durable et persistante que l'on effectue afin de *participer* aux discussions du groupe et à la vie de la classe. Être engagé, c'est être là, *prendre une place* dans les réflexions mathématiques et dans la vie commune de la classe. Il s'appuie sur un réseau de circulation des connaissances en salle de classe qu'implique l'élève en tant que participant *actif*. C'est pourquoi l'engagement au travail conjoint rompt avec le schéma d'obéissance et d'assujettissement au savoir dont « le cas Gaël » constitue le paradigme par excellence.

Le deuxième vecteur de l'éthique communautaire, c'est-à-dire *le soin de l'autre* (*care*), constitue un des aspects centraux de notre relation à autrui ; cela implique un *souci* envers nos proches. Il inclut l'empathie (du grec *pátheia*), c'est-à-dire, la reconnaissance de la souffrance de l'autre. Mais plutôt que d'être une attitude condescendante, elle est porteuse du sentiment de fragilité qui fait partie d'être humain. Empathie signifie reconnaître la fragilité de l'autre en reconnaissant par là notre propre fragilité.

Enfin, *la responsabilité*, telle que nous la concevons ici, constitue la base fondamentale de l'intersubjectivité. Elle est la relation fondamentale de l'altérité, c'est-à-dire de notre rapport à l'autre (Lévinas, 1982). Être responsable signifie répondre à l'autre ; c'est-à-dire, prendre position et combler cet espace dans « l'entre » deux, moi et autrui. Il ne s'agit pas d'une relation d'extériorité, mais d'une relation intersociale à partir de laquelle nous tous allons au-delà de notre structure biologique et, en occupant « l'entre », nous nous coproduisons au quotidien en tant qu'humains.

Au début, le professeur joue un rôle important en suggérant ce qui doit être discuté et en organisant les formes de collaboration humaine. Par exemple, le professeur encourage les élèves à produire des idées en petits groupes et à en discuter ensuite avec d'autres groupes, soit par l'entremise des rencontres ciblées qu'organise le professeur ou par l'entremise des discussions générales, tout en tentant que les élèves discutent de manière critique et avec un esprit ouvert. Le professeur essaie de créer les conditions de possibilité pour que les élèves discutent et échangent en faisant l'expérience de l'éthique communautaire décrite ci-dessus. Par exemple, l'engagement dans le travail conjoint va souvent demander à l'élève : a) d'essayer de produire des idées au cours du travail collectif ; b) d'être à l'écoute et de faire de son mieux pour comprendre les idées proposées par les autres élèves ; c) de prolonger une idée proposée ; d) de prendre la perspective de l'autre en reformulant l'idée proposée par celui-ci ; e) ou encore d'objecter une idée tout en donnant les raisons de l'objection en question. Le rôle organisateur du professeur diminue à mesure que la classe en tant que collectif gagne en cohésion et en compréhension de ce que signifie le travail conjoint.

Les jours précédents notre exemple, les élèves et l'enseignante ont travaillé en petits groupes sur des petits problèmes en mots que les élèves devaient traduire en équation, puis résoudre, à l'aide d'un système sémiotique très simple ; un système sémiotique à trois objets : des « enveloppes », des « cartes » et le signe égal (=) (les « opérations » sur les objets « enveloppes » et « cartes », comme l'addition, la soustraction et la division, restent ostensiblement montrées par juxtaposition de signes ou par des actions appropriées). Naturellement, la classe de problèmes en mots qu'on peut « exprimer » avec un tel système sémiotique est assez limitée, mais elle est suffisamment riche pour que les élèves rencontrent les règles élémentaires de l'« al-gabr » et l'« al-muquabala » (Radford, 1995) sous-jacentes aux simplifications d'équations linéaires en vue d'isoler l'inconnue et trouver la solution[5].

Notre exemple provient de l'activité mathématique de synthèse à la fin de l'unité sur l'enseignement de l'algèbre. Contrairement aux jours précédents, les élèves n'ont plus eu recours à des cartes et des enveloppes physiques ; de plus c'était à eux d'inventer l'histoire ou le problème en mot.

La conception de l'activité d'enseignement-apprentissage en tant que système collectif en mouvement permet de distinguer des « moments » de l'activité. Ainsi, dans notre exemple, l'organisation de l'interaction était divisée en trois moments.

a) Premier moment : les élèves travaillaient en petits groupes pour produire un texte comprenant : une histoire de leur invention, la traduction de l'histoire en une équation algébrique et la solution de l'équation (voir la figure 1, images 1 et 2). Chaque groupe avait un groupe « correspondant » avec lequel un échange de textes devait avoir lieu plus tard (voir troisième moment ci-dessous).

b) Deuxième moment : le groupe devait envoyer un texte à son groupe correspondant, et inversement. Chaque groupe lisait et évaluait la production de l'autre groupe (voir figure 2, image 3). L'évaluation de la production de l'autre groupe devait se faire sur la base de plusieurs éléments, tels que :

(1) la *clarté* du texte mathématique (est-ce qu'on comprend ce que le texte dit ?) ;
(2) la *justesse* du texte (est-ce que c'est vrai ce que le texte affirme ?) ;
(3) le caractère *convaincant* du texte (est-ce que tout est solidement appuyé du point de vue mathématique ?).

c) Troisième moment : chaque groupe rencontrait son groupe correspondant ; lors de cette rencontre, chaque groupe soumettait à l'autre groupe ses commentaires et un débat s'en suivait entre les groupes (pour la méthodologie de discussion, voir Radford et Demers, 2004).

	
Image 1	Image 2

[5] Les problèmes en mots font intervenir deux personnages ayant un certain nombre de cartes et d'enveloppes chacun. L'énoncé du problème spécifie les montants correspondants et le fait que les enveloppes contiennent toutes un nombre inconnu de cartes à l'intérieur. L'énoncé du problème affirme que les deux personnages ont un nombre égal de cartes. Il y a quelques années, ce type de problèmes a été expérimenté avec des classes d'élèves plus âgés ; voir (Radford et Grenier, 1996).

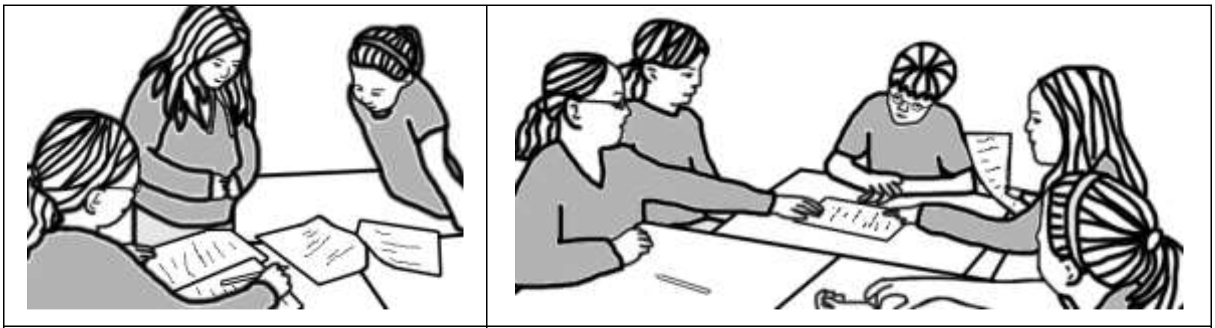


Image 3 | Image 4

Figure 1 : Les images 1 et 2 montrent une équipe et l'équipe correspondante en train de travailler indépendamment à la production d'un texte mathématique. L'image 3 montre une équipe qui examine de manière critique le texte de l'autre équipe. Au même moment, l'autre équipe fait de même. L'image 4 montre que les membres des deux équipes correspondantes se rencontrent pour discuter de leurs textes.

Nous nous limiterons ici à surligner des passages concernant le troisième moment, en particulier en ce qui a trait aux processus d'objectivation et de subjectivation.
L'équipe constituée de Carl et Sandra —équipe appelée A dans ce qui suit — a produit le texte suivant :

> Pour Noël, Calin a reçu trois boîtes de Webkinz et Samantha une boîte[6]. Il [Calin] a déjà 4 Webkinz. Et Samantha a déjà 28 Webkinz. Maintenant, ils ont tous les deux la même quantité [de Webkinz].

L'équipe constituée de Christine, Elisa et Sara — appelée B — a produit le texte suivant :

> Martine a 10 gommettes dans sa collection. Elle reçoit une enveloppe d'autocollants pour son anniversaire. Cassidy a 6 gommettes dans sa collection. Et (reçoit) 2 enveloppes de gommettes pour Noël. Combien y a-t-il de gommettes dans chaque enveloppe ?

La traduction et la solution de ces équations apparaissent à la figure 2.

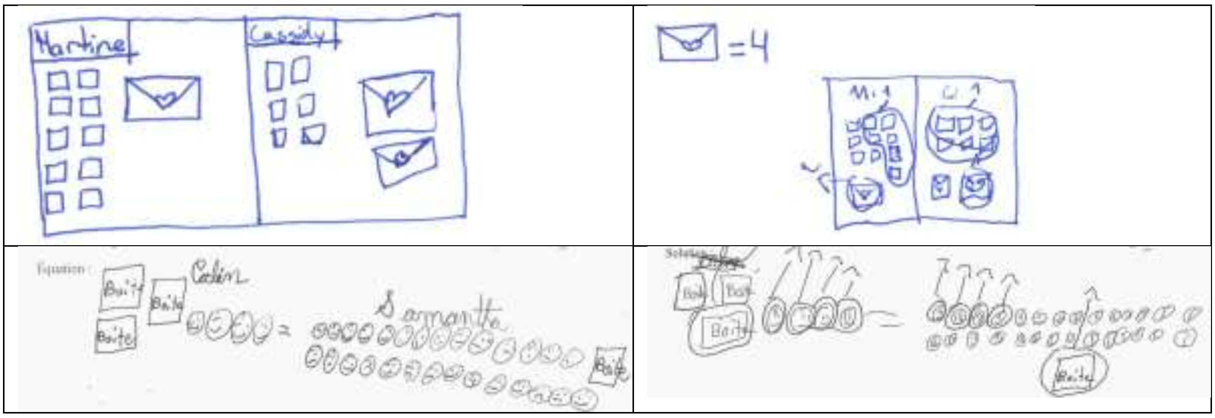


Figure 2 : Rangée du haut, équation et solution de l'équipe B. Rangée du bas, équation et solution de l'équipe A.

Quand les moments 1 et 2 ont été conclus, l'enseignante a invité les groupes à se rencontrer « Vous allez dire aux amis ce que vous avez aimé du problème, ce que peut-être vous pensez qui manquait. Est-ce que vous trouvez que l'histoire est claire ? Donner vos raisons … Est-ce que vous pensez que l'équation est juste ? Expliquez pourquoi. Est-ce que pouvez faire ça ? »
L'enseignante est partie voir d'autres équipes.
L'équipe A commence la discussion :

[6] Les Webkinz sont des petits animaux en peluche.

1. Carl : Um, ce qu'on a aimé, c'est que votre histoire était claire, il n'y avait aucune faute, on pouvait bien la lire. C'est ça ce qu'on a aimé de votre histoire.
2. Sandra : (En indiquant d'un geste indexical la démarche de solution de l'autre équipe) c'est juste comme le faire [ainsi]…
3. Christine : C'est ça ce que tu as aimé de l'équation ?
4. Sandra : Ici, ici (elle pointe vers la solution de l'équation) ce qu'on a aimé, ce que tu as mis l'enveloppe = 4.

L'équipe B continue la discussion en donnant la raison de ses jugements :

5. Elisa : on a vraiment aimé ton histoire, parce que j'adore des Webkins, mais la seule affaire c'est que, t'as pas demandé… c'était…
6. Carl : (Interrompt) non, ça c'est, tu dis ce que tu aimes.
7. Elisa : Oh ok. [Ce que] j'aime … de ton histoire, c'est que… je vois que c'est bien clair, pas de barbouillage ; tu peux même voir tout … j'ai vu que, t'as même écrit les mots pour [dire] c'est quoi (elle pointe les dessins). T'as montré ce que c'est les boîtes, comme ici… (elle indique les termes « boîtes » dans l'équation du groupe de Carl)… et ce que j'ai aimé de ta solution, c'est que, j'ai vu que t'as, t'as bien encerclé … t'as pas barbouillé en haut, ouien (ils rient).

On voit dans ce court passage comment les deux groupes commencent leur discussion. Ils ont lu, interprété et porté un premier jugement sur le texte mathématique de l'autre groupe. Les élèves commencent par faire ressortir les éléments qu'ils trouvent bien faits. Cette démarche, qui peut sembler sans intérêt majeur, permet aux élèves toutefois de rentrer dans la pratique mathématique et de se positionner à l'intérieur de celle-ci. En l'absence de l'enseignante, ils s'organisent eux-mêmes. À la ligne 5, Elisa commence un commentaire sur les insuffisances du texte de l'autre groupe ; à la ligne 6, Carl lui rappelle que ce n'est pas le moment encore. Certainement, l'activité langagière est encore fragile ; l'usage fluide des termes techniques propres au discours mathématique échappe encore aux élèves. Ainsi, à la ligne 7, Elisa dit : « j'ai vu que t'as, t'as bien encerclé … » ; la phrase reste inachevée. Mais l'autre groupe comprend qu'elle fait référence aux objets enlevés dans la simplification de l'équation. Cette démarche fait partie du processus de subjectivation à travers lequel les élèves rencontrent d'autres voix, en viennent à occuper un espace, et à prendre une perspective dans le monde social. Les élèves font preuve de l'empathie envers les autres : ils s'efforcent de comprendre le texte des autres.

Ensuite, chaque groupe discute de ce qu'il pense qui pourrait être amélioré dans le texte de l'autre groupe.

8. Carl : Dans votre équation, vous n'avez pas mis le signe égal.
9. Sandra : Et il faut mettre ça !
10. Carl : Il faut toujours mettre ça. Ça, c'est ce que vous auriez dû faire (il pointe vers leur propre page et leur montre).
11. Christine : C'était l'idée de Elisa et Sara !
12. Carl : (En faisant référence à la simplification de l'équation) vous n'avez pas fait un par un. Et (en faisant référence à la solution de l'équation) en plus 4 quoi ? Comme on ne sait pas 4 quoi ? Vous avez juste écrit 4 ; vous auriez dû écrire « cartes »
13. Elisa : … pas cartes, « gommettes » ; c'est des « gommettes ».

Comme on vient de le voir, les élèves du groupe A s'arrêtent sur trois points :

a) L'absence du signe égal dans l'équation du groupe B (lignes 8, 9 et 10).
b) La procédure de simplification de l'équation : à la place d'enlever simultanément *un à un* les objets de chaque côté de l'équation, les élèves ont enlevé 6 objets *en même temps* de chaque côté de l'équation (ligne 12).
c) Le manque de retour au problème du départ pour identifier la *nature* de la solution (« 4 » versus « 4 gommettes ») (lignes 12 et 13).

Les élèves du groupe B ont accepté a) et c), mais ils n'ont pas accepté b).
La critique du groupe B a porté essentiellement sur le manque de question dans le texte en mots du groupe A et a donné lieu à un débat intense. Voici un court extrait de ce débat :

14. Elisa : t'as pas dit « combien de… comme, combien y'a de… dans chaque boite ? ».
15. Sandra : t'es pas supposé de dire combien… y'a dans chaque boite !
16. Carl : t'es pas supposé !
17. Sandra : parce que t'es supposé de découvrir combien il y a dans chaque boite !
18. Elisa : oui, mais tu dois *demander* comme, laisse [voir]… comme [nous] on a écrit… « Combien de gommettes y'a dans chaque enveloppe ? » Ça, c'est ce que tu dois chercher.

Elisa a de la difficulté à articuler sa critique. La conversation ne semble pas porter sur le même objet du discours. Carl et Sandra pensent que Elisa demande à ce qu'ils mentionnent la réponse dans l'histoire qu'ils ont composée. Les groupes ne se mettent pas d'accord et décident de continuer la discussion. La discussion tourne ensuite sur la solution de l'équation. L'équipe B se plaint que les objets ont été dessinés trop petit, mais les élèves finissent par se mettre d'accord que cela n'a pas d'importance. Ils discutent aussi de la grandeur des nombres utilisés dans le texte du groupe A. Ce groupe suggère que cela prend trop de temps de résoudre une équation avec un grand nombre comme 28 ; ses membres pensent que s'ils avaient utilisé 100, la résolution de l'équation aurait pris 10 minutes environ. Le groupe A suggère d'utiliser des cercles pour des grands nombres, donc une nouvelle notation symbolique. La discussion n'a pas été poussée plus loin, mais l'idée est restée sur la table. Et, en fait, c'est cette route que cette classe explorera l'année prochaine avec une autre enseignante.
L'intérêt des passages précédents réside dans le fait qu'il montre les processus d'objectivation et de subjectivation à travers desquels les élèves commencent à prendre conscience de la manière de formuler un problème, de la manière d'effectuer sa traduction en équation dans un système symbolique (même si celui-ci n'est qu'iconique) et les caractéristiques du processus de sa résolution.
Quand les élèves étaient en train de boucler la discussion sur les grands nombres, l'enseignante est arrivée pour voir le groupe.

19. Enseignante : Quels sont des choses que vous avez remarqué qui auraient pu être améliorées chez l'autre groupe ? Ok. On va commencer ici (elle pointe vers Sandra)
20. Sandra : On a vu qu'ils avaient pas mis le signe égal.
21. Enseignante : Ah ! Donc, il manque le symbole égal.
22. Sandra : Et puis, ici, y'avait pas mis un par un, ils avaient juste pris un groupe et ils l'avaient ôté.
23. Enseignante : D'accord. Je suis d'accord [qu'il manque] le symbole égal, parce que ça c'est une équation, n'est-ce pas ? Donc, ça serait une chose à améliorer la prochaine fois ? Ajouter un signe égal.
24. Christine : Ouien…
25. Enseignante : L'idée qu'ils ont encercler les 4 [cartes], puis qu'ils ont juste sorti toutes ces cartes en même temps, je n'ai pas de problème avec ça.

Ensuite, les élèves rapportent à l'enseignante la critique du groupe B au sujet de la question manquante dans le texte du groupe A, car, comme Christine l'a dit, sans cela, c'est-à-dire, sans question, « tu ne sais pas ce que tu [dois] faire ! »

26. Enseignante : qu'est-ce qu'on veut savoir ?
27. Carl : … combien il y a dans la boîte
28. Enseignante : Oh ! On veut savoir combien il y a dans la boite. Pensez-vous que, dans la situation comme ça, pour quelqu'un qui lit ça [le texte], puis qui veut résoudre, puis veut trouver la solution… pensez-vous que c'est important d'ajouter la question ?

29. Sandra : Ouien…
30. Carl : Moi, je dis que non, parce que dans une histoire, les péripéties, on dit pas comme… c'est quoi la solution !
31. Enseignante : Moi, je pense que dans une histoire comme celle-ci, il est important d'avoir une question, si on veut … savoir combien de Webkins il y a dans chaque boîte.

À la fin, il n'y a pas de consensus. Carl voyait le texte mathématique un peu comme un texte littéraire, où l'on trouve une *situation*, ensuite un *déroulement* ou « péripétie », comme il l'appelle lui-même, et qui correspondrait à la simplification de l'équation, puis la *fin*, qui consiste à nommer la solution.

Dans un sens, l'intervention de l'enseignante pourrait se voir comme un échec d'institutionnalisation des savoirs. Vu sous cet angle, dans les passages précédents, l'enseignante aurait manqué l'occasion d'indiquer aux élèves comment on pose un problème et en particulier le rôle de la question. À y voir de plus près, l'enseignante a certainement pris position : (voir les lignes 21, 23 et 25 ci-dessus). Mais elle essaye de le faire sans imposer son autorité. La question n'est pas de se débarrasser de l'autorité, mais de l'exercer de manière responsable, c'est-à-dire, en tenant compte des propos et des perspectives des autres. L'enseignante est la personnification dans la salle de classe d'une rationalité culturelle et son but n'est pas d'imposer cette rationalité, mais d'*offrir* aux élèves une autre manière de voir le problème (une manière historiquement et culturellement constituée de penser les problèmes mathématiques) pour que les élèves le considèrent à partir de leur propre perspective. L'objectivation du savoir ne consiste pas dans l'imposition d'une manière de voir le monde et dans l'assujettissement de l'élève à celle-ci (si on procédait de la sorte, on ne serait pas mieux placé que dans « le cas Gaël »). L'objectivation consiste dans ce processus de rencontre critique, toujours inachevée, avec le savoir. Et c'est justement cette offre que fait l'enseignante aux élèves à la ligne 28 : « Pensez-vous que… ? ». Elle s'engage dans une voie *dialogique* qui la rend nécessairement *vulnérable*. L'enseignante n'est pas par-dessus les élèves. Elle *est* avec les élèves ; elle travaille *avec* eux. C'est cela le sens du travail conjoint dans la théorie de l'objectivation. Naturellement, l'offre peut être réfutée par les élèves. Et, en fait, c'est exactement cela qui s'est produit à la ligne 30. Donc, à la ligne 31, elle prend position, mais, à nouveau, et en harmonie avec le projet *éthique* d'enseignement-apprentissage, sans imposer son autorité. Car le projet tourne autour de la création des conditions permettant aux élèves de participer à des débats en classe à partir des formes non utilitaires ni assujettissantes d'interaction et de collaboration humaines et à l'intérieur desquelles l'enseignante *et* les élèves s'expriment et se positionnent dans l'espace public et, en ce faisant, se co-produisent quotidiennement.

VI. EN GUISE DE CONCLUSION

Le but de cet article est de faire une esquisse générale de la théorie de l'objectivation. On a commencé par situer cette théorie à l'intérieur du paradigme des théories socioculturelles éducatives contemporaines, paradigme qui a émergé en réaction aux paradigmes instrumental et constructiviste qui ont eu (et continuent d'avoir) une grande influence en particulier dans les manières de comprendre l'apprentissage dans le monde anglo-saxon. On a mentionné brièvement trois des caractéristiques de la TO : *sa conception des mathématiques,* sa *conception de l'éducation mathématique* et sa *conception de l'apprentissage.* Derrière ces caractéristiques se trouve : a) une position philosophique dialectique qui provient du matérialisme de la praxis ;

b) une conception de la relation entre l'individu et son contexte social et historique qui provient des travaux de Vygotski et son école et c) une conception de l'éducation qui s'inspire du travail de Paulo Freire.
La position philosophique nous permet de théoriser le savoir en tant que catégorie historico-culturelle. Les travaux de Vygotski et de Freire nous aident à théoriser l'apprentissage comme un problème de formation de la conscience (entendue non pas comme entité métaphysique, mais comme rapport sensible au monde). Ces travaux nous aident aussi à formuler une conception critique de l'éducation mathématique qui va au-delà du savoir pour inclure d'une manière décisive l'axe de l'être.
On a vu que, conçu comme capacité générative historiquement et culturellement constituée, comme potentiel d'action et de réflexion, le savoir ne peut se donner à la conscience que dans la pratique. Il s'y donne sous une forme matérialisée, sensible, singulière que nous avons appelée connaissance. Et ce qui permet la transformation du savoir en connaissance, c'est justement l'activité humaine, dans notre cas, l'activité de salle de classe. C'est *par* et *dans* l'activité que le savoir acquiert des déterminations culturelles devenant ainsi objet de conscience et de pensée. Entendue dans son sens dialectique-matérialiste, l'activité constitue la catégorie centrale de la théorie de l'objectivation. L'activité héberge et donne forme aux processus d'objectivation (c'est-à-dire de rencontre avec les savoirs culturels) et aux processus de subjectivation (c'est-à-dire de co-production des subjectivités) à travers lesquels nous définissons l'apprentissage.
Mais, comme on l'a indiqué précédemment, cette activité peut tourner rapidement en activité aliénante, en activité où les sujets sont soumis et assujettis au savoir, comme c'est le cas de l'enseignement traditionnel. Pour aller au-delà de l'éthique de l'obéissance qui caractérise dans une large mesure l'activité aliénante de salle de classe, on s'est tourné du côté d'une éthique qu'on a appelée « éthique communautaire » à la base de laquelle se noue une nouvelle relation au savoir et à l'être ; elle permet de voir l'enseignement et l'apprentissage comme une même activité, l'activité d'enseignement-apprentissage que, pour la distinguer des autres usages du terme activité, on a désigné par le terme de *travail conjoint* — le travail conjoint du professeur et des élèves.
On a essayé de monter, à travers quelques extraits en provenance d'une classe de 3^{e} année, quelques éléments des processus d'objectivation et de subjectivation. L'exemple montre, en particulier, la façon dont les élèves rencontrent quelques facettes de ce savoir : savoir poser un problème, le traduire en équation et résoudre l'équation algébriquement. Ils s'engagent dans des discussions intenses à travers lesquelles ils rencontrent un savoir à la fois historico-culturel et formateur de la conscience. L'exemple montre également la complexité de l'organisation de l'interaction à laquelle a recours l'enseignante afin de permettre aux élèves de rencontrer d'autres voix, de prendre position dans les discussions et de *parvenir ainsi à la présence.*
Naturellement, l'apprentissage est un processus inachevable. Il y aura toujours lieu à aller plus loin, tant dans l'axe du savoir que dans celui de l'être. Dans notre exemple, l'inconnue était représentée par le nombre d'objets dans un contenant. Le nombre d'objets dans chaque contenant doit être toujours le même. Ceci n'a pas été objet de thématisation théorique. Il va falloir y revenir plus tard afin de provoquer une prise de conscience de cet élément essentiel. Également, il faudra revenir sur la question de la responsabilité. On a vu que, quand l'équipe A présente une critique au sujet du manque de signe égal dans l'équation de l'équipe B, Christine, à la ligne 11, essaie de se déresponsabiliser ; elle dit : « C'était l'idée de Elisa et Sara ! ». Il faudra prendre conscience qu'on n'appartient pas à une équipe seulement quand les choses vont bon train.
Quoiqu'il en soit, le travail conjoint est un travail où chacun accepte de s'exposer, de se montrer vulnérable. C'est un travail qui transforme les élèves *et* le professeur, car chacun abandonne sa niche sécuritaire pour aller vers l'imprévisible. Le philosophe hégélien John Russon voyait un

élément artistique dans cet acte à travers lequel nous nous lançons au-delà des limites de notre confort quotidien. Artistique, car, cet acte est un acte de « homemaking », c'est-à-dire que par cet acte nous forgeons notre demeure *dans* le monde : « It is only through risking ourselves — exposing ourselves, beyond the comfortable terms of familiar life, to an unknown, beckoning alien reality — that we *grow*, that we come to inhabit a deeper, richer, and more substantial home » (Russon, 2017, p. 39).

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BARTOLINI BUSSI, M. (1991). Social interaction and mathematical knowledge. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the Fifteenth Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 1–16). Assisi (Italy).

BISHOP, A. (1988). *Mathematics education and culture*. Dordrecht : Kluwer.

BOERO, P., PEDEMONTE, B. & ROBOTTI, E. (1997). Approaching theoretical knowledge through voices and echoes : A Vygotskian perspective. In *Proceedings of the XXI International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 81–88). Lahti, Finland : PME.

BOREL, É. (1914). L'adaptation de l'enseignement secondaire aux progrès de la science. *L'Enseignement Mathématique*, *16*, 198–210.

BOURLET, C. (1910). La pénétration réciproque des mathématiques pures et des mathématiques appliquées dans l'enseignement secondaire. *L'Enseignement Mathématique*, *12*, 372–387.

BROUSSEAU, G. (1980). L'échec et le contrat. *Recherches*, *41*, 177–182.

BROUSSEAU, G. (1983). *Les « effets » du « contrat didactique »*. 2ième école d'été de didactique des mathématiques. Olivet, France.

BROUSSEAU, G. (1997a). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht : Kluwer.

BROUSSEAU, G. (1997b). *La théorie des situations didactiques*. Cours donné lors de l'attribution à Guy Brousseau du titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Montréal.

D'AMBROSIO, U. (1985). Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. *For the learning of mathematics*, *5*(1), 44–48.

DARLING, J. & NORDENBO, S. (2002). Progressivism. In N. Blake, P. Smeyers, R. Smith & P. Standish (Eds.), *The philosophy of education* (pp. 288–308). Oxford : Blackwell.

DOUGHERTY, B., & SIMON, M. (2014). Elkonin and Davydov Curriculum in Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 204-207). Dordrecht, The Netherlands : Springer.

FISCHBACH, F. (2014). *La production des hommes. Marx avec Spinoza*. Paris : Vrin.

FISCHBACH, F. (2015). *Philosophies de Marx*. Paris : Vrin.

FREIRE, P. (2016). *Pedagogia da solidariedade*. São Paulo, Brazil : Paz & Terra.

FREUDENTHAL, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, Holland : D. Reidel Publishing Company.

HEGEL, G. (1991). *The Encyclopaedia Logic. Part I of the Encyclopaedia of Philosophical Sciences (T. F. Geraets, W. A. Suchting & H. S. Harris, Trads.)*. Indianapolis / Cambridge : Hackett Publishing Company, Inc.

HEGEL, G. (2001). *The philosophy of history*. Kitchener, Ontario : Batoche Books. (Original work published 1837)

HIRSCH Jr, E. D. (1996). *The schools we need and why we don't have them*. New York : Anchor Books.

ILYENKOV, E. V. (1977). *Dialectical logic*. Moscow : Progress Publishers.

LABAREE, D. (2005). Progressivism, schools and schools of education : An American romance. *Paedagogica Historica*, 41(1-2), 275–288

LABORDE, C., PUIG, L. & NUNES, T. (1996). Language in mathematics education. In L. Puig & A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 53–84). University of Valencia, Valencia, Spain : PME.

LAVAL, C. (2004). *L'école n'est pas une entreprise*. Paris : La découverte.

LERMAN, S. (1996). Intersubjectivity in mathematics learning : A challenge to the radical constructivist paradigm? *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(2), 133–150.

LEONTIEV, A. N. (1984). *Activité, conscience, personnalité*. Moscou : Éditions du Progrès.

LEVINAS, E. (1982). *Éthique et infini*. Paris : Fayard.

MACHEREY, P. (2008). *Marx 1845. Les thèses sur Feuerbach*. Paris : Éditions Amsterdam.

MARX, K. (1980). *Manuscrits de 857–1858 (« Grundrisse »). Tome I*. Paris : Éditions sociales.

MARX, K. (1982). *Oeuvres. Tome III. Philosophie*. Paris : Gallimard.

NEYLAND, J. (2003). Re-visioning curriculum : Shifting the metaphor from science to jazz. In L. Bragg, C. Campbell, G. Herbert & J. Mousley (Eds), *Mathematics Education Research: Innovation, networking, opportunities. Proceedings of the 26th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 547–554). Geelong, Victoria : MERGA.

RADFORD, L. (1995). L'émergence et le développement conceptuel de l'algèbre. In F. Lalonde, J. Jaboeuf & Y. Nouazé (Eds.), *Proceedings of the First European Summer University "History and Epistemology in Mathematics Education"* (pp. 69–83). Montpellier : IREM de Montpellier.
RADFORD, L. (2012). Education and the illusions of emancipation. *Educational Studies in Mathematics*, *80*(1), 101–118.
RADFORD, L. (2014). The Progressive Development of Early Embodied Algebraic Thinking. *Mathematics Education Research Journal*, *26*(2), 257–277.
RADFORD, L. (2016). Mathematics Education as a matter of labor. In M. A. Peters (Ed.), Encyclopedia of Educational Philosophy and Theory. *Section : Mathematics education philosophy and theory*. Singapore: Springer.
RADFORD, L. (2019). So, you say that doing math is like playing music? The mathematics classroom as a concert hall. *La matematica e la sua didattica*, *27*(1), 69–87.
RADFORD, L. & DEMERS, S. (2004). *Communication et apprentissage. Repères conceptuels et pratiques pour la salle de classe de mathématiques*. Ottawa : Centre franco-ontarien des ressources pédagogiques.
RADFORD, L. & GRENIER, M. (1996). Entre les idées, les choses et les symboles. Une séquence d'enseignement d'introduction à l'algèbre. *Revue des sciences de l'éducation*, *22*, 253–276.
RESTIVO, S. & BAUCHSPIES, W. (2006). The will to mathematics : Minds, morals, and numbers. *Foundations of Science*, *11*, 197–215.
RUGG, H. & SHUMAKER, A. (1969). *The child-centered school.* New York : Arno Press & The New York Times. (Original work published 1928)
RUSSON, J. (2017). *Sites of Exposure: A Philosophy Essay on Art, Politics and the Nature of Experience*. Bloomington: Indiana University Press.
SALTMAN, K. (2018). *The politics of education. A critical introduction*. London : Routledge.
SARRAZY, B. (1995). Le contrat didactique. *Revue Française de Pédagogie*, *112*, 85–118.
SENSEVY, G. (2007). Des catégories pour décrire et comprendre l'action didactique. In G. Sensevy & A. Mercier (Eds.), *Agir ensemble. L'action didactique conjointe du professeur et des élèves* (pp. 13–45). Rennes : Presses Universitaires de Rennes.
SEVE, L. (2004). *Penser avec Marx aujourd'hui*. Paris : La Dispute.
SFARD, A. (1999). Doing research in mathematics education in time of paradigm wars. *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Haifa, Israel : PME.
SFARD, A. (2008). *Thinking as communicating*. Cambridge : Cambridge University Press.
TYACK, D. (1974). *The One Best System*. Cambridge : Harvard University Press.
VERGNAUD, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, *10*, 133–170.
VYGOTSKI, L. S. (1985). *Pensée et langage*. Paris : Éditions sociales.

PARCOURS D'ETUDE ET RECHERCHE AU NIVEAU UNIVERSITAIRE : GERER, ANALYSER ET INSTITUTIONNALISER LES SAVOIRS

Berta **BARQUERO**

Université de Barcelone, Barcelone, Espagne

bbarquero@ub.edu

Ignasi **FLORENSA**

Escola Universitària Salesiana de Sarrià, Barcelone, Espagne

iflorensa@euss.es

Résumé

Après plus de dix ans d'expérience dans la conception, la mise en œuvre et l'analyse de parcours d'étude et de recherche (PER), nous présentons une analyse rétrospective des PER mis en œuvre dans différents diplômes universitaires. Nous nous centrons sur les principaux outils méthodologiques pour la conception et la gestion des PER, ainsi que certains résultats sur sa viabilité au niveau universitaire. Nous analysons différents PER et soulignons les outils méthodologiques qui ont fonctionné le mieux. Nous montrons aussi comment ils ont évolué pour faciliter la mise en place d'une méthodologie plus systématique.

Mots clés

Parcours d'étude et recherche, théorie anthropologique du didactique, démarche d'investigation, ingénierie didactique

I. INTRODUCTION

Pendant les dernières deux décennies, la recherche sur les démarches d'investigation dans l'enseignement mathématique (IBME en anglais) est largement répandue. Il a été promu par les gouvernements et les organisations internationales à travers des programmes spécifiques et des réformes de programmes, tels que les projets Primas et Fibonacci en Europe, ou les Common Core State Standards aux États-Unis. Artigue et Blomhøj (2013, p. 802) décrivent comment les différents cadres de recherche offrent des « perspectives particulières sur la conceptualisation et la mise en œuvre de l'IBME ». L'analyse des différents cadres de recherche révèle l'existence de principes communs tels que l'« authenticité » des questions et l'activité associée, sa pertinence épistémologique, la progression des connaissances, le développement de questions extra-mathématiques et le rôle des mathématiques comme outil de modélisation. L'un des problèmes qui émerge de cette diversité d'approches est que la concrétisation de l'IBME dans les expériences de recherche ne peut s'appuyer que sur ces principes généraux. Celle-ci souffre alors de l'absence d'une méthodologie claire et systématique pour concevoir, gérer et analyser les expériences mises en œuvre, et de fournir des outils de recherche spécifiques pour développer ces tâches.

Les parcours d'étude et recherche (PER) sont les formats d'enseignement basés sur l'enquête proposés par la théorie anthropologique du didactique (TAD). Ils sont initiées par une question génératrice (Q_0) adressée par une communauté d'étude (un ensemble d'étudiants X et un ensemble de guides de l'étude Y) formant un système didactique $S(X, Y, Q_0)$. Le but du système didactique est de produire une réponse finale $A^{\heartsuit}$ à la question Q_0. Le travail de la communauté d'étude et les savoirs utilisés peuvent être décrits comme une concaténation de questions dérivées et des réponses associées qui conduisent au développement de $A^{\heartsuit}$. Le processus d'enquête combinera des moments d'étude des informations disponibles dans différentes sources, avec des moments de recherche et de création de nouvelles questions et réponses, y compris l'adaptation des informations recueillies à la question spécifique (initiale ou dérivée) abordée.
L'implémentation d'un PER a un double objectif. D'une part, les PER peuvent être considérés comme un outil d'enseignement permettant de passer du paradigme pédagogique de la « visite de œuvres » au nouveau paradigme du « questionnement du monde » (Chevallard, 2015). D'autre part, les PER peuvent être considérés comme un outil de recherche adéquat pour identifier, modifier et étudier des phénomènes didactiques, qui sont des faits réguliers qui ont lieu dans les processus d'enseignement et d'apprentissage spécifiques au contenu concerné. La mise en œuvre d'un PER est un outil empirique pour produire des données pour évaluer dans quelle mesure et comment les phénomènes didactiques peuvent être modifiés. Ils permettent aussi de travailler sur la définition et la conception de modèles épistémologiques et didactiques alternatifs dans lesquels le savoir à enseigner et sa pratique d'enseignement sont questionnés et réorganisés.
La TAD a développé divers outils pour analyser les processus d'étude et les PER en particulier. Deux de ces outils sont le schéma Herbartien (Chevallard, 2008) (voir Figure 1) et la dialectique média-milieu. La première partie du schéma représente le système didactique $S (X; Y; Q_0)$ qui accepte la tâche de produire une réponse à une question ouverte Q_0. La deuxième partie du schéma décrit le processus d'élaboration d'une réponse ($A^{\heartsuit}$) de la communauté d'étude à la question génératrice Q_0. Les réponses $A^{\Diamond}_i$ sont des oeuvres préexistantes dans différentes institutions auxquelles la communauté d'études aura accès en utilisant différents médias. Ces informations obtenues sont ensuite étudiées, déconstruites, adaptées à la (sous)-question posée et intégrées au milieu. Cette dialectique média-milieu permet aux chercheurs de questionner et d'analyser les savoirs ou informations obtenus par la communauté d'étude ainsi que la forme dont ceux-ci sont validés pour obtenir la réponse finale du processus d'étude.

$$[S(X\,;\,Y\,;\,Q_0) \curvearrowright \{Q_1, Q_2, \ldots, Q_m; A^{\Diamond}_{m+1}, A^{\Diamond}_{m+2}, \ldots, A^{\Diamond}_{n}; W_{n+1}, W_{n+2}, \ldots, W_p\}] \hookrightarrow A^{\heartsuit}$$

Figure 1 : Le schéma Herbartien.

Artigue (2014) et Barquero et Bosch (2015) ont décrit quatre phases principales de la méthodologie de conception et de recherche liée à l'ingénierie didactique : identification des phénomènes didactiques, la conception ou l'analyse *a priori* d'un PER, la mise en œuvre ou l'analyse in vivo du PER et l'évaluation ou l'analyse *a posteriori* de l'écologie et de l'économie du PER. Cependant, comme Bosch (2018) et Florensa, Bosch et Gascón (2015) l'ont décrit, cet appareil théorique et méthodologique est difficile de transposer à l'enseignant et à ses pratiques quotidiennes, en particulier lorsqu'ils ne sont pas familiers avec la TAD. En fait, la plupart des PER expérimentés au niveau universitaire ont été menées par des chercheurs de la TAD ou par des enseignants travaillant en étroite collaboration avec eux. Dans cet article, nous présentons une analyse rétrospective des implémentations précédentes des PER au niveau universitaire afin d'identifier l'évolution des outils didactiques utilisés. Lors de cette analyse, nous avons l'intention de mettre en place les bases d'une méthodologie plus systématique de conception et de gestion des PER au niveau universitaire afin de faciliter leur viabilité.

II. LES PER EXPERIMENTES

Le tableau 1 présente un bref compte rendu des PER mis en œuvre au cours de cette dernière décennie par notre équipe de recherche dans l'enseignement universitaire. Les détails sur leur conception et mise en œuvre sont disponibles dans les références. Signalons simplement que l'intégration des PER a adopté différentes modalités pour s'intégrer dans l'organisation traditionnelle des cursus universitaires. Par exemple, le PER1 et le PER2 ont fonctionné comme des ateliers en parallèle au cours régulier, avec des séances hebdomadaires de deux heures pour un total de 60 heures, complétant ainsi les cours magistraux et les séances de travaux dirigés. Le PER3 consiste en un atelier optionnel qui a duré 9 séances de 2 heures à la fin du cours et la question génératrice était sur la prévision de la croissance des utilisateurs de Facebook. Le PER4 a été entièrement organisé comme un PER pour toute une unité d'enseignement de 6 ECTS (17 semaines, 4 heures par semaine). Le PER5 a été mis en place après 8 semaines de cours, travaux pratiques et séances de problèmes, pour les 7 dernières semaines du cours, soit 21 heures au total.

PER	Sujet	Niveau et degré	Période	Références
1	Mathématiques	Les dynamiques de population 1ère année génie chimique (groupes de 30 à 35 étudiants)	2005-2009	Barquero, Bosch & Gascón (2011; 2013)
2	Mathématiques	Vente de produits 1ère année en administration des affaires (groupes de 40 à 60 étudiants)	2006-2014	Serrano (2013), Serrano, Bosch & Gascón (2010)
3	Mathématiques	Evolution des utilisateurs de Facebook 1ère année en administration des affaires (groupes de 20 étudiants)	2015 - 2017	Barquero, Monreal, Munzón & Serrano (2018)
4	La résistance des matériaux	Comment faire une base de lit en lames de bois ? 3ème annéeGénie Mécanique (Groupe de 20-25 étudiants)	2015-2018	Bartolomé, Florensa, Bosch, Gascón(2018)

5	Élasticité générale	Comment faire une part de vélo ? 2ème année Génie Mécanique (Groupes de 30 étudiants)	2015-2018	Florensa, Bosch, Gascón, Mata(2016) et Florensa, Bosch, Gascón ,Winsløw (2018)

Tableau 1 : Liste des PRS expérimentés par l'équipe de recherche d'ATD à Barcelone.

III. FAIRE FACE AU SAVOIR DANS UN PER : LE LANGAGE DE LA MODELISATION

La méthodologie transmissive de la diffusion des savoirs au niveau universitaire a tendance à sacraliser les corps des savoirs à enseigner (Bosch, 2018 ; Bosch, Gascón et Nicolás, 2018). Par exemple, des tâches telles que la description, l'organisation du travail, la collecte de données et la recherche des savoirs bien établis (et étiquetés) ne font pas toujours partie de la responsabilité des étudiants. Et, lorsqu'elles le sont, elles apparaissent comme non problématiques pour les étudiants, qui doivent seulement reprendre les éléments de savoir qui leur sont présentés. En outre, le paradigme pédagogique dominant tend à cacher les questions pour lesquelles un savoir spécifique est pertinent, ou tout au plus les laisse pour la toute fin du processus d'étude. Ces phénomènes apparaissent comme des contraintes importantes pour la mise en œuvre d'un PER en une institution scolaire. Dans la conception et la mise en œuvre des PER, la dialectique entre les questions posées et la construction des réponses est centrale, ainsi que le partage des nouvelles responsabilités entre enseignants et étudiants dans le processus d'enquête. Le développement d'outils permettant les échanges entre enseignants et étudiants, notamment ceux relatifs à la description et à la gestion du « contenu », ont été présents depuis les premières mises en œuvre des PER.

Barquero, Bosch et Gascón (2013) présentent l'un des premiers PER expérimentés au niveau universitaire (PER1). Le PER1 a été mis en œuvre le long d'un cours annuel sur les « Principes mathématiques pour l'ingénierie » avec des étudiants de génie chimique industriel, dans un « atelier de modélisation mathématique » qui a été créé uniquement pour développer le PER et qui a été mis en route en parallèle des séances de cours et de travaux dirigés. Ces trois dispositifs pédagogiques universitaires ont été facilement coordonnés car il n'y avait qu'un groupe d'environ 35 étudiants et 2 enseignants, l'un responsable des séances théoriques et l'autre (premier auteur de cet article) qui a guidé les séances de travaux dirigés et l'atelier. Bien qu'il y ait un programme d'études à accomplir, les enseignants-chercheurs avaient la liberté de le mener de la manière la plus pratique. La question génératrice du PER1 était la suivante : « Comment pouvons-nous prédire le comportement à long terme de la taille d'une population compte tenu de sa taille lors des périodes précédentes ? Quelles hypothèses doivent être faites ? Comment prévoir l'évolution de la taille de la population et comment tester sa validité ? ».

La conception et la mise en œuvre de ce PER visaient à résoudre le problème de l'enseignement de la modélisation au niveau universitaire et à traiter le phénomène didactique généralisé consistant à réduire l'activité de modélisation à la simple « application » de certains modèles et contenus préétablis. Les chercheurs ont conçu ce PER en accordant une attention particulière au processus de modélisation à développer avec les étudiants. La conception *a priori* comprenait une délimitation minutieuse des questions génératrices et dérivées qui pourraient être posées ainsi que des modèles mathématiques et des connaissances qui semblaient apporter des réponses. Le PER1 a été mis en œuvre pour tester son potentiel pour l'enseignement de la modélisation mathématique.

Il convient de remarquer que l'une des premières nécessités vécues par l'enseignant qui dirigeait l'atelier de modélisation était de partager et d'institutionnaliser un nouveau discours afin de pouvoir décrire l'activité mathématique que les étudiants avaient développée. À cette occasion, l'essentiel du discours nécessaire portait sur la modélisation, qui était assez nouveau pour les étudiants. Introduire des termes faisant référence à des systèmes et des modèles, à la formulation d'hypothèses, aux actions de validation des modèles ou à leurs limites étaient pour l'enseignant-chercheur des tâches tout à fait nouvelles, ainsi que la co-production de nouveaux logos pour que les élèves afin décrivent, organisent, justifient et rapportent les activités mises en place.

Un deuxième aspect mis en évidence par Barquero et al. (2013) est la nécessité de créer des nouveaux dispositifs didactiques afin de transférer les nouvelles responsabilités aux étudiants qui devaient « produire leur propre réponse [...] compte tenu des (sous)-questions intermédiaires et, écrire et défendre un rapport pour chaque équipe d'étudiants [...] avec leurs réponses, provisoires » (Barquero et al., 2013, p. 326). Les principaux dispositifs didactiques pour gérer la mise en œuvre du PER et institutionnaliser les activités de modélisation étaient les rapports hebdomadaires que les étudiants présentaient. Depuis la deuxième année, ces rapports étaient basés sur une structure fixe explicite, y compris une description des questions qui avaient été posées, les modèles mathématiques construits, les réponses obtenues, et les nouvelles questions dérivées. De plus, chaque équipe devait désigner son propre « secrétaire », un étudiant chargé d'expliquer et de défendre le rapport de l'équipe au début de chaque nouvelle séance. Une mise en commun suivant ces présentations, afin d'énoncer les principaux progrès et de s'accorder sur la manière de poursuivre l'enquête. À la fin du PER, chaque élève devait individuellement rédiger un rapport final de toute l'étude et analyser l'ensemble du processus de modélisation suivi (Barquero et al., 2013, p. 327).

La mise en œuvre du PER2 a été initialement réalisée sous la forme d'un atelier ayant lieu pendant le cours de mathématiques d'un diplôme de 1ère année en sciences de la gestion. L'atelier a duré cinq semaines et comportait deux séances hebdomadaires de deux heures. La question qui a suscité le PER2 était la suivante : « Une entreprise enregistre les ventes à terme de ses SEPT principaux produits pendant TROIS ans. Quel montant des ventes peut-on prévoir pour les prochaines semaines ? Peut-on avoir une formule pour estimer les prévisions ? Quelles sont ses limites et garanties ? Comment les expliquer ? Quelles ventes de produits augmentent de plus de 10% par trimestre ? Moins de 12% par trimestre ? » Il est important de souligner que les enseignants ont mis en place deux types de séances : une consacrée au travail de groupe autonome sous la supervision des enseignants et une autre pour partager les résultats obtenus et les valider en grand groupe.

IV. DE LA MODELISATION AUX CARTES DE QUESTIONS-REPONSES

La question génératrice du PER3 était la suivante : : « Comment modéliser et ajuster des données réelles sur l'évolution du nombre d'utilisateurs de Facebook afin de fournir des prévisions sur l'évolution à court terme des utilisateurs de ce réseau social ? » (Barquero et al. 2017). La mise en œuvre a eu lieu dans les années universitaires 2015-2016 et 2016-2017 avec des étudiants de 1ère année d'un diplôme de Business Administration and Innovation Management (BAIM), à l'Université Pompeu Fabra, à Barcelone. Le PER3 a été implémenté

dans le contexte d'un « atelier de modélisation » qui était indépendant des cours de mathématiques. Les étudiants participaient volontairement à l'atelier, avec la possibilité d'ajouter un point supplémentaire (sur 10) à leur note finale en mathématiques. Le responsable de l'atelier était l'enseignant du cours de mathématiques qui n'était pas un chercheur en didactique. L'atelier était structuré en séances de deux heures chaque semaine pendant neuf semaines, bien que la plupart des travaux de modélisation aient été développés par des étudiants travaillant en groupe en dehors de la classe. Ce PER combinait des séances en ligne et des séances en face à face. Les ateliers ont été consacrés aux présentations des élèves et au débat sur les questions posées, les nouvelles questions de recherche et les modèles, outils et réponses trouvés.
La conception du PER a été développée par un groupe de chercheurs et un enseignant. Dans sa conception, la compréhension des mathématiques en tant qu'outil de modélisation était centrale, mais la description du « squelette » du PER en termes de questions (Q) et de réponses (A) a joué un rôle central pour de nombreuses raisons. Tout d'abord, il y avait un travail intensif dans l'équipe des concepteurs pour délimiter la structure du PER en termes de Q et A. Ce que nous appelons, à la suite de Winsløw, Matheron et Mercier (2013), les « cartes de questions et de réponses » définissent les modèles épistémologiques de référence sur lesquels on peut s'appuyer pour planifier et analyser la mise en œuvre des PER. Ensuite, les rapports hebdomadaires étaient le principal outil de communication et les étudiants étaient explicitement priés de les rédiger en termes de questions et de réponses. Pour ce faire, la plateforme virtuelle (appelée unité de c-book développée dans le cadre du projet européen MCSquared) s'est révélée extrêmement utile pour fournir aux étudiants des outils dynamiques pour structurer leurs rapports (Barquero et al., 2018, p. 20-24). De plus, les cartes questions-réponses ont été également utilisées par l'enseignant afin d'analyser le développement de chaque séance en collaboration avec les chercheurs. Il a ensuite été décidé de commencer un journal de bord pour faciliter l'interaction enseignant-chercheur, ainsi que de faire un rapport sur le type de connaissances apparaissant dans le processus d'enquête. Comme les auteurs le décrivent, dans ce journal :

> […] les chercheurs ont indiqué, avant une séance d'atelier, les questions auxquelles ils devaient répondre, la façon d'organiser la participation des étudiants, quelques indications sur les gestes et les stratégies qu'ils pourraient suivre, entre autre. Après chaque séance de l'atelier, les enseignants et les chercheurs se sont réunis pour analyser le travail des étudiants et le comparer à la conception a priori du parcours. (Barquero et al., 2018, p. 20)

Le PER4 (Bartolomé et al., 2018) a été implémenté pendant année scolaire 2016/17 dans un cours de « Résistance des matériaux » d'un diplôme en génie mécanique à l'Université Autonome de Barcelone. La question initiale du PER était : « Vous travaillez en tant qu'ingénieur dans une entreprise de fabrication de sommiers à lattes. Votre entreprise fournit des lits à un client américain (une chaîne de motels). Récemment, vous avez été chargé de leur fournir des lits simples à lattes, capables de supporter le poids d'une personne de 120 kg, êtes-vous capables de concevoir un lit avec ces caractéristiques ?» . Le PER a été mis en œuvre tout au long du semestre dans toutes les séances (dix-sept semaines, deux séances de deux heures par semaine). Dans ce travail, la gestion et la description des connaissances ont été effectuées à l'aide de cartes de questions-réponses. Cet outil a joué un rôle important : il a permis aux étudiants et aux enseignants de communiquer et il a également été utilisé pour décrire la réponse finale de la communauté d'étude. Une différence importante par rapport au PER précédent était la formation explicite des participants à l'utilisation et au développement de cet outil. Au cours de cette séance de formation initiale, les étudiants ont également été informés que les séances seraient structurées en quatre phases. La première partie de la séance a été consacrée à la vérification de l'état d'avancement du projet à l'aide d'une cartographie commune de questions-réponses suivie d'une séance de brainstorming afin de décider des prochaines questions considérées comme pertinentes pour le problème. Dans la deuxième phase, le groupe a été divisé en différents petits groupes chacun abordant une question spécifique. La troisième phase a été consacrée à un travail d'équipe qui consistait à développer une réponse à la question assignée. La phase finale consiste en une présentation de chaque équipe de sa réponse à l'ensemble du groupe. La figure 2 illustre la carte de questions-réponses obtenues après les deux premières séances.

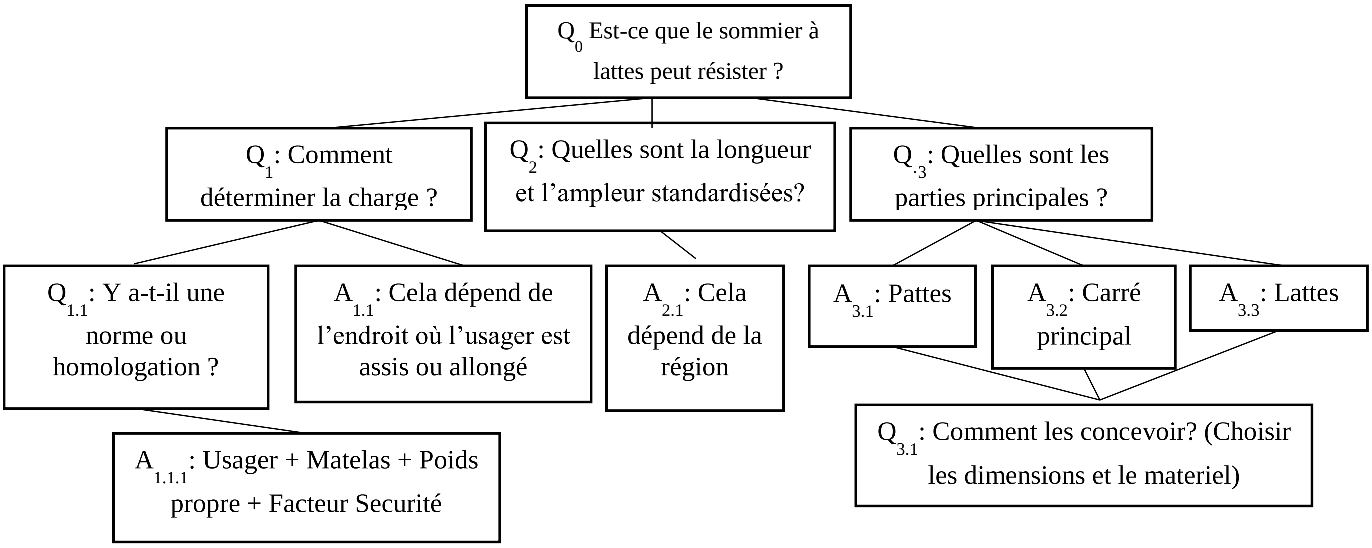


Figure 1 : Carte crée pendant le PER3 sur le design d'un sommier à lattes (Bartolomé et al., 2018).

Le PER4 incluait la dialectique média-milieu en tant qu'outil de gestion. Au cours des quatre phases de chaque séance, les étudiants ont décrit non seulement leur travail en termes de réponses et de nouvelles (sous)-questions, mais ils ont dû aussi intégrer les médias utilisés pour saisir des informations. En outre, les étudiants devaient également justifier leurs réponses en présentant des preuves ou des données afin de montrer dans quelle mesure les données acquises, leur étude et leur modification étaient suffisantes pour produire une réponse à la question posée. Le PER5 a été mis en œuvre dans un cours d'« Elasticité » dans le même diplôme d'ingénieur que le PER4. En revanche, ce PER5 a été mis en œuvre au cours des sept dernières semaines du semestre, en conservant la structure traditionnelle tout au long des dix premières semaines. Dans ce PER les étudiants ont été organisés en petits groupes (3-4 élèves) et chaque groupe était chargé de la conception et validation d'une partie d'une machine (un vélo pour la première édition et une voiture de formule 1 dans la deuxième édition). L'évaluation et la gestion du PER ont été effectuées à l'aide de rapports hebdomadaires dans lesquels les cartes de questions-réponses constituaient le contenu principal. Contrairement au précédent PER, le rapport final prenait la forme d'un rapport technique adressé à l'entreprise qui avait commandé les travaux de conception des pièces.

V. CONCLUSION

La présentation des différentes mises en œuvre de PER montre l'évolution qui s'est produite sur les différents outils didactiques utilisés dans la conception et la gestion des cours universitaires. Nous nous sommes efforcés de montrer comment, au fil des différentes enquêtes, ces outils ont été mis à disposition des participants (étudiants et enseignants) pour gérer les savoirs et organiser les processus d'étude. De plus, notre étude rétrospective révèle que les outils dont les professeurs et les étudiants ont besoin pour gérer et expérimenter les PER sont divers. Nous avons identifié des aspects liés au niveau langagier : les participants au PER1 devaient développer une terminologie spécifique concernant la modélisation qui était absente dans l'enseignement habituel.

Un autre aspect concerne la nécessité de décrire et de communiquer comment les savoirs évoluent au cours du processus d'enquête. Les cartes de questions-réponses ont été adoptées de manière satisfaisante dans différentes mises en œuvre des PER, aidant ainsi les enseignants à surmonter ce problème. Un autre aspect qui a été utile dans l'une des applications est la transposition à la communauté d'étude de la dialectique média-milieu, qui est un outil de recherche de la TAD, pour aider les enseignants et les étudiants à mieux organiser leur travail. Rendre explicite la recherche d'informations dans les médias et sa confrontation avec le milieu ou son intégration dans le milieu ont aidé la communauté d'étude à assigner des tâches et à valider les résultats.

Notre étude a également identifié un autre aspect : le degré de précision des outils mis en œuvre augmente dans chaque implémentation. Dans les dernières éditions des PER, le fait de travailler avec des enseignants qui n'étaient pas des chercheurs en didactique nécessitait une présentation spécifique des outils de la TAD utilisés. Enfin, il est important de souligner que les outils (cartes questions-réponses, dialectique média-milieu) proviennent de la recherche et ont été transposées au niveau de la communauté d'étude pour son utilisation par les enseignants et les étudiants. Nous estimons que ces résultats devraient encourager la communauté des chercheurs d'utiliser plus systématiquement ces outils dans d'autres implémentations de PER. Il semble que ce soit un moyen prometteur de traiter certaines des contraintes institutionnelles qui entravent la diffusion des PER dans les universités, en particulier celles liées au manque de termes épistémologiques pour traiter les processus d'enquête.

REMERCIEMENTS

Avec le support du projet de recherche MINECO/FEDER, EDU2015-69865-C3-1-R du Ministerio de Economía y Competitividad de l'Espagne.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ARTIGUE, M. (2014). Didactic engineering in mathematics education. In S. Lerman (ed.), Encyclopedia of mathematics education (pp. 159–162). Springer Netherlands.

ARTIGUE, M., & BLOMHØJ, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. Zdm - International Journal on Mathematics Education, 45(6), 797–810.

BARQUERO, B., & BOSCH, M. (2015). Didactic engineering as a research methodology: from fundamental situations to study and research paths. In A. Watson & M. Ohtani (eds.), Task design in mathematics education- ICMI study 22 (Springer, pp. 249–273).

BARQUERO, B., BOSCH, M, & GASCON, J. (2009). 'Applicationism' as the dominant epistemology at the university level. In 8th Conference on European Research in Mathematics Education.

BARQUERO, B., BOSCH, M, & GASCON, J (2013). The ecological dimension in teaching of mathematical modelling at university. Recherches en didactique des mathématiques, 33, 307–338.

BARQUERO, B., MONREAL, N., RUIZ-MUNZON, N., & SERRANO, L. (2018). Linking transmission with inquiry at university level through study and research paths: the case of forecasting facebook user growth. International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 4(1), 8–22.

BARTOLOMÉ, E., FLORENSA, I., BOSCH, M., & GASCÓN, J. (2018). A 'study and research path' enriching the learning of mechanical engineering. European Journal of Engineering Education, 1–17.

BOSCH, M. (2018). Study and research paths: a model for inquiry. In B. Sirakov, N. De souza, & M. Viana (eds.), International Congress of Mathematics (vol. 3, pp. 4001–4022). Rio de Janeiro: World scientific publishing co. Pte. Ltd.

BOSCH, M., GASCÓN, J., & NICOLÁS, P. (2018). Questioning mathematical knowledge in different didactic paradigms: the case of group theory. J. Res. Undergrad. Math. Ed, 4, 23–37.

CHEVALLARD, Y. (2008). Afterthoughts on a seeming didactic paradox. In j. Lederman, n. Lederman, & p. Wickman (eds.), efficacité & équité en éducation (pp. 1–6). Rennes.

CHEVALLARD, Y. (2015). Teaching mathematics in tomorrow's society: a case for an oncoming counter paradigm. In s. J. Cho (ed.), Proceedings of the 12th International congress on mathematical education: intellectual and attitudinal challenges (pp. 173–187). Seoul: Springer international publishing.

FLORENSA, I., BOSCH, M., & GASCÓN, J. (2015). The epistemological dimension in didactics: two problematic issues. In CERME 9 - ninth congress of the European society for research in mathematics education (pp. 2635–2641). Praha.

FLORENSA, I., BOSCH, M., & GASCÓN, J. (2018). Reference epistemological model: what form and function in school institutions ? In H. Chaachoua et al (eds.), 6th international conference on the anthropological theory of the didactic (pp. 22–26). Autrans.

FLORENSA, I., BOSCH, M., GASCÓN, J., & MATA, M. (2016). SRP design in an elasticity course: the role of mathematic modelling. In first conference of international network for didactic research in university mathematics. Montpellier, France.

FLORENSA, I., BOSCH, M., GASCÓN, J., & WINSLØW, C. (2018). Study and research paths: a new tool for design and management of project-based learning in engineering. International journal of engineering education, 34(6), 1848–1862.

SERRANO, L. (2013). La modelización matemática en los estudios universitarios de economía y empresa: análisis ecológico y propuesta didáctica (doctoral dissertation). Univ. Ramon llull.

SERRANO, L., BOSCH, M., & GASCÓN, J. (2010). Fitting models to data: the mathematising step in the modelling process. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (eds.), 6th conference of the European research on mathematics education (pp. 2186–2195). Lyon: Institute national de recherche pédagogique.

WINSLØW, C., MATHERON, Y., & MERCIER, A. (2013). Study and research courses as an epistemological model for didactics. Educational studies in mathematics, 83(2), 267–284.

UNE CONTRIBUTION A L'ETUDE DE CONDITIONS ET DE CONTRAINTES DETERMINANT LES PRATIQUES ENSEIGNANTES DANS LE CADRE DE MISES EN ŒUVRE D'UN PARCOURS D'ETUDE ET DE RECHERCHE EN MATHEMATIQUES AU COLLEGE

Karine **BERNAD**

Docteure en Sciences de l'éducation de l'université d'Aix-Marseille

bernad.karine@gmail.com

Résumé

Cette recherche (Bernad, 2017) vise à déterminer des éléments de l'*équipement praxéologique* d'un enseignant, utiles pour la réalisation du projet de mise en œuvre d'un *parcours d'étude et de recherche* (PER) monodisciplinaire et finalisé par l'étude des programmes de mathématiques français en vigueur durant la période 2013-2015.
Sollicitant le cadre de la théorie anthropologique du didactique (TAD), cette enquête étudie les conditions et contraintes influant sur le processus de *transposition didactique interne* que conduisent deux enseignants depuis l'appropriation d'un document qui leur est fourni, et dans lequel sont décrites les organisations mathématiques et didactiques visées, jusqu'à la réalisation didactique dans la classe. Elle s'appuie sur une *étude clinique* visant l'analyse des *praxéologies didactiques* activées par ces enseignants, dans lesquelles apparaissent leurs rapports personnels aux mathématiques, à leur enseignement et leur apprentissage et au métier d'enseignant. Celles-ci, confrontées à l'étude de l'*équipement praxéologique* d'un troisième enseignant offrant des conditions favorables à la réalisation d'un PER, mettent en évidence un modèle épistémologique dominant et révèlent des *besoins infrastructurels mathématiques et didactiques du professeur.*

Mots clés

Parcours d'étude et de recherche ; praxéologies didactiques ; transposition didactique interne ; étude clinique ; besoins infrastructurels mathématiques et didactiques du professeur.

I. INTRODUCTION

Cette recherche (Bernad, 2017) s'inscrit dans le domaine d'étude de questions relatives à la réception et à la diffusion de *parcours d'étude et de recherche* (PER) (Chevallard, 2011) au sein de la communauté enseignante au collège. La notion de PER, issue de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD), a émergé, au cours des années 2000, dans le prolongement de celle d'*activité d'étude et de recherche* (AER). La TAD soutient que domine, dans les établissements scolaires de l'enseignement français, le *paradigme de la visite des œuvres* (Chevallard, 2007), sous lequel les raisons d'être des savoirs enseignés ne sont probablement pas rencontrées par les élèves. Plusieurs rapports de recherche dont celui

produit à l'initiative de l'UNESCO, intitulé « Les défis de l'enseignement des mathématiques dans l'éducation de base » et coordonné par Artigue (2012), insistent sur la nécessité de disposer, pour un enseignant, de connaissances spécifiques sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, lui permettant d'installer des conditions favorables à ce que les élèves développent un rapport fonctionnel aux mathématiques enseignées. De 2006 à 2015, une recherche nationale impliquant des enseignants et des didacticiens de mathématiques[1], Parcours d'Étude et de Recherche Mathématiques de l'Enseignement Secondaire (PERMES), a été initiée par la Commission Inter IREM Didactique et soutenue par l'Institut Français d'Éducation (IFÉ-ENS de Lyon). Un fort présupposé de ce réseau est de considérer les notions d'AER et de PER comme des moyens de faire évoluer l'enseignement « ordinaire », c'est-à-dire tel qu'il existe dans des classes où sont étudiées les mathématiques préconisées par les programmes sans que soient organisées des interventions par des chercheurs sur les pratiques. Aussi mon travail de doctorat s'est initialement orienté vers l'étude de la question suivante : Sous quelles conditions de formation des enseignants et tenant compte de quelles contraintes systémiques est-il possible d'implanter des PER dans le système d'enseignement actuel ? Le questionnement étant relatif à la notion de PER, j'ai principalement utilisé les modélisations que fournit la TAD. En particulier, les réalisations didactiques d'un PER ont été analysées en termes de *praxéologies didactiques* développées par des enseignants qui accomplissent le projet de mettre en œuvre un PER.
La première partie de ce texte présente des résultats de recherche à partir desquels des pratiques enseignantes ont été analysées et des conditions sous lesquelles leur étude a été menée. La seconde partie est consacrée à l'énoncé de la problématique de cette recherche et à l'explicitation de certains aspects méthodologiques du dispositif d'enquête développée pour l'étudier. Dans la troisième partie, je présenterai des résultats que ce travail apporte, en particulier ceux qui font ressortir le poids de certaines contraintes pesant sur les systèmes didactiques observés et qui m'ont conduite à formuler des besoins relatifs à la formation des enseignants. En conclusion, je terminerai en proposant des perspectives de recherche auxquelles une poursuite de ce travail pourrait contribuer.

II. ÉTUDIER DES PRAXEOLOGIES DIDACTIQUES DU PROFESSEUR DE MATHEMATIQUES AYANT LE PROJET DE METTRE EN ŒUVRE UN PER

Cette recherche s'est donnée comme objet d'étude principal, les praxéologies didactiques du professeur engagé dans le projet de mettre en œuvre un PER, c'est-à-dire des praxéologies qu'il active pour diriger l'étude des élèves dans le cadre d'un enseignement par PER. Bosch et Gascón (2002, p. 24) confèrent trois spécificités aux *praxéologies didactiques du professeur* :

- celle d'*être empiriques* : les praxéologies didactiques, constituées de lacunes, d'éléments accidentels ayant un caractère contradictoire, relèvent de la *contingence*,
- celle d'*être spontanées* : non nécessairement organisées à l'avance, elles contiennent des éléments implicites, s'activent de manière fortement naturalisée,

[1] En septembre 2009, ce réseau regroupait alors environ quatre-vingts personnes réparties au niveau national dans les groupes *didactique* des IREM de neuf académies : Aix-Marseille, Bordeaux, Caen, Clermont-Ferrand, Dijon, Grenoble, Montpellier, Nice et Poitiers.

- celle d'*être « du professeur »* : dans le sens où elles dépendent « de ses assujettissements aux diverses institutions qu'il aura parcourues, ce qui lui confère sans doute une individualité ou une unité particulière ».

Ces auteurs (Ibid., p. 25) soulignent que, dans le cadre de la TAD, les connaissances d'un professeur particulier, dans une situation d'enseignement particulière, résultent d'

> *« un amalgame d'emprunts institutionnels divers, qui appartiennent souvent à des "strates historiques" différentes, et qui s'appuient sur des dispositifs et des structures variés dont les fonctions sont parfois méconnues et ne cessent de changer au cours du temps. »*

En conséquence, les praxéologies didactiques des professeurs sont supposées être des constructions institutionnelles dans le sens où les personnes, parce qu'elles rentrent dans des institutions dont elles deviennent des sujets, peuvent activer des savoir-faire associés à des tâches d'un certain type, justifiés par des discours parfois implicites, mais institutionnellement partagés. Ainsi, j'ai interprété des éléments relatifs à l'expression de la *praxis* et du *logos* de chacun des enseignants impliqués dans cette recherche, comme des effets de leurs assujettissements institutionnels éventuels afin de reconstituer des praxéologies didactiques qu'ils activent. J'ai mené ce travail d'interprétation, guidée par le fait anthropologique selon lequel « il n'est pas de *praxis* sans *logos* ; il n'est pas de *logos* à jamais innocent d'implications "*praxiques*" » (Chevallard, 2002a, p. 4),

Je vais maintenant présenter un ensemble de conditions sous lesquelles cette étude a été menée, mises en place par un dispositif de travail collaboratif entre enseignants et chercheurs, le *lieu d'éducation associé* (LéA) à l'IFÉ « Réseau collège Marseilleveyre » (RcM). J'expliciterai ensuite certains termes du contrat me liant, dans la position de chercheur, aux enseignants que j'ai observés.

1. Un ensemble de conditions pour l'étude des praxéologies didactiques d'un enseignant

Le LéA Réseau collège Marseilleveyre (2012-2018)

Les *lieux d'éducation associés* (LéA) ont été conçus en 2011, à la création de l'IFÉ au sein de l'ENS de Lyon, comme un dispositif visant à promouvoir des recherches collaboratives en éducation ayant un ancrage dans les pratiques des acteurs de terrain. Chaque LéA a été fondé à partir de questionnements partagés par des chercheurs et des praticiens, et relatifs à des enjeux d'apprentissage, d'enseignement, d'éducation.

Le LéA RcM réunissait, durant les observations, cinq enseignants, un chercheur et moi-même[2]. Ce collectif élabore des PER et en expérimente d'autres, conçus dans le cadre du réseau PERMES. Les travaux de ce LéA se sont développés selon deux axes :

- l'étude des conditions sous lesquelles un type d'enseignement fondé sur des PER monodisciplinaires et finalisés par l'étude des programmes peut vivre au sein d'un collège « standard » et des contraintes dont il faut tenir compte,
- l'étude des effets produits par une telle forme d'enseignement sur les apprentissages mathématiques des élèves et leur rapport à leur étude[3].

À partir de septembre 2014, deux enseignants, que je désigne par y_1 et y_2, nouvellement arrivés dans le LéA, ont décidé de mettre en œuvre un PER, antérieurement conçu par des membres du groupe didactique de l'IREM d'Aix-Marseillle. Ce PER est une proposition

[2] De 2013 à 2017, j'ai été chargée d'étude à l'IFÉ et l'une de mes missions était de contribuer aux travaux de ce LéA.

[3] Cette étude est présentée dans Bernad (2017, p. 51-61).

d'enseignement des nombres relatifs en 5e, qui s'inscrivaient dans les préconisations des programmes édités en 2008 et en vigueur jusqu'en juin 2016. J'ai décidé d'observer les pratiques de ces deux professeurs lorsqu'ils ont réalisé, en classe, l'ensemble de ce PER. Aussi ai-je étudié la question de la prise en mains d'un PER par des enseignants qui n'ont pas participé à sa conception et qui n'ont pas eu de contact avec le dispositif LéA. Cela m'a permis de suivre « au plus près » les difficultés qui se posent aux professeurs qui n'ont pas *a priori* d'expérience dans cette forme d'enseignement. Dans ce qui suit, la lettre E désigne la position de chercheur, étudiant les pratiques des enseignants y_1 et y_2 sous un ensemble de conditions, dont une description est donnée dans le paragraphe suivant.

Les attentes des enseignants y_1 et y_2

Plusieurs aspects du cadre d'étude mis en place pour mettre en lumière des éléments des praxéologies didactiques des deux professeurs sont à souligner. Tout d'abord, le contrat de recherche, relatif aux mises en œuvre d'un PER, réglant les interactions entre E et les enseignants y_1, y_2, repose sur celui installé dans le LéA RcM. En effet, le dispositif d'étude mis en place dans ce LéA crée une institution qui soutient les enseignants à expérimenter, dans une classe, des PER et rend possible l'étude de leurs pratiques par les chercheurs. Le chercheur E a invoqué une diffusion du PER auprès d'un nombre important d'enseignants pour justifier, auprès des professeurs y_1 et y_2, le recueil de l'ensemble des données et la nécessité d'étudier et de comprendre ce qui se passait dans leurs classes. En référence à la définition d'*ingénierie didactique pour le développement de ressources et la formation* donnée par Perrin-Glorian (2011), les travaux développés au sein du LéA visent à assumer une « fonction de développement », en produisant des « ressource(s) utilisables par les enseignants » (p. 69) et, une fonction de formation, en visant « l'apprentissage professionnel des enseignants à travers l'analyse, la production et la modification de situations pour les élèves » (p. 69). Cette étude s'est inscrite dans une « *fonction de recherche* », par la mise en évidence de contraintes, depuis la position de professeur, influant sur le développement de formes d'enseignement fondées sur les mises en œuvre de PER et par l'identification des conditions les facilitant. Ensuite, faire « évoluer *sa pratique* » et participer à un collectif qui réfléchit sur *la façon d'enseigner* constituent les principales motivations des enseignants y_1 et y_2. En particulier, lors d'un entretien individuel organisé en octobre 2014, auprès des deux enseignants[4], voici la réponse de y_1 :

> *« déjà pour expliquer un petit peu ce qui m'a motivé : dans mon parcours, cela fait 10 ans que je suis prof, j'ai fait 7 ans dans un établissement, un petit collège un peu comme …, à part que j'avais un public beaucoup plus favorisé. Mais c'était quand même une petite structure et donc j'avais deux collègues de maths. Donc on était une bonne équipe de trois. En 7 ans, on a beaucoup travaillé ensemble, mais finalement au bout d'un an ou deux ou trois, nous n'étions plus qu'une personne.* ***Il n'y avait plus d'idées nouvelles qui venaient vraiment****. Bon, moi, j'ai senti que ça tournait bien, c'était très bien, mais* ***j'ai pas forcément beaucoup évolué dans ma pratique pendant ces années-là.*** *Je suis arrivée au collège de xxx et là, j'avais un public complètement différent.* ***Il a fallu que j'adapte mes façons d'enseigner****. Mon adaptation, ça a été, j'ai peut-être eu, j'ai eu des exigences différentes, en fait envers mes élèves.* ***Mais finalement, je restais quand même avec ma façon de fonctionner, même si voilà je m'adaptais un petit peu à mon public, je suis restée avec mes idées.*** *C'est vrai que, là, c'était plus compliqué de travailler en équipe, là où je suis à …. » (l. 4)*

L'enseignant y_1 a ensuite complété par :

[4] Les citations suivantes sont extraites de transcriptions disponibles dans l'annexe 6 de ma thèse (Bernad, 2017).

« on est que trois et pas une équipe stable, en fait. Et donc, c'est vrai que … cela tournait bien dans l'ancien collège. Ce que je faisais, je donnais à manger à mes élèves, ils prenaient ce que je leur donnais, ils se nourrissaient de ça. C'était très bien xxx, et puis c'est vrai que ***les élèves que j'ai ici, ils me posent beaucoup plus souvent la question : À quoi ça sert les maths ? Mais, ça, on s'en servira pas et pourquoi on apprend ça ? Et oui, je me suis questionnée,*** *j'ai envie d'amener un problème concret pour avancer mes cours. Et puis, j'ai eu cette convocation l'année dernière. Et donc,* ***effectivement, quand vous avez présenté ce que vous faisiez, j'ai trouvé que ça collait avec ce vers quoi j'avais envie d'aller, donc une envie de partager, de travailler avec d'autres collègues et en plus cet état d'esprit qui correspondait à ce vers quoi je voulais aller****. » (l. 8)*

Finalement, son intérêt pour les travaux développés dans le LéA s'appuie sur deux constats : une pratique d'enseignant qui n'évolue pas malgré une envie de changement et la confrontation à des difficultés d'enseignement auprès d'élèves demandant « à quoi ça sert les maths ? ». Ainsi l'enseignant y_1 ressent le besoin de travailler « en équipe » et l'envie de faire évoluer ses « idées ». Nous retrouvons également ces attentes dans la réponse que donne y_2 :

« ce qui m'a motivé…ce sont les réunions qu'on a faites. La première réunion, je ne sais plus quand on l'a faite, c'était la première formation qu'on a eue, où on a été tous convoqués. ***Je me suis dit pourquoi pas changer, c'est vrai que ce que l'on fait actuellement, cela ne me semble pas complètement satisfaisant.*** *Donc essayons de changer pour voir si on peut améliorer les choses. Ça, c'est la première chose.* ***La deuxième, c'est quand j'ai vu comment vous fonctionnez : se retrouver tous les quinze jours, travailler sur le fond, comment on va introduire sur les notions, comment les aborder. Je trouve ça super, c'est quelque chose que l'on n'a pas tellement le temps de faire. Je trouve ça super.*** *C'est vrai que l'équipe de maths, ici, on se retrouve mais pour des choses techniques sur le brevet commun… Se retrouver autour d'une table. Cette notion-là, comment on la fait passer aux élèves je trouve qu'on n'a pas beaucoup l'occasion de le faire, de le faire en groupe.* ***Je me trouve un peu seule pour travailler****. J'ai trouvé ça super. » (l. 2)*

Concernant des choix mathématiques et didactiques du PER expérimenté par y_1 et y_2

Un document écrit, fourni aux enseignants y_1 et y_2, a participé à régler les interactions qu'ils ont eues avec *E*. Il s'agit d'une mise en texte du PER, résultant de retours d'expérimentations réalisées, pendant plusieurs années par les trois autres professeurs du LéA. Y sont explicitées les organisations didactiques à mettre en œuvre et les organisations mathématiques à construire[5], qui reposent sur l'élément théorique selon lequel l'algèbre élémentaire est définie comme la science des calculs sur les programmes de calcul[6]. L'une des fonctions de ce document est d'aider les professeurs à anticiper des décisions qu'ils auront fort probablement à prendre. Cette proposition d'enseignement, découpée en quatre séquences, prévoit de définir les nombres relatifs, durant les deux premières, comme opérateurs additif ou soustractif, simplifiant un programme de calcul du type « ajouter tel nombre soustraire tel nombre ». Deux types de tâches sont étudiés conjointement :

- T_1, qui consiste à « effectuer mentalement un calcul du type $a + b - c$, a, b et c étant des nombres entiers naturels donnés »,
- T_2, qui consiste à « déterminer un programme de calcul équivalent le plus simple de $+ b - c$ ».

Les valeurs des nombres a, b et c sont considérées comme des variables didactiques. Par exemple, proposer aux élèves d'effectuer un calcul de ce type avec des nombres b et c

[5] Ce document comporte 51 pages et constitue l'annexe 1 de ma thèse.
[6] Selon la formulation due à Yves Chevallard au séminaire des PLC2 2004-2005.

« proches » les incite à déterminer d'abord la différence $b - c$ puis lui ajouter le nombre a. Cette technique est bloquée dans le cas d'un calcul comme 4374 + 45 – 46. Celui-ci, s'avérant problématique, permet de centrer l'activité de la classe sur l'étude du type de tâches T_2, qui porte la raison d'être choisie des nombres relatifs dans cette transposition. Des extraits de séances durant lesquelles les élèves ont à accomplir des tâches relevant de ces types illustreront les analyses présentées dans ce qui suit.

III. PROBLEMATIQUE ETUDIEE ET ASPECTS METHODOLOGIQUES

La mise en place des conditions précédemment explicitées a rendu possible la création d'une *institution*[7] *d'observation* en laquelle les personnes qui l'ont fréquentée, ici les enseignants y_1 et y_2, ont explicité certains éléments de leurs pratiques. Il s'agissait de saisir « ensemble » la *praxis* et le *logos* auxquels ils recourent et de mettre ainsi au jour des éléments de leur *équipement praxéologique*, constitué du système des praxéologies qu'ils peuvent mobiliser à un moment donné de leur histoire. J'ai étudié la problématique suivante :

> Quel équipement praxéologique peut-il être jugé indispensable ou simplement utile afin que tel enseignant accomplisse son projet de mettre en place, dans une classe de 5e d'un collège français, tel PER visant l'étude d'organisations mathématiques autour du secteur[8] *Nombres relatifs entiers et décimaux : sens et calculs* ?

Étudier l'équipement praxéologique de ces professeurs, c'est se questionner, relativement à leurs connaissances mathématiques et didactiques, sur ce qu'ils savent et savent faire, ce qu'ils peuvent apprendre et apprendre à faire. Ce questionnement se décline selon deux sous-questions étudiées conjointement mais chacune à son tour :

- Quelles praxéologies didactiques pourraient être regardées comme utiles à la réalisation du projet considéré ?
- Qu'est-ce qui est susceptible d'expliquer les difficultés rencontrées pour la diffusion et la réception de telles praxéologies didactiques auprès d'enseignants ?

Je vais maintenant donner une description du dispositif d'enquête développé pour l'étude de cette problématique. Cela me conduira à formuler des sous-questions de recherche qui en découlent, tout en explicitant des principes méthodologiques et à préciser les modèles et notions théoriques issus de la TAD qui m'ont permis de les étudier.

1. Dispositif d'enquête pour l'étude de processus de transposition didactique interne dans le cas de deux enseignants

La méthodologie suivie pour observer et étudier les praxéologies didactiques activées par les enseignants y_1 et y_2 s'inscrit dans une approche *clinique*, notamment en s'inspirant d'une technique de recherche développée par l'historien Ginzburg (1989), le « paradigme indiciaire ».

---

[7] Le terme « institution » est pris dans le sens que propose Chevallard (2003, p.82) :

> *Une institution I est un dispositif social « total », qui peut certes n'avoir qu'une extension très réduite dans l'espace social (il existe des « micro-institutions »), mais qui permet – et impose – à ses sujets, c'est-à-dire aux personnes x qui viennent y occuper les différentes positions p offertes dans I, la mise en jeu de manières de faire et de penser propres.*

[8] Le terme « secteur » (Chevallard, 2011) fait référence au découpage des savoirs à enseigner que l'on voit dans les textes des programmes d'enseignement en vigueur lors des observations.

Le paradigme indiciaire (Ginzburg, 1989)

Il s'agit d'une technique inductive pour laquelle Ginzburg (Ibid., p.358) souligne, dans son livre, « *Mythes, Emblèmes, Traces* », l'importance de se donner à voir des *anomalies*[9] :

> L'historien doit partir de l'*« hypothèse que chez tout individu quel qu'il soit, et même le plus anomal (et peut-être tout individu l'est-il, ou du moins peut-il apparaître comme tel) coexistent des éléments partagés par un nombre variable (entre plusieurs milliards et zéro) d'individus. L'anomalie sera le résultat des réactions réciproques entre tous ces éléments. Ainsi, parler d'anomalie de manière absolue n'a aucun sens. Ce qui a du sens en revanche c'est d'évoquer des anomalies ou des écarts par rapport à une certaine perspective ».*

Dans le cadre de cette enquête, l'implémentation du PER dans les deux classes observées et le LéA RcM créent des perturbations dans les systèmes didactiques et donnent à voir des *anomalies* afin d'en faire émerger le fonctionnement « ordinaire ». Autrement dit, l'implication des enseignants dans le projet de mettre en œuvre un PER donne lieu à des perturbations sur les contrats didactiques installés et révèle certains ingrédients des praxéologies didactiques existantes.

Il a été convenu, en amont des observations réalisées dans les classes, que :

- E dispose des films de toutes les séances durant lesquelles les enseignants y_1 et y_2 ont expérimenté le PER dans une classe,
- y_1 et y_2 puissent formuler, par mail, des demandes à E et réciproquement,
- E les sollicite pour l'écriture d'un compte-rendu d'une séance, ou seulement d'un épisode,
- y_1 et y_2 fournissent les documents « de préparation » qu'ils avaient eux-mêmes rédigés et tous les documents distribués aux élèves,
- une réunion dite « de préparation » soit organisée en décembre 2014 : l'objectif était de répondre à leurs éventuelles questions issues de la lecture du document fourni et de leur « donner quelques indications utiles pour la prise en mains ».

À ces données, s'ajoutent les films des réunions du LéA et de trois entretiens individuels auprès de chacun des deux enseignants y_1 et y_2 :

- le premier, en octobre 2014, visait principalement à recueillir des données concernant les raisons justifiant leur décision de participer au LéA RcM, leurs habitudes de travail dans leur classe, leurs opinions sur ce qui se fait de manière générale dans l'enseignement des mathématiques et éventuellement leurs arguments justifiant qu'un tel enseignement leur semble actuellement insatisfaisant,
- les deux autres entretiens, l'un en juin 2015, après la première passation du PER, et l'autre en juin 2016, après la seconde année d'expérimentation, avaient pour objectifs de recherche de prendre des informations relatives aux phases de préparation et de mises en œuvre du PER.

Les *traces* de faits que j'ai observés proviennent des écarts entre les praxéologies mathématiques et didactiques prévues dans le document fourni aux enseignants, celles évoquées dans leurs discours oraux et écrits et celles effectivement mises en place. J'ai considéré les ajustements que l'enseignant a réalisés comme *objets d'étude*. Le terme ajustement est pris dans la deuxième acception que propose le CNTRL[10] :

---

[9] Le TLFI propose en seconde acception de ce terme : « Écart par rapport à une norme, un repère ; mesure de cet écart ». http://www.cnrtl.fr/definition/anomalie

[10] http://www.cnrtl.fr/definition/ajustement

*« **2.** Action de mettre un objet en accord avec les normes de son emploi. Ajustement d'un poids, ajustement d'une machine, ajustement d'une balance, ajustement d'une mesure (Ac. 1798-1878). »*

En effet, cette définition suppose donc une adaptation personnelle à des normes ; ce qui renvoie à un postulat de la TAD selon lequel les ajustements que l'enseignant aura réalisés sont révélateurs d'assujettissements extérieurs auxquels il est soumis, ou a été soumis[11]. Dans cette perspective, il en découle la formulation de deux questions :

- À partir d'écarts repérés, quels sont les ajustements réalisés par l'enseignant relativement à ce qui est décrit en termes d'organisations mathématiques et didactiques dans le document qui lui est fourni ?
- Génèrent-ils des conditions favorisant ou au contraire empêchant une mise en œuvre du PER ?

Méthodologie clinique (Leutenegger, 2000, 2009)

Les travaux de Leutenegger (2000, p. 220) établissent le fait qu'une approche clinique ne soit « possible que si les symptômes peuvent être rattachés à des signes faisant sens vis-à-vis des savoirs établis, de théories ». Développant une méthodologie clinique, un chercheur étudie des *traces* de faits, celles-ci devenant des signes interprétables au moyen des théories didactiques à sa disposition. Les symptômes observés, dans cette enquête, sont relatifs aux praxéologies didactiques activées par les enseignants réalisant le projet de mettre en œuvre un PER. La TAD considère que les phénomènes relatifs au *didactique* sont à interpréter en prenant en compte la relativité institutionnelle de l'activité d'étude des mathématiques. Les notions d'*institution* et de *rapports à un objet* (Chevallard, 1992, 2003) participent à ce que les comportements des individus puissent se comprendre du fait de leurs assujettissements aux diverses institutions qu'ils ont traversées. Le rapport personnel à un objet d'un individu émerge de la pluralité des rapports institutionnels auxquels il a été assujetti. Cela m'a conduite à formuler la question suivante :

- Quels éléments des rapports personnels des enseignants aux mathématiques, à leur enseignement, à leur apprentissage et au *métier d'enseignant* peuvent-ils être interprétés comme des ingrédients technologico-théoriques des praxéologies didactiques qu'ils activent ?

L'examen des éléments des rapports personnels des enseignants à ces objets et leur renvoi aux rapports institutionnels a impulsé une dialectique entre *traces* et *signes* sous laquelle s'est développée une démarche *clinique*. Au sein d'une telle approche, les processus de transposition didactique internes que conduisent les deux enseignants y_1 et y_2, ont été étudiés en suivant trois principes formulés par Leutenegger (2000, p. 231). Le premier principe, celui « de questionnement réciproque des différents types de traces à disposition », répond à « une fonction de *réduction de l'incertitude* quant aux liaisons entre les événements ». L'auteure (Ibid., p. 231) précise que : « L'option est de procéder par recoupements successifs à partir des traces, en suspendant le moment d'interprétation de ces traces pour aller en interroger d'autres ». Se pose ensuite la question : « comment et dans quel ordre les différentes traces s'interrogent-elles mutuellement ? (Leutenegger, Ibid., p. 232-233). C'est l'objet du second principe que l'auteure a nommé : « un principe d'ordre des analyses ». Le troisième principe, « le *principe de rétroaction des analyses* » renvoie à la pratique du chercheur qui « en produisant les analyses, […] revisite les événements en partant de la fin » ; ce qui aboutit à ce

[11] L'assujettissement d'une personne à une institution peut continuer à exister au-delà de la période où l'institution regarde cette personne comme sujet – ce qu'exprime par exemple le statut d'étudiant à celui d'ancien étudiant.

« que la *construction de signes* et la *liaison entre ces signes*, à partir des traces [prenne] toute sa dimension » (Leutenegger, Ibid., p. 236).
Je vais maintenant présenter comment les interprétations de certains faits ont été confrontées les unes aux autres, comment les analyses des différentes données se sont globalement articulées dans une perspective de réduction de l'incertitude quant à leur interprétation. Le schéma ci-dessous donne une description des cheminements empruntés.

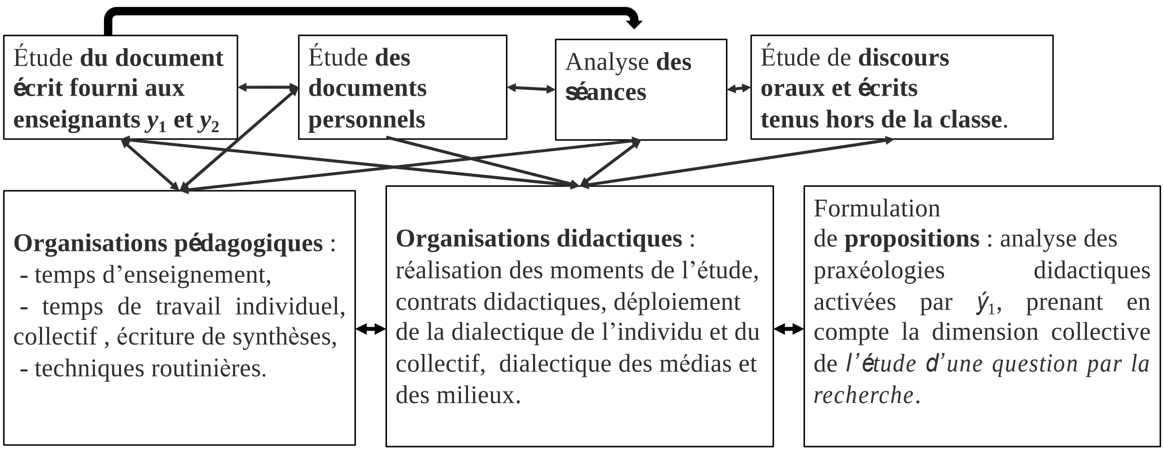


Figure 1 : Étude des processus de transposition didactique interne dans le cas de y_1 et y_2

L'examen du document écrit, dont disposent les enseignants y_1 et y_2, a permis de dégager trois niveaux d'analyse des organisations pédagogiques. Les deux premiers concernent l'organisation temporelle : la comparaison des durées des temps d'enseignement découpés en séances, des durées des temps de travail individuel, collectif[12] et d'écriture d'une synthèse, ainsi que leur alternance. Un troisième est centré sur le déroulement d'épisodes spécifiques de chacune des phases du PER. Portée par le cadre du développement d'un paradigme indiciaire, j'ai également cherché des éléments technologiques qui peuvent être associés aux techniques routinières que sollicitent chacun des enseignants. Le choix de certaines routines s'est fait par l'observation des pratiques, à travers l'examen des séances et des discours oraux et écrits, et le repérage dans la classe de l'accomplissement de tâches routinières, c'est-à-dire que les enseignants réalisent de manière régulière. Celles-ci relevant de pratiques persistantes et souvent naturalisées, j'ai voulu saisir les ingrédients technologiques de leurs praxéologies didactiques qui les soutiennent. Ainsi, est-ce l'un des points de vue que j'ai adopté pour explorer le système de décisions orientant l'action du professeur. Ce choix a été fait dans le but de mettre en rapport les diverses analyses des pratiques observées, de reconstituer des praxéologies didactiques, et cela avec l'idée qu'ils sont susceptibles de révéler certains assujettissements institutionnels. Ces analyses ont permis d'alimenter la confrontation des éléments qui en ressortent avec, à la fois, ceux provenant de l'étude des documents personnels, élaborés par les enseignants et ceux issus de l'analyse des observations des séances. Une première liste de questions interroge les processus de mésogénèse (Chevallard, 1992), de topogénèse (Chevallard, 1985) et de chronogénèse (Chevallard, 1985,1991 ; Mercier, 1992), participant à la mise en place de contrats didactiques, comme par exemple :

[12] Une phase est considérée comme un *temps de travail collectif* lorsque l'ensemble des élèves est censé écouter et discuter les propositions des uns et des autres, y compris celles du professeur, même si parfois il s'agit d'un échange individuel entre le professeur et un seul élève. Une phase est considérée comme un *temps de travail individuel* lorsqu'il est prévu de laisser du temps aux élèves pour rechercher une réponse. Les moments où le professeur s'adresse à un élève individuellement sont inclus dans ce type de temps s'il n'est pas attendu des autres élèves qu'ils écoutent ces échanges.

- La topogénèse accorde-t-elle suffisamment de place à l'élève ?
- La chronogénèse permet-elle une extension du temps d'enseignement, indispensable à la mise en œuvre d'un PER ?

Une seconde liste de questions mettant en jeu le modèle des *moments de l'étude* (Chevallard, 1999, 2002a), modélisation articulée avec celle de *praxéologie*, qui repose sur le postulat selon lequel toute activité d'étude des mathématiques passe nécessairement par le développement de six dimensions, le déroulement de six moments : les moments de la (première) rencontre avec le type de tâches *T*, de l'exploration de *T* et de l'émergence de la technique τ ; de la construction du bloc technologico-théorique $[\theta/\Theta]$, le moment du travail de l'OM $[T/\tau/\theta/\Theta]$, le moment de l'institutionnalisation et le moment de l'évaluation. Une condition pour la réalisation d'une AER est que soient développés les trois premiers moments de l'étude. Il s'agit ainsi d'interroger le développement de ces trois dimensions de l'étude des mathématiques. Par exemple, relativement au moment exploratoire, une question posée est : lorsque les élèves énoncent des assertions, le professeur fait-il en sorte qu'elles soient mises à l'épreuve, du point de vue de leur véracité et du point de vue de leur production de techniques ? Relativement au moment technologique, le professeur parvient-il à faire vivre en interrelation les deux moments exploratoire et technologico-théorique ? Cette étude sur la notion de PER a également fait ressortir que le modèle du *schéma herbartien*, la modélisation de *l'échelle des niveaux de codétermination didactique*, les *dialectiques de l'enquête* (Chevallard, 2002b, 2007, 2009), notamment *la dialectique des médias et des milieux*, la *dialectique de l'individu et du collectif* [13] sont des outils pertinents qui ont facilité la mise en relation de *traces* de certains faits observés.

L'observation et l'analyse des praxéologies didactiques activées chez l'un des enseignants, membre du groupe didactique d'Aix-Marseille, m'a conduite à formuler quatre propositions qui offrent des conditions favorisant la réalisation d'un PER[14]. Ce professeur, désigné par $\acute{y}_1$, a participé à la construction du PER au cours des années 2007 à 2009 puis aux premières passations du parcours en 2009-2010. Ces analyses m'ont permis de confronter les analyses produites à partir de l'étude des cas de y_1 et y_2, à ce qui pourrait vivre comme éléments d'un équipement praxéologique favorisant la mise en œuvre d'un PER ; ce qui est développé dans la partie suivante.

IV. RESULTATS

Cette recherche met en évidence la nécessité d'accompagner les enseignants qui veulent s'engager dans le projet d'une mise en œuvre, dans leurs classes, d'un PER conçu sous la direction de chercheurs, à l'aide d'outils venus de théories didactiques. L'observation *clinique* des deux professeurs y_1 et y_2 met en évidence un *modèle épistémologique dominant* auquel ces enseignants adhèrent. En référence à la modélisation de *l'espace des organisations didactiques* proposée par Bosch & Gascón (2002, p. 34), je conjecture que les types d'organisations didactiques mises en œuvre relèvent d'un *modèle didactique classique*, sous lequel est privilégié le développement du moment de constitution d'un environnement technologico-théorique et du moment du travail des organisations mathématiques. Dans les deux cas observés, la dimension exploratoire de l'activité d'étude des mathématiques, relativement à la majorité des types de tâches en jeu, est peu développée. Le topos des élèves

[13] Une présentation de ces modèles se trouve dans l'introduction et le chapitre 3 de ma thèse.
[14] Le chapitre 9 de ma thèse est consacré à la présentation de ces quatre propositions.

est variable, mais tend à se réduire au cours du développement des moments exploratoire et de constitution de l'environnement technologico-théorique des types de tâches étudiés[15]. Concernant l'organisation temporelle, au niveau pédagogique, il ressort que les durées totales pour chacun de trois dispositifs de travail (individuel, collectif et écriture d'une synthèse) sont à peu près égales et que l'alternance de ces types de temps diffère fortement d'un professeur à l'autre[16]. Les paragraphes suivants sont dédiés à la présentation de trois des quatre propositions, mentionnées ci-dessus, que je considère comme des conjectures explicitant des ingrédients de praxéologies didactiques prenant en compte la dimension collective de l'étude d'une question par la recherche. Elles constituent une grille d'analyse de ce qui vit dans les classes en le confrontant à ce qui pourrait vivre afin d'étudier des difficultés rencontrées pour la diffusion et la réception de praxéologies didactiques favorables à une mise en œuvre de PER. Leur présentation rend compte des effets principaux qu'elles produisent, sur les processus d'étude développés dans les classes : chronogétiques dans le premier paragraphe, topogénétiques dans le second paragraphe, mésogénétiques dans le troisième paragraphe.

1. Effets chronogénétiques de praxéologies didactiques étudiées

Concernant la dimension chronogénétique des contrats didactiques installés chez $ý_1$, j'ai formulé la proposition suivante qui conditionne également la prise en compte de *l'individu* dans *le collectif* au sein du système didactique.

Proposition : Les praxéologies didactiques du professeur, par le déploiement d'une dialectique de l'individu et du collectif et *d'une dialectique des médias et des milieux, provoquent un ralentissement du temps didactique participant à la dévolution d'une situation de validation et produisent un temps propre à l'incertitude, nommé temps d'étude par la recherche.*

Cette proposition peut être considérée comme un élément technologique de praxéologies didactiques favorisant la dévolution de la dimension technologique des organisations mathématiques visées ; de telles conditions concourent à générer une incertitude pour les élèves quant aux décisions qu'ils ont à prendre, tant celles relatives aux techniques visées que celles relatives aux ingrédients technologiques des techniques en cours d'élaboration.
Dans le cas des deux professeurs y_1 et y_2, des accélérations du temps didactique empêchent le développement des phases d'exploration ; l'explicitation des éléments d'ordre technologique est prise en charge par le professeur. Les enseignants ne maintiennent pas une incertitude sur des assertions formulées, qui ne sont pas mises à l'épreuve au sein du collectif.
Dans le cas de y_1, les organisations didactiques mises en œuvre ne permettent pas aux élèves de participer au développement de la dimension technologique de l'étude des types de tâches en jeu. Les analyses de plusieurs épisodes du PER ont révélé la mise en place de contrats de type « maïeutique socratique » (Brousseau, 1996) ; ce qui peut être rapproché d'éléments d'étude du rapport qu'entretient ce professeur, à l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, fortement marqué par les actions de *transmission* et *réception* ; comme il en témoigne dans le discours ci-dessous, tenu lors d'un entretien individuel, en juin 2015 après la première passation du PER :

[15] Ces analyses sont développées dans le chapitre 11 de ma thèse.
[16] Les résultats de ces analyses sont présentés dans le chapitre 10 de ma thèse.

> Les élèves sont *« dans l'attente qu'on leur montre des choses » (l. 27) ;* il est *« satisfaisant de voir qu'il y a un élève qui a compris ce que [je] lui [ai] transmis et qui arrive à le transmettre… C'est plaisant » (l. 63).*[17]

Dans le cas de y_2, la dialectique *de l'individu et du collectif* (Chevallard, 2009) se développe essentiellement à l'intérieur de moments de « correction ». Durant un entretien individuel datant de juin 2015[18], lorsque E lui demande « ce qu'un élève de 5^e^ attend de son professeur de mathématiques » (l. 32), cet enseignant considère que :

> les élèves *« aimeraient comprendre ce qu'on leur demande de faire, comprendre ce qu'on fait en classe » (l. 34), « qu'on soit attentif à eux » (l. 37), « quand ils n'ont pas compris qu'on leur réexplique » (l. 37).*

Ce discours soutient, probablement, la mise en place de contrats de « conditionnement » (Brousseau, 1996), que les analyses mettent en évidence, et favorise un enseignement par ostension sous lequel on apprend à l'aide d'explications répétées. De plus, les organisations didactiques mises en œuvre pour l'étude de la plupart des types de tâches sont marquées par une certaine rigidité vis-à-vis des techniques, le professeur guidant fortement, à *tel* moment, sur l'usage de *telle* technique. Cela signe, me semble-t-il, un rapport aux mathématiques marqué par une faible place accordée à l'expérimentation.
En conséquence, les praxéologies didactiques activées par y_1 et y_2 n'offrent pas les conditions didactiques et mathématiques générant un *temps d'étude par la recherche,* défini dans la proposition précédente.

2. Effets topogénétiques des praxéologies didactiques étudiées

Une seconde proposition concerne un aspect du développement de la dimension topogénétique, relatif aux praxéologies didactiques activées par $\acute{y}_1$:

Proposition : Le professeur autorise publiquement la constitution d'une institution formée d'un seul élève ayant recours à une praxéologie mathématique différente de celle qui est en train de se développer dans la classe. La production d'une telle institution formée autour d'une seule personne étant assumée devant le collectif, met en valeur le rapport personnel de l'élève à l'organisation mathématique en cours de construction.

Cette proposition peut être considérée comme un ingrédient d'un équipement praxéologique favorisant l'élargissement du topos des élèves au cours de l'élaboration d'une organisation mathématique.
Dans le cas de y_1, l'étude de ces praxéologies didactiques montre une réticence à accorder des temps de travail individuel. Celle-ci semble être soutenue, comme cela été révélé par l'enquête, par un *logos* dont un rapport à l'enseignement est marqué par un mode d'étude rétroactif (Chevallard & Ladage, 2011) dont on voit une *trace* dans l'extrait suivant de l'entretien de juin 2015, lorsque le professeur dit, par exemple :

> *« de toute façon pour moi, si je leur donne un truc, il faut qu'il soit capable de le faire. Je ne me vois pas leur demander un truc en sachant pertinemment qu'ils ne vont pas y arriver. » (l. 116)*[19]

Une manifestation du mode d'étude rétroactif s'est également exprimée à travers l'usage d'une technique routinière chez y_1, consistant à énoncer, au début d'une séance, ce qu'il

[17] Ces discours sont extraits de l'annexe 11.1 de ma thèse.
[18] Une transcription de cet entretien se trouve dans l'annexe 11.2 de ma thèse.
[19] Cet extrait provient de la transcription disponible à l'annexe 11.1 de ma thèse.

déclare être « le déroulé d'une séance ». Il s'agit de donner des remarques d'ordre pédagogique comme « vérifier que ce qui a été dit hier a été bien compris … par chacun d'entre vous ». Ce type d'intervention peut sans doute s'expliquer par la nécessité que la classe s'appuie sur des connaissances antérieures pour l'élaboration d'un savoir nouveau et signe la volonté du professeur d'homogénéiser les connaissances dont il attend que les élèves disposent. Cependant, lorsque E l'interroge, en juin 2015, sur l'existence de cette routine, il la justifie par le besoin de « leur dire où ils vont » (l. 75), « de travailler en transparence » (l. 81). Aussi cette technique routinière, que l'on pourrait évaluer *a priori* comme permettant de constituer un milieu pour l'étude, ne permet pas, fort probablement, d'atteindre cet effet mésogénétique. En effet, étant portée par un mode d'étude rétroactif, elle génère finalement des stratégies didactiques d'ostension.
Dans le cas de y_2, une technique routinière est d'« interroger un maximum d'élèves » lors des moments de correction ; cela est ainsi noté dans son document personnel. Effectivement, le professeur s'impose de solliciter tous les élèves ou presque tous, certainement pour obtenir l'adhésion des élèves à l'étude du type de tâches visé. Une telle contrainte semble être le *signe* d'un manque de « confiance » envers le contrat didactique installé dans la classe : le professeur semble considérer le collectif comme la somme des individus le constituant. De ce fait, y_2 ne paraît pas prendre en compte le fait que la diffusion des assertions formulées dans la classe s'opère sous contrat. En effet, interrogé, en octobre 2014[20], sur la comparaison d'un enseignement fondé sur le PER étudié « par rapport à ce qui se fait traditionnellement », le professeur y_2 déclare :

> *« moi, en tant que professeur, je vois que cela change. Mais, les élèves voient qu'il y a des choses qu'on fait différemment, ça dépend comment on travaillait avant… Les élèves, je ne suis pas sûre. » (l. 74)*

L'enseignant y_2 semble ainsi ne pas percevoir que le contrat didactique installé dans une classe lie, vis-à-vis du savoir à enseigner, les deux instances, professeur et élève, et repose sur une relation de dépendance entre une organisation mathématique et une organisation didactique développée pour la mettre en place.
Ainsi, cette proposition, vue comme une technique didactique, n'est pas, me semble-t-il, disponible dans l'équipement praxéologique de ces deux professeurs.

3. Effets mésogénétiques de praxéologies didactiques étudiées

Une troisième proposition résume une technique didactique qui permet d'enrichir le milieu pour l'étude par l'apport d'ostensifs (Bosch & Chevallard, 1999), nourrissant le travail collectif :

Proposition : L'enseignant déploie une **dialectique ostensifs-non ostensifs** *qui concourt à expliciter l'articulation des organisations mathématiques associées aux types de tâches étudiés selon le moment d'étude dans lequel la classe est principalement engagée ; ce qui suppose que* ***la valence sémiotique des ostensifs apportés par l'enseignant serve à nourrir leur valence instrumentale, relativement à l'étude de ces types de tâches.***

L'analyse des praxéologies didactiques activées par le professeur y_2 met en évidence des conditions mathématiques et didactiques, durant les deux premières séquences du PER, qui situent l'activité mathématique de la classe sur l'étude du type de tâches T_2, « déterminer un programme de calcul le plus simple équivalent de $+ b - c$ », portant la raison d'être des nombres relatifs choisie dans cette transposition. L'organisation mathématique autour de ce

[20] Une transcription de cet entretien est disponible à l'annexe 6.2 de ma thèse.

type de tâches est mise en place, de manière conjointe, avec celle relative au type de tâches T_1 qui consiste à « effectuer mentalement un calcul du type $a + b - c$ ». Selon Bosch & Chevallard (1999), une spécificité de l'activité mathématique se trouve dans le déploiement d'une *dialectique ostensifs-non ostensifs* qui alimente l'élaboration des praxéologies mathématiques visées. Un objet ostensif apparaît comme possédant deux valences : une valence *instrumentale*, par laquelle il permet d'agir, de travailler et une valence *sémiotique* par laquelle il permet d'évoquer d'autres systèmes d'objets, ostensifs et non-ostensifs.

Dans le cas de y_2, les notions de *programme de calcul* et d'*équivalence de programmes de calcul* sont deux non-ostensifs que l'organisation didactique mise en œuvre associe explicitement à l'ostensif verbal, « ajouter *b* et soustraire *c* revient à… », articulé à l'ostensif scriptural « $+ b - c = +/- d$ ». La valence instrumentale de ces ostensifs est ainsi mise en avant.

Dans le cas de y_1, le moment de première rencontre avec le type de tâches T_2 est peu développé : c'est le professeur qui déclare publiquement le caractère problématique des tâches de ce type. L'activité mathématique est peu centrée sur l'étude de T_2 : peu d'ostensifs scripturaux sont apportés pour montrer l'intention d'étudier ce type de tâches. Voici ce que dit ce professeur, lorsque l'ostensif scriptural « + 45 – 46 = – 1 » est introduit dans la classe :

> *« Du moment que* ***c'est une notation que je te montre, que je t'impose, il n'y a rien à comprendre*** *».* Une minute plus tard, il va jusqu'à déclarer *« là (en montrant la phrase « ajouter 45 puis soustraire 46 revient à soustraire 1 ») c'est écrit en français, là (en montrant l'égalité) c'est écrit en maths »*, puis *« je n'ai fait que vous transmettre, vous* ***apprendre à traduire le français en maths »****. (l. 71)*[21]

Ce professeur ne prend pas la mesure du milieu pour l'étude qui se construit par l'incorporation de cet ostensif écrit dans l'organisation mathématique visée. La valence instrumentale de cet ostensif scriptural est péjorée. Ce discours ne favorise pas que son usage soit rattaché à ce qui s'est passé auparavant dans la classe. Sa valence sémiotique ne semble pas être, ou du moins en partie, prise en considération. Cela m'a conduite à faire l'hypothèse que cet enseignant ne considère pas qu'une des spécificités de l'activité mathématique puisse reposer sur des ostensifs écrits qui ne seraient pas de l'oral mis par écrit. Cela renvoie, me semble-t-il, au phénomène de « phonocentrisme », identifié par Jacques Derrida (1967)[22] et repris par Bosch et Chevallard (1999), selon lequel est accordée une priorité à la parole au détriment de l'écriture. Ce fait peut être rapproché d'éléments constitutifs du rapport que l'enseignant y_1 entretient avec la notion de *programme de calcul*. Au cours de l'entretien de juin 2015[23], suite à la première passation du PER, lorsque *E* lui demande « à propos du PER sur les relatifs, qu'est-ce qui a changé d'après toi ? » (l. 104), il répond :

> *« j'ai vraiment ressenti cette compréhension en accordéon chez les élèves où il y a des moments où j'ai trouvé des étapes très faciles, et même trop faciles par exemple pour le début sur les programmes de calculs. J'ai jamais vu un chapitre aussi facile, ça je l'ai entendu. » (l. 109)*

Se référant à des déclarations d'élèves, le travail « sur les programmes de calculs » est jugé par le professeur « trop facile ». Celui-ci semble conférer un caractère « évident », « naturel »

[21] Cet extrait provient d'une transcription d'une séance, disponible dans l'annexe 7.2 de ma thèse.

[22] Derrida utilise les notions « phonocentrisme » et de « logocentrisme », pour dénoncer le privilège accordé dans la dite tradition à la voix (phoné) et au *logos*. La voix est en effet vécue comme quelque chose de présent et d'immédiatement évident. L'écriture est reléguée au second plan, à un statut dérivé. Depuis Platon, le mot écrit était considéré seulement comme une représentation du mot dit : c'est ce que Derrida nomme la tradition logocentrisme de la pensée occidentale. Dans sa thèse, Bosch (1994) explique que l'activité mathématique s'est spécifiée au sein d'une recherche large qui initiait, selon Platon, le continent du *logos*, la recherche de la « raison universelle » ; ce qui renvoie, selon l'auteure, au logocentrisme de la culture occidentale.

[23] Une transcription de cet entretien est disponible dans l'annexe 11.1 de ma thèse.

à cette notion. Son rapport personnel à la notion de *programme de calcul*, marqué par une certaine transparence, peut alors l'empêcher de saisir son rôle fondamental dans les mathématiques construites dans ce PER.
En conséquence, chez l'enseignant y_1, l'élaboration de techniques n'est pas appuyée par le déploiement d'une *dialectique ostensifs-non ostensifs* ; ce qui entrave le processus d'institutionnalisation des organisations mathématiques visées.

V. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Cette recherche révèle des manques dans l'équipement praxéologique des deux enseignants observés et la nécessité de les accompagner dans leur projet de mise en œuvre d'un PER. La TAD a permis d'analyser des observations de classe, des discours des professeurs tenus dans la classe et hors de la classe afin de les interpréter comme éléments constitutifs d'un faisceau de faits concordants. Cette enquête était initialement orientée vers l'étude de difficultés relatives au *métier d'enseignant* afin de parvenir à mettre au jour des *besoins infrastructurels* mathématiques et didactiques du professeur (Chevallard, 2011) dans la perspective de les prendre en compte dans le cadre de formations.

Besoins infrastructurels mathématiques et didactiques des enseignants : construire une vigilance épistémologique vis-à-vis de l'organisation mathématique de référence[24]

Construire une *vigilance épistémologique* chez le professeur consisterait à l'aider à prendre une distance envers des organisations mathématiques et didactiques visées. En particulier, il s'agirait de l'amener à questionner ses rapports aux mathématiques à enseigner pouvant être marqués par leurs usages sociaux dans la *culture courante*, à s'interroger sur son rapport à la raison d'être du savoir à enseigner choisie dans le PER à mettre en œuvre. Plusieurs enjeux de formation ont été formulés comme :

- Questionner l'écologie des ostensifs qui instrumentent les praxéologies didactico-mathématiques à développer ainsi que leurs fonctions : de quels ostensifs a-t-on besoin pour que la classe progresse dans la recherche de réponses à la question étudiée ? Qu'est-ce qui pourrait favoriser ou au contraire empêcher l'existence de tel ostensif ? À quel environnement technico-technologique doit ou pourrait participer la manipulation de tel ostensif ?
- Faire éprouver la relation de dépendance qui existe entre l'organisation mathématique et l'organisation didactique permettant de la mettre en place,
- Interroger le développement de la dimension technologique de l'activité d'étude des mathématiques, l'existence des fonctions de production et d'intelligibilité d'une technique associée à la dimension technologique, telle qu'elles sont définies dans le cadre de la TAD.

Des perspectives de recherche

Plusieurs prolongements de ce travail auraient avantage à être développés.

[24] L'OM de référence fournit un point de vue épistémologique. Dans le cas du PER étudié, l'organisation mathématique de référence prévoit de définir un nombre relatif comme une classe d'équivalence dans un ensemble d'opérateurs définis de **N** dans **N**.

Tout d'abord, l'étude de mises en œuvre de PER dans un domaine mathématique autre que l'algèbre conduirait certainement à révéler d'autres types de contraintes relatives aux savoirs mathématiques visés et aux rapports des enseignants à ces savoirs.
Cette recherche a permis de recueillir des éléments relatifs à l'étude de l'évolution du rapport des professeurs au projet de mettre en œuvre un PER. Mais cette question n'a pas été suffisamment exploré et mériterait d'être approfondie.
Pour finir, les résultats de cette enquête pourraient contribuer à l'élaboration d'une formation telle que Barquero, Bosch & Romo (2015) le propose. Par exemple, les grilles de questionnements élaborées pour l'évaluation de mises en œuvre de PER pourraient être utiles à l'appropriation par les enseignants d'un PER qu'ils veulent mettre en œuvre ; cela suppose que les enseignants disposent d'outils théoriques. Ce travail, me semble-t-il a montré la pertinence, dans le cadre de formations, de modèles comme celui des praxéologies, des moments de l'étude, de *dialectiques*, comme celles *des médias et des milieux, de l'individu et du collectif*. Aussi se pose le problème de la rédaction d'un document de référence, si le choix est fait de fournir un tel document : quels degrés d'explicitation des notions de didactique des mathématiques sont-ils nécessaires ? La question de l'usage de l'observation de techniques routinières chez les enseignants mérite également d'être posée. Cette recherche a mis en évidence que certaines pouvaient être une entrave à la réalisation du PER, et montre l'importance de travailler sur les routines dans le sens où elles renferment des éléments technologico-théoriques qui, me semble-t-il, sont prédominants. Il s'agirait donc de les interroger dans le cadre d'une formation sur les fonctions didactiques qu'elles assument pour éventuellement expliciter le *logos* qui les soutient.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ARTIGUE, M. (2012). *Les défis de l'enseignement des mathématiques dans l'éducation de base*. Repéré à http://unesdoc.unesco.org/images/0019/001917/191776f.pdf

BARQUERO, B., BOSCH, M., & ROMO, A. (2015). A study and research path on mathematical modelling for teacher education. Dans K. Krainer & N. Vondrová (Éds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, CERME 9-Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (p. 809-815). Repéré à https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01287246/document

BERNAD, K. (2017). *Une contribution à l'étude de conditions et contraintes déterminant les pratiques enseignantes dans le cadre de mises en œuvre de parcours d'étude et de recherche en mathématiques au collège*. Thèse de l'Université d'Aix-Marseille. Repéré à https://hal.univ-brest.fr/ADEF/tel-01695043v1

BOSCH M. & CHEVALLARD Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objets d'étude et problématique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *19*(1), 77-124. Repéré à http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Sensibilite_aux_ostensifs.pdf

BOSCH, M. ET GASCON, J. (2002). Organiser l'étude. 2. Théories et empiries. Dans J.-L. Dorier et al. (Éds.), *Actes de la 11e École d'Été de didactique des mathématiques* (p. 23-40). Grenoble : La Pensée Sauvage.

BROUSSEAU, G. (1996). L'enseignant dans la théorie des situations didactiques. Dans R. Noirfalise & M.-J. Perrin-Glorian (Éds.), *Actes de la VIIIe École et université d'été de didactique des mathématiques* (pp. 3-46). Clermont-Ferrand : IREM.

CHEVALLARD, Y. (1985/1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *12*(1), 73-112.

CHEVALLARD, Y. (1999). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques, Actes de l'Université d'été* (pp. 91-118). Repéré à http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Analyse_des_pratiques_enseignantes.pdf

CHEVALLARD, Y. (2002A). Organiser l'étude. 1. Structures & fonctions. Dans J.-L. Dorier et al. (Éds.), *Actes de la 11e École d'Été de didactique des mathématiques* (p. 3-32). Grenoble : La Pensée Sauvage. Repéré à http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Organiser_l_etude_1.pdf

CHEVALLARD, Y. (2002B). Les TPE comme problème didactique. Dans T. Assude & B. Grugeon Allys (Éds.), *Actes du Séminaire national de didactique des mathématiques* (pp. 177-188). Paris : IREM de Paris 7 et ARDM. Repéré à http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/YC_2001_-_Seminaire_national.pdf

CHEVALLARD Y. (2003). Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques. Dans S. Maury S. & M. Caillot (Éds), *Rapport au savoir et didactiques* (pp. 81-104). Paris : Éditions Fabert. Repéré à http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Approche_anthropologique_rapport_au_savoir.pdf

CHEVALLARD, Y. (2007). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. Dans L. Ruiz-Higueras, A. Estepa & F. Javier García (Éds), *Sociedad, Escuela y Mathemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de la Didáctico* (p. 705-746). Universidad de Jaén : Gráficas « LA PAZ ». Repéré à http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Passe_et_present_de_la_TAD-2.pdf
CHEVALLARD, Y. (2009). *La notion de PER : problèmes et avancées*. Repéré à http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=161
CHEVALLARD Y. (2011). La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD. Dans C. Margolinas et al. (Éds), *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (p. 81-108). Grenoble : La Pensée Sauvage. Repéré à http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Cours_de_YC_a_l_EE_2009-2.pdf
CHEVALLARD, Y. & LADAGE, C. (2011). *Cours de didactique fondamentale 2011-2012*. Repéré à http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/DFM_2011-2012_Module_1_LD_.pdf
DERRIDA, J. (1967). *De la grammatologie*. Paris : Minuit.
GINZBURG, C. (1989). *Mythes emblèmes traces. Morphologie et histoire.* Paris : Editions Verdier.
LEUTENEGGER, F. (2000). Construction d'une « clinique » pour le didactique. Une étude des phénomènes temporels de l'enseignement. *Recherches en didactique des mathématiques*, *20*(2), 209-250.
LEUTENEGGER, F. (2009). *Le temps d'instruire. Approche clinique et expérimentale du didactique ordinaire en mathématiques*. Berne : Peter Lang.
MERCIER, A. (1992). *L'élève et les contraintes temporelles de l'enseignement, un cas en calcul algébrique* (Thèse de doctorat). Université de Bordeaux I, Bordeaux.
PERRIN-GLORIAN, M-J. (2011). L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement des ressources et formation des enseignants. Dans C. Margolinas, M. et al. (Éds). *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (pp. 57- 78). Grenoble : La Pensée Sauvage.

COMPLETUDE ET STRUCTURE ALGEBRIQUE DE **R** AU NIVEAU SECONDAIRE[1]

Macarena **FLORES-GONZALEZ**

prof.macarena.flores@gmail.com

Université Paris 7

Résumé

On propose une approche des nombres réels à partir de deux notions mathématiques principales de **R** que sont la complétude et la structure de corps. Celles-ci sont peu travaillées au niveau secondaire et comportent des difficultés à différents niveaux d'enseignement. On présente alors une situation s'appuyant sur des suites adjacentes d'approximation décimale et des sommes et produits de ces dernières. Comme résultat, on trouve que les élèves de niveau secondaire ont pu effectivement s'initier à ces deux notions essentielles de R.

Mots clés

Nombres réels, complétude, structure de corps, travail mathématique, analyse

PROBLEMATIQUE

Des études comme Bergé (2010), ont déjà mis en évidence que la plupart des étudiants en classes d'analyse à l'université n'arrivent pas à une compréhension suffisante de la complétude de **R**. La visualisation des propriétés fondamentales des nombres réels comme sa complétude, n'est pas facile et elle n'est pas travaillée au lycée, alors qu'elle pose problème à l'université. D'autre part, au niveau secondaire on n'a pas défini les caractéristiques algébriques de **R** (sa structure de corps) et on effectue des opérations sans se préoccuper du sens et de la définition de celles-ci. Ainsi, est-il difficile de dire que **R** soit un système numérique au sens de Chevallard (1989). Finalement quand on fait le passage de **Q** à **R** on n'est plus dans une vision uniquement algébrique mais surtout topologique et dans une perspective principalement locale (Vandebrouck, 2011 ; Montoya-Delgadillo et al., 2018). Ainsi on se demande, quelle situation d'apprentissage pourrait permettre d'introduire, d'articuler et de travailler conjointement les caractéristiques algébriques et topologiques de **R** (notamment sa structure de corps et sa complétude) ?

[1] Synthèse du travail de mémoire de master sous la direction de Laurent Vivier.

CADRE THEORIQUE

Les éléments cruciaux liés à notre problématique, se trouvent dans les difficultés d'apprentissage des nombres réels, en voulant aborder des aspects cognitifs (comme la visualisation) mais aussi épistémologiques. Ces deux aspects sont considérés dans le cadre des Espaces de Travail Mathématique (ETM) comme exposé par exemple dans Kuzniak, Tanguay & Elia (2016). Ici on s'intéresse au travail mathématique de l'élève, où on prendra en compte les plans verticaux des ETM personnels qui ont été activés dans le travail effectué : sémiotique-instrumental [Sem-Ins], instrumental-discursif [Ins-Dis] et sémiotique-discursive [Sem-Dis] ; ainsi que les paradigmes de l'analyse (Montoya-Delgadillo et Vivier, 2016) : *analyse arithmetico-géométrique* (AG), *analyse calculatoire* (AC) et *analyse réelle* (AR). En complément du cadre des ETM, on utilisera les perspectives de localité de Vandebrouck (2011) : perspective ponctuelle (PP), la perspective globale (PG), et la perspective locale (PL) adaptées à l'étude des nombres réels pour préciser les déconstructions avec perspectives de localité dans le domaine de l'analyse (Kuzniak et al., 2016 ; Montoya-Delgadillo et al., 2018). Ces outils nous permettent, d'une part, de construire la situation d'apprentissage souhaitée et, d'autre part, de rendre compte de ce que l'on trouve dans les productions écrites et orales des élèves.

LA TACHE CONSTRUITE ET EXPERIMENTATION

L'expérimentation est menée avec 3 binômes de Seconde et 3 binômes de Terminale ES (on présente uniquement cette dernière dans l'annexe 1), d'un lycée général et technologique publique francilien en 2018. En ce qui concerne la situation construite, on s'appuie sur la définition des opérations somme et produit de **R** qui sont basées sur la complétude de cet ensemble, et plus spécifiquement sur des approximations décimales. On s'intéresse à la recherche d'approximations des trois racines x_1, x_2 et x_3 du polynôme $P(x) = x^3-60x^2+980x-4700$, pour ensuite se focaliser sur des approximations de $x_1 + x_2 + x_3$, $x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3$ et $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$. Puis, avec la relation algébrique entre les coefficients du polynôme et ses racines on a : $x_1 + x_2 + x_3 = 60$, $x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3 = 980$ et $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 4700$. Ainsi, on peut visualiser les valeurs exactes dont on n'a, a priori, que des valeurs approchées : à l'aide de l'utilisation des suites adjacentes d'approximation décimale (par excès et par défaut des racines du polynôme), et en regardant les intervalles emboités qu'elles impliquent, on cherche à promouvoir la visualisation des limites de ces suites. De cette manière, les élèves ne peuvent pas calculer les solutions de façon directe mais peuvent avoir des candidats pour la limite des opérations algébriques que sont les valeurs des trois polynômes symétriques cherchés. On attend que les *artefacts* mis à disposition (un grapheur, une calculatrice scientifique et une calculatrice formelle) déclenchent des ETM personnels différents. On espère ainsi bloquer le paradigme AC, car ils ne peuvent pas calculer les valeurs exactes des racines, de façon à ce que, en s'appuyant sur le paradigme AG, la visualisation et la PL, il y ait un changement de paradigme pour le paradigme AR de façon informelle.

RESULTATS PRINCIPAUX

On présente dans la figure 1 un extrait du tableau des résultats qui permet d'identifier, pour chaque item de la situation, les *déconstructions de perspectives de localité* (DPL), les *plans verticaux* activés dans les ETM personnels des binômes (PV ETM), les *paradigmes de l'analyse* utilisés (PA), l'objectif général attendu pour chaque question, et le nombre des binômes impliqués.

Item	DPL	PV ETM	PA	Objectif général attendu de la question	Effectif
I.1.	PP-PG	[Sem-Ins]	AG (AC)	Contextualisation du problème pour que l'élève puisse vérifier l'existence de solutions réelles, mais sans que la valeur exacte de la solution soit nécessairement trouvée.	5
III	PL	[Sem-Dis]	AR	Dans un intervalle aussi petit qu'on veut, visualiser que les opérations des nombres réels convergent et identifier sa limite. Donner une preuve si possible.	3*
IV	PL	[Sem-Dis]	AR	Visualiser les intervalles emboités du nombre auquel les suites des opérations convergent. Visualiser la complétude dans une PL et produire des signes qui permettent d'analyser ce qui se passe au niveau PL.	5*
*** Les résultats de la question III et IV n'ont pas été complétement réussis**					$\boldsymbol{n = 6}$

Figure 1 : Tableau des résultats.

On observe que la plus grande difficulté pour les élèves c'est de visualiser le lien entre les racines et les coefficients du polynôme dans la partie III (point clé pour travailler la structure du corps **R**). En revanche, les élèves arrivent mieux à visualiser la question liée à la complétude à partir des intervalles emboités (partie IV).
Du point de vue du cadre théorique, le paradigme *arithmetico-geométrique* (AG) est indispensable pour approcher la complétude de **R** au niveau secondaire, car il permet de déclencher un travail dans les trois perspectives de localité (ce que ne permet pas AC). En effet, les liens entre les paradigmes de l'analyse et les perspectives de localité seraient les suivants :

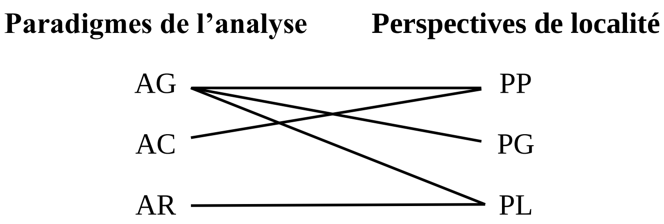


Figure 2 : Liens entre les paradigmes de l'analyse et les perspectives de localité.

CONCLUSIONS

Grâce aux résultats, on constate que la visualisation attendue n'a pas eu lieu, ce qui n'a pas empêché de faire apparaître de façon spontanée quelques éléments liés à la complétude, comme la convergence, les intervalles emboités ou la confrontation à l'obstacle épistémologique de l'infini actuel (les élèves en restent à un infini potentiel).

Bien que ce soit une étude préliminaire, on peut déjà dire que l'entrée par le paradigme AG permet une visualisation non iconique et caractéristique de la complétude de **R**, car elle peut développer un travail mathématique sur les trois perspectives de localité dans l'étude des nombres réels. D'autre part, il existe des pistes claires pour améliorer la situation qui a été construite comme prévoir des interventions précises de l'enseignant pour favoriser la visualisation.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BERGÉ, A. (2010). Students' perceptions of the completeness property of the set of real numbers, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 41(2),* 217–227.

CHEVALLARD, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège deuxième partie : Perspectives curriculaires : la notion de modélisation, *Petit x, 19*, 43–72.

KUZNIAK, A. MONTOYA, E. VANDERBROUCK, F. & VIVIER, L. (2016). Le travail mathématique en analyse de la fin du secondaire au début du supérieur : identification et construction. In Y. Matheron, G. Gueudet, et al. (Eds.), *Enjeux et débats en didactique des mathématiques* (pp. 47–66). Grenoble : La Pensée Sauvage.

KUZNIAK, A., TANGUAY, D. & ELIA, I. (2016). Mathematical working spaces in schooling: an introduction. *ZDM, 48(6),* 721–737.

MONTOYA-DELGADILLO, E., PÁEZ-MURILLO, R., VANDEBROUCK, F. & VIVIER, L. (2018). Deconstruction with localisation perspective in the learning of analysis. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 4(1),* 139–160.

MONTOYA-DELGADILLO, E. & VIVIER, L. (2016). Mathematical Working Spaces and Paradigms as an analysis tool for the teaching and learning of analysis, *ZDM, 48(6),* 739–754.

VANDERBROUCK, F. (2011). Perspectives et domaines de travail pour l'étude des fonctions. *Annales de Didactique et des Sciences Cognitives, 16*, 149–185.

ANNEXE 1 (LA SITUATION DESIGNEE)

PARTIE I

Les dimensions d'un parallélépipède rectangulaire sont établies à partir des solutions de l'équation $\boldsymbol{x^3 - 60x^2 + 980x - 4700 = 0}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1) **Vérifiez** que l'équation a bien trois solutions. *(Vous pouvez vous s'appuyer sur le logiciel ou calculatrices).*
2) On note x_1, x_2 et x_3 les trois solutions de l'équation. **Donnez une valeur approchée** à 10^{-1} pour x_1, x_2 et x_3.
3) À partir des valeurs approchées de x_1, x_2 et x_3, **donnez une valeur approchée** de la somme de trois arêtes (S), de la demi aire latérale (A) et du volume (V) du parallélépipède rectangulaire.

PARTIE II

1) À l'aide des nombres décimaux, donnez des encadrements ($a < x < b$ *par exemple*) pour x_1, x_2, x_3, S, A et V, pour une précision de 10^{-1} et 10^{-2}.
2) Si on continue en cherchant des encadrements plus précis pour x_1, x_2 et x_3, que se passe-t-il pour V ?

PARTIE III

En observant les tableurs répondez :

Précision des solutions	Largeur (x_1)		Profondeur (x_2)		Hauteur (x_3)	
	Min	Max	Min	Max	Min	Max
10^{-2}	9,07	9,08	14,03	14,04	36,88	36,89
10^{-3}	9,078	9,079	14,035	14,036	36,886	36,887
10^{-4}	9,0783	9,0784	14,0355	14,0356	36,8861	36,8862

	Somme trois arêtes (S)		Demi aire latérale (A)		Volume (V)	
	Min	Max	Min	Max	Min	Max
10^{-2}	59,98	60,01	979,1801	980,38	4693,057448	4702,855248
10^{-3}	59,999	60,002	979,955848	980,075849	4699,635301	4700,615317
10^{-4}	59,9999	60,0002	979,9964178	980,0084178	4699,970782	4700,068782

1) Peut-on conjecturer la valeur exacte de S, de A, et de V? (Marquez un carré et répondez).

☐ ***Oui***, et les valeurs exactes sont : S=........... A=............ et V=............ Car :

☐ ***Non,*** car :

PARTIE IV

1) **En complétant** le tableur pour une précision à $\mathbf{10^{-8}}$ de **V**, et en considérant la droite numérique, qu'est ce qu'on peut dire des intervalles associées aux encadrements de V? (Vous pouvez faire un design)
2) D'après vous, combien de chiffres après la virgule ont **les solutions** de l'équation ? **Justifiez votre réponse**

LA TRANSPOSITION D'UN DISPOSITIF DE MANIPULATION TANGIBLE DANS UN ENVIRONNEMENT DE PROGRAMMATION AU CYCLE 3

Rosamaria **CRISCI**

rosamaria.crisci@univ-grenoble-alpes.fr

Hamid **CHAACHOU**

Ahamid.chaachoua@univ-grenoble-alpes.fr

Pierre **TCHOUNIKINE**

pierre.tchounikine@univ-grenoble-alpes.fr

Université Grenoble Alpes, LIG

Résumé

Dans cet article, nous présentons des éléments d'une recherche, en cours, visant à identifier les apports et les limites de l'introduction d'une dimension algorithmique dans l'enseignement des mathématiques au cycle 3 de l'école primaire française. En particulier, nous voulons mettre en avant comment des connaissances mathématiques dont l'enjeu didactique est très important à l'école primaire peuvent vivre dans un contexte algorithmique, et dans quelle mesure un programme informatique peut évoquer des relations (ou des formules) mathématiques. Nous analysons ces questions dans le cadre des séquences didactiques que nous avons élaborées avec l'environnement Scratch.

Mots clés

Algorithmique ; programmation ; enseignement des mathématiques ; Scratch ; école primaire

CONTEXTE GENERAL

Les nouveaux programmes de cycle 3 proposent d'introduire une initiation à la programmation, sans que, cependant, l'informatique soit considérée comme une discipline à l'école primaire. Pour cette raison, nous nous interrogeons si, et dans quelle mesure, des objets qui sont, à l'origine, relatifs à l'algorithmique/programmation peuvent être considérées comme des représentations pertinentes de notions mathématiques. Nos recherches s'inscrivent au sein du projet EXPIRE[1], qui a comme objectif d'étudier les caractéristiques et les apports d'une approche intégrant l'algorithmique/programmation dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques à l'école primaire. Pour cela, nous avons élaboré des séquences d'enseignement autour de certaines notions mathématiques, que nous considérons

1 EXPIRE (EXpérimenter la Pensée Informatique pour la Réussite des Élèves; cf. http:// http://expire.univ-grenoble-alpes.fr/) est une opération soutenue par l'État dans le cadre du volet e-FRAN (Espace de formation, de recherche et d'animation numérique) du Programme d'Investissement d'Avenir, opéré par la Caisse des Dépôts.

fondamentales pour les élèves du cycle 3 : la division euclidienne, l'aire, l'équivalence entre différentes écritures fractionnaires et la décomposition additive.

SEQUENCES D'ENSEIGNEMENT ETUDIEES

Pour chaque notion ciblée, nous avons identifié une séquence d'enseignement ayant les objectifs didactiques définis, vivant dans l'environnement papier-crayon (envisageant parfois la manipulation de matériel tangible), et éprouvée de la communauté de chercheurs et enseignants. Nous avons transposé la séquence dans l'environnement Scratch, en respectant certains principes, explicités dans Chaachoua et al. (2018) dans le cadre de la séquence sur la division. Le principe général de ces séquences est que l'élève doit construire un algorithme/programme qui est une explicitation de la procédure de calcul mathématique attendue et/ou d'une expression mathématique à travailler, ce qui nécessite donc la mobilisation des notions enjeux d'apprentissage.
Dans le Tableau 1, nous pouvons observer en détails la relation qui existe entre le programme visé, son effet, des relations numériques qui peuvent y être associées et, éventuellement, des formules mathématiques.

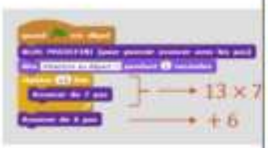
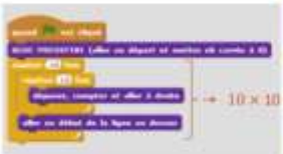
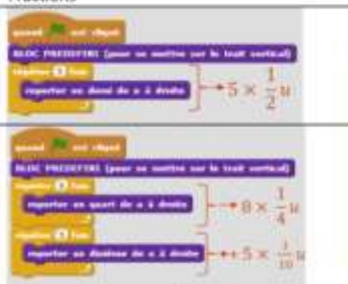
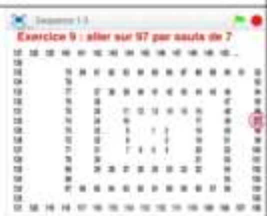
	Division euclidienne	Aire	Fractions	Décomposition
Programme visé				
Effets du programme				
Relation numérique	$97 = 13 \times 7 + 6$	$Aire = 10 \times 10$	$5 \times \frac{1}{2} = 8 \times \frac{1}{4} + 5 \times \frac{1}{10}$	$43\,115 = 4 \times 10\,000 + 3 \times 1\,000 + 1 \times 100 + 15 \times 1$
Formule	$a = b \times q + r$	$A = L \times l$		

Tableau 1 : Lien entre diverses représentations dans les activités proposées.

QUESTIONS DE RECHERCHE ET METHODOLOGIE

Pour chaque séquence, plusieurs programmes permettent d'accomplir un même type de tâches, mais seulement un de ces programmes correspond à la formule/expression attendue[2]. Cela nous fait poser les questions de recherche suivantes :
Q_1 : Est-ce que les élèves arrivent à produire le programme visé ?
Q_2 : Une fois que le programme visé apparait, comment peut-t-on passer du programme produit à la connaissance mathématique visée ?

Dans le but de répondre à la question Q_1, nous avons observé la réalisation de la séquence dans des classes en nous focalisant sur les élèves. En ce qui concerne la question Q_2, nous pouvons dire, grâce à une étude *a priori* des séquences, que les connaissances mathématiques mobilisées dans les séquences restent implicites sans l'intervention de l'enseignant, qui doit les décontextualiser et les institutionnaliser. Pourtant, pour cette question, nous avons observé les gestes et la verbalisation mise en place de l'enseignant pour passer d'une représentation vers une autre.

PREMIERS RESULTATS

Les premières analyses montrent que, en général, les élèves arrivent de façon naturelle à produire les programmes visés au bout de quelques séances, même dans des cas plus complexes tels que la séquence sur l'aire (Triquet, 2018).
Le travail que nous poursuivons consiste à analyser les pratiques de six enseignants autour des processus de décontextualisation et de l'institutionnalisation des savoirs mathématiques, ainsi que de la verbalisation nécessaire pour passer d'une représentation de type algorithmique à une représentation algébrique d'un même concept mathématique.

La transposition de séquences didactiques d'un dispositif tangible à un dispositif de programmation nous amène, d'ailleurs, à nous poser des questions qui n'ont pas été abordées dans ce texte, concernant la place de la manipulation d'objets mathématiques dans ce nouveau dispositif. Nous avons présenté cela, relativement à la séquence sur les fractions, dans Crisci (2018).

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BOSCH, M. & CHEVALLARD, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19(1),* 77-124.

CHAACHOUA, H. (2018). T4TEL Un cadre de référence didactique pour la conception des EIAH. *Pré-Actes Du Séminaire De Didactique Des Mathématiques, Février 2018*, 5-22.

CHAACHOUA, H., TCHOUNIKINE, P. & CRISCI R. (2018). L'algorithmique et la programmation pour la construction du sens de la division euclidienne. Pré-actes du colloque EMF 2018, 12-19.

CHEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19(2),* 221-265.

CRISCI, R. (2018). La manipulation d'objets mathématiques dans le logiciel Scratch. Colloque COPIRELEM 2018, 571-583.

TRIQUET, E. (2018). Utilisation de l'algorithmique pour faciliter l'apprentissage du concept d'aire au cycle 3. *Mémoire de Master MEEF, Université Grenoble Alpes*.

RECURRENCE ET RECURSIVITE : DES CONCEPTS INDISSOCIABLES A L'INTERFACE DES MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE[1]

Nicolás **LEÓN**

nicolas.leon@umontpellier.fr

IMAG, Université de Montpellier, CNRS

Résumé

L'introduction de contenus d'informatique dans les programmes de mathématiques de l'enseignement secondaire français offre une bonne occasion de réfléchir à des questions, relevant d'un point de vue épistémologique et didactique, sur les interactions entre ces deux disciplines. En particulier, les notions de récurrence et de récursivité revêtent un intérêt majeur en raison : de leur ubiquité tant en mathématiques qu'en informatique, des nombreuses difficultés qu'elles suscitent chez les étudiants qui tentent de les apprendre, mais également de la relation dialectique qui les relie. Nous présentons les résultats d'une étude d'épistémologie contemporaine à visée didactique, incluant des analyses d'ouvrages et des entretiens auprès de chercheurs. Nous soulignons l'importance du concept d'induction structurelle qui permet, en un certain sens, de combler l'écart entre la récursivité – entendue comme une méthode de construction de structures – et les schémas inductifs de preuve permettant de démontrer les propriétés de ces structures.

Mots clés

Récurrence, récursivité, informatique, didactique et épistémologie

INTRODUCTION

L'inclusion récente de contenus d'informatique dans les programmes de mathématiques de l'enseignement secondaire français soulève plusieurs questions sur les moyens et les objectifs d'une telle modification : quels concepts sont pertinents pour les mathématiques et l'informatique ? Ces concepts sont-ils vus de la même manière par les deux disciplines ? Quelles sont les conséquences didactiques des éventuels points communs et différences ? Ces questions sont étudiées dans le cadre du projet de recherche ANR DEMaIn (Didactique et épistémologie des interactions entre mathématiques et informatique) à l'Université de Montpellier.

Dans notre thèse, faisant partie de ce projet, nous nous concentrons sur les notions de récurrence et récursivité. Nous les choisissons car (i) elles semblent omniprésentes en mathématiques et en informatique, (ii) elles intègrent généralement les programmes du secondaire ou de première année d'une licence scientifique, et (iii) elles sont problématiques d'un point de vue didactique, comme le montrent les articles de revue de Michaelson (2008) et Rinderknecht (2014).

Nous faisons l'hypothèse que la récurrence et la récursivité sont étroitement liées et que leur étude conjointe pourrait aider à résoudre certains de ces problèmes, une idée étayée par la littérature (voir,

[1] Réalisé avec le soutien financier de l'ANR, projet DEMaIn <ANR-16-CE38-0006-01>.

par exemple Drysdale, 2011). Du point de vue méthodologique, nous adoptons l'approche de l'ingénierie didactique (Artigue, 2014), qui nous mène à effectuer une analyse épistémologique préalable des deux notions. En particulier, nous voulons identifier les différentes conceptions de la récurrence et la récursivité des mathématiciens et des informaticiens. Nous posons donc les questions de recherche suivantes:

1. Quelles significations peut-on trouver pour la récurrence et la récursivité en mathématiques et en informatique?
2. Quelles relations se tissent entre ces deux notions?

METHODOLOGIE

Pour répondre à ces questions, nous procédons en trois étapes:

1. Nous consultons divers ouvrages académiques, exemplifiant les points de vue des mathématiques, de l'informatique ou encore de la logique sur la récurrence et la récursivité. Nous voulons identifier les contextes dans lesquels les mots « récurrence » et « récursivité » sont utilisés, ainsi que les liens que les auteurs établissent entre eux.
2. Nous interviewons des mathématiciens et des informaticiens, afin de mieux comprendre les pratiques en rapport avec la récurrence et la récursivité qui sont parfois moins manifestes dans les livres.
3. Nous développons une caractérisation de la récurrence et la récursivité qui se veut conforme à la littérature académique et à l'usage expert, et adéquate pour une analyse didactique ultérieure.

Les livres consultés pour la première étape ont été sélectionnés en jugeant qu'ils sont représentatifs d'un regard particulier sur la récurrence et la récursivité, que l'étude de ces concepts se déroule tout au long de plusieurs chapitres du livre, et qu'il est souhaitable qu'ils soient cités à plusieurs reprises dans la littérature.

Le choix des experts pour la seconde étape est effectué en fonction de critères de disponibilité et en essayant également de couvrir un large éventail de domaines de recherche. Le format de l'entretien est semi-dirigé, basé sur un questionnaire flexible, afin de pouvoir approfondir les aspects spécifiques de l'utilisation des concepts pouvant apparaître spontanément au cours des conversations avec les chercheurs.

RESULTATS

Nous consignons d'abord que, malgré son omniprésence dans les programmes de l'enseignement secondaire et du début d'université, et son importance pour la preuve des théorèmes de l'arithmétique élémentaire, le raisonnement par récurrence (entendu comme celui que l'on applique sur l'ensemble $\mathbb{N}$) n'est pas souvent utilisé par les chercheurs que nous avons interviewés. Plutôt, ce qu'ils utilisent le plus fréquemment est l'induction dite « structurelle » sur des structures définies récursivement, telles que les graphes, les arbres et les listes, parmi d'autres. Nos observations coïncident avec celles de Drysdale (2011) et nous permettent de nous interroger sur l'efficacité de ce choix curriculaire.

Ensuite, nous constatons que le lien entre le raisonnement par récurrence et la récursivité est subtil et dynamique, ce qui est attesté, par exemple, par le fait que plusieurs auteurs et chercheurs utilisent les mots « récurrence » et « récursivité », ou « récurrent » et « récursif », comme des synonymes dans

certaines situations, tandis que d'autres fixent des limites entre les deux, tout en affirmant qu'ils sont étroitement liés. Il se trouve que la récurrence apparaît de manière plus habituelle dans le contexte de la preuve et la démonstration, alors que la récursivité est associée plutôt à la construction de structures ou au développement d'algorithmes. Dans ce contexte, le concept d'induction structurelle semble éclaircir le rapport entre les structures qui peuvent être définies inductivement ou récursivement, et les schémas inductifs de preuve associés à de telles structures.
Enfin, nous remarquons que les chercheurs qui enseignent à l'université ont tendance à affirmer que leurs élèves rencontrent des difficultés au moment de faire face à la récurrence et à la récursivité, et que ces difficultés semblent intrinsèques aux deux notions. Cependant, leur avis sur la cause de ces difficultés, ainsi que sur la manière la plus idoine d'y faire face, reste très variable.

CONCLUSION

Cette étude épistémologique nous a permis de mieux cerner les relations entre récurrence et récursivité, notamment à l'aide du concept d'induction structurelle, qui permet d'établir la correspondance entre les structures définies récursivement et les schémas inductifs de preuve qui leur sont propres. En outre, nos résultats nous font penser que, si la dialectique entre récurrence et récursivité est mise au cœur de l'apprentissage, cela pourrait favoriser la compréhension des étudiants, une idée que nous développerons dans les étapes suivantes de notre travail de thèse.
Dans les perspectives de l'étude, l'analyse du schéma d'induction bien fondée (un schéma inductif plus général que l'induction structurelle) peut encore apporter un éclairage épistémologique profitable.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ARTIGUE, M. (2014). Didactic engineering in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 159–162). Dordrecht, Netherlands: Springer.

DRYSDALE, R. L. S. (2011). Mathematical induction is a recursive technique. In T. J. Cortina, E. L. Walker, L. S. King, D. R. Musicant & L. I. McCann (Eds.), *Proceedings of the 42nd ACM technical symposium on Computer science education* (pp. 269–274). Dallas, USA: ACM.

MICHAELSON, M. T. (2008). A literature review of pedagogical research on mathematical induction. *Australian Senior Mathematics Journal, 22*(2), 57–62.

RINDERKNECHT, C. (2014). A Survey on Teaching and Learning Recursive Programming. *Informatics in Education, 13*(1), 87–119.

PENSER ET ORGANISER LES ARTICULATIONS ENTRE ABSTRAIT ET CONCRET DANS L'APPRENTISSAGE DES MATHEMATIQUES, DE LA MATERNELLE A L'UNIVERSITE

Viviane **DURAND-GUERRIER**

IMAG univ Montpellier, CNRS, Montpellier, France
viviane.durand-guerrier@umontpellier.fr

Résumé

Dans ce texte, je soutiens la thèse de nature épistémologique selon laquelle la prise en compte explicite des articulations entre abstrait et concret est une nécessité pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques tout au long du curriculum, depuis la maternelle jusqu'à l'université. Je montrerai sur quelques exemples comment la Théorie des Situations Didactiques développée par Guy Brousseau et la Théorie des champs conceptuels développée par Gérard Vergnaud prennent en compte ces articulations et proposent des concepts et des méthodes sur lesquels on peut s'appuyer pour les faire vivre en classe. L'articulation entre la syntaxe, la sémantique et la pragmatique, au sens de Charles Morris, constitue un fil conducteur des analyses.

Mots clés

Enseignement et apprentissage des mathématiques – articulation entre abstrait et concret – syntaxe, sémantique et pragmatique

> Le concret, c'est de l'abstrait rendu familier par l'usage (Langevin, 1950)

I. INTRODUCTION

Ce texte est la version écrite de l'exposé présenté dans le cadre du Colloquium co-organisé par l'ARDM et la CFEM en novembre 2018. Dans cet exposé, je me suis proposée de donner des arguments pour soutenir la thèse de nature épistémologique selon laquelle la prise en compte explicite des articulations entre abstrait et concret est une nécessité pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques tout au long du curriculum de la maternelle à l'université. Ceci va de pair avec la thèse didactique selon laquelle le travail sur les objets, leurs propriétés et des relations qu'ils entretiennent entre eux jouent un rôle central dans l'apprentissage des mathématiques (Dias & Durand-Guerrier, 2005), ce qui revient à mettre au cœur du questionnement didactique la sémantique au sens logique du terme et ses articulations avec la syntaxe et la pragmatique, au sens de Morris (1938) ou Eco (1980) :

- La sémantique concerne les relations entre les signes et les objets auxquels ils réfèrent.
- La syntaxe concerne les règles d'intégration des signes dans un système donné.
- La pragmatique concerne les relations entre les sujets et les signes : les signes perçus en fonction de leur origine, des effets qu'ils produisent, et de leurs usages.

Ce texte est structuré en quatre parties. Dans la première partie, je montre sur l'exemple classique de l'agrandissement du puzzle que la Théorie des Situations Didactiques (Brousseau 1998) offre un levier pour penser le rapport au monde des connaissances mathématiques. Dans la deuxième partie, je soutiendrai la thèse épistémologique et didactique selon laquelle la géométrie de l'école est un élaboration conceptuelle stable permettant d'agir dans et sur le monde. Dans la troisième partie, je montrerai que la construction du nombre à l'école primaire met en jeu une dialectique subtile entre objets concrets et objets abstraits. Dans la dernière partie, je reviendrai sur la construction des nombres réels par Dedekind (1872), mettant en valeur la définition théorique du continu comme formalisation du contenu intuitif de ce concept porté par la droite.

II. LA THEORIE DES SITUATIONS DIDACTIQUES COMME LEVIER POUR PENSER LES RAPPORTS AU MONDE DES CONNAISSANCES MATHEMATIQUES

La Théorie des Situations Didactiques offre une méthodologie de recherche qui permet d'insérer les situations didactiques singulières dans un réseau plus vaste de significations, par la confrontation aux objets (situation d'action), au discours sur les objets (situation de formulation), et à l'insertion dans un réseau de connaissances dans un processus d'argumentation et de preuve (situations de validation et d'institutionnalisation). Nous allons illustrer ceci par l'exemple de l'agrandissement du puzzle dont nous rappelons ci-dessous les consignes dans la version donnée dans Brousseau (1998).

Voici des puzzles. Vous allez en fabriquer de semblables, plus grands que les modèles, en respectant la règle suivante : le segment qui mesure quatre centimètres sur le modèle devra mesurer sept centimètres sur votre reproduction.

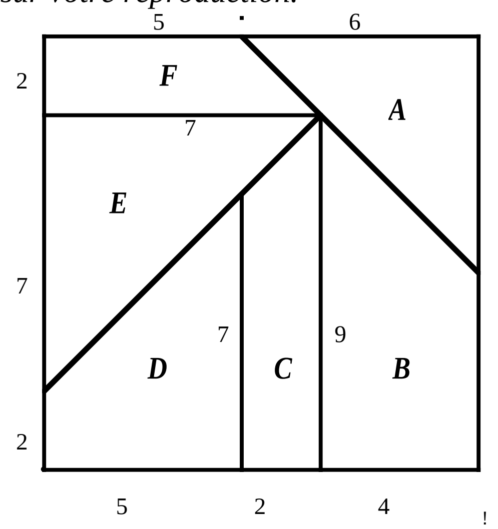


Figure 1 : le puzzle distribué aux élèves (Brousseau, 1998)

La situation s'adresse à des élèves de 9-10 ans. Les élèves travaillent en équipes de 5.
Ils doivent se mettent d'accord sur une méthode commune d'agrandissement, puis ils se séparent, chacun allant agrandir sa pièce suivant la méthode commune retenue. Ceci fait, le groupe se reforme et les élèves essayent de reconstituer le puzzle agrandi avec les pièces réalisées individuellement. Parmi les méthodes susceptibles d'apparaître à ce niveau, il y a une méthode erronée attendue qu'il s'agira de remettre en cause : ajouter 3 cm à chacune des dimensions. Compte tenu de la découpe choisie pour le puzzle, cette méthode ne permet pas de reconstituer le puzzle agrandi. Ceci apparaît assez clairement visuellement ; en effet, outre le fait que les pièces ne s'ajustent pas, avec cette méthode, on ajoute trois fois 3 cm aux côtés verticaux et deux fois 3 cm aux côté horizontaux, si bien que la figure reconstituée n'est plus un carré, contrairement au puzzle initial. Après accord sur ce point, les élèves sont invités à chercher une autre méthode.
Dans cette première partie de la situation, les élèves sont confrontés au fait que la procédure additive ne permet pas de reconstituer le puzzle ; on observe un non-respect des formes, des angles, du parallélisme. Autrement dit, la réalité résiste ; elle disqualifie le modèle additif et permet de se mettre d'accord sur ce que signifie « conserver la forme ». Ceci met en évidence le fait que les mathématiques « ont des comptes à rendre au réel ». La suite de la situation va permettre progressivement d'établir que pour pouvoir reconstituer le puzzle conformément au modèle affiché par le professeur au tableau, la méthode pour agrandir les pièces consiste à multiplier les longueurs de tous les côtés par un même nombre. Ceci se justifie par trois aspects interdépendants : la conservation de la forme qui relève de l'aspect perceptif ; la conservation des angles et du parallélisme qui relève de l'aspect géométrique ; la proportionnalité des mesures de longueurs, qui relève de l'aspect numérique. Ceci est en lien avec des résultats et notions qui seront étudiés plus tard dans le curriculum : le théorème de Thalès, l'homothétie, les similitudes.

III. LA GEOMETRIE COMME ELABORATION CONCEPTUELLE STABLE PERMETTANT D'AGIR DANS ET SUR LE MONDE.

Les questions épistémologiques soulevées par les rapports entre la Géométrie comme théorie et les objets et situations du monde ont fait l'objet d'une abondante littérature. Je me réfère ici à quelques auteurs qui, du fait de mon expérience de chercheuse et de formatrice, sont de nature à éclairer les questions didactiques posées par l'enseignement de la géométrie.
Sinaceur (1991) se référant à Gonseth écrit :

> *« Le sens d'un concept lui vient de la pratique dans laquelle il a été forgé pour des besoins précis. (...). Ainsi la géométrie des Grecs est une dialectique de l'espace physique à travers l'espace sensible » (p. 195)*

Elle ajoute

> *« Cette interpénétration remarquable entre intuition et schématisation, formel et non formel, abstrait et concret était déjà présente dans Les mathématiques et la réalité*[1]*, où Gonseth remarquait (p.300) que les éléments du domaine d'un modèle peuvent être pris dans le « monde des choses » ou « dans le monde des abstraits » (op. cit. p. 200)*

[1] Gonseth (1936)

Giusti (2000) commentant la définition de la sphère donnée par Euclide va dans le même sens :

> *« La sphère est une figure enclose par une demi circonférence qui tourne autour du diamètre jusqu'à revenir au lieu d'où elle était partie » (Euclide Livre X1) « qui évoque plus le tour de l'ouvrier que le compas du géomètre » (op. cit. p. 22)*

Cette relation entre géométrie et monde sensible est l'objet de l'ouvrage de Nicod (1924), intitulé *La géométrie dans le monde sensible*. Au chapitre 4, *Points et volumes*, il écrit :

> *« La géométrie pourrait de même s'accommoder de l'absence d'une valeur simple du point dans la nature, si quelque conception physique complexe se trouvait en jouer le rôle. Mais la géométrie elle-même nous met sur la voie d'une telle conception. Car il n'est pas vrai qu'elle considère nécessairement le point comme un terme simple. On peut concevoir des systèmes qui posent le point comme composé, et composé de termes plus faciles à interpréter dans la nature. » (op. cit. p. 24-26)*

Longo (1997) commentant l'ouvrage d'Alain Berthoz (1997), *Le sens du mouvement,* fait l'hypothèse du rôle crucial de nos expériences spatiales :

> *« Le triangle, le carré, le cercle mathématiques ne sont peut-être pas des « généralisations » (...) de la vision des pierres rondes ou carrées comme nous le proposent les empiristes, mais ils sont des reconstructions à l'aide de la mémoire d'une pluralité d'actes d'expériences spatiales. » (op. cit. p. 207)*

Ces quelques citations font écho aux questions posées par les travaux de Berthelot et Salin (1992) que nous n'avons pas abordés dans cet exposé. Ces réflexions épistémologiques étaient au cœur des travaux que nous avons conduits avec Thierry Dias dans le cadre de ses travaux de DEA et de Doctorat (Dias & Durand-Guerrier, 2005 ; Dias, 2008) autour d'un problème classique en géométrie des solides qui permet de poser en classe la question des relations entre l'Espace et le Plan. La situation est construite autour du problème consistant à déterminer tous les polyèdres réguliers. La définition d'un polyèdre régulier est donnée sous la forme suivante : un polyèdre régulier est un polyèdre convexe, dont les faces sont des polygones réguliers deux à deux superposables (identiques), et tel que à chaque sommet correspond le même nombre de faces. Des pièces en plastique permettant de réaliser des polyèdres sont mises librement à disposition des participants. Ce problème peut être proposé sous cette forme à différents publics – école primaire, collège, lycée, université, formation des enseignants du primaire ou du secondaire, animations mathématiques.

Le point nodal de la situation réside dans l'impossibilité de réaliser un polyèdre avec des faces hexagonales régulières. Ceci en lien avec le fait que l'on peut paver le plan avec des hexagones réguliers. Cette situation pose donc de manière « naturelle » la question des relations entre Espace et Plan. Au cours des nombreuses mises en œuvre que nous avons faites, trois grandes catégories de démarches ont été observées :

- exploration directe avec le matériel,
- allers et retours entre recherche papier/crayon et exploration avec le matériel,
- recherche papier/crayon avant toute exploration avec le matériel, voire refus d'une telle exploration.

La confrontation avec la réalité s'avère le plus souvent cruciale. En effet, une conjecture fréquente émerge au début du travail : *il y a une infinité de polyèdres réguliers, un exactement pour chaque type de polygone régulier.*

Compte tenu du matériel disponible, les tentatives de réaliser un polyèdre régulier à faces hexagonales peuvent permettre de remettre en cause cette conjecture, mais cela prend parfois beaucoup de temps, en raison en particulier de la souplesse relative du matériel, et ce quel que soit le niveau considéré. Il n'est pas rare que certains participants soient convaincus qu'à condition de mettre suffisamment d'hexagones réguliers, on pourra obtenir une courbure

(Dias & Durand-Guerrier, 2005, p. 73). Pour se convaincre de l'impossibilité, certains participants font parfois référence au fait que l'on peut paver le sol avec des hexagones réguliers, ceci en lien avec le fait que la somme des angles au sommet pour trois hexagones réguliers est égale à la somme de quatre angles droits, et donc que l'on ne peut pas sortir du plan (ibid, p. 73-74). Une fois cette impossibilité actée, l'émergence de la condition sur les angles pour pouvoir réaliser un polyèdre convexe apparaît en général. Elle permet de prédire que le nombre maximum de polyèdres réguliers est 5. Le fait de pouvoir les construire garantit leur existence empirique. Cette situation met en jeu une dialectique entre abstrait et concret bien identifiée par Gonseth :

> *« La dialectique en général et celle de l'espace en particulier résolvent le problème fondamental posé dans Les mathématiques et la réalité, celui de la « connexion » entre subjectif et objectif, pensé et donné, rationnel et réel, théorique et expérimental, abstrait et concret » (Sinaceur, 1991, p. 192, à propos de Gonseth)*

Elle illustre le propos de Longo :

> *« La cohérence et l'objectivité de la construction conceptuelle que […] nous proposons, dans ce cas la géométrie, se fonde sur l'efficacité de notre action dans le monde car le monde ses symétries, sa connexion, ses régularités s'imposent à nous ou font résistance quand nous agissons ainsi que quand nous proposons une théorie (…). » (Longo , 1997, p. 207)*

La fin de cette citation attire notre attention sur le fait qu'une théorie géométrique qui ne prendrait pas en compte cette dialectique entre Plan et Espace ne serait pas adaptée pour rendre compte des propriétés de ces objets du micro ou du méso espace que sont les polyèdres, et partant pour les activités associées de nature spatio-géométrique, au sens de Berthelot & Salin (1992). Faire vivre en classe la dialectique entre objets sensibles et objets théoriques de la géométrie est un enjeu essentiel de la scolarité obligatoire si l'on veut préparer les élèves à la diversité des besoins qu'ils sont susceptibles de rencontrer dans la suite de leurs études et dans leur vie professionnelle.

IV. LA CONSTRUCTION DU NOMBRE A L'ECOLE PRIMAIRE : UNE DIALECTIQUE SUBTILE ENTRE OBJETS CONCRETS ET OBJETS ABSTRAITS

Alors que j'étais en poste à l'IUFM de Lyon au début des années 2000, j'ai été chargée de faire des formations sur les relations entre grandeurs et mesures à l'école primaire. Au fil des lectures conduites pour préparer cette formation, j'ai été interpellée par une remarque du Guy Brousseau dans son cours pour la XIème école d'été de didactique des Mathématiques, intitulé *Les grandeurs dans la scolarité obligatoire* :

> *« Les entiers naturels vont apparaître dans la mesure de la grandeur probablement la plus primitive : le cardinal des collections finies. »* (Brousseau, 2001, p. 342)

Il m'est apparu alors que ce point de vue sur les entiers naturels pouvait non seulement éclairer la distinction entre grandeurs et mesures souvent identifiées l'une à l'autre par les professeurs d'école, mais aussi éclairer le processus de construction du nombre à l'école primaire, en mettant en lumière une dialectique entre objets concrets et objets abstraits, que je me propose d'expliciter dans ce qui suit.

Nous sommes à l'école maternelle, dans un atelier autour du nombre ; des objets matériels sont posés sur une table. Notez que des objets posés sur une table ne forment pas en soi une collection. On peut fabriquer une collection en les rassemblant, en les embrassant du regard, en les entourant de fil, en décidant de les comparer à une collection existante, etc. On obtient alors une réalisation concrète de l'objet abstrait « collection ». Construire en acte ce concept est une première étape pour s'engager dans l'étape suivante qui va consister à comparer la taille de deux collections : étant donné deux collections, on peut s'intéresser à la question de savoir si elles contiennent autant d'objets l'une que l'autre ou si une des deux collections contient plus d'objets que l'autre. Pour répondre à cette question, on peut réaliser une mise en correspondance terme à terme, en déplaçant les objets concrets constituant les deux collections pour les mettre en vis à vis. C'est une réalisation concrète qui permet de répondre à une question posée sur des objets abstraits (les collections). Ce protocole est associé à un nouvel objet abstrait (une grandeur) : « taille d'une collection discrète finie », et aux trois relations binaires : « avoir la même taille que » ; « être de plus grande taille que » ; « être de plus petite taille que ».
A l'école maternelle (moyenne et grande section, 4-5 ans), les élèves rencontrent de nombreuses collections, qui deviennent progressivement des objets concrets, au sens où dans de très nombreuses situations, les objets matériels sont appréhendés comme étant organisés en collections, certaines jouant le rôle de collections témoins pour la construction de la mesure associée.
Pour comparer des collections d'objets matériels qui ne sont pas dans le même espace (par exemple dans deux pièces différentes) et que l'on ne peut pas déplacer, on peut utiliser une collection de référence (par exemple des jetons neutres, ou des barres sur une bande de papier) que l'on peut transporter dans l'autre pièce. On a ainsi une collection de référence concrète, qui permet de travailler en acte la transitivité de la relation « avoir la même taille que ». On peut alors s'intéresser à fabriquer des collections ayant la même taille qu'une collection donnée, ou ayant une plus grande/plus petite taille qu'une collection donnée.
Ceci permet plus généralement de travailler, avec des objets concrets, la grandeur « taille d'une collection discrète finie », et d'en faire un objet familier. L'étape suivante (grande section, 5-6 ans) consiste à fabriquer une famille de collections de référence à partir de la suite ordonnée des nombres entiers naturels énoncée oralement (réalisation concrète d'une section commençante de N). La mise en correspondance terme à terme de différentes collections avec des sections commençantes de N permet d'identifier que pour certaines paires de collections, le dernier mot nombre énoncé est le même, ce qui permet de définir des classes de collections. Finalement, il s'agit de comprendre que ce dernier mot nombre énoncé permet de répondre à la question « combien y-a-t-il d'objets dans la collection considérée ? ».
Ce parcours va permettre la mise en place du schème du dénombrement (Vergnaud, 1991) à la fin de l'école maternelle :

- coordination des mouvements des yeux et des gestes du doigt et de la main par rapport à la position des objets,
- énoncé coordonné de la suite numérique,
- cardinalisation de l'ensemble dénombré par un soulignement tonique ou par répétition du dernier mot-nombre prononcé.

Pour Vergnaud, un schème est « l'organisation invariante de la conduite pour une classe de situations donnée ». C'est dans les schèmes qu'il faut chercher les connaissances-en-acte du sujet, qui permettent à l'action d'être opératoire. Comme il le souligne, l'automatisation est l'une des manifestations les plus visibles du caractère invariant de l'organisation de l'action, ce qui n'exclut pas un contrôle conscient (Vergnaud 1990, p. 135-136).
Pour Vergnaud, un schème est composé de règles d'action et d'anticipation, d'invariants opératoires (concepts-en-acte et théorèmes-en-acte, inférences-en–acte) indispensables à la

mise en œuvre du schème (op. cit. p. 142). On peut ainsi identifier des inférences-en-acte dans la mise en œuvre du schème du dénombrement, par exemple :

- si chaque objet a été pointé une fois et une seule, le dernier mot-nombre énoncé permet de répondre à la question « combien ? » (règle d'action, théorème-en-acte) ;
- chaque objet a été pointé une fois et une seule (prémisse) ; ceci suppose la mise en œuvre correcte des deux premières étapes du schème ;
- le dernier mot-nombre énoncé est la réponse à la question « combien ? » (conclusion).

La stabilisation de ce schème à la fin de l'école maternelle va permettre de disposer d'un concept-en-acte de nombre entier naturel et partant de s'engager dans la construction des opérations sur les entiers dans une dialectique entre syntaxe et sémantique.

Dans la construction des entiers naturels à l'école primaire, on peut identifier les trois dimensions, sémantique, syntaxe et pragmatique, mentionnées au début de ce texte. Les collections ; les quantités auxquelles renvoient les écritures ou les collections témoins ou d'autres signes utilisés en lieu et place des nombres ; la comparaison par correspondance terme à terme renvoient à la sémantique. La liste ordonnée des nombres, les règles d'écritures dans un système de numération donné renvoient à la syntaxe. L'utilisation ou non du schème du dénombrement ; la reconnaissance ou non des collections témoins ; la manière d'organiser une collection pour pouvoir la dénombrer ; la manière d'utiliser les nombres entiers ; la mise en relation ou non entre écriture et quantité renvoient à la dimension pragmatique. On retrouve ces trois dimensions dans l'apprentissage des opérations sur les entiers naturels, par exemple, dans le cas de l'addition.

Sémantique : L'addition des entiers est définie comme le cardinal de la réunion de deux collections discrètes finies disjointes. Le résultat est indépendant de la nature des objets en jeu sous réserve que mélanger les objets préserve leur intégrité.

Syntaxe : L'addition est définie comme l'itération du successeur ; cela ne nécessite pas la référence aux quantités. Cette définition permet de fonder les algorithmes dans un système donné de numération.

Pragmatique : L'articulation entre les deux aspects se construit par un va-et-vient entre calculs (syntaxe) et comptage effectif des collections d'objets, incluant les groupements (sémantique). Le comptage effectif permet de valider la commutativité de l'addition d'un point de vue sémantique.

A la fin de l'école primaire, on peut faire l'hypothèse que la fréquentation des nombres entiers naturels et des opérations sur ces nombres a permis de développer une familiarité qui va leur permettre de jouer le rôle d'objets concrets (au sens de Paul Langevin) qui pourront être engagés dans de nouveaux apprentissages. Ceci suppose que les actions mises en œuvre sur ces objets fournissent au sujet des informations suffisamment fiables pour soutenir des conjectures d'une part, permettre leur mise à l'épreuve d'autre part.

A l'école primaire, on l'a vu, ce sont les collections finies qui jouent le rôle de sémantique pour la construction du nombre et des opérations.

A partir du collège et au lycée, comme le souligne Y. Chevallard, c'est le domaine des nombres entiers naturels qui va servir de sémantique pour la construction du calcul littéral et de l'algèbre.

> *« Lorsqu'en classe de seconde, l'enseignant passe de l'observation que 2+3 = 5 et 3+2 = 5 à l'écriture de la relation générale a+b = b+a, il passe alors d'un calcul sur les nombres (entier naturel) à un calcul algébrique (à coefficients entiers naturels). En d'autres termes, un calcul algébrique que nous ne définirons pas plus précisément ici, rend manifeste une syntaxe à laquelle le domaine de calcul associé fournit une sémantique. » (Chevallard, 1989, p. 50)*

C'est ce que l'on peut observer dans la mise en œuvre d'une situation d'introduction au calcul littéral que je présente ci-dessous.

V. UNE SITUATION D'INTRODUCTION AU CALCUL LITTERAL

Cette situation a été développé dans la thèse de G. Barallobres. Elle est présentée et discutée dans Barallobres & Giroux (2008). Il s'agit de trouver le plus rapidement possible la somme de dix nombres consécutifs (entiers naturels). L'organisation de la situation comporte des phases d'action, de formulation et de validation au sens de la théorie des situations didactiques. Les élèves (12-13 ans) sont par équipe de 4 ou 5. Le jeu comporte trois étapes.

- *Étape 1* : celui qui trouve la somme a gagné.
    - Série 1 : 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28
    - Série 2 : 783, 784, 785, 786, 787 788 789 790,791, 792
- *Étape 2* : Temps de réflexion.
  Trouver une méthode pour trouver la somme le plus vite possible quels que soient les nombres proposés par le professeur. Reprise du jeu avec des nombres de plus en plus grands.
- *Étape 3* : Recherche des raisons qui permettent d'expliquer pourquoi la méthode marche pour toute série de dix nombres entiers naturels consécutifs.
- Bilan des méthodes et présentation du travail de chaque équipe.

Lors d'une expérimentation en classe, les chercheurs notent deux méthodes reconnues comme les plus efficaces par les élèves.

La première consiste à multiplier le premier nombre par 10 et à ajouter 45, ce qui peut se traduire par la formule 10n+45, acceptée par la majorité de la classe ; elle s'appuie soit sur la décomposition 19, 19 +1, 19 +2, 19 + 3, …. 19+ 9, soit sur la décomposition additive en dizaine et unité 10 + 9, 20, 20 + 1 etc.. Dans ce dernier cas, l'origine de 45 ne va pas de soi.

La deuxième méthode consiste à ajouter 5 au cinquième nombre de la liste. Pour la série 1 qui commence par 19, on obtient 235 ; le groupe qui l'a produite déclare avoir observé les différentes séries proposées et les résultats obtenus.

Selon le point de vue des auteurs, le milieu construit au cours du travail en équipe par les élèves ayant adopté une stratégie conduisant à la première méthode devrait *a priori* être plus riche pour la validation que celui construit par les élèves ayant produit la deuxième méthode. Cependant, un élève de ce dernier groupe est capable très rapidement de faire le lien entre sa méthode (ajouter 5 à droite du 5ème nombre) et la première méthode sur la série qui commence par 15 (résultat 195) :

> *« E2 : Oui, parce que le cinquième nombre a déjà le « 4 » ajouté, parce que la première méthode est « fois 10 » et après plus 45.*
>
> *Professeur : j'écris l'autre méthode pour vous faire rappeler : le premier nombre $\times$ 10 + 45, dans notre exemple : 15$\times$10+45*
>
> *E2 : le 19 est le cinquième nombre, et il a déjà le 4 ajouté (19 = 15 + 4). Alors il reste juste le 5, mais comme on multiplie par 10, on met juste le 5 en arrière et c'est fini ».*

Pour interpréter ce phénomène, on peut :

- se pencher sur les actions possibles que les élèves peuvent mettre en œuvre pour obtenir le résultat dans la première étape (action sur des objets familiers avec des techniques disponibles)
- faire des hypothèses sur les méthodes auxquelles ces diverses actions sont susceptibles de conduire.

En d'autres mots, il s'agit de tenter de spécifier les différents milieux potentiels pour la validation.

Une méthode pouvant conduire à l'identification de l'invariant consiste à poser l'addition en colonne. En effet, si on le fait plusieurs fois, avec des nombres de deux chiffres, par exemple, le calcul montre que :

- le résultat se termine toujours par 5,
- on a toujours une retenue de 4,
- la somme des « chiffres » des dizaines est égale au premier nombre de la liste,
- le dernier nombre écrit est égal au cinquième nombre de la liste, il est obtenu par l'ajout de 4 à ce premier nombre,
- le résultat final s'écrit donc en concaténant le 5ème nombre de la liste et le chiffre 5 écrit au début.

Cette manière de faire crée un milieu qui favorise a priori le transfert entre les deux méthodes. Cette méthode met en œuvre la dimension sémantique, les nombres entiers et la pratique de l'algorithme de l'addition sur ces nombres fournissant des rétroactions fiables que l'élève peut interpréter.

L'observation des résultats lorsque ceux-ci sont écrits au tableau après chaque jeu peut permettre une identification visuelle de l'invariant sur l'écriture des résultats mis en regard avec les nombres initiaux. Ceci relève de la dimension syntaxique.

Dans les mises en œuvre des adaptations de cette situation que je fais régulièrement en formation des enseignants, ou avec les étudiants de première année de licence, une autre méthode très rapide est fréquemment proposée. Prendre la valeur médiane et la multiplier par 10, comme dans l'exemple ci-dessous :

- 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26
- 17- 18 - 19 - 20 - 21 - 21,5 - 22 - 23 - 24 - 25 - 26
- 21,5 × 10 = 215

Ceci peut se justifier par la compensation des écarts.

On rencontre aussi parfois la méthode dite de « Gauss », consistant à ajouter les nombres en colonnes après renversement de l'ordre des nombres comme ci-dessous :

17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26
26, 25, 24, 23, 22, 21, 20, 19, 18, 17

Ceci conduit à la formule (10 × 43)/2.

D'une manière générale, les élèves et les étudiants disposent de nombreuses méthodes de deux catégories distinctes :

- des méthodes mobilisant la numération décimale de position : poser l'opération en colonne, mise en œuvre de calcul réfléchi ; observation des formes écrites des résultats obtenus ;
- une méthode consistant à décomposer les nombres avec le point de vue successeur.

Les méthodes appartenant à ces deux catégories peuvent faire apparaître la formule générale « 10 fois le premier nombre + 45 ». Il y a une troisième catégorie :

- des méthodes fondées sur la compensation des écarts : médiane, regroupements pouvant faire apparaître la formule : « ajouter le premier et le dernier terme et multiplier par 5 », ou à la manière de Gauss multiplier cette somme par 10 et diviser par 2.

Seules les méthodes de la deuxième et de la troisième catégorie se généralisent à des séries comportant un nombre quelconque de nombres consécutifs (par exemple séries de huit nombres consécutifs).

Choisir de commencer ou non avec des séries de dix nombres consécutifs est ainsi une variable didactique essentielle de cette situation.

Bien qu'elle ait été initialement prévue pour le collège (élèves de 12-13 ans), on peut proposer cette situation à des publics très variés. Au cycle 3 de l'école primaire, soit dans le cadre du calcul réfléchi, soit sous la forme d'un problème de recherche pour dégager des règles

générales, l'objectif n'étant pas d'introduire des lettres. La validation s'appuie sur les résultats de calcul normalement stabilisés à ce niveau. On peut utiliser la calculatrice comme moyen de contrôle ; cela permet de voir que c'est beaucoup moins rapide que le calcul mental.
Dans la mise en œuvre avec les élèves de telles situations de recherche, il faut considérer : des phases d'actions ; de formulation ; de débat et de validation ; avec des allers et retours entre les trois, avant une institutionnalisation. On peut également proposer cette situation au lycée ou en début d'université en relation avec le travail sur les suites arithmétiques pour travailler les relations entre équivalence syntaxique et équivalence sémantique. Elle a aussi été adapté par Nicolas Pelay dans sa thèse pour une utilisation en contexte d'animation scientifique, nourrissant le développement du concept d'ingénierie didactique et ludique (Pelay, 2011).
Le jeu (défi) de la rapidité est ici un moteur de la situation qui permet l'engagement des élèves dans l'action, sous réserve que les valeurs choisies leur permettent de faire des calculs conduisant à des résultats auxquels ils peuvent se fier.
Cette situation peut également être utilisée en formation pour illustrer plusieurs points cruciaux en formation des enseignants, à savoir : l'importance des expériences faites par les sujets pendant la phase de la situation d'action dans l'évolution du milieu pour la validation ; le fait que la situation de formulation ne suffit pas toujours à elle seule à rendre compte des actions des sujets, puisque des actions diverses, mobilisant des connaissances différentes, peuvent conduire à des formulations identiques ; le fait que l'émergence d'une loi générale doit être confrontée à nouveau aux calculs effectifs (résultats de l'action) afin de pouvoir être validée par chacun des sujets.
Cette situation éclaire l'intérêt des notions de variables didactiques et de milieu de la théorie des situations didactiques pour penser et organiser les situations d'apprentissage et met en évidence l'importance des actions effectives sur des objets suffisamment familiers pour que les résultats de ces actions soient fiables pour le sujet et permettent de s'engager dans un débat sur la validation. Sa mise en œuvre en classe est relativement peu coûteuse, ce qui permet d'observer en situation le jeu entre syntaxe, sémantique et pragmatique, mettant en évidence le fait que la multiplication des expériences, en appui sur des objets familiers, des méthodes et des connaissances naturalisées pour le sujet, favorise l'élaboration de nouveaux objets conceptuels et de leurs propriétés, de résultats nouveaux et de leurs preuves.

VI. LE CONTINU. ENTRE INTUITION ET FORMALISATION

La question des relations entre concret et abstrait ne se limite pas aux mathématiques de la scolarité obligatoire. Dans cette dernière partie, je vais aborder la question du continu au sens de l'ensemble des nombres réels. Ce concept est étudié en général à l'université et est source de difficultés résistantes pour de nombreux étudiants (Bergé, 2018, Durand-Guerrier, 2016). Pourtant, comme le rappelle Longo (1999, p.403), nous avons une expérience commune du continu, « celle du tracé d'une ligne sur une feuille de papier, sans lever le crayon. Les points disparaissent dans la trace obtenue ; ils réapparaissent, comme points isolés, lorsque deux lignes se coupent ». Cette intuition du continu sert de référence à Dedekind pour sa construction des nombres réels par les coupures, ce qui en fait une formalisation du contenu intuitif de la droite. Je rappelle ci-dessous brièvement les principaux aspects de la construction des nombres réels par Dedekind par la méthode des coupures.
Dans son essai de 1872, *Stetigkeit und Irrationale Zahlen*, il motive ainsi sa construction :

« Mais il est un fait de la plus haute importance : sur la droite L il existe une infinité de points qui ne correspondent à aucun point rationnel. (…) nous pouvons affirmer : la droite L est infiniment plus riche en individus ponctuels que le domaine R des nombres rationnels en individus numériques.

(…) il devient alors absolument nécessaire d'affiner substantiellement l'instrument R, construit par la création des nombres rationnels, en créant de nouveaux nombres de telle sorte que le domaine des nombres acquière la même complétude, ou disons le tout de suite la même continuité que la ligne droite. » (Dedekind 1872, 2008, p. 69)

Il s'appuie ensuite sur le contenu intuitif du continu de la droite pour introduire la notion de coupure.

« Je trouve l'essence de la continuité (…) dans le principe suivant :

Si tous les points de la droite sont répartis en deux classes telles que tout point de la première classe est situé à gauche de tout point de la seconde classe, alors il existe un et un seul point qui opère cette distribution de tous les points en deux classes, cette découpe de la droite en deux portions. » (p. 72)

Par analogie avec la droite, Dedekind définit alors des coupures dans l'ensemble des nombres rationnels, qu'il note R : deux classes A_1 et A_2 telles que tout nombre a_1 de la première classe est plus petit que tout nombre a_2 de la seconde classe.
Ceci fait, il énonce les deux résultats essentiels ci-dessous :

1. Tout nombre rationnel opère une coupure de R,
2. Certaines coupures de R ne sont pas opérées par des nombres rationnels.

Il donne comme exemple la coupure définie comme suit : soit A_2 la classe des rationnels positifs dont le carré est supérieur strictement à 2, et A_1 son complémentaire dans l'ensemble R des nombres rationnels. Cette coupure n'est opérée par aucun nombre rationnel, car il n'existe aucun nombre rationnel dont le carré est 2. Il montre que ce résultat vaut pour tous les entiers naturels qui ne sont pas des carrés parfaits, ce qui lui permet d'affirmer qu'il existe une infinité de coupures dans l'ensemble des nombres rationnels non opérées par des nombres rationnels. Ceci caractérise ce que Dedekind appelle l'incomplétude ou la discontinuité du domaine R de tous les nombres rationnels. Pour obtenir un ensemble continu, il décide de créer de nouveaux nombres.

« Maintenant, chaque fois que nous sommes en présence d'une coupure (A_1, A_2) non opérée par un nombre rationnel, nous créons un nouveau nombre α, un nombre irrationnel que nous considérons comme complètement défini par cette coupure (…). » (op. cit. p.77)

Le nouveau système R ainsi construit est un ensemble totalement ordonné unidimensionnel, qui possède la continuité :

« IV. Si le système R de tous les nombres réels se subdivise en deux classes R_1, R_2 telles que tout nombre a_1 de la classe R_1 est plus petit que tout nombre a_2 de la classe R_2, alors il existe un nombre et un seul α par lequel est opéré ce partage. » (op. cit. p.81)

L'ensemble ainsi construit est complet au sens où la réitération du procédé des coupures ne produit pas de nouveaux nombres. Il n'y a plus de « lacunes ».
Des recherches en didactique des mathématiques sont en cours depuis plusieurs années sur le concept de complétude et donnent lieu à des collaborations internationales entre la France, le Canada, le Chili, la Tunisie et l'Italie dans le cadre du réseau INDRUM[2],. Les études conduites donnent lieu à des constats partagés. Les étudiants arrivant à l'université ont des

[2] International Network for Didactic Research in University Mathematics: https://hal.archives-ouvertes.fr/INDRUM

connaissances très peu assurées sur les nombres, en particulier sur les nombres réels. Ils ne sont pas préparés à comprendre ce que signifie le fait d'être un corps ordonné complet pour l'ensemble des nombres réels. A l'issue des premiers cours d'analyse, le concept de borne supérieure est peu maitrisé et sa pertinence pour conduire certaines preuves en analyse n'est pas reconnue par les étudiants (Bergé, 2010). La notion d'expansion décimale illimitée reste vague pour de nombreux étudiants en début d'université, en lien avec la distinction infini potentiel/infini actuel. Il faut noter que ceci reste vrai pour un certain nombre d'étudiants titulaires d'une licence de mathématiques préparant le CAPES de mathématiques.
Dans les travaux que nous conduisons avec nos collègues dans le cadre du réseau INDRUM nous faisons l'hypothèse que comprendre le concept de complétude est nécessaire pour une appropriation adéquate des principaux concepts et théorème de l'analyse. Ceci nécessite d'avoir identifié que l'ensemble Q des nombres rationnels et l'ensemble D des nombres décimaux munis de l'ordre habituel sont des ensembles incomplets du point de vue de l'ordre (autrement dit ne sont pas des ensembles continus). Nous faisons également l'hypothèse que la droite numérique et les pratiques autour des représentations graphiques développées dans le secondaire pourraient permettre de proposer des situations permettant aux étudiants de s'appuyer sur ces objets concrets pour construire en acte des connaissances sur le concept d'incomplétude, comme préliminaire à la construction de l'ensemble des réels et du concept de continuité (au sens de la complétude), en écho aux propos de Weyl (1994) qui écrit :

> *"L'axiome de continuité doit se formuler en sorte de dire que par rapport à un segment unité OE, à chaque point P correspond un nombre réel en abscisse et réciproquement."* *(op. cit. p. 114).*

Les situations de points fixes sont des candidats possibles pour de telles situations (Durand-Guerrier, 2016). Ceci pourrait être préparé dès le lycée, en proposant par exemple des résolutions d'équations dans des sous-ensemble incomplets de l'ensemble des nombres réels, entre conjectures dans le domaine graphique et preuves dans le domaine numérique.

VII. CONCLUSION

En février 2017, une artiste en résidence à l'université de Montpellier avait déposé dans le département une affiche sur laquelle elle avait écrit : « Faut-il avoir confiance dans le réel pour tenter l'abstraction ? ». Cette question résonne pour moi avec ce que j'ai essayé de montrer dans cet exposé, à savoir l'importance de la prise en compte d'une dialectique entre abstrait et concret tout au long du curriculum pour une appropriation adéquate des concepts mathématiques.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BARALLOBRES G., GIROUX, J. (2008). Carences et régulations des milieux en situation de validation. IN Actes électroniques du colloque EMF 2006, *L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communauté*s, Sherbrooke, 27-31 mai 2006.

BERGÉ, A. (2010). Students' perceptions of the completeness property of the set of real numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41(2), 217–227.

BERTOZ, A. (1997). *Le Sens du mouvement*, Éd. Odile Jacob.

BROUSSEAU, G. (1998). *La théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage Editions.

BROUSSEAU, G. (2002). Les grandeurs dans la scolarité obligatoire. In Jean-Luc Dorier, Michèle Artaud, Michèle Artigue, René Berthelot, Ruhal Floris (coordonné par), *Actes de la XIe Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*, Corps (Isère) du 21 au 30 août 2001 (pp. 331-348). Grenoble : La pensée sauvage éditions.

CHEVALLARD, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie : perspectives curriculaires : la notion de modélisation *Petit x*, 19, 45-75.

DEDEKIND, R. (1872). *Stetigkeit und Iirrationale Zahlen. Braunschweig: Vieweg*. Traduction Française par H. Benis-Sinaceur, in Richard Dedekind, La création des nombres, Vrin, coll. « Mathesis », 2008.

DIAS, T. (2008). *La dimension expérimentale des mathématiques : un levier pour l'enseignement et l'apprentissage*. (Doctorat). Université Claude Bernard Lyon 1, Lyon, France.

DIAS,T. ET DURAND-GUERRIER, V. (2005). Expérimenter pour apprendre en mathématiques. *Repères IREM*, 60, 61-78.

DURAND-GUERRIER, V. (2016). Conceptualization of the continuumn an educational challenge for undergraduate students. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 2*, 338–361.

ECO, U. (1980). *Segno*. Milan : A. Mondatori. Le signe, 1988 pour la traduction française. Bruxelles : Editions Labor.

GIUSTI, E. (2000). *La naissance des objets mathématiques*. E. Giusti, 1999 trad. par Georges Barthémely. Edition Ellipses coll. L'esprit des sciences.

GONSETH, F. (1936). *Les mathématiques et la réalité – Essai sur la méthode axiomatique*. Alcan, Paris (1936) et Blanchard, Paris (1974).

LONGO, G. (1999). The mathematical continuum: from Intuition to Logic. In J. Petitot et al. (Eds.), *Naturalizing phenomenology* (pp. 401–425). Standford University Press: Stanford.

LONGO, G. (1997). Géométrie, Mouvement, Espace : Cognition et mathématiques. *Intellectica, 1997(2)*, 195-218.

J. NICOD (1924) *La géométrie dans le monde sensible* ? Réédition PUF, 1972.

LANGEVIN, P (1950). *La pensée et l'action*, textes recueillis et présentés par Paul Larenne, préfaces de Frédéric Joliot-Curie et Georges Cogniot. Paris, Les Éditeurs Français Réunis.

MORRIS, C. (1938). *Foundations of the theory of signs*. Chicago: Chicago University Press.

PELAY, N. (2011). Jeu et apprentissages mathématiques : élaboration du concept de contrat didactique et ludique en contexte d'animation scientifique. Thèse de doctorat. Université Claude Bernard Lyon 1.

SINACEUR, H. (1991). La dialectique de l'espace selon Ferdinand Gonseth. In IREM de Lyon (ed.) *La figure et l'Espace*. Actes du 8ème colloque Inter-Irem Histoire et épistémologie des mathématiques (pp. 187-206).

VERGNAUD, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherche en didactique des mathématiques*, *10(2-3)*, 133-169.

WEYL, H. (1994). *Le continu et autres écrits.* Notes introductives et traduction par Jean Largeault, Paris-Vrin, collection Mathesis.

LES ABSTRACTIONS INFORMATIQUES PEUVENT-ELLES CONCRETISER LES MATHEMATIQUES ?

Emmanuel **BEFFARA**

I2M, Université d'Aix-Marseille

emmanuel.beffara@univ-amu.fr

Résumé

Cette présentation propose une réflexion sur le rôle que peut jouer l'informatique dans le rapport aux objets mathématiques que les élèves développent. Depuis longtemps, l'outil informatique permet d'expérimenter avec les objets et notions mathématiques, que ce soit dans le champ de la statistique, de la géométrie ou de l'étude des fonctions, de façon souvent plus concrète que lors d'activités classiques sur papier. Cela peut permettre de développer des intuitions pour aider à comprendre les objets, à condition que l'outil soit compris pour ce qu'il est et ne soit pas perçu comme magique. La science informatique est alors nécessaire pour parvenir à une compréhension suffisante de tels outils. Ce faisant, elle fait découvrir de nouvelles notions et façons de penser, comme la représentation de l'information et l'algorithmique, qui portent leur lot d'abstractions propres. On peut alors se demander si l'irruption de l'informatique est source de plus de concret ou de plus d'abstrait, et si elle peut donner, plus largement, un rapport nouveau aux objets mathématiques.

Mots clefs

Informatique, Calcul, Abstraction, Intuition, Démonstration

I. INTRODUCTION

Les réflexions qui suivent sont celles d'un informaticien théoricien sans expertise sérieuse en didactique, mais leur but est néanmoins de nourrir la réflexion didactique. Mon domaine de recherche est la théorie de la démonstration et la sémantique des langages de programmation, j'ai donc un pied en mathématiques et un pied en informatique fondamentale. Mon expérience d'enseignement se situe en informatique et en mathématiques à l'université, et également en formation initiale et continue d'enseignants pour l'informatique dans le secondaire. Ma préoccupation ici est orientée par la vision particulière que me donne ce parcours : il s'agit d'étudier ce que peut dire l'interaction entre logique mathématique et informatique dans le contexte de l'enseignement.

II. L’INSTRUMENTATION

L’outil informatique n’est en premier lieu qu’un épisode dans la longue histoire de l’instrumentation en mathématiques. En effet, l’emploi d’instruments est aussi vieux que les mathématiques elles-mêmes : bouliers et autres abaques ont été employés depuis l’Antiquité comme moyens de poser les calculs sur les grands nombres, quand la tête ou les doigts ne suffisent plus ; la géométrie classique s’est construite sur l’emploi de la règle et du compas, et de façon plus marginale sur d’autres instruments permettant la construction de figures avec un certaine précision ; de nombreux instruments de mesure ont été développés au fil des siècles et des savoirs mathématiques se sont développés simultanément, afin de concevoir, utiliser et comprendre de tels outils.
Les instruments ont donc joué des rôles très différents, tantôt comme aides au raisonnement exact, dans le cas des abaques, tantôt comme intermédiaires entre le monde physique et les notions abstraites, dans le cas de la mesure des grandeurs que l’on qualifierait aujourd’hui de *continues*, tantôt comme moyen d’expérimenter les objets par la représentation, comme dans le cas des constructions géométriques.
L’informatique est née de ce besoin d’instrumentation, comme une amélioration technologique sur les précédents dispositifs. Il s’agit à l’origine de faire des calculs de façon plus rapide et plus fiable, en automatisant de plus en plus les manipulations, dans le but de s’attaquer à des problèmes demandant de traiter beaucoup de données : calculs numériques, simulations physiques pour l’ingénierie, visualisation de données, puis le calcul formel, etc.

1. L’outil informatique dans l’enseignement

Ainsi, les instruments font partie de la pratique mathématique, il est donc naturel qu’ils aient leur place dans l’enseignement. Il s’agit autant d’apprendre à utiliser les outils de façon pertinente que de s’en servir pour appréhender les notions abstraites, dont certaines sont précisément nées de l’emploi de ces instruments.
L’emploi de calculatrices et de logiciels dans des champs variés comme le calcul numérique, le tracé de courbes, la géométrie dynamique ou encore le calcul formel est omniprésent depuis plusieurs décennies et il est abondamment documenté. Les usages possibles sont nombreux et les énumérer n’est pas le propos ici.

2. Automatismes et automatisation

Néanmoins, les usages permettent de mettre en évidence les étapes successives de l’instrumentation du calcul :

1. Découverte de techniques de calcul,
2. Systématisation de la technique,
3. Développement d’automatismes et d’intuitions associées,
4. Transfert de la tâche automatique vers la machine.

On peut illustrer ce cheminement avec différents phénomènes calculatoires. Pour les opérations élémentaires sur les nombres entiers, les techniques de calcul se sont développées en même temps que les systèmes de numération, puisque chaque façon de représenter les nombres induit des façons particulières de poser les opérations ; la numération de position s’est imposée parce qu’elle offre une efficacité opératoire plus grande que les systèmes qui l’ont précédée. En fin de compte, c’est celle qui a permis le développement des calculateurs mécaniques puis électroniques. Dans un contexte plus avancé, le développement de

techniques de résolution de systèmes d'équations linéaires a conduit à la mise au point du calcul matriciel, dont l'efficacité calculatoire autant que conceptuelle a permis à la fois l'implémentation dans des machines de calculs géométriques et le développement théorique de l'algèbre linéaire.
Ce processus d'automatisation nécessite donc de comprendre les objets mathématiques et leur manipulation *avant* de s'économiser la peine de faire les calculs à la main par l'emploi d'une machine. Cela s'applique particulièrement bien pour le calcul *exact*, dans le domaine du *discret*. Dans le domaine du *continu*, l'affaire est plus subtile, technologiquement et théoriquement.

III. LE RAPPORT AUX OBJETS

Comprendre un objet mathématique avec assez de précision pour automatiser les calculs qui lui sont associés conduit nécessairement à questionner la nature des objets et le rapport que l'on a à eux : ont-ils une existence physique que l'outil permet de manipuler ? Sont-ils des constructions abstraites pour lesquelles l'outil sert à aider l'intuition ? Ou sont-ils des émanations de l'outil, la part abstraite de son fonctionnement, ce qui reste quand on oublie le détail physique de l'objet ?

1. Calcul numérique

La notion de *nombre* est évidemment fondamentale et elle recouvre une grande variété de constructions, de niveaux d'abstraction variés : les entiers naturels, les entiers relatifs, les décimaux, les rationnels, les réels…
S'ils paraissent nets et bien établis au mathématicien moderne, leur transcription informatique n'est pas anodine. Dans le cas des entiers, la représentation est fidèle grâce à l'existence de systèmes de notation efficaces et précis : tant que la question de la quantité de mémoire disponible ne se pose pas, les entiers sont représentés de façon parfaitement fidèle et les calculs se font de façon efficace. La même chose s'applique aux décimaux (qui ont un nombre fini de chiffres après la virgule) et aux rationnels (qui ont une représentation irréductible unique). Dans le cas des nombres que la tradition mathématique appelle *réels*, la question de la précision est incontournable : les nombres à virgule flottante, qui servent au calcul numérique, utilisent une forme de « notation scientifique » et imposent de fixer un nombre de chiffres significatifs. Dès lors, le calcul se fait à une précision fixée et la moindre opération peut nécessiter des arrondis. Ainsi, la machine ne manipule plus l'objet mathématique, mais une approximation de celui-ci. Comprendre et dompter cette approximation est un sujet mathématique en soi et est au cœur des préoccupations de l'analyse numérique.
Cette nécessité d'approximation n'est pas une insuffisance technologique mais un phénomène bien plus fondamental. En effet, il est parfaitement possible de traiter des nombres réels de façon exacte comme on le fait sur papier, au moyen du calcul formel, mais cette élimination de l'approximation se fait au prix de la décidabilité : si système de notation employé est assez expressif pour représenter tous les nombres que l'on peut rencontrer dans la pratique courante (polynômes, fonctions usuelles, solutions d'équations et fonctions implicites), alors il ne peut pas exister d'algorithme capable de déterminer si deux formules quelconques désignent le même nombre réel réel (théorème établi par Richardson (1969)). Autrement dit, l'égalité entre les nombres est hors de portée de l'outil de calcul. Voilà qui questionne le caractère *réel* de ces nombres…

2. Fonctions

Le mot *fonction* se réfère lui aussi à une notion abstraite qui est difficile à appréhender, difficulté qui est renforcée par le fait que le même mot désigne en mathématiques en informatique des objets subtilement différents.
En mathématiques savantes, une fonction est une relation, ce que la théorie des ensembles identifie à un ensemble de couples. Ce n'est bien sûr pas cette notion qui est la plus abordable dans l'apprentissage de la discipline, mais c'est la forme qui s'est avérée la plus efficace dans la pratique mathématique de la démonstration.
À l'inverse, en informatique, et plus précisément dans le contexte de la programmation, une fonction est un procédé de calcul, permettant d'obtenir un résultat étant donné une valeur donnée en entrée. C'est donc une vision nettement opératoire, qui n'est rien d'autre que la version formalisée d'un algorithme.
Ces deux interprétations de la notion de fonction ne sont pas contradictoires, il s'agit plutôt de deux constructions mentales différentes autour de la même idée, répondant à des besoins différents. En effet, la version opératoire correspond à l'idée de calcul et prolonge en quelque sorte la vision « naïve » qui identifie la fonction mathématique à la formule qui la définit, elle permet la manipulation formelle et l'application, alors que la vision ensembliste permet le raisonnement générique et l'approche de la fonction comme « boîte noire » (au sens où la fonction envoie une valeur d'entrée sur une valeur de sortie sans que l'on ait accès à la façon dont cette sortie est obtenue). Il est naturel de se demander où se situe la notion qui se construit dans l'esprit de l'élève et cela dépend certainement du contexte qui justifie l'introduction de la notion.

3. Géométrie

Dans le cas des constructions géométriques, la situation est un peu différente parce que le statut de la figure tracée n'est pas le même que celui du nombre ou de la fonction définis par une formule. En effet, à partir d'un certain niveau, le dessin obtenu par une construction géométrique sur papier est toujours considéré comme une illustration nécessairement imparfaite d'un objet abstrait (même dans les petites classes où le dessin est le domaine d'expérimentation et de mesure, il vient vite l'idée que si l'on dessinait avec toujours plus de soin, on aurait des mesures toujours plus proches d'un résultat idéal).
Dans ce contexte, les logiciels de géométrie dynamique permettent de s'affranchir des difficultés liées à la construction de figures à la main : grâce à l'outil, on gagne en rapidité (une fois acquise l'habitude du logiciel, ce qui n'est pas forcément anodin) et en précision dans les constructions, on peut mesurer précisément pour conjecturer des propriétés, et le fait de pouvoir très facilement faire bouger les objets peut faciliter grandement le développement des intuitions.
La limite de l'utilisation de l'outil serait éventuellement l'illusion de l'exactitude, si la précision accrue donnée par l'outil fait oublier que l'objet manipulé est toujours une approximation puisque là encore, les nombres réels ne peuvent pas être représentés de façon fidèle. Si la géométrie est *l'art de raisonner juste avec des figures fausses*, l'outil informatique n'y change rien, les figures sont simplement un peu moins fausses…

IV. LES ABSTRACTIONS INFORMATIQUES

Ces considérations sur le rapport aux objets issu de la pratique informatique mettent en évidence que, quel que soit l'objet considéré, le traitement informatique impose ses règles : la finitude de l'information traitée et l'effectivité de son traitement, qui imposent une approximation dès que l'objet représenté est infini.

1. L'informatique est aussi une science

Quand on emploie des outils informatiques, on ne peut donc pas faire l'économie d'une étude de l'informatique elle-même, en tant que façon de penser et d'aborder les problèmes, c'est-à-dire en tant que science. Cette étude doit prendre en compte les quatre piliers de la science informatique, pour reprendre l'analyse de Dowek (2011) :

- La machine, comme dispositif mettant en œuvre les procédures effectives de calcul : si une tâche doit être en fin de compte effectuée par une machine, alors il est nécessaire de prendre en compte ce qu'impose la machine ;
- L'information, comme objet traité par la machine : avec un dispositif technique, on ne manipule pas les concepts abstraits mais leur représentation, c'est-à-dire leur description ;
- L'algorithme, comme méthode pour l'élaboration et l'étude des procédés de calcul : confier une tâche à une machine impose de décrire précisément les façons de procéder, parce que l'outil n'a pas accès à l'intuition qui permet à l'humain de mener ses raisonnements ;
- Le langage, comme moyen de formaliser l'information pour en rendre le traitement possible : représenter l'information, qu'il s'agisse du procédé de calcul sous la forme d'un programme ou de l'objet à traiter sous la forme d'une donnée numérisée, impose de définir les règles de représentation sans ambiguïté.

La compréhension de ces quatre aspects et de leurs interactions est un sujet en soi, c'est le cœur de la science informatique. Il s'agit bien là d'une science, avec son versant expérimental et son versant théorique, le second visant à modéliser et prédire ce qui est observé par le premier.
Comme dans toute science, il y a donc dans l'informatique un dialogue constant entre le concret et l'abstrait. Ici, le concret désigne tout ce qui se rapporte à la machine réelle : les programmes, les données traitées et tout ce qui permet d'obtenir des résultats et d'agir sur le monde réel et dans le monde réel, en tenant compte des contraintes matérielles. L'abstrait désigne alors tout l'attirail théorique, de nature fondamentalement mathématique, qui permet la conception et l'étude des systèmes concrets : la logique, l'algorithmique, la théorie de l'information, la théorie de la calculabilité et de la complexité, etc.

2. Représentation de l'information

C'est la notion de *codage* qui fait le lien entre le concret et l'abstrait en informatique : le code est la représentation concrète d'un objet abstrait.
En effet, la machine informatique ne traite pas les objets mathématiques mais leur représentation symbolique. Mais si la machine ne traite que les symboles, l'intention se situe bien du côté de l'objet abstrait. Ce n'est pas le code en soi qui est important, mais bien la signification qu'on lui attribue. Dès lors, il est nécessaire de bien distinguer l'objet de son

écriture. Pour prendre l'exemple le plus simple, le nombre n'est pas la même chose que son écriture en chiffres.

De plus, en dehors du domaine des objets discrets (nombres entiers, textes, graphes, objets combinatoires), la représentation induit une restriction de l'espace des objets. Il s'agit d'une simple raison de cardinalité : un code, d'une façon ou d'une autre, pourra toujours se voir comme une suite finie de chiffres, et l'ensemble des telles suites est dénombrable. L'ensemble des nombres réels étant indénombrable, il est donc impossible de tous les représenter, quel que soit le choix de représentation. L'argument s'applique aussi bien aux fonctions dès que leur domaine de définition est infini et par extension à tout ce qui est *analogique* : signaux (sons, images), mesures physiques…

Quel est alors le rapport entre l'objet mathématique et l'objet informatique censé le représenter ? Lorsque la représentation impose une approximation, l'objet informatique contient moins d'information que l'objet mathématique (ou réel) : il conserve en principe assez d'information pour permettre le traitement, mais il en oublie une partie qui est inaccessible au calcul (par exemple la valeur exacte d'un nombre réel, au-delà des chiffres significatifs de sa représentation approchée). Alors, c'est l'objet informatique qui est une *abstraction* de l'objet mathématique, peut-être dans un sens un peu différent du mot.

3. Enseigner les abstractions informatiques

L'emploi de l'informatique, que ce soit comme science ou comme outil, impose donc de se confronter à ses abstractions, c'est-à-dire à la fois aux notions abstraites qui la fondent comme science et aux mécanismes d'abstraction que mettent en œuvre ses objets. Par conséquent, l'emploi de l'informatique dans l'enseignement nécessite d'enseigner ces abstractions. Le problème n'est pas nouveau et de nombreux travaux ont été entrepris depuis un demi-siècle pour permettre de le faire.

Avec la machine, on peut distinguer deux grands types d'approches, qui correspondent aux deux types d'abstraction évoqués. Pour comprendre les représentations et leur impact, il s'agit des innombrables activités utilisant l'outil (calculatrice ou logiciels), dès lors qu'on porte une attention sérieuse aux effets de cet outil par rapport à la pratique manuelle.

Quant à l'enseignement des notions abstraites de la science informatique, il passe par l'initiation à l'informatique dans des environnement conçus pour cet apprentissage. L'exemple le plus emblématique est le système Logo, qui crée des *micromondes* volontairement simples où expérimenter la programmation pour en acquérir les intuitions et les principes. Ce système a été développé initialement par Papert et son équipe dans les années 1960 (Papert, 1993), reprenant dans le contexte informatique des idées de la psychologie du développement issue notamment des travaux antérieurs de Piaget (1936). Le système Scratch, aujourd'hui en vogue, en est un descendant assez direct.

Il est important de mentionner aussi que l'acquisition des notions abstraites de l'informatique est nettement favorisée par la pratique d'activités dites *débranchées*. Par ce mot, on désigne des activités sans ordinateur, souvent sous forme de problèmes scénarisés, un peu ouverts, dont l'étude met en œuvre des raisonnements et des notions liés à l'algorithmique, la théorie de l'information, etc (on pourra se reporter à Bell et al. (2012) pour une présentation générale de l'idée). La grande vertu de ces activités est de faire aborder les abstractions propres de l'informatique tout en se libérant de la pesanteur de l'outil technique, dans ce qu'il peut avoir d'encombrant intellectuellement : l'utilisation de l'ordinateur impose de se confronter à toutes les dimensions de l'informatique (y compris à des contingences matérielles non essentielles voire antagonistes à la compréhension du contexte, à commencer par le pouvoir de distraction de l'objet) alors que l'activité débranchée se focalise sur la notion qu'elle vise à aborder.

V. CALCUL ET DEMONSTRATION

1. La programmation comme discipline de pensée

Au-delà de son rôle productif très concret, l'activité de programmation induit une certaine façon d'aborder les problèmes, en quelque sorte une « discipline de pensée » très constructive et méthodique, notamment adaptée à la résolution de problèmes même mathématiques. L'approche constructiviste, poussée à son terme, peut faire considérer l'activité mathématique comme une variation sur l'activité informatique :

- On construit les objets mathématiques comme des logiciels : au moyen de briques de base (les fondements logiques, vus comme le langage de programmation des mathématiques) ou d'objets déjà définis (des théories établies, collections de définitions et de propriétés, vus comme des bibliothèques de sous-programmes).
- Les notions et théories mathématiques sont vues comme des interfaces de programmation : je vous dis comment utiliser les choses (quelles définitions, quels axiomes, quels énoncés de théorèmes, etc.) mais pas comment ces choses ont été construites (détails de démonstration, sans influence sur l'emploi des théorèmes).
- Un objectif toujours présent est la généralisation (trouver des théories mathématiques moins contraintes, ayant donc plus de modèles ; réécrire son code pour qu'il soit utilisable dans plus de contextes), avec comme outil la modularité (possibilité de travailler sur une partie d'un développement sans remettre en cause la construction globale).

Cette analogie n'est pas exagérée : la démonstration assistée par ordinateur, qui s'est beaucoup développée ces dernières années, lui donne corps en présentant l'élaboration de théories et de démonstrations (formalisées) comme une forme particulière d'ingénierie logicielle.

2. Stratégies de calcul et de démonstration

La même analogie se poursuit d'un point de vue plus abstrait, en comparant les stratégies adoptées pour calculer et pour démontrer. En effet, si un algorithme est (presque par définition) une stratégie de calcul, une démonstration est en un certain sens une stratégie d'argumentation permettant de convaincre un interlocuteur en étant capable de répondre à tout objection potentielle. Pour préciser la correspondance, on a :

- énoncé mathématique = type d'information = règles d'un jeu,
- démonstration d'un énoncé = programme produisant une information = stratégie d'un joueur,
- exemple d'application = exécution pour une entrée = partie dans le jeu.

Une démonstration peut alors être vue comme un algorithme pour gagner dans une argumentation visant à justifier une assertion mathématique. Cette analogie prend une forme très précise sous le nom de *correspondance de Curry-Howard,* élément central en théorie de la démonstration et des langages de programmation.

De fait, la logique est un fondement commun des mathématiques et de l'informatique, comme l'illustrent ces analogies. En forçant à peine le trait, on peut d'ailleurs reconnaître les quatre piliers de l'informatique dans les travaux des pères fondateurs de la logique moderne :

- Gödel (1931) : théorèmes d'incomplétude, fondés sur l'idée de *codage* de l'information

- Turing (1936) : formalisation mathématique de la notion d'*algorithme*
- Church (1930–) : description du calcul et de l'information par un *langage* formel
- Von Neumann (1945) : notion effective de *machine* universelle, à l'origine des ordinateurs

VI. POUR CONCLURE

Ces réflexions illustrent, du moins je l'espère, qu'il y a entre les mathématiques et la science informatique à la fois un fondement commun dans la logique et un spectre d'approches diverses sans être contradictoires. En plaçant le concret et l'abstrait sur des axes différents, cela donne différents rapports aux objets, qu'il s'agisse d'idées mathématiques ou de phénomènes du monde réel.

Si dans le domaine du discret l'informatique apparaît comme un moyen efficace de prolonger des automatismes, c'est dans le domaine du continu que la différence d'approche devient manifeste : là où les mathématiques classiques privilégient l'abstraction de l'*infini en acte* (les nombre réels comme structure statique, nécessairement indénombrable), le caractère incontournable de l'effectivité en informatique impose la vision plus dynamique de l'*infini potentiel* (les nombres réels comme phénomène émergent dans la manipulation d'approximations à précisions finies).

Cette démarche opératoire donne une importance fondamentale à l'idée de stratégie, qu'il s'agisse de la stratégie de calcul d'un algorithme ou de la stratégie d'argumentation d'une démonstration.

Finalement, les abstractions informatiques peuvent-elles concrétiser les mathématiques ? La réponse n'est évidemment pas binaire. L'informatique, tant comme outil que comme science, donne un sens opératoire aux raisonnements, ce qui peut constituer une façon d'éprouver les objets et donc de contribuer à en donner une compréhension concrète. Plus généralement, cela permet de proposer des cadres d'expérimentation même pour des notions abstraites. La contrepartie est la nécessité pour cela de se confronter aux questions liées spécifiquement à l'écriture des objets et à leur manipulation symbolique, ce qui apporte son lot d'abstractions, d'une nature différente. Peut-être faut-il voir là une sorte de loi de conservation de l'abstrait ?

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BELL, T., ROSAMOND, F., ET CASEY, N. (2012). *Computer Science Unplugged and Related Projects in Math and Computer Science Popularization*. In The Multivariate Algorithmic Revolution and Beyond, H.L. Bodlaender, R. Downey, F.V. Fomin, et D. Marx, éd. (Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg), p. 398-456.

DOWEK, G. (2011). Les quatre concepts de l'informatique. In G.-L. Baron, ́E. Bruillard, & V. Komis. (Éd.), *Sciences et technologies de l'information et de la communication en milieu éducatif : Analyse de pratiques et enjeux didactiques.* (p. 21-29). Consulté à l'adresse https://edutice.archives-ouvertes.fr/edutice-00676169

PAPERT, S. (1993). *Mindstorms: children, computers, and powerful ideas* (2nd ed). New York: Basic Books.

PIAGET, J. (1936). *La naissance de l'intelligence chez l'enfant*. Lausanne: Delachaux et Niestlé.

RICHARDSON, D. (1969). *Some Undecidable Problems Involving Elementary Functions of a Real Variable*. Journal of Symbolic Logic 33, 514-520.

Quels outils pour analyser l'activite de preuve en mathematiques a l'ecole elementaire ? Propositions a partir d'une situation de recherche en CM1/CM2 (9-10 ans)

Cécile **OUVRIER-BUFFET**

Université Paris-Est Créteil – Laboratoire de Didactique André Revuz

cecile.ouvrier-buffet@u-pec.fr

Résumé

Cette présentation reviendra rapidement sur différents outils de la littérature en didactique des mathématiques permettant de concevoir et d'analyser des situations plaçant des élèves d'élémentaire en activité de preuve. Certains d'entre eux seront mis à l'épreuve sur une Situation de Recherche pour la Classe (SiRC), « la Chasse à la bête ». Les productions d'élèves de cycle 3 (9-10 ans) seront ainsi analysées et la portée des outils mis en œuvre discutée. L'activité de preuve, envisageable à l'école élémentaire, pourra, de cette façon, être davantage circonscrite.

Mots clés

Activité mathématique, école élémentaire, situation de recherche, preuve

I. CONTEXTE ET QUESTIONNEMENTS

Les programmes actuels de l'école en France insistent sur la résolution de problèmes : au cycle 1 (3-5 ans) où il est question d'« apprendre en réfléchissant et en résolvant des problèmes », aux cycles 2 & 3 où les compétences « chercher, modéliser, représenter, raisonner, calculer, communiquer » sont transversales et continuent à être travaillées dans le secondaire. Plus précisément, le cycle 2 (6-8 ans) met en avant : « (...) la résolution de problèmes est au centre de l'activité mathématique des élèves, développant leurs capacités à chercher, raisonner et communiquer. Les problèmes permettent d'aborder de nouvelles notions, de consolider des acquisitions, de provoquer des questionnements » et le cycle 3 (9-11 ans) : « (…) On veille aussi à proposer aux élèves des problèmes pour apprendre à chercher qui ne soient pas directement reliés à la notion en cours d'étude, qui ne comportent pas forcément une seule solution, qui ne se résolvent pas uniquement avec une ou plusieurs opérations mais par un raisonnement et des recherches par tâtonnements » (programmes en vigueur et socle commun).
La question ici est de définir ce qui est attendu par l'expression « activité mathématique » et d'envisager les liens avec la preuve du fait des termes « raisonnement » et « recherches ».
En didactique des mathématiques, on peut noter un intérêt pour la preuve depuis longtemps, à tous les niveaux de la scolarité. Il existe cependant relativement peu d'articles spécifiques à la preuve à l'école (6-10 ans).
La volonté de travailler la preuve en élémentaire rejoint diverses préoccupations, dont certaines sont dans le discours public, d'autres dans le discours institutionnel, et d'autres enfin dans la

formation et dans la recherche. Il s'agit d'appréhender d'une certaine façon : les mathématiques du citoyen, la représentation de la discipline « mathématiques », mais aussi la compréhension de ses concepts, la construction et la mise en œuvre d'expériences mathématiques (cela rejoint au niveau international le courant de l'*Inquiry-Based Education*), le passage de l'argumentation à la démonstration, etc.
Nous avançons ici l'idée que l'enseignement d'une activité mathématique centrée sur la preuve est fondamentale dès l'école élémentaire dans une perspective globale de construction de connaissances :

> *"... proof deserves a prominent place in the curriculum because it continues to be a central feature of mathematics itself, as the preferred method of verification, and because it is a valuable tool for promoting mathematical understanding." (Hanna, 1996, p.22).*

Cet article propose d'aborder deux grandes catégories de questions, après un préambule qui consistera à définir « preuve » :
Q1 : quels cadres théoriques existent dans la littérature en didactique des mathématiques au niveau international pour étudier l'activité de preuve à l'école (6-10 ans) ?
Q2 : que permettent ces cadres lors de l'analyse de Situations de Recherche pour la Classe (SiRC) en classe ordinaire ?

II. LA PREUVE EN DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES : QUELQUES ECLAIRAGES ET DEFINITIONS

1. Quand on étudie la preuve en DDM à l'école, qu'est-ce qui est fondamental ?

Dans la littérature, de très nombreux processus, variés, sont étudiés aux niveaux épistémologiques et didactiques, en lien direct avec la preuve :
Explorations d'un problème (induction) ; Etude de cas particuliers, d'exemples ; Formulation d'un énoncé mathématique ; Formulation de conjectures ; Réfutations, contre-exemples – exploration du domaine de validité de la conjecture ; Modélisation (intra- ou extra-mathématique) ; Production de définitions, de théories locales ; Recherche de 'patterns' ; Généralisations ; Raisonnement par analogie ; Utilisation de différentes représentations, cadres, registres etc.
Dans ces travaux, le rôle fondamental de l'enseignant est toujours mis en avant (e.g. Hanna, 1995) : il a en effet une gestion de classe particulièrement complexe lors de situations plutôt ouvertes mettant en jeu des processus de preuve. Il doit alors valider ce qui est acceptable, analyser les arguments des élèves (les élèves se préoccupent davantage de convaincre les autres, ils ne sont pas forcément sur la validité mathématique), identifier la structure de la preuve, inciter, modérer, institutionnaliser etc. (voir par exemple Yackel & Cobb, 1996). Pour cela, l'enseignant doit aussi prendre de la distance par rapport à sa propre conception des mathématiques et à l'image de la rigueur en mathématiques. Pour les élèves, le « pourquoi » n'est pas forcément fondamental comme pour le mathématicien et la question de la vérité et de la validité peut être éloignée de ce que l'enseignant attend.

A l'école, en France, plusieurs travaux se sont penchés sur l'argumentation et la preuve à l'école élémentaire (à titre d'exemples, on peut noter les travaux d'ERMEL : « Vrai ? Faux ? … On en débat ! De l'argumentation à la preuve (cycle 3) », les travaux de Gibel et Bloch sur les fonctions des raisonnements, les niveaux de milieu, la sémiotique peircienne, les recherches de

Georget sur les Situations de recherche et de preuves entre pairs et les communautés de pratiques, les travaux de Hersant sur les problèmes ouverts et l'émancipation des élèves, etc.). On voit ici que les cadres théoriques s'avèrent très variés tout comme les objets d'étude.

Au niveau international, il est possible de dresser un rapide panorama des thématiques traitées au niveau de l'école élémentaire. Deux grandes catégories de travaux se dessinent : **la formation des enseignants de l'élémentaire**, et **l'étude de situations particulières**.
En ce qui concerne la formation des enseignants, les résultats de différents travaux pointent les difficultés maintenant bien connues des enseignants de l'école pour comprendre et produire des preuves (e.g. Barkai, Tsamir, Tirosh, & Dreyfus, 2002 ; Martin & Harel, 1989[1] ; Simon & Blume, 1996). Par ailleurs, le rôle de l'enseignant, devant encourager les élèves à justifier leurs solutions, à généraliser (Maher & Martino, 1999), à faire changer les élèves de représentations/de points de vue, à encourager la classe à être une **communauté mathématique** est repris dans différents travaux à différents niveaux de classe, par exemple :

- En CE1 (7 ans) : Yackel et Cobb (1996) parlent d'élaboration conjointe élèves-enseignant de normes sociomathématiques régulant l'argumentation ;
- En CE2, CM1 (8-9 ans), Stylianides (2007, 2016) souligne l'importance de la dimension sociale et du discours :
- En CM2 (10 ans), Lampert (1990) travaille sur l'observations inductives de 'patterns' et le processus de généralisation et fait un focus sur les interactions sociales, tout comme Zack (1997) qui s'intéresse plus particulièrement aux conjectures, réfutations, éléments de preuves en faisant un focus sur le discours (en lien avec les travaux de Reid, dans la lignée de l'épistémologie de Lakatos[2]).

Les études de situations particulières dans la littérature concernent par exemple des situations « discrètes » (combinatoire, arithmétique,...) et également en géométrie (avec utilisation des TICE). Des études de manuels existent également. L'un des points communs à ces situations réside dans le fait qu'elles sont conduites dans des conditions « favorables » :

> *"One has to keep in mind, though, that the elementary school children were observed in classes carefully planned and taught so as to support mathematical reasoning, argument and justification. Therefore, the studies only show that the transition to deductive reasoning is possible, not that it normally happens. And the studies at the high school and college level show that it often does not happen." (Dreyfus, 1999, p. 96)*

On peut citer à titre d'exemples la classe de Deborah Ball et de formateurs (Stylianides (2007-2016) – CE2-CM1 (8-9 ans)), la classe de Zack (Reid (2002) – CM2 (10 ans)), l'étude longitudinale CP-CM2 (de 6 à 10 ans) avec une formation des enseignants en amont (Maher, Powell & Uptegrove (2010)) qui montre bien les aptitudes des élèves à conduire des preuves dès le CM1 (9 ans) sur des situations de combinatoire.

Il est bien évident que la question qui se pose alors est : et en classe ordinaire ? avec un enseignant « ordinaire » ? Que peut-on mettre en œuvre « efficacement » et comment ?
Ces questions rejoignent bien évidemment la formation initiale et continue des enseignants de l'école.
Il faut reconnaître qu'aujourd'hui la preuve occupe une place marginale à l'école élémentaire, et ce qui est réellement en jeu du point de vue de la recherche et de la formation concerne : les connaissances des enseignants (non spécialistes de la discipline) et l'image qu'ils ont sur la

[1] Pour des enseignants de l'école, la moitié accepte des preuves fausses (Martin & Harel 1989).
[2] Si on se base sur les travaux de Lakatos (1961, 1984), on est bien sur le principe de la découverte avec interactions sociales (convaincre dans un système de personnes, avec des règles, des présupposés connus etc.).

preuve[3] (comme des mathématiques très avancées), le déficit de ressources sur cette question, et le fait qu'il y a encore moins de ressources qui expliquent comment on gère les situations qui mobilisent les preuves. On n'est pas seulement sur les mathématiques du citoyen évoquées plus haut, mais aussi sur la prise de conscience de ce qu'est la discipline et le « faire des mathématiques ».
Mais revenons sur la question des définitions, puisque nous n'avons toujours pas défini le mot « preuve ».

2. Choix de définitions

Pour se mettre d'accord sur l'objet de ce propos, nous proposons de reprendre les définitions établies par Balacheff (1987, p.148s) du fait de leur teneur épistémologique et de la reprise de celles-ci dans de nombreux travaux ultérieurs (par exemple ceux de Stylianides (2007, 2016) sur lesquels nous reviendrons plus loin).
On peut alors considérer la preuve comme *une explication acceptée par une communauté donnée à un moment donné* (un débat est possible pour déterminer un système de validation commun aux interlocuteurs). La démonstration est une forme particulière de restitution de la preuve. Et le raisonnement une *activité intellectuelle explicite ou implicite de manipulations d'informations pour, à partir de données, produire de nouvelles informations*.
Par ailleurs, Balacheff (1987, p.155s) propose trois types de situations avec des frontières non étanches et des contrats spécifiques qui appellent des processus de validation, voire la production de preuves : les preuves pour décider (plutôt du côté de l'action), les preuves pour convaincre (plutôt du côté de la théorie), et les preuves pour savoir. Les preuves pour décider seraient plus particulièrement adaptée à l'école. On peut aussi évoquer les preuves pour expliquer (Hanna, 1995) qui seraient elles plus du côté de l'action et pas de la théorie. Cela nécessite alors de bien faire la distinction entre explications, arguments, preuves en tant que didacticiens, mais aussi, ce qui nous intéresse, de faire les liens entre explications, preuves et compréhension. En effet, preuve et explication sont liées dans le processus de compréhension : il est possible que l'explication aille au-delà de la preuve en justifiant des faits mathématiques au-delà de la seule preuve considérée. Avec la preuve, on augmente la valeur épistémique, mais pas forcément avec l'explication (cf. Sierpinska, 1994). Duval propose trois types de justifications en mettant en avant cette valeur épistémique : explications (descriptives), arguments, preuves[4].
Les fonctions de la preuve sont nombreuses : justifier ou réfuter ; expliquer ; découvrir (inventer de nouveaux résultats) ; systématiser (cela se rapproche de créer des théories locales) ; illustrer de nouvelles méthodes de déduction ; défendre une définition ; défendre une axiomatique ; et aussi communiquer. Ce qui amène la discussion sur les caractéristiques langagières des preuves.
Balacheff (1987) propose deux grands types de preuve : les preuves pragmatiques (dans l'action) véhiculant des règles d'action et des théorèmes-en-acte non prouvés (validité de l'action interrogée, discours non forcément présent) et les preuves intellectuelles, nécessitant un changement de posture (passer à une posture théorique, être capable de décontextualiser, dépersonnaliser, détemporaliser). A l'interface, le caractère générique est étudié. Cela conduit Balacheff (1987, p. 163s) a proposé différents types de preuves : empirisme naïf, expérience cruciale / exemple générique / expérience mentale, calcul sur les énoncés, avec les définitions suivantes :

- Empirisme naïf : « tirer de l'observation d'un petit nombre de cas la certitude de la vérité d'une assertion » (p.163) ;

[3] Une question importante serait à étudier : quelles sont les conceptions des enseignants en élémentaire sur la preuve et son intérêt dans l'enseignement ?
[4] Nous ne rentrerons pas ici dans la distinction entre argumentation et démonstration. Voir Duval & Egret (1993).

- Expérience cruciale : « est un procédé de validation d'une assertion dans lequel l'individu pose explicitement le problème de la généralisation et le résout en pariant sur la réalisation d'un cas qu'il reconnaisse pour aussi peu particulier que possible » (p. 163) ;
- Exemple générique : « consiste en l'explicitation des raisons de la validité d'une assertion par la réalisation d'opérations ou de transformations sur un objet présent non pour lui-même, mais en tant que représentant caractéristique d'une classe d'individus » (p.164-165) ;
- Expérience mentale : "invoque l'action en l'intériorisant et en la détachant de sa réalisation sur un représentant particulier » (p.165).

1. Spécificités du cadre de Stylianides (2007-2016) : continuités ou ruptures ?

Nous choisissons ici de parler plus spécifiquement du cadre théorique construit par Stylianides car ses travaux, conduits sur plusieurs années, se sont centrés sur la preuve à l'école et font l'objet d'un ouvrage de synthèse paru en 2016.
Dans son cadre, Stylianides (2016) fait la différence entre les exemples génériques (au sens de Balacheff, 1987) et les démonstrations (qui sont en fait des expériences mentales au sens de Balacheff, 1987). Pour situer un peu mieux ce que Stylianides (2016) entend par « démonstration », il faut savoir qu'il place les contre-exemples, l'induction, la contraposée, l'exhaustion des cas du côté de la démonstration.
L'objectif premier de ses travaux et de fournir un cadre permettant l'analyse de manuels et le développement professionnel des enseignants. Pour cela, Stylianides (2016) fait des choix de définitions et de typologie de situations qui sont les suivants.

La définition retenue par Stylianides (2016) a pour but d'être compréhensible par les enseignants, d'être suffisamment malléable pour s'adapter à plusieurs contextes scolaires (dont l'élémentaire) et aussi à l'analyse des pratiques enseignantes de l'école (du côté du développement professionnel). Stylianides (2016) souhaite aussi qu'elle intègre l'idée de communauté dans la classe (comme soulignée précédemment). Sa définition est la suivante[5] :
"*Proof* is a ***mathematical argument***, a connected sequence of **assertions** for or against a mathematical claim, with the following characteristics:

1. It uses statements accepted by the classroom community (***set of accepted statements***) that are true and available without further justification
2. It employs **forms of reasoning** (***modes of argumentation***) that are valid and known to, or within the conceptual reach of, the classroom community; and
3. It is communicated with **forms of expression** ***(modes of argument representation)*** that are appropriate (...)". (Stylianides, 2007, p. 291)

Cette définition est reprise dans Stylianides (2016).
Nous reproduisons en annexe (Tableau 1) l'illustration de la définition de preuve proposée par Stylianides (ce qui est en caractères gras ici).

Dans cette définition, et dans la méthodologie d'utilisation de cette définition, on a donc une analyse : des **fondements** (définitions, axiomes, énoncés, théorèmes, règles de calcul établies...), de la **formulation (modes d'argumentation)** (généralisation, déduction de cas particuliers, contre-exemples, par l'absurde...), de la **représentation** (langage ordinaire, algébrique, diagrammes, etc.) et de la **dimension sociale**. Stylianides (2007) déclare que cela est en conformité avec l'activité mathématique.

[5] Il nous semble important, pour situer la définition qui suit, d'indiquer que Stylianides définit également le *reasoning-and-proving* (RP) comme un processus englobant quatre activités : identifier des « patterns », faire des conjectures, fournir des arguments de non-preuve (empiriques (en fait, empirisme naïf) ou rationnels), fournir des preuves.

Par ailleurs, Stylianides (2016) propose deux éléments pour catégoriser les tâches de preuve :

- → Le nombre de cas à traiter (un seul, nombre fini, nombre infini)
- → La fonction de la preuve (justifier ou réfuter)

Il parle également de "The ambiguity of the task’’ (on est en fait là proche du problème ouvert!).

Lorsqu’il est question de gestion en classe par l’enseignant, différents points sont évoqués par Stylianides (2016) qui s’appuie sur les résultats de plusieurs travaux internationaux portant sur l’école cités précédemment dans le présent texte. Nous les reprenons et les complétons ici au regard des spécificités des travaux français. La gestion de classe par l’enseignant de situation mettant en jeu des preuves nécessite ainsi :

- Faire la dévolution de l’activité de preuve
- Inciter les élèves à explorer le problème
- Fermer progressivement un problème ouvert (cela peut se traduire par demander aux élèves de faire des choix)
- Laisser vivre des énoncés produits par les élèves (basés sur des hypothèses ou définitions différentes)
- Inciter les élèves à (re)formuler
- Inciter les élèves à changer de cadre
- Inciter les élèves à changer d’argumentation
- Montrer l’insuffisance de l’empirisme naïf
- Organiser les débats, les relances, les expériences (filtrer et recentrer)
- Gérer les connaissances erronées des élèves
- Anticiper les difficultés des élèves et les remédiations nécessaires (notons que ce point serait à explorer davantage en l’état actuel des recherches en didactique)
- Identifier les points importants dans les procédures (mise en commun) et construire ce qui suit (institutionnalisations locales ou globales)
- *Scaffolding* (au sens de Bruner[6])
- Acceptation de la preuve dans la communauté de la classe (notons que ce point serait à explorer davantage en l’état actuel des recherches en didactique)
- Etc.

On voit ici les nombreuses compétences et connaissances nécessaires à l’enseignant en termes d’activité de preuves (faire la distinction entre expliquer, argumenter, prouver par exemple) et de gestions de situations (au sens de Brousseau). Par ailleurs, on peut s’interroger sur les aspects mathématiques importants pour l’enseignant (mais seront-ce les mêmes pour les élèves ?). Cela conduit à la question suivante : jusqu’à quel point l’explication, la justification, la preuve doit-elle être donnée ? Les redondances sont-elles « autorisées » ? Comment dénoncer les arguments non acceptables et ainsi gérer la validité et la vérité ? Ce ne sont que des exemples mais cela montre bien l’étendu du travail que la recherche doit conduire, en collaboration avec les enseignants.

En pensant que le type de situations est important à définir aussi pour préciser ce que l’on entend par « activité de preuve », nous allons maintenant faire le choix de nous situer dans les Situations Recherche pour la classe (SiRC) et donner une illustration de l’utilisation des modèles précédemment présentés.

6 “the process that enables a child or novice to solve a problem, carry out a task, or achieve a goal which would be beyond his [or her] unassisted efforts.” (Wood, Bruner & Ross, 1976, p. 90).

II. EXEMPLE DE LA CHASSE A LA BETE

1. Une Situation de Recherche pour la Classe (SiRC)

Les objectifs d'une SiRC sont de placer les étudiants dans le rôle d'un chercheur en mathématiques et d'identifier, d'analyser les raisonnements et preuves des étudiants. Cela permet ainsi de montrer *a posteriori* les potentialités des situations (qui sont bien sûr également étudiées *a priori*). Nous reprenons ici la définition d'une SiRC (dérivée de Grenier & Payan, 2003 et Ouvrier-Buffet, 2009). Une SiRC vérifie les propriétés suivantes :

- Inscription dans une problématique professionnelle (proximité avec des questions non résolues)
- Problème/Question initiaux faciles d'accès
- Existence de stratégies initiales (pas de prérequis)
- Plusieurs stratégies d'avancée dans le problème et plusieurs développements possibles
- Critères de fin locaux (une question résolue renvoie à une autre question)

De plus, la gestion de la recherche est effectuée par les élèves et un dispositif de communication de leurs résultats est mis en place.

2. Présentation de la SiRC « La Chasse à la Bête »

Cette SiRC est une variation sur le problème du *Pentamino Exclusion* de Golomb (1994) où le territoire est une grille rectangulaire k × n et l'objectif est de minimiser le nombre de pièges à placer de telle façon à ce qu'aucun pentamino (bêtes de « taille » 5) ne puisse être placé.
Ce problème mathématique est NP-complet[7] mais pour certains cas, des résultats existent.
L'adaptation du problème du *Pentamino Exclusion* sous forme de « La Chasse à la Bête » proposée par l'équipe de Maths à Modeler, a fait l'objet de nombreuses expérimentations, essentiellement en collège, au lycée, à l'université (au sein de Maths à Modeler et de l'IREM de Grenoble – voir la fiche élève de la brochure de l'IREM de Grenoble en Annexe 2). Ces expérimentations ont montré la robustesse de la situation, et la stabilité des procédures. On peut alors s'interroger sur sa pertinence à l'école élémentaire. Cette situation est présentée et développée dans Ouvrier-Buffet (2017) à l'école élémentaire et dans la brochure de l'IREM de Grenoble (2016) pour le secondaire.

[7] Un problème NP-complet, en théorie de la complexité, est un problème de décision, vérifiant deux propriétés (vérifier une solution en temps polynomial et tous les problèmes de la classe NP se ramènent à ce problème par réduction polynomiale).

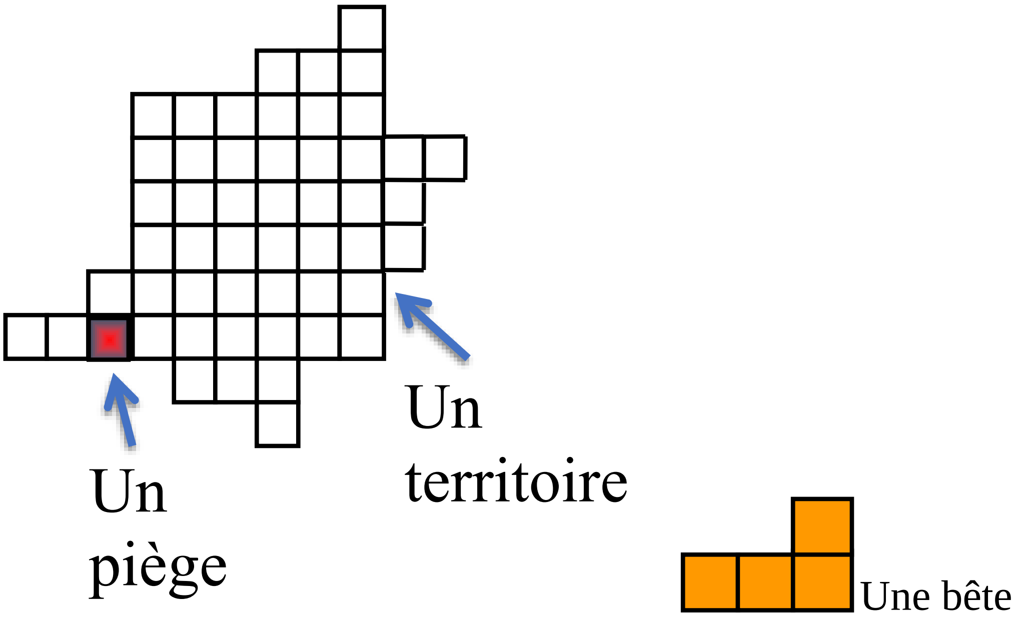


Image 1 : Présentation de La Chasse à la bête : Problème d'optimisation (NP complet) « Quel est le plus petit nombre de pièges (aussi appelés obstacles) pour qu'aucune bête ne puisse se placer sur le territoire ? ».

En termes de variables didactiques, pour la mise en œuvre en classe, des choix ont été faits quant aux bêtes (polyminos « petits »), à leur forme (domino, trimino long, trimino en L), au nombre de bêtes chassées simultanément (seulement un type de bête à la fois), et à la taille et à la topologie du terrain (un carré 5 x 5). Un contrat de recherche spécifique à la classe a été établi, personne n'est détenteur du savoir (ni l'enseignant, ni le chercheur présent dans la classe, ni les élèves).

Plusieurs types de preuves sont envisageables et un travail mathématique sur les conditions nécessaires et suffisantes et sur l'optimisation (au moins/au plus, supérieur ou égal/inférieur ou égal, encadrement) est à conduire (pour plus de détails, voir Ouvrier-Buffet (2017) et brochure IREM (2016)) :

- Déterminer expérimentalement une solution provisoire puis l'améliorer (est-elle optimale ?)
- Techniques de pavages
- Arguments sur les lignes et les colonnes

La mise en œuvre dans une classe double niveau de CM1/CM2 (9-10 ans) a été la suivante, avec un format de 5 séances (45 min) :

Séance 1 – Dévolution du problème et recherche avec les dominos

Séance 2 – Synthèse au tableau et recherche avec les triminos longs

Séance 3 – Mise en commun et confrontation des résultats – institutionnalisations locales (comment prouver que les solutions trouvées sont optimales pour les dominos et triminos longs ? Demande d'arguments et de justifications)

Séance 4 – Recherche avec les triminos en L. Confrontation des résultats : les preuves d'optimalité sont-elles identiques pour les dominos, triminos longs et triminos en L ? (Retrait du matériel et début de la rédaction des solutions par les élèves)

Séance 5 – Ecriture des résultats des élèves (chaque groupe a une responsabilité pour l'écriture d'un article : présentation du problème, présentation des solutions, preuves des résultats obtenus).

Des adaptations ont été réalisées au fil des séances afin de s'adapter aux procédures des élèves.

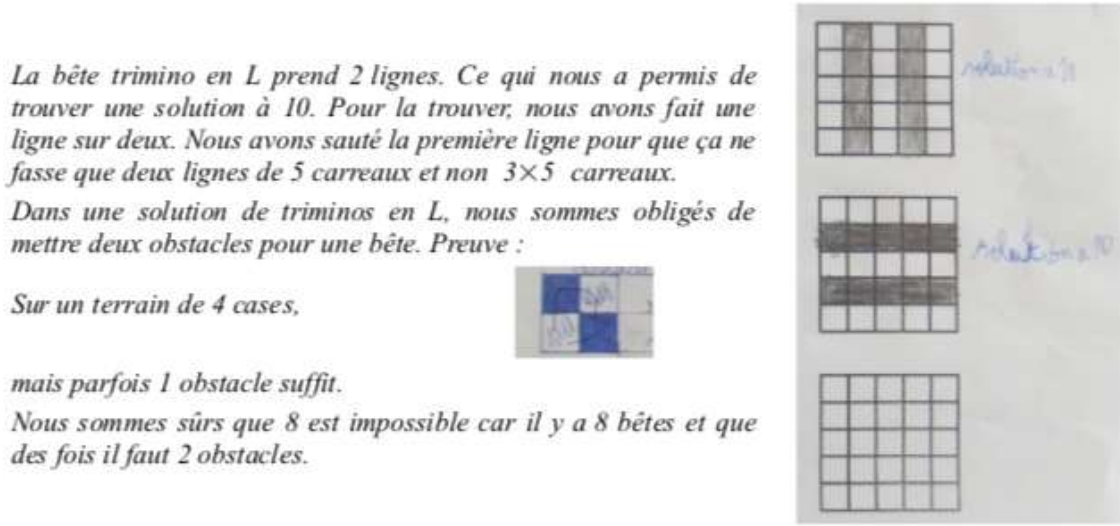
Les actions des élèves se sont concentrées sur la manipulation des pièges en priorité ce qui a apporté peu d'arguments de pavage. Les élèves ont identifié qu'un domino recouvre 2 carrés “Nous avons mis un piège sur deux car la bête occupe 2 cases”. La principale difficulté ici réside dans le problème d'optimisation, sa compréhension et sa reformulation : l'importance de “au moins” a émergé (explicitement durant la confrontation des arguments pour les dominos et triminos) et a été institutionnalisée avec l'aide du chercheur.

Nous reproduisons en Annexe 3 quelques productions d'élèves (issues de Ouvrier-Buffet, 2017).

Nous souhaitons ici aborder la question suivante : peut-on parler de preuves à l'école en CM1/CM2 (9-10 ans) ?
Dans la SiRC de la chasse à la bête, nous avons par exemple obtenu les productions suivantes :
En CM1, les élèves rédigent lors de la demande par le chercheur présent en classe d'explicitation de ce qu'ils ont trouvé :

> *« Que peut-on conclure lorsque l'on recouvre le terrain avec les bêtes ? Quand on chasse les bêtes domino on trouve une solution à 12, c'est la meilleure solution pour l'instant. Les bêtes domino on peut en poser 12 maximum, il faut au moins 1 obstacle par bête, du coup 12 dominos, il faut au moins 12 obstacles. Avec les triminos, 1 obstacle par bête ne marche pas, il faut 2 obstacles par bête. »*

En CM2, nous trouvons aussi des arguments qui ne prennent pas en compte toutes les spécificités de la situation (forme des polyminos étudiés et du territoire) : « On a 25÷2=12,5 avec la bête domino. Cela nous apprend qu'on doit au moins avoir 12 obstacles. »
Pour la bête trimino en L, nous avons, dans un groupe d'élèves, un début de preuve, basé sur la recherche d'un résultat sur un plus petit cas (territoire 2x2), qui est tout à fait intéressant mais qui, faute de temps, n'a pas pu aboutir à une preuve complète.


La bête trimino en L prend 2 lignes. Ce qui nous a permis de trouver une solution à 10. Pour la trouver, nous avons fait une ligne sur deux. Nous avons sauté la première ligne pour que ça ne fasse que deux lignes de 5 carreaux et non 3×5 carreaux.

Dans une solution de triminos en L, nous sommes obligés de mettre deux obstacles pour une bête. Preuve :

Sur un terrain de 4 cases,

mais parfois 1 obstacle suffit.

Nous sommes sûrs que 8 est impossible car il y a 8 bêtes et que des fois il faut 2 obstacles.

Image 2 : Productions d'élèves de CM1/CM2 pour la bête « trimino en L ».

Si nous repensons aux éléments théoriques présentés plus haut, nous pouvons déjà rechercher quelle serait la fonction de la preuve ici pour les élèves. Nous sommes davantage sur la preuve pour justifier mais pas pour (se) convaincre, sauf pour le trimino en L lorsque les élèves s'interrogent : « Ce qui est bizarre c'est qu'on a 8 bêtes et 10 obstacles ».
Le changement de statut de la « preuve », qui n'est à ce stade qu'un processus en germe pour des élèves de cet âge, peut venir de l'évolution de la situation, avec un jeu sur la variable « territoire » (passer par exemple du carré 5 x 5 au rectangle) : ici, la généralisation est à

construire et on est du côté de l'expérience cruciale. Soulignons que les élèves n'étaient pas du tout sur ce genre de questionnement et qu'effectivement aucune expérience cruciale n'a été relevée.
Par ailleurs, on peut noter le caractère générique de certains arguments : c'est le cas par exemple avec les règles d'action et théorèmes-en-acte suivants :
« On a 25/2=12,5 donc il faut 12 obstacles »
« Pour le trimino en L, il faut 2 obstacles par bête ».

On voit ici que les outils théoriques permettent d'identifier des régularités dans les groupes d'élèves et d'envisager des prolongements de la situation voire des caractéristiques pour concevoir et choisir d'autres situations de preuve.
Dans ce type d'expérimentation que peut apporter le cadre de Stylianides ? En fait, il propose une structuration de l'analyse permettant d'identifier l'activité de preuve et d'importer d'autres cadres théoriques (tels ceux de Balacheff (1987), Vergnaud (1991), Gibel (2015), etc. en fonction des objets mathématiques manipulés).
En reprenant les grands items de Stylianides (2017), nous avons ainsi :

- *Foundations* : il s'agit là de techniques de pavage, de procédures de calcul locales, de caractérisation locale d'un couple (nombre de cases du polymino ; nombre de pièges) proposées par les élèves.
- *Formulation (modes of argumentation)* : on peut noter lors de l'expérimentation une difficulté dans l'expression de l'optimisation, un recours au mode déductif, des essais nombreux du fait du matériel présent. Par ailleurs, la question de la généralisation n'a pas été abordée (comme vu précédemment), et il est possible de faire état de règles d'action et théorèmes-en-acte.
- *Representations* : les objets sont donnés via leurs noms mathématiques et des objets tangibles manipulables, le langage ordinaire est utilisé, des dessins sont demandés pour représenter les solutions puis le matériel est enlevé pour inciter les élèves à la rédaction de leurs résultats de recherche.
- *Social dimension* : il s'agit là de la communauté mathématique instaurée en classe. La finalité de la recherche, pour les élèves, doit être réelle et « hors classe » : séminaire auprès d'autres classes ou auprès de chercheurs, animation d'ateliers lors de la fête de la science ou la fête de l'école (défi aux parents), etc. (cf. Maths à Modeler). Comment développer la connaissance mathématique de la communauté « classe » sur un temps court ? Cela ne va pas de soi et pointe de nouveau la nécessité de pouvoir amener les élèves à travailler régulièrement sur des situations consistantes de recherche.

III. CONCLUSIONS ET SUITES A DONNER POUR L'ECOLE

L'exemple abordé dans ce texte montre tout le travail, complexe, à conduire au niveau de l'école à la fois pour caractériser l'activité de preuve, concevoir des outils pour analyser et explorer des situations, construire des formations pour les enseignants. Il est important d'identifier finement des ensembles de situations et des progressions, et peut-être pourrait-on parler de zéro-compétences sur la preuve (à l'image de Lakatos et des zéro-definitions, 1961, 1984) mais cette problématique reste entière.
Par ailleurs, les conceptions des enseignants de l'école élémentaire sur la preuve seraient à déterminer, et là aussi, une étude à grande échelle serait nécessaire, de telle façon non seulement

à identifier leurs conceptions sur la preuve mais aussi à déterminer les marges de manœuvres possibles pour amener les enseignants à faire vivre l'activité mathématique en classe.
On a ainsi plusieurs éléments à travailler au niveau de la recherche, en interaction avec les enseignants, dans un but de formation initiale et continue : les conceptions des enseignants sur la preuve, la construction de problèmes, le format des ressources à destination des enseignants intégrant différentes possibilités pour le rôle de l'enseignant. Ceci en faisant l'hypothèse que les programmes actuels et futurs ont et auront bien comme objectif central une initiation et un approfondissement à l'activité mathématique dans l'enseignement des mathématiques …

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BALACHEFF, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, *18*(2), 147-176.

BARKAIN, R., TSAMIR, P., TIROSH, D. & DREYFUS, T. (2002). Proving or refuting arithmetic claims: The case of elementary school teachers. In A. D. Cockburn, E., Nardi, (Eds), *Proceeding of the 26th International Conference PME* (Vol. 2, pp.57-64). Norwich, UK.

DREYFUS, T. (1999). Why Johnny can't prove (with apologies to Morris Kline). *Educational Studies in Mathematics, 38*, 85-109.

DUVAL, R. & EGRET, M.A. (1993) Introduction à la démonstration et apprentissage du raisonnement déductif. *Repères IREM*, *12*, 114-140.

GIBEL, P. (2015). Mise en œuvre d'un modèle d'analyse des raisonnements en classe de mathématiques à l'école primaire. *Education et didactique, 9*(2), 51-72.

GRENIER, D & PAYAN, C. (2003). Situations de recherche en "classe", essai de caractérisation et proposition de modélisation. In V. Durand-Guerrier & C. Tisseron (Eds), *Actes du Séminaire National de didactique des mathématiques*, pp. 189-205. IREM de Paris 7, ARDM. Paris.

GOLOMB, S.-W. (1994). *Polyominoes - Puzzles, Patterns, Problems and Packings*. Princeton Science Library, Princeton, NJ.

HANNA, G. (1996). The Ongoing Value of Proof. In L. Puig and A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th International Conference for the Psychology of Mathematical Education* (vol.1, pp. 21-34). Valencia.

HANNA, G. (1995). Challenges to the importance of proof. *For the Learning of Mathematics, 15*(3), 42–49.

IREM DE GRENOBLE (2016). *Situations de recherche pour la classe, pour le college et le lycée …et au-delà*. Grenoble : IREM de Grenoble. Disponible en ligne : https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/recherche-action/themes/raisonnement-logique-situations-de-recherche-pour-la-classe/situations-de-recherche-pour-la-classe-498450.kjsp?RH=413148517470877

LAKATOS, I. (1961). *Essays in the Logic of Mathematical Discovery*. Thesis. Cambridge University Library.

LAKATOS, I. (1984). *Preuves et réfutations*. Traduction de N. Balacheff et J.-M. Laborde. Hermann.

LAMPERT, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal*, *27*(1), 29–63.

MAHER, C. A., POWELL, A. B. & UPTEGROVE, E. B. (Eds.) (2010). *Combinatorics and reasoning: Representing, justifying and building isomorphisms.* New York, NY: Springer.

MARTIN, W.G. & HAREL, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*, 41-51.

MARTINO, A. M. & MAHER, C. A. (1999). Teacher questioning to promote justification and generalization in mathematics: What research practice has taught us. *Journal of Mathematical Behavior*, *18*(1), 53–78.

OUVRIER-BUFFET, C. (2009). Maths à Modeler: Research-Situations for Teaching Mathematics. In E. Barbeau, & P. Taylor, (Eds.), *ICMI Study 16, Challenging Mathematics in and beyond the Classroom* (pp. 23-29). Springer.

OUVRIER-BUFFET, C. (2017). La chasse à la bête – Une situation recherche pour la classe. *Grand N, 100*, 5-32.

REID, D. (2002). Conjectures and refutations in grade 5 mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(1), 5–29.

SIERPINSKA, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. Falmer Press, London: UK.

SIMON, M. A. & BLUME, G.W. (1996). Justification in the mathematics classroom: A study of prospective elementary teachers. *Journal of Mathematical Behavior, 15*, 3-31.

STYLIANIDES, A. J. (2007). The notion of proof in the context of elementary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 65*(1), 1–20.

STYLIANIDES, A.J. (2016). *Proving in the Elementary Mathematics Classroom*. Oxford: Oxford University Press.

VERGNAUD, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques, 10*(2/3), 133-169.

WOOD, D., BRUNER, J. S. & ROSS, G. (1976). The role of tutoring in problem solving. *Journal of Child Psychology and Psychiatry, 17*, 89–100.

YACKEL, E. & COBB, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27,* 458–477.

ZACK, V. (1997). You have to prove us wrong: Proof at the elementary school level. In E. Pehkonen (Ed.). *Proceedings of the twenty-first International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 291–298).Lahti, Finland.

ANNEXE 1

Table 2.1 Examples and non-examples of the three components of a mathematical argument mentioned in the definition of proof.

Components of an argument	**Examples**	**Non-examples**[a]
Set of accepted statements	• Definitions • Axioms or "local axioms"[b] • Assumptions • Theorems • Established procedures or rules (e.g., calculation methods)	• Conjectures
Modes of argumentation	• Correct application of valid logical rules of inference such as *modus ponens* and *modus tollens* (cf. *proof by contraposition*) • Correct use of definitions to derive a statement • Systematic consideration of all the cases (finitely many) involved in a situation (cf. *proof by exhaustion*) • Construction of an example that satisfies the conditions of a statement but violates its conclusion (cf. *proof by counterexample*) • Development of a reasoning that shows that acceptance of a statement leads to a contradiction (cf. *reductio ad absurdum* or *proof by contradiction*[c])	• Application of invalid rules of inference such as the inverse and converse "rules" • Acceptance of a statement based on the confirming but inconclusive evidence that is offered by the examination of some cases in the domain of the statement (cf. *empirical arguments*)
Modes of argument representation[d]	• Linguistic (e.g., verbal language) • Physical (e.g., concrete apparatus) • Diagrammatic/pictorial • Tabular (e.g., two-column format) • Symbolic (e.g., algebraic)	

[a] By a "non-example" I mean an instantiation of a component of an argument that would not normally be part of a proof.
[b] In school mathematics, students may take as axioms some statements that a mathematician would treat as theorems; these are often referred to as *local axioms* following Freudenthal's (1973) notion of "local organization." For example, a local axiom may be "the sum of the interior angles of a triangle (on the Euclidean plane) is 180°," which elementary students may use as a starting point to explore and prove different statements (theorems), such as statements about the interior angles of other polygons (Stylianides, 2007b). At a later stage when students develop their mathematical knowledge they can revisit a local axiom and try to prove it (by using, e.g., the same set of axioms as mathematicians), thus turning it into a theorem (de Villiers, 1986).
[c] By *reductio ad absurdum* I mean the method of proof that demonstrates a statement is *false* by showing that its acceptance leads to a contradiction. By *proof by contradiction* I mean the method of proof that demonstrates a statement is *true* by showing that acceptance of its *negation* leads to a contradiction.
[d] Depending on its use—appropriate versus inappropriate—each of these modes of argument representation can be an example or a non-example.

Tableau 0 : Composantes de la définition illustrées par Stylianides (2016, p. 14).

ANNEXE 2

Fiche-élève

maths à modeler

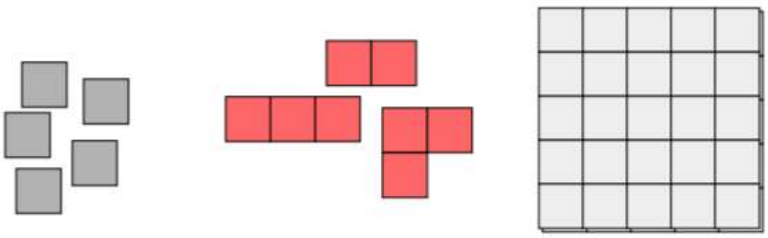
La « Chasse à la bête »

On veut protéger un territoire quadrillé (5×5) d'un nuage de bêtes qui veulent se poser. On dispose pour cela d'un grand nombre de pièges. Les bêtes comme les pièges se posent exactement sur les cases (et non en travers). Si une case est occupée par un piège, aucune bête ne peut se poser en couvrant la case.

Question. Quel est le plus petit nombre de pièges qui protégera le territoire ?

Il y a **trois problèmes distincts**, correspondant à trois sortes de bêtes (elles ne se mélangent pas !), à étudier dans l'ordre ci-après.

problème 1 : avec les dominos
problème 2 : avec les triminos longs
problème 3 : avec les triminos coudés



Pièges   Les trois types de bêtes

Matériel : un plateau 5×5, des pièges (petits carrés), des dominos et des triminos. Commencer par les dominos, puis les triminos longs, enfin les triminos coudés

Image 3 : Fiche-élève (IREM de Grenoble, 2016).

Annexe 3 – Exemples de productions d'élèves de CM1/CM2 sur la situation de la chasse à la bête

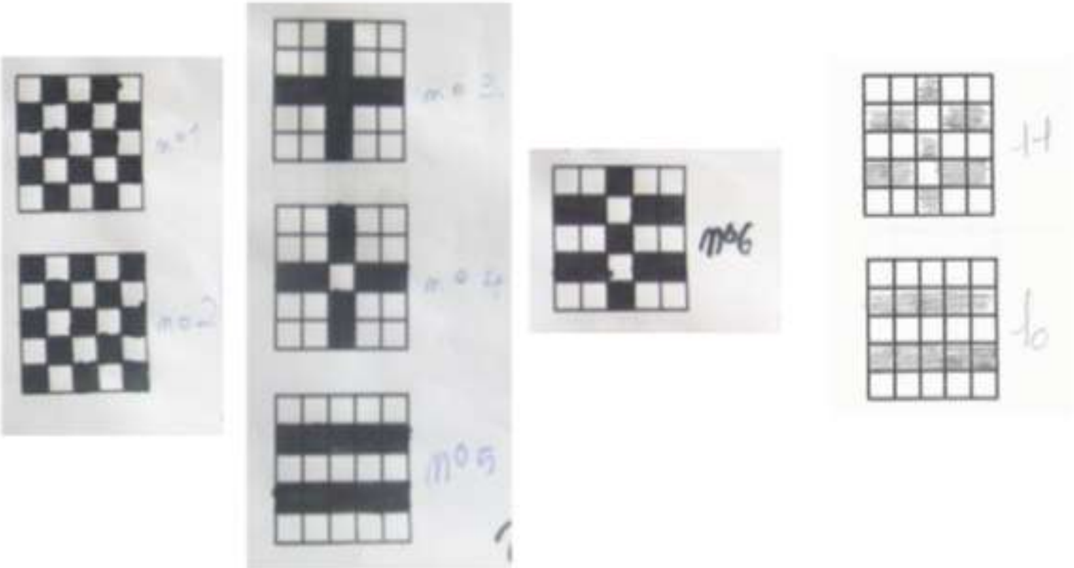


Image 4 : Solutions identifiées par les élèves pour les trois polyominos étudiés.

Affiche CM1	Affiche CM1/CM2
2 solutions : 12 et 13 obstacles. 11 est impossible.	
Idée 1 : les échecs pour colorier les cases en diagonale.	Idée 1 : 11 c'est impossible.
Idée 2 : pour une bête, il faut 1 piège.	Idée 2 : on essaie de mettre le moins possible d'obstacles sur les bords.
Idée 3 : si on recouvre le terrain, on a 12 bêtes.	Idée 3 : $24 \div 2 = 12$ donc 12 obstacles (à discuter).
Idée 4 : pour chasser une bête, il faut AU MOINS[9] 1 piège.	Idée 4 : dans la solution à 13, on a 12 cases blanches, en changeant la coloration on trouve une solution à 12.
Idée 5 : placer les pièges sur chaque ligne.	Idée 5 : on recouvre le terrain avec 12 bêtes et on les chasse une à une et on met 12 obstacles. Quand je veux chasser une bête, combien dois-je mettre d'obstacles ?
Idée 6 : on place 1 piège une case sur deux.	Idée 6 : on place un obstacle 1 case sur 2.
Idée 7 : nombre pair ou nombre impair sur les diagonales[10] $\Rightarrow$ 11 est impossible.	Idée 7 : $25 \div 2 = 12{,}5$ donc 12 obstacles car la bête occupe 2 cases.

Tableau 1 : Affiches réalisées avec les élèves lors de la mise en commun des « idées » sur la bête « domino ».

(Ouvrier-Buffet, 2017, p. 19).

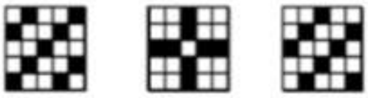
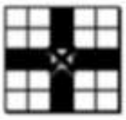
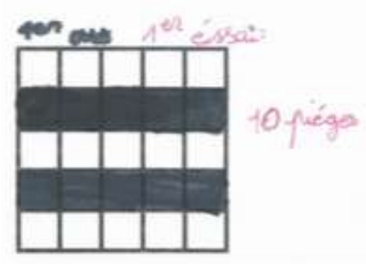
Affiche CM1	Affiche CM1/CM2
Solutions à 8 : sur les diagonales, en croix. Solutions à 9 : sur les diagonales, en croix. Solution à 7 impossible.	1 solution à 9 obstacles et 2 solutions à 8 obstacles :  7 est impossible.
Idée 1 : cela donne une solution à 8 en diagonales.	Idée 5[11] : on peut placer (au plus) 8 bêtes → 8 obstacles (<u>1 obstacle par bête</u>).
Idée 3 : ici on peut placer 8 bêtes.	Idée 6 : on place un obstacle une case sur 3.
Idée 4 : au moins un obstacle pour chasser une bête. Quand on a 8 bêtes, il faut au moins 8 pièges.	Idée 7 : $25 \div 3 \approx 8{,}333\ldots$ 8 obstacles.
Idée 8 : (un peu la même que l'idée 5) Pour empêcher les bêtes de se poser en position horizontale, on place une colonne d'obstacles, et pour les empêcher de se poser en position verticale, on place une ligne d'obstacles (au milieu). On enlève ensuite la case du milieu (qui ne sert à rien). 	Idée 3 : $24 \div 3 = 8$.

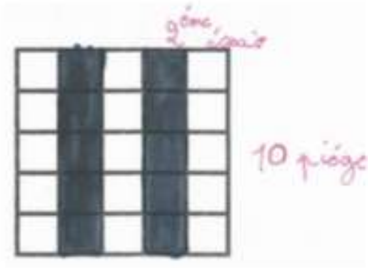
Tableau 2 : Affiches réalisées avec les élèves lors de la mise en commun des « idées » sur la bête « trimino long ».

(Ouvrier-Buffet, 2017, p. 21).

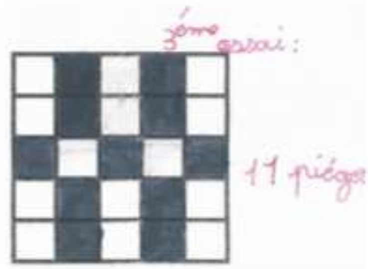
1er essai : nous avons mis les pièges horizontalement (10 pièges).



2ème essai : nous avons mis les pièges verticalement (10 pièges).
Sachant que pour chasser une bête trimino en « L » il faut au moins « 1 » (un) piège voire parfois « 2 » ce qui empêcherait la bête de ne pas du tout pénétrer sur la surface.



3ème essai : nous avons aussi essayé de mettre des obstacles une fois sur deux mais ce serait moins bien car il faut 12 ou 13 obstacles (comme la bête domino). Ce qui est bizarre, c'est qu'on a 8 bêtes et 10 obstacles.
On a fait une autre solution, la voici (3ème carreau[12]).



4ème essai : pour chasser 8 bêtes il faut au moins 8 obstacles. »

Image 5 : Productions d'élèves – rédaction de « preuves » (Ouvrier-Buffet, 2017, p. 22).

LES CROQUIS ET LES REPRESENTATIONS GEOMETRIQUES DONNENT-ILS DU SENS ?

Chantal MENINI
Université de Bordeaux
chantal.menini@u-bordeaux.fr
Pascale SENECHAUD
Université de Limoges
pascale.senechaud@unilim.fr

Résumé

Les croquis que l'on fait dans un coin du tableau se veulent témoigner de l'idée que l'on veut transmettre : l'essentiel à un moment donné, en quelques coups de crayons. Il s'agit alors de représentation codée. Nous en proposons ici une première classification en fonction de leur usage. Nous l'illustrons avec des exemples, en tâchant de montrer la limite de ces représentations ou la difficulté que peuvent avoir les étudiants à les utiliser eux-mêmes.

Mots clés

Cercle trigonométrique, croquis, dessin, ensembles, équation, espace vectoriel, représentation graphique, valeur absolue

I. INTRODUCTION

Ce document présente un travail en cours au sein de la Commission Inter IREM Université [CIIU]. Il s'agit d'analyser et d'essayer de comprendre l'impact des représentations que l'on utilise, quasiment inconsciemment parfois, pour transmettre une idée aux étudiants, plus particulièrement aux étudiants de premier cycle.
À partir d'exemples, nous avons entamé un travail d'analyse de la portée de tels croquis. Nous les avons classés selon l'usage que nous en faisons : croquis comme support d'une activité, croquis comme porteur d'une généralisation possible, ou encore favorisant l'émergence d'une image mentale.
Certains croquis peuvent appartenir à plusieurs classes. Les premiers croquis sur la notion de distance, par exemple, peuvent être abordés comme porteur de l'activité en cours, puis devenir une étape de généralisation de cette notion en topologie. Quant aux images mentales, nous associons plutôt cette dénomination aux croquis qui peuvent correspondre à une définition ou une propriété.
Notre travail s'appuie sur nos séances de cours et de travaux dirigés en première année. Il a pour objectif d'essayer d'accompagner l'introduction de notions abstraites tout en tentant de

mesurer le décalage qu'il peut y avoir actuellement entre ce que nous pensons transmettre et l'interprétation qui peut en être faite par les étudiants.

II. CROQUIS - SUPPORT POUR L'ACTIVITE MATHEMATIQUE

1. Cercle trigonométrique

Le cercle trigonométrique est utilisé comme un outil pour mémoriser des formules trigonométriques. Mais quel est le plus économique, au sens gain de temps immédiat, pour les étudiants concernant des points repérés par θ et $\pi-\theta$ sur le cercle ? Reconnaître une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées et sa traduction sur les coordonnées ou mémoriser directement $\cos(\pi-\theta) = -\cos(\theta)$, $\sin(\pi-\theta) = \sin(\theta)$?

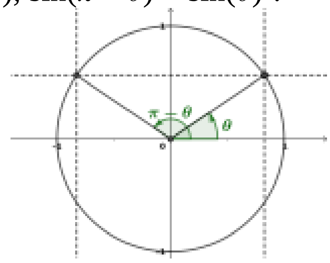


Figure 1 : Le cercle trigonométrique comme outil de mémorisation de formules.

On peut estimer que la symétrie, au moins par rapport aux axes de coordonnées, est naturelle car proche du monde sensible. Cependant viennent s'ajouter les obstacles connus de l'utilisation du cercle trigonométrique pour déterminer les valeurs de fonctions à partir de coordonnées d'un point repéré par une abscisse curviligne. Sans oublier les formules trigonométriques impliquant les angles $\theta + \frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2} - \theta$ pour lesquels les transformations utilisées n'ont jamais été vues.

Au niveau universitaire, en général, les enseignants ne prennent pas le temps de travailler à nouveau l'action des symétries sur les coordonnées et considèrent comme acquis l'enroulement de la droite sur le cercle. Même s'ils ont conscience de cette difficulté nouvelle, ils continuent de représenter le cercle trigonométrique et les symétries afin que les étudiants puissent s'approprier cet outil, qu'il devienne usuel et dans ce sens plus concret.

Le cercle trigonométrique est utilisé ensuite comme support de raisonnement, par exemple quand on cherche le signe de fonctions composées des fonctions trigonométriques. L'exemple suivant illustre, d'après nous, l'incompréhension de ce qu'est l'abscisse curviligne d'un point sur le cercle trigonométrique.

> *Dans le cours de première année (année 2016-2017) de la licence de mathématiques de Limoges, le chapitre introductif sur les courbes paramétrées a pour objectif de revoir les notions d'analyse vues au lycée. Un extrait d'exercice proposé en devoir surveillé est le suivant :*

Soit la courbe C *définie par le système d'équations paramétriques : pour* $t \in \mathbb{R}$

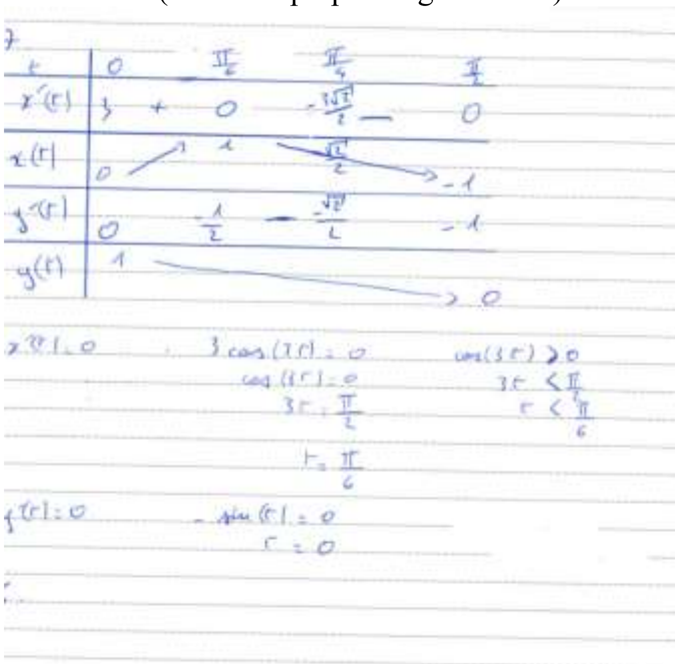
$$\begin{cases} x(t) = \sin(3t) \\ y(t) = \cos(t) \end{cases},$$

(...)

7) Sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *étudier la courbe le plus précisément possible : justifier en particulier la continuité et la dérivabilité des fonctions x et y, calculer les dérivées des fonctions x et y, dresser le tableau de leurs variations.*

Figure 2 : Étude de signes pour une courbe paramétrée.

Ci-après une copie d'étudiant (en classe prépa intégrée au S1).


7)

t	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	3	+	0	−	$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$	−	0
$x(t)$	0	↗	1	↘	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	↘	−1
$y'(t)$	0		$-\frac{1}{2}$	−	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		−1
$y(t)$	1			↘			0

$x'(t) = 0$; $3\cos(3t) = 0$; $\cos(3t) = 0$; $3t = \frac{\pi}{2}$; $t = \frac{\pi}{6}$

$\cos(3t) > 0$; $3t < \frac{\pi}{2}$; $t < \frac{\pi}{6}$

$y'(t) = 0$; $-\sin(t) = 0$; $t = 0$

Figure 3 : Réponse d'un étudiant.

Dans ce rendu, il est clair que l'étude du signe de $\cos(3t)$ n'est pas correctement menée. D'une part la recherche des points où s'annulent l'expression laisse penser que l'annulation d'une expression implique toujours un changement de signe. D'autre part, nous supposons que l'étudiant n'a pas compris que l'abscisse curviligne à prendre en compte est $3t$ et que lorsque t varie entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ alors $3t$ varie entre 0 et $\frac{3\pi}{2}$. À ce stade, il ne nous semble pas indispensable d'avoir recours au cercle trigonométrique comme support visuel. En revanche, l'étude du signe de $\cos(3t)$ et donc, l'étude du signe de l'abscisse d'un point d'abscisse curviligne $3t$, pourrait être correctement menée grâce à la visualisation du cercle trigonométrique.

Afin de faire des révisions sur ce thème nous avons adapté un document de la brochure « le B. A. BA des maths pour Sections de Technicien Supérieur [STS]» de l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques [IREM] de Clermont-Ferrand (Chazal et al., 2010, p. 40-43).

Nous le distribuons sans le travailler en séance, mais en conseillant aux étudiants de le faire chez eux. Cette modalité de travail n'est pas suffisamment efficace pour une partie d'entre eux. Le document pourrait sans doute leur permettre de s'approprier le cercle trigonométrique, s'il était travaillé en présentiel, au lieu de laisser les étudiants libres de le travailler ou non.

2. Distance

Il est nécessaire que la valeur absolue ne soit pas seulement vue comme une fonction mais aussi comme un réel permettant d'exprimer une distance. La représentation de la figure 4, doit être une concrétisation de l'inégalité $|x - a| \leq r$, qui prend tout son sens, pour parler de bande autour d'une valeur quand on parle de limite.

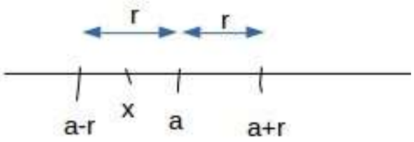


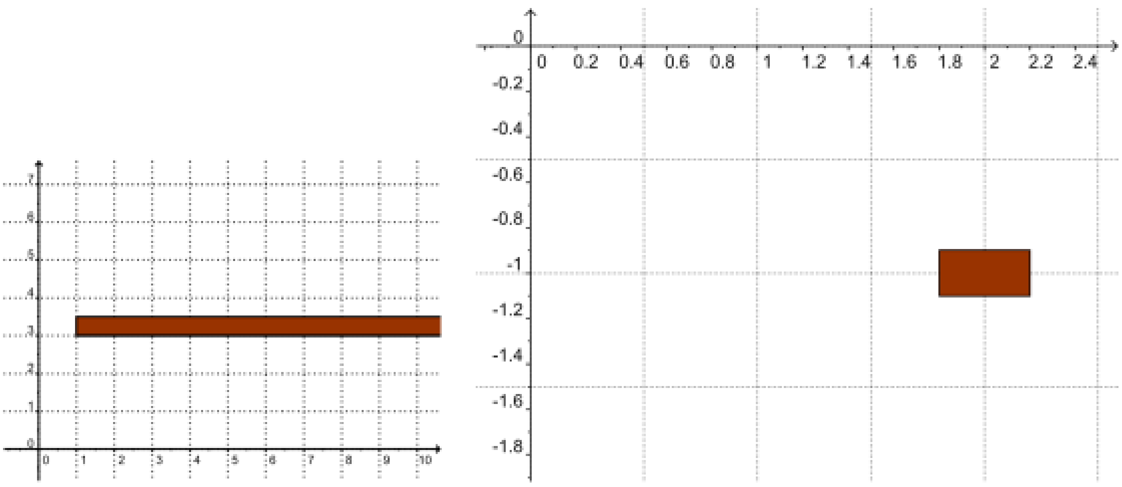
Figure 4 : Inégalité $|x - a| \leq r$.

Ici aussi nous ne pouvons plus nous appuyer sur les programmes de lycée pour cela ; du moins pour le moment puisque les programmes de seconde qui seront en vigueur à la rentrée 2019 réintroduisent la caractérisation de l'intervalle $[a - r, a + r]$ par l'inégalité $|x - a| \leq r$. Contrairement aux transformations sur le cercle trigonométrique, un rapide travail spécifique est fait ici que ce soit à Bordeaux ou à Limoges. Dans les deux exemples suivants (exercices donnés à Bordeaux) nous travaillons le lien entre valeur absolue, distance et intervalles.
La représentation graphique est encouragée par un exercice tel que celui de la figure 5, qui va essayer de préparer aux bandes pour les limites.

1- Représenter graphiquement les ensembles E et F définis par

$$E = \{(x,y) \in \mathrm{R}^2 / x \leq -3 , y \geq 7\} \;\; ; F = \{(x,y) \in \mathrm{R}^2 / |x + 3| \leq 0{,}5 , y \geq 7\}$$

2- Donner la définition des ensembles G et H dont la représentation graphique est



(a) G (b) H

Figure 5 : Exercice préparatoire aux « bandes ».

Le dessin paraît en revanche avoir été oublié dans l'exercice de la figure 6 pour lequel on aurait envie d'ajouter une cinquième colonne ayant pour titre « croquis ».

Compléter le tableau suivant

valeur absolue	*distance*	*intervalle*	*encadrement*
$\lvert x-3\rvert \leq 1$			
	$d(x\,;-4) \leq 2$		
			$-2 \leq x \leq 2$
		$x \in]6,10[$	

Figure 6 : Exercice sur distance et valeur absolue.

Soulignons que le problème n'est pas nouveau et nous proposons des exercices produits par l'IREM de Poitiers en 1976 (Barra, Pensec, Gouin & Burgaud, 1976) en travail préparatoire à la continuité et qui pourraient être exploités. Ils sont accompagnés du « discours méta » :

Pour montrer la continuité d'une fonction f en un point a, il est fréquent (lors de l'étude de la classe de fonctions usuelles) d'écrire

$$|f(x) - f(a)| = |(x - a)g(x)| = |(x - a)||g(x)|$$

où g est une fonction explicitée. Le problème est alors de borner g(x) dans un bon voisinage de a. (...) Géométriquement borner g sur un intervalle ouvert revient à déterminer un papillon dans lequel se trouve le graphe de f « autour de a », en fait c'est déterminer des papillons d'ouverture constante (la borne de g) et d'envergure arbitraire (si ça marche sur un intervalle, ça marche sur un intervalle plus petit). (p. 18-19)

Ils sont présentés comme suit.

Exercice 1 *Montrer en utilisant l'identité* $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$ *que si* $|x| < 1$, *et* $|y| < 1$, *alors* $|x^3 - y^3| < 6$.

Montrer que cette majoration n'est pas très utile (pas très bonne) car sans connaitre l'identité on aurait pu écrire

$$|x^3 - y^3| < \ldots\ldots \text{ (à compléter)}$$

qui donne un renseignement meilleur que le précédent sur l'écart entre x^3 *et* y^3.

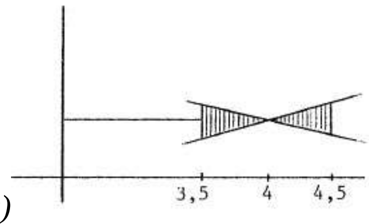
Montrer que l'on peut écrire, toujours sous les mêmes hypothèses que $|x^3-y^3| < 3|x-y|$.

Quels renseignements donne cette majoration ? Peut-on avoir y^3 *proche de* x^3 *? Comment choisir y et x ?*

Exemple : $x = 0{,}5$, *comment suffit-il de choisir y, distinct de x, pour être assuré d'avoir*

$|x^3 - y^3| < 10^{-3}$.

Exercice 2 *Montrer que dans l'intervalle]3,5;4,5[on a* $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{4}\right| < \frac{1}{14}|x - 4|$. *Conséquences sur le graphe de f autour du point 4.*



(Barra et al.,1976, p. 17-19)

III. CROQUIS - PORTEUR DE LA GENERALISATION

1. Espaces vectoriels

Les dessins faits dans le cadre des espaces vectoriels sont une étape pour passer de ce que nous qualifions de concret (droites, plans) à l'abstrait (espace vectoriel, sous-espace vectoriel, famille libre, génératrice ...). Pointons ici un certain nombre d'obstacles à l'apprentissage de l'algèbre linéaire :
-Le changement de registre est depuis longtemps une difficulté à travailler. Par exemple, comment représenter les vecteurs 1, x, $(x-1)^2$? (Rogalski, 1991)
-Plus récemment, apparaissent des difficultés internes à la géométrie. Une droite n'est pas vue comme l'intersection de deux plans, la notion de dimension est rarement mobilisée et des expressions du type *« le vecteur directeur du plan »* sont souvent entendues.
-La signification des équations dans les définitions n'est pas comprise. Les droites ou les plans ne sont pas perçus comme des ensembles de points (x,y,z) vérifiant une ou plusieurs équations algébriques.
-La difficulté de passage entre affine et vectoriel est bien présente, mais nous avons choisi de ne pas l'aborder dans ce texte.

Les travaux sur l'introduction de l'algèbre linéaire à l'université sont nombreux. Nous nous sommes limitées à celui de Dorier (1998) et de Gueudet (2004). L'introduction de l'algèbre linéaire peut être faite de différentes façons. Soit en débutant par une approche structurelle qui est ensuite illustrée par la géométrie ou les systèmes ; soit en prenant la géométrie ou les systèmes comme supports à l'introduction. Notre but n'est pas ici d'analyser ou de préconiser une approche plutôt qu'une autre. Nous pensons que dans tous les cas les représentations peuvent être utilisées même si elles le sont beaucoup moins dans le cas d'une approche structurelle comme l'a étudié Gueudet.
Nous distinguons ici deux parties. La première met l'accent sur l'utilisation de la notion de dimension lors de la mise en œuvre de représentations et la deuxième propose des exercices dont l'objectif est de travailler la représentation des objets, droites et plans en lien avec leurs équations.

Représentations et notion de dimension

Nous pouvons utiliser des croquis pour aider à appréhender la notion de dimension. Nous allons nous appuyer sur une ingénierie développée à Lille, à la fin des années 80 et au début des années 90. Nous n'en reprenons que quelques éléments, pour une vision plus complète des motivations et mises en œuvre consulter Rogalski (1991). Le thème des dessins symboliques avait pour but de faire travailler des propriétés diverses sur dimensions, rangs, sous-espaces, etc. en insistant sur la recommandation « méta » suivante : « *Avant de se lancer dans une question sur des sous-espaces (intersection, espaces engendrés ...), il faut prédire et calculer toutes les dimensions a priori* ». Il tentait aussi de répondre à la question : « *Faut-il, et si oui comment, apprendre à utiliser des dessins symboliques en algèbre linéaire ? »*
Les extraits de l'ingénierie de Lille (Rogalski, 1991) choisis ci-après, le sont car ils nous semblent intéressants à tester avec des étudiants actuels ; ils pourraient s'insérer parmi les exercices dans une progression choisie par l'enseignant.
Ils sont à la fois utiles, porteurs de confusion et se heurtent parfois à la contrainte physique du dessin.

a) Utiles :

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

i) *Si deux vecteurs u et v n'appartiennent pas à un sous-espace F d'un espace E, alors Vect(u,v) ∩ F = {0}.*

ii) *Soit E de dimension n, F ⊂ E, avec dim(F) = p. S'il existe des vecteurs $v_1, v_2, \ldots v_k$ linéairement indépendants de E, qui n'appartiennent pas à F alors $n \geq p + k$.*

(Rogalski, 1991, p. 61)

En dessinant la situation suivante dans un espace *E* de dimension 2 avec deux vecteurs *u* et *v* linéairement indépendants et en prenant pour *F* le sous-espace engendré par *u* + *v*, on trouve un contre-exemple aux deux affirmations.

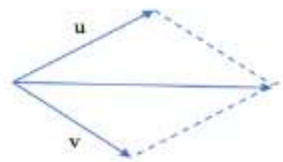


Figure 7 : Un contre-exemple.

b) Difficile voire impossible à dessiner :

Dans le cas des dimensions 2 ou 3 des situations nécessitent déjà des changements de registres pour être représentées. A cela s'ajoute un obstacle lié à la limitation physique du dessin.

Dans l'exercice qui suit l'utilisation de la notion de dimension est de nouveau nécessaire pour tenter une représentation. La question 5, elle, pointe une difficulté technique liée à la perspective.

1) *Dessinez un plan vectoriel P et une droite vectorielle D de $\mathbb{R}^3$, D n'étant pas incluse dans P.*
2) *Dessinez dans $\mathbb{R}^3$, un plan vectoriel P et deux vecteurs u et v non colinéaires, n'appartenant pas à P ; dessiner P ∩ Vect(u,v).*
3) *Dessinez deux plans dans $\mathbb{R}^3$ non confondus, et dessinez une base de chacun d'eux de telle sorte que la réunion des deux bases forme une base de $\mathbb{R}^3$.*
4) *Dessinez deux plans vectoriels P et Q dans $\mathbb{R}^3$, non confondus et une droite vectorielle D distincte de leur intersection ; faire des dessins différents selon les dimensions de D + P et de D + Q.*
5) *Dessinez dans $\mathbb{R}^3$ quatre sous-espaces vectoriels ne se coupant 3 à 3 qu'en 0 et deux à deux selon une droite.*

(Rogalski, 1991, p. 60)

Pour la question 1), aucun prérequis particulier pour tenter un dessin :

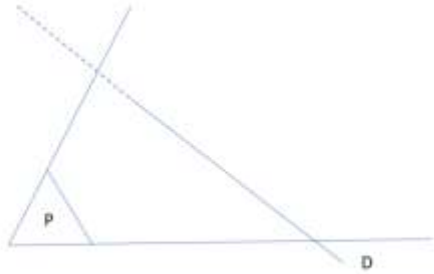


Figure 8 : Réponse à la question 1).

Pour la question 2), pour dessiner deux vecteurs n'appartenant pas à *P*, il s'agit d'utiliser le fait qu'ils engendrent un espace de dimension 2 et que l'intersection de deux plans non confondus est une droite.

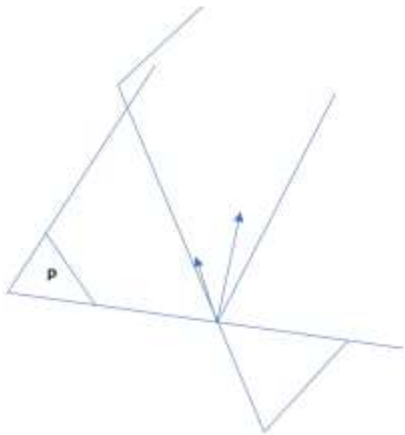


Figure 9 : Réponse à la question 2).

Pour la question 3), l'analyse *a priori* repose sur le fait que les deux plans sont sécants et que pour obtenir une base de $\mathbb{R}^3$, les bases respectives des deux plans contiennent un vecteur directeur de la droite vectorielle intersection.

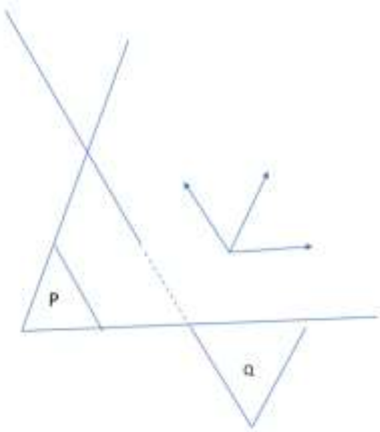


Figure 10 : Réponse à la question 3).

Pour la question 4), la distinction à faire porte sur l'inclusion de la droite *D* dans le plan *P* ou dans le plan *Q* : la dimension de *D* + *P* peut être 2 ou 3.
La question 5) correspond à une situation possible mais très difficile à dessiner.

c) Porteurs de confusions :

C'est le cas des images pour les dimensions 3 ou 4, qui peuvent aboutir à une perte d'information dans le cas de dimensions supérieures ou égales à 4, surtout dues à l'augmentation des dimensions.

> *Dans $\mathbb{R}^4$, on appelle hyperplan un sous-espace de dimension 3, plan un sous-espace de dimension 2 et droite un sous-espace de dimension 1.*
>
> *1) Quelle est l'intersection de deux hyperplans ?*
>
> *2) Si H est un hyperplan et D une droite, quelle est la dimension de H + D ?*
>
> *3) Quelle est l'intersection d'un plan P et d'un hyperplan H ? Faire un dessin dans $\mathbb{R}^3$ qui symbolise la position relative de P et de H. Que perd-on comme information sur les dimensions dans cette représentation ?*
>
> *(Rogalski, 1991, p. 60)*

Pour la question 1) on utilise

$$dim(H_1 + H_2) = dim(H_1) + dim(H_2) - dim(H_1 \cap H_2).$$

Comme $dim(H_1 + H_2) \leq 4$ et $dim(H_1) = dim(H_2) = 3$ on obtient que l'intersection de deux hyperplans de $\mathbb{R}^4$ est un espace de dimension supérieur ou égal à 2 et donc c'est soit un plan, soit un hyperplan.

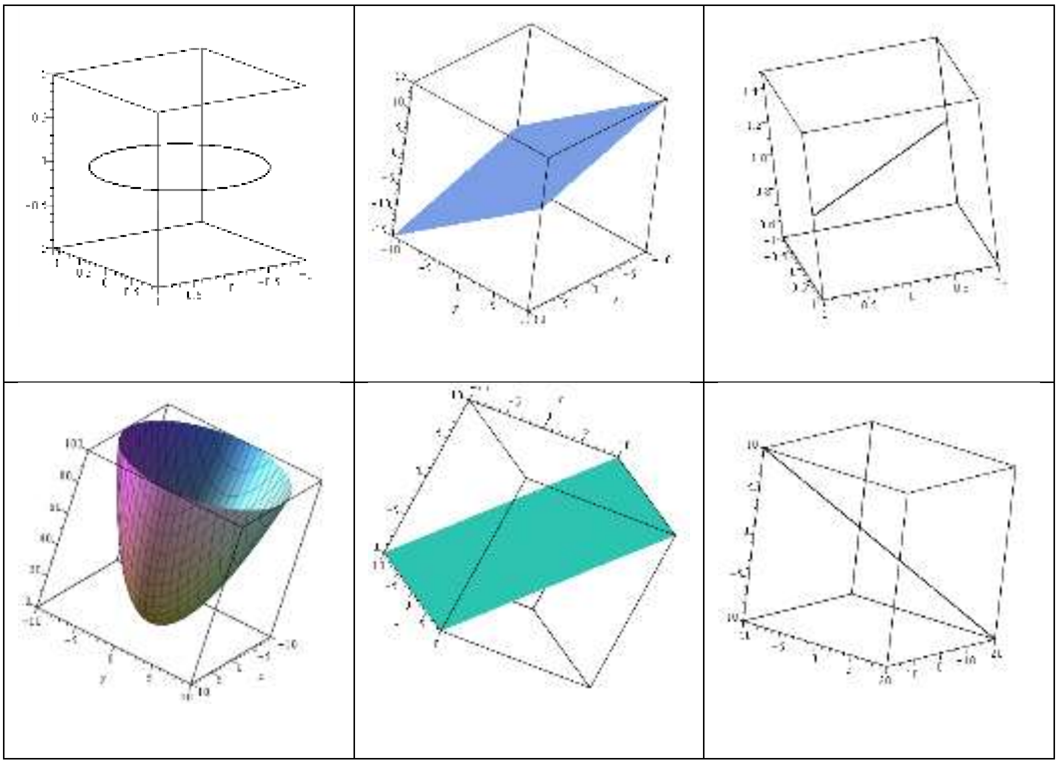
Pour la question 2) avec la même formule, tout dépend de l'intersection de H et D. La dimension sera 3 si $D \subset H$ et 4 dans le cas contraire.

Pour la question 3) sur le dessin on ne pourra pas représenter les différents cas possibles. En effet, on a $dim(P + H) = 5 - dim(P \cap H)$ et donc $dim(P \cap H) \geq 1$, l'intersection peut-être une droite ou un plan. Il est demandé une représentation dans $\mathbb{R}^3$. En conséquence, on peut alors choisir de privilégier pour la représentation de l'hyperplan le fait que sa co-dimension est 1, on le représentera donc par un plan. Pour le plan si on privilégie l'écart de dimension avec l'hyperplan, on le représentera alors par une droite. Avec ce type de dessin on visualise le cas d'inclusion du plan dans l'hyperplan mais on ne peut pas visualiser le cas où leur somme est l'espace en entier sans qu'ils soient pour autant supplémentaires (cas de l'intersection égale à une droite vectorielle).

Représentations et équations

Nous pouvons, aussi travailler les représentations en lien avec les équations. Signalons ici, des exercices de Pariès & Robinet (2009) qui, à partir de groupes d'équations, demandent de reconnaître ceux qui correspondent à deux plans (respectivement droites, ou droites et plans) parallèles ou perpendiculaires et de préciser, le cas échéant, s'il y a coplanarité. Dans le même esprit, l'exercice suivant fait travailler les équations cartésiennes et paramétriques :

Apparier les dessins et les formules ci-dessous. Classer les couples dessin/formule, en expliquant les critères utilisés.



1) $x - 2y + 2z = 0$	2) $z = x^2 + y^2$	3) $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \lambda \\ y & = & -\lambda \\ z & = & 1 \end{array}\right.$	4) $y + z = 0$
5) $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \cos t \\ y & = & \sin t \\ z & = & 0 \end{array}\right.$	6) $\left\{\begin{array}{rcl} 2x - z & = & 0 \\ y + z & = & 0 \end{array}\right.$	7) $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2t \\ y & = & -t \\ z & = & t \end{array}\right.$	

Figure 11 : D'après Rogalski, 1991, p. 46-49.

Nous espérons faire émerger des représentations des plans vectoriels et droites vectorielles, grâce au classement demandé. Dans ce but la question, « *Lesquels sont des espaces vectoriels ?* », pourrait être rajoutée. Par ailleurs l'utilisation de logiciels de tracé peut contribuer à lever des difficultés dues aux représentations en deux dimensions d'un objet en trois dimensions en permettant par exemple de faire tourner les figures.

2. Distance

Une fois que la valeur absolue est comprise comme permettant d'exprimer une distance et que la traduction de $|x - a| \leq r$ se fait naturellement par un croquis, on généralise la notion de distance à celle de distance dans un espace métrique. On prend alors comme support le dessin de disques (ou encore les boules carrées), considéré comme concret. Mais est-il vraiment concret pour des étudiants qui peinent à donner la définition d'un cercle de centre O et rayon r comme l'ensemble des points à la distance r de O ?

IV. CROQUIS - VERS UNE IMAGE MENTALE

1. Applications

On trouve fréquemment des diagrammes pour visualiser et ainsi se familiariser avec des définitions abstraites telles que injection et surjection.

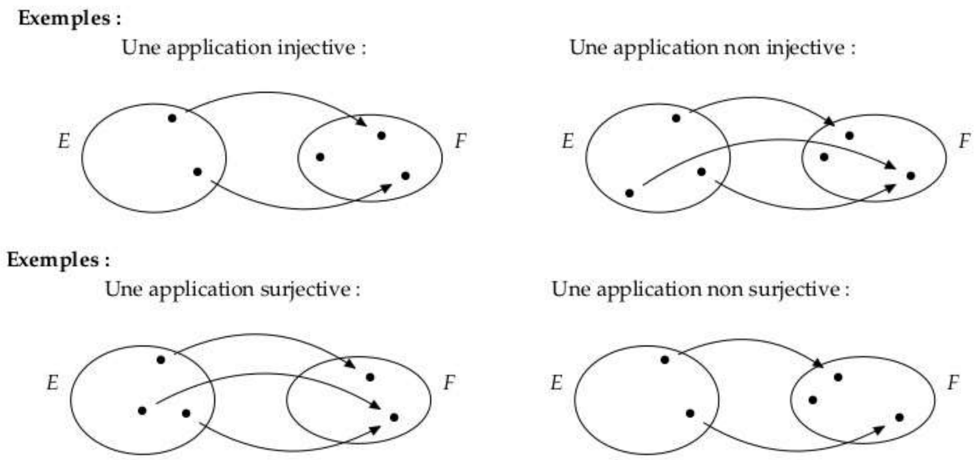


Figure 12 : Diagrammes illustrant les définitions d'injection et de surjection.

Il nous semble que ces croquis n'ont qu'une utilité : ils sont la visualisation de la définition dans le cas particulier d'ensembles finis. Ils ne sont pas une aide à la résolution d'exercices, sauf à aider à mémoriser ces définitions. En effet, les premiers exercices sur le thème injection-surjection demandent souvent de revenir à la définition ce qui est une source de difficulté pour les étudiants comme souligné par Madec (2018) lors d'une journée consacrée à la transition entre enseignement secondaire et supérieur de la Commission Française pour l'Enseignement des Mathématiques [CFEM].
Ces définitions sont le plus souvent appliquées aux fonctions numériques d'une variable réelle. Leur transposition graphique est dans ce cas tout autre que les diagrammes proposés ci-dessus.
Un exercice courant consiste à trouver un intervalle de départ afin que la restriction d'une fonction numérique donnée soit injective, puis un intervalle d'arrivée afin qu'elle soit surjective. Il s'agit plutôt dans ce cadre de souligner que, lorsqu'une fonction est injective, toute droite parallèle à l'axe des abscisses coupe au plus une fois sa représentation graphique et, que, lorsqu'elle est surjective, toute droite parallèle à l'axe des abscisses coupe au moins une fois sa représentation graphique. Le support graphique pour la fonction de la variable réelle x donnée par $f(x) = (x-1)^2-4$ est alors le suivant :

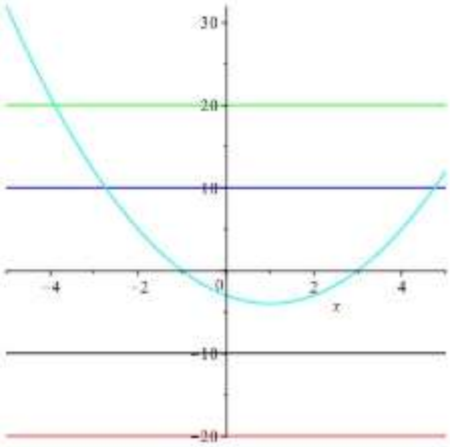


Figure 13 : Injectivité et surjectivité pour une fonction définie sur un intervalle.

2. Ensembles

Les diagrammes de Venn sont utilisés pour illustrer des définitions telles que $A \cap B$ ou $\complement_E(A)$, ou deviner une autre expression de $\complement_E(A \cup B)$. Là encore, la démonstration de l'égalité devinée nécessite de revenir aux définitions. Le diagramme peut même être un obstacle à la démonstration puisque « ça se voit ». En revanche il peut servir dans des démarches du type conjecturer puis démontrer et permet de mettre en avant le fait que les outils de mise en place d'une conjecture ne suffisent en général pas pour démontrer.
Le dessin peut dans ce cas, aider à s'engager dans des disjonctions de cas, s'il y a lieu. Par exemple pour un exercice tel que : *« On suppose que l'on a les inclusions $A \cup B \subset A \cup C$ et $A \cap B \subset A \cap C$. Montrer que l'on a l'inclusion $B \subset C$ »*. Si on veut faire un diagramme de Venn représentant la situation on est assez facilement amené à distinguer les points de B qui sont aussi dans A de ceux qui ne le sont pas.
Un autre exemple est l'illustration ci-dessous de la distributivité de l'intersection par rapport à l'union.

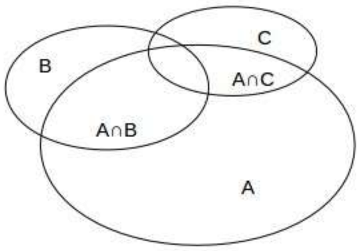


Figure 14 : Diagramme de Venn illustrant la distributivité de l'intersection.

Mais les représentations deviennent vite confuses ou difficiles à faire dans le cas général à partir de quatre ensembles, comme le souligne l'extrait suivant bles dans le cas de quatre ou cinq ensembles (cf. fig. 3 et 4) en considérant cependant dans ce dernier cas que la petite ellipse centrale est extérieure à C.

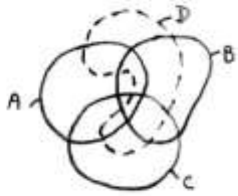


fig. 2

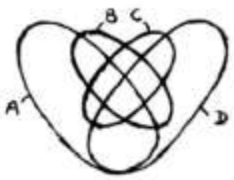


fig. 3

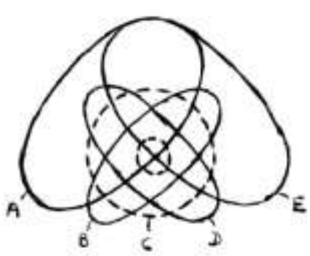


fig. 4

Mais Venn lui-même reconnaît que ce n'est pas très simple et de toute façon on est vite li-

(Lefort, 1974, p.14-18)

3. Composition de fonctions

Le diagramme tel que $x \xrightarrow{f} x^3 \xrightarrow{g} e^{x^3}$ aide à se familiariser avec la composition, en particulier avec l'ordre des calculs. Nous pensons qu'il est compris par les étudiants. Le travail de l'enseignant est de faire en sorte qu'il devienne spontané puis inutile une fois que la composition de fonctions est devenue usuelle. On peut illustrer aussi, à l'aide de tels croquis l'associativité de la composition, voire des égalités fonctionnelles (avec des diagrammes qui commutent).

V. CONCLUSION

Avec ces exemples, nous espérons avoir réussi à montrer des apports possibles, au début de l'enseignement supérieur, des croquis, lors d'une nouvelle étape dans l'abstraction. Nous avons tenté d'illustrer leurs contributions comme support de l'activité mathématique, porteur d'une généralisation ou aide à la construction d'une image mentale.
Ces dessins ont des limitations intrinsèques qui peuvent être porteuses de confusion, c'est particulièrement vrai pour l'algèbre linéaire. Nous les pensons cependant utiles, voire indispensables, à chaque étape d'une nouvelle abstraction. Nous faisons le constat qu'ils sont tout de même peu utilisés, y compris dans notre propre pratique. Une raison possible à cela, est que l'on cherche à amener les étudiants à la démonstration. Nous souhaitons que les étudiants ne se limitent pas à donner des exemples en lieu d'une preuve et qu'ils arrivent à produire une rédaction formelle de cette preuve.
Cependant ces dessins, malgré leurs limites, sont des supports de l'intuition qu'il convient de développer et d'entretenir. Nous devons aider les étudiants à les comprendre, à avoir conscience de leurs portées et de leurs limites ; nous devons contribuer par notre pratique à ce qu'ils les mobilisent régulièrement.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BARRA, R., PENSEC, J-J., GOUIN, S. & BURGAUD, J. (1976). *Enseignement de l'analyse - n°2 - valeur absolue*. Poitiers : IREM de Poitiers.

CHAZAL, J., CORPART, A., DURAND, T., LAMARTINE, C., LASSALLE, N., PIALOUX, N. & PROVOST, G. (2010). *Le B.A. BA des maths avant une STS.* Clermont-Ferrand : IREM de Clermont-Ferrand.

DORIER, J-L. (1998). État de l'art de la recherche en didactique à propos de l'enseignement de l'algèbre linéaire. *Recherches en didactique des mathématiques, 18(2/ 2),* 191-230.

GUEUDET, G.(2004). Rôle du géométrique dans l'enseignement de l'algèbre linéaire. *Recherches en didactique des Mathématiques, 24(1),* 81-114.

LEFORT, J. (1974). Le système binaire réfléchi. *L'Ouvert, 4,* 14-18.

MADEC, G (2018). *Rupture et continuité à la transition lycée-université. Conférence journée CFEM, mars 2018.* http://www.cfem.asso.fr/actualites/MADECJournee_TransitionCFEM_mars18.pdf

PARIES, M., ROBERT, A. (2009). Changements de cadres en géométrie dans l'espace. *Repères IREM, 5,* p. 35-45.

ROGALSKI, M. (1991). *Un enseignement de l'Algèbre Linéaire en D.E.U.G A, première année.* Paris : Cahier de Didirem, 11.

CONTROLE, PREUVE ET DEMONSTRATION
TROIS REGIMES DE LA VALIDATION

Nicolas **BALACHEFF**

Laboratoire d'informatique de Grenoble

Université Grenoble Alpes CNRS

nicolas.balacheff@gmail.com

Résumé

Raisonner est l'une des six *compétences* du socle commun des mathématiques du cycle 4 (années 7, 8 et 9 du cursus français obligatoire). Elle inclut *prouver*, *argumenter*, *démontrer* et affirme le caractère central de la *démonstration*. Les commentaires des programmes reconnaissent la difficulté de cet enseignement. Le texte qui suit interroge les avancées de la recherche sur l'apprentissage et l'enseignement de la démonstration et leur capacité à éclairer la mise en œuvre des programmes actuels. Il revient sur le vocabulaire en insistant notamment sur les différents régimes de la validation dans l'activité de l'élève. Puis il aborde ces questions dans la problématique de la validation au sens de la *théorie des situations didactiques*. Les principaux thèmes sont l'articulation entre preuve et connaissance en évoquant brièvement le modèle ck¢, et la relation entre démonstration et argumentation.

Mots clés

Démonstration, preuve, contrôle, argumentation, explication, raisonnement, résolution de problèmes, situation de validation, valeur épistémique, valeur ontique, théorie des situations didactiques, modèle cK¢, registre sémiotique, dialectique outil-objet

I. INTRODUCTION ET AVERTISSEMENT

Ce texte reprend et complète le contenu de mon exposé au séminaire national de didactique des mathématiques du 18 novembre 2017[1]. Je souhaitais ce jour-là proposer une réflexion sur l'apprentissage et l'enseignement de la démonstration en prenant comme élément structurant les programmes actuels des cycles 1 à 4 de l'enseignement obligatoire, puis interroger la recherche pour comprendre la complexité du projet éducatif et ouvrir sur des questions sur lesquels il serait important que nous progressions ; en quelque sorte des priorités de recherche. Le texte qui suit prend quelques libertés avec l'exposé lui-même[2], par exemple pour prendre en compte le rapport de la mission Villani-Torossian publié en janvier 2018.

[1] Vidéo de l'exposé à l'URL : https://video.irem.univ-paris-diderot.fr/videos/watch/9b24c7f9-30c1-4ed3-9f38-fb969f1f1b2e

[2] Je ne reprends pas ici la dernière partie de l'exposé qui abordait les problématiques induites pour la conception d'environnements informatiques pour l'apprentissage de la preuve, cela allongerait exagérément ce texte. Un texte

Le cadre théorique dans lequel je me place est celui de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998) et de la théorie des champs conceptuels (Vergnaud, 1990). Je m'appuierai par ailleurs tout particulièrement sur les travaux de Raymond Duval (1992) sur la preuve et l'argumentation. L'arrière-plan de ma réflexion est constitué de mes travaux sur la preuve que je revisiterai ponctuellement, et de mon essai de modélisation des conceptions, notamment le modèle cK¢, dont la motivation est d'établir un lien entre connaitre et prouver.
Je commencerai donc ce texte par une lecture des programmes actuels en m'attachant à comprendre leur implication pour les enseignants, tant du point de vue du projet d'apprentissage que de celui du projet d'enseignement. Les notions de *contrôle*, *preuve* et *démonstration* sont ici un moyen d'analyser les relations entre conception et preuve, afin d'aborder le problème de l'ingénierie didactiques de situations pour l'apprentissage de la preuve. Enfin, la conclusion proposera deux thèmes de recherche dont je suggère qu'ils soient une priorité pour contribuer à la réussite de l'enseignement de la preuve en mathématique dans l'enseignement obligatoire.

II. DANS LES PROGRAMMES

1. Argumenter, prouver, démontrer au cycle 4

Le programme du cycle 4 de l'enseignement obligatoire (MENESR, 2015c) inclut le *raisonnement* parmi les six compétences[3] majeures de l'activité mathématique. Le document d'accompagnement (EDUSCOL, 2016), intitulé « Raisonnement », souligne la « place de choix » donnée à cette compétence dans le programme et en précise le sens en distinguant quatre « démarches » : *résoudre, collaborer, démontrer* ainsi que *fonder et défendre un jugement*. Je reviendrai plus loin sur la dimension sociale sous-jacente à la seconde et la quatrième de ces démarches. *Démontrer*, selon ce document, c'est « utiliser un raisonnement logique et des règles établies (propriétés, théorèmes, formules) pour parvenir à une conclusion. » C'est aussi le « moyen mathématique d'accès à la vérité » en « '[donnant] à voir' les différentes étapes d'une preuve par la présentation, rédigée sous forme déductive, des liens logiques qui la sous-tendent. » (ibid. p.1). Ainsi cette démarche est-elle présente à la fois dans le *processus de résolution d'un problème* et dans le *processus de validation de sa solution*. Une autre démarche constitutive du raisonnement, qui renvoie à la validation, est celle de « fonder et défendre ses jugements en s'appuyant sur des résultats établis et sur sa maîtrise de l'argumentation » (ibid.). Un peu plus loin dans le texte, est introduit un autre verbe, « prouver », à propos d'une conjecture, dans l'expression « prouver sa vérité par une démonstration » (ibid. p.2). Ainsi les termes *démontrer*, *prouver* et *argumenter* dessinent-ils ensemble la problématique de la validation du programme de ce cycle.

---

développant ce thème sera prochainement disponible, dans l'attente on pourra se reporter à (Balacheff & Boy de la Tour, 2019).

[3] « Alors que le terme de "connaissances" renvoie plutôt à des savoirs codifiés, à un programme scolaire, celui de compétences reçoit bien des définitions distinctes. Elles tendent à s'accorder sur une signification plus large ou "transversale". "Une compétence est une combinaison de connaissances, de capacités à mettre en œuvre ces connaissances, et d'attitudes, c'est-à-dire de dispositions d'esprit nécessaires à cette mise en œuvre" (HCE). "Une compétence est une capacité d'action efficace face à une famille de situations, qu'on arrive à maîtriser en disposant à la fois des connaissances nécessaires et de la capacité de les mobiliser, pour identifier et résoudre de vrais problèmes". (Perrenoud) » (in : *Les définitions des termes et indicateurs statistiques de l'éducation nationale* http://www.education.gouv.fr/cid23200/les-definitions-des-termes-et-indicateurs-statistiques-de-l-education-nationale.html -- consulté le 13 février 2019).

Les commentaires officiels contiennent par ailleurs des indices de la complexité, tant pour l'enseignant que pour les élèves, de la réalisation des objectifs de ce programme. Du côté de l'enseignant, « il n'est pas question de démontrer tous les théorèmes ou propriétés figurant au programme » (EDUSCOL, 2016 p.3). La formulation est forte. Bien que la démonstration soit l'outil canonique de la validation en mathématique, le législateur suggère qu'elle a un coût tel qu'elle ne peut être le moyen exclusif de validation dans la classe. L'enseignant doit cependant « systématiquement qualifier les énoncés mathématiques selon leur statut, en distinguant définitions, théorèmes admis et théorèmes démontrés. » (ibid. p.3). Dans la pratique, les théorèmes admis sont accompagnés d'activités ou de discours qui en facilitent l'acceptation par les élèves.
Ainsi la démonstration doit-elle prendre sa juste place dans l'activité mathématique et en même temps cohabiter avec d'autres formes de validation relevant nécessairement de l'argumentation voire de la persuasion. Par ailleurs, des indications attestent de la prise en compte des difficultés des élèves : « Afin de ne pas détourner de la résolution de problèmes les élèves ayant des difficultés à entrer dans les codes de rédaction d'une démonstration, il importe de valoriser les productions spontanées, écrites ou orales, issues des phases de recherche et d'expérimentation. » (ibid. p.4).
Le travail de la classe comprendra ainsi « des temps de mise en commun et d'argumentation permettant de produire une preuve et des temps de mise en forme (démonstrations rédigées) » (ibid. p.4). Argumentation, preuve et démonstration sont distinguées et mises en relation comme ordres de discours oral ou écrit. Cependant, les commentaires des programmes de 2016, reprenant ceux de 2008, stipulent que « la mise en forme écrite [d'une preuve] ne fait pas partie des exigibles [du socle commun] » (EDUSCOL, 2009 p.2). L'enseignant se trouve devant cette complexité : d'une part amener les élèves à comprendre ce qu'est une démonstration et son rôle en mathématiques, d'autre part rester en quelque sorte en arrière de cet objectif en équilibrant les niveaux de discours qui vont relever de l'argumentation et de la démonstration ; il lui faut parvenir à les placer l'une par rapport à l'autre, négocier cette double exigence. Du côté des élèves la difficulté anticipée est de « […] passer d'un raisonnement inductif à un raisonnement déductif pour établir la preuve ; [puis] mettre en forme ce raisonnement déductif pour en faire une démonstration c'est-à-dire une preuve communicable. » (ibid. p.3). On notera que le législateur ne parait considérer que l'induction, alors que l'abduction – ou raisonnement plausible, selon Polya – et bien d'autres stratégies heuristiques sont à l'œuvre dans la résolution de problèmes confrontant les élèves à la difficulté de la synthèse et de la mise en forme au moment de la validation. Si ce moment est essentiellement un moment de mise en cohérence et de mise en forme des produit de l'activité de résolution (Garuti, Boero, & Lemut, 1998), la réduction des écarts structurels voire logiques entre cette activité et une preuve acceptable peut être difficile (Pedemonte, 2007), aussi est-il ajouté que « la rédaction et la mise en forme d'une preuve gagnent à être travaillées collectivement, avec l'aide du professeur et à être présentées comme une façon convaincante de communiquer un raisonnement aussi bien à l'oral que par écrit. » (EDUSCOL, 2009 p.4).
Résoudre, argumenter, prouver, démontrer, communiquer et *convaincre* à l'oral ou à l'écrit, sont autant de dimensions de la compétence « raisonnement » dont les programmes veulent l'acquisition. La recherche a montré qu'elles sont structurantes, parfois complémentaires mais aussi en opposition, créant des tensions tant dans l'apprentissage que dans l'enseignement. Je reprendrai tous ces points plus précisément dans ce qui suit, mais avant cela je propose de vérifier rapidement ce qu'il en est dans les cycles 2 et 3 qui préparent les apprentissages du cycle 4.

2. Argumenter, prouver, démontrer aux cycles 2 et 3

Au cycle 3, cycle de consolidation, « les mathématiques contribuent à construire chez les élèves l'idée de preuve et d'argumentation. » (MENESR, 2015b). Cet objectif s'inscrit dans le projet plus global d'apprendre à « justifier ses affirmations et rechercher la validité des informations dont on dispose. » (MENESR, 2018b). La géométrie est signalée, classiquement, comme le lieu privilégié de cet apprentissage. Son enseignement doit « [permettre] aux élèves de passer progressivement d'une géométrie où les objets […] et leurs propriétés sont contrôlés par la perception à une géométrie où ils le sont par le recours à des instruments, par l'explicitation de propriétés pour aller ensuite vers une géométrie dont la validation ne s'appuie que sur le raisonnement et l'argumentation. » (ibid.).
Les distinctions entre preuve et argumentation, justifier et valider ne sont pas précisées, ni leurs définitions respectives. L'objectif d'apprentissage est lui-même exprimé de façon assez générale : « construire l'idée » de preuve ou d'argumentation. Ces formulations suffisent pour exprimer l'intention du législateur de faire évoluer le rapport des élèves à la connaissance par la prise de conscience de ce qui la sépare de l'opinion et de la croyance. L'enseignant devra pour cela susciter le passage de démarches empiriques à des démarches intellectuelles mobilisant des compétences discursives pour « expliquer sa démarche ou son raisonnement, comprendre les explications d'un autre et argumenter dans l'échange. » (ibid.)
Les textes du cycle 2 font des suggestions pour préparer ces apprentissages. Ainsi, à propos des systèmes naturels et techniques (domaine 4), il est écrit : « Étayé par le professeur, l'élève s'essaie à expérimenter, présenter la démarche suivie, expliquer, démontrer, exploiter et communiquer les résultats de mesures ou de recherches, la réponse au problème posé en utilisant un langage précis. Le discours produit est argumenté et prend appui sur des observations et des recherches et non sur des croyances. » (MENESR, 2018a). L'objectif, dans la tradition de la formation de l'esprit critique, est de former le futur citoyen à « débattre, argumenter rationnellement, émettre des conjectures et des réfutations simples, s'interroger sur les objets de la connaissance, commencer à résoudre des problèmes notamment en mathématiques en formulant et en justifiant ses choix développent le jugement et la confiance en soi. » (ibid.)
D'une façon explicite, les mathématiques ne sont pas un élément du programme du cycle 1 (maternelle) cependant, dans une perspective plus large, l'enseignant est invité à organiser des « moments de langage », notamment des moments de résolution de problème collectifs, « Il y a alors argumentation, explication, questions, intérêt pour ce que les autres croient, pensent et savent. L'enseignant commente alors l'activité qui se déroule pour en faire ressortir l'importance et la finalité. » (MENESR, 2015a).

3. Un projet qui traverse les cycles de l'enseignement obligatoire

La lecture des programmes[4] montre que la problématique de la validation, fondatrice de la culture scientifique et citoyenne, traverse toute la scolarité obligatoire et occupe une place particulière dans l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques. Le rapport remis au gouvernement en février 2018 l'affirme très clairement : « la notion de preuve est au cœur de l'activité mathématique, quel que soit le niveau (de façon adaptée, cette assertion est valable de la maternelle à l'université) » (Villani & Torossian, 2018 p.25).
La traduction de cette affirmation dans les programmes et leurs commentaires recourt à une variété de termes (argumenter, prouver, justifier, démontrer) dont la signification n'est pas stable (e.g. démontrer ne peut avoir la même signification au cycle 2 et au cycle 4) et dont les

[4] Programmes en vigueur au moment du prononcé du séminaire en novembre 2017 et à celui de l'écriture de ce texte, en mars 2019.

relations ne sont pas clairement élucidées (e.g. entre « preuve » et « preuve communicable »). La lecture du rapport dit Villani-Torossian rencontre les mêmes difficultés. La section dédiée à « La preuve » (ibid. pp.25-26) recourt à des formulations telles que : « démarche de justification argumentée », « formes d'argumentation propres aux mathématiques », « démonstration » dont on comprend l'intention mais difficilement les nuances : comment différencier une argumentation propre aux mathématiques de la démonstration ? Ces désignations seraient-elles simplement équivalentes comme le preuve et démonstration seraient synonymes selon l'un des auteurs exprimant la position des mathématiciens[5] ? Des réponses précises à ces questions sont nécessaires à la mise en œuvre des programmes et à l'exercice quotidien de l'enseignement de mathématiques.

À ce point, je retiendrai que la commande de l'institution articule un volet éducatif et un volet didactique non exclusifs d'autres aspects, complémentaires et fortement liées. Dans le volet éducatif, l'enseignement doit amener les élèves à prendre conscience de la distinction entre croyance et connaissance en s'appuyant sur des interactions sociales réglées par les principes du débat scientifique. Dans le volet didactique, il s'agit de répondre avec des moyens adaptés au niveau concerné à la question du vrai en mathématique dès les premiers apprentissages. L'objectif au terme de la scolarité obligatoire est que les élèves comprennent et pratiquent la démonstration comme un type de preuve spécifique des mathématiques, ce qui implique d'éclaircir le rapport entre preuve et démonstration et de savoir préciser ce que peuvent être d'autres types de preuve qui seraient pratiqués par les élèves et les enseignants et enseignantes aux niveaux plus élémentaires.

Dans la suite de ce texte, je préciserai ce que peut apporter la recherche en didactique des mathématiques à la compréhension des mots-clés utilisés par les programmes et les documents d'accompagnement. Je reviendrai alors sur les types de preuve, la distinction entre preuve et contrôle dans le contexte de la résolution de problèmes, et sur la relation entre argumentation et preuve. Je rappellerai le rôle et les caractéristiques des situations de validation au sens de la théorie des situations didactique qui donne les éléments essentiels de la conception de situations pour l'apprentissage de la preuve.

En revanche, je n'aborderai pas la discussion sur les limites de l'interaction sociale dont on sait qu'elle est l'un des points d'appui pour susciter des débats de preuve. J'ai souligné la difficulté de la gestion de ces situations pour l'enseignant ou l'enseignante (Balacheff, 1991) dont la source se trouve dans la frontière fragile entre persuader et argumenter. L'inclusion des catégories persuasion et argumentation dans la typologie des schèmes de preuves de Harel et Sowder (1998) est justifiée par la légitimité de l'appel à l'autorité pour affirmer la validité d'un énoncé, soit que l'élève invoque l'enseignant ou l'enseignante, soit que celui-ci ou celle-ci doive faire accepter un théorème sans démonstration. L'art de persuader est un art qu'il faudra reconsidérer dans la classe de mathématiques.

III. EXPLICATION, PREUVE, DEMONSTRATION, LE SENS DES MOTS

1. Raisonnement

La compétence « raisonner », c'est-à-dire le *raisonnement*, constitue le cadre général dans lequel l'institution situe résoudre et démontrer. Par raisonnement elle entend « [un] processus mental permettant d'effectuer des inférences. Rappelons qu'une inférence est une opération

[5] Cédric Villani, à l'occasion d'un bref échange de courriels à propos du rapport sur l'enseignement des mathématiques (30 mars 2018).

mentale par laquelle on accepte qu'une proposition soit vraie en vertu de sa liaison avec d'autres propositions » (EDUSCOL, 2016, p. 1). J'ai utilisé une définition très proche au début de mon travail sur l'apprentissage de la preuve, en désignant par raisonnement une activité intellectuelle consistant à obtenir de nouvelles informations à partir d'informations données (Balacheff, 1987, p. 148). Cette formulation était maladroite dans la mesure où le problème posé n'est pas de modéliser les activités mentales mais de les caractériser grâce à leurs manifestations tangibles pour pouvoir créer des situations d'apprentissage propres à susciter leur évolution par l'effet des retours spécifiques qu'elles apporteraient ; c'est-à-dire des situations didactique au sens de la *théorie des situations didactiques* (Brousseau, 1998), cadre dans lequel je me plaçais explicitement.

Je propose de retenir la définition donnée par Raymond Duval qui, d'une part, est congruente avec les cadres théoriques dans lesquels je me place et, d'autre part, n'introduit pas de contradiction avec un problématique psychologique :

> *Le raisonnement « [est l']organisation de propositions qui est orientée vers un énoncé-cible pour modifier la valeur épistémique que cet énoncé-cible a dans un état de connaissance donné, ou dans un milieu social donné, et, qui par voie de conséquence, en modifie la valeur de vérité lorsque certaines conditions particulières d'organisation sont remplies ». (Duval, 1992, p. 52)*

Par valeur épistémique il faut comprendre « *le degré de certitude ou de conviction attaché à une proposition* » (Duval, 1991, p. 254). Le rôle de cette valeur est particulièrement présent lors des échanges dans la classe, ou lors de la résolution collaborative de problèmes. Cette définition fait de l'analyse du raisonnement – pour l'enseignement comme pour la recherche – un travail sur le discours et sur le texte, dont on prendra en compte le caractère contextualisé par l'état des connaissances, les niveaux de langage et les contraintes de situation.

Les « conditions particulières d'organisation » mentionnées par Raymond Duval sont une référence à la fois à la structure logique et à la norme particulière du discours de preuve. La compréhension de la nature et du rôle de cette norme est l'un des enjeux essentiels de l'enseignement de la démonstration. J'en aborderai certains aspects dans la section sur les types de preuve.

2. Explication

« Explication » n'est pas un mot-clé saillant des textes des programmes et de leurs commentaires. Il est en revanche, avec « argumentation », le terme le plus clivant au sein de la communauté scientifique lorsqu'est en question la distinction entre *preuve qui prouve* et *preuve qui explique*, pour reprendre la formulation de Gila Hanna qui très tôt a porté cette problématique (Hanna, 1990). Le problème sous-jacent est celui de la compréhension de la preuve et de sa capacité à répondre à la question de savoir pourquoi un énoncé est vrai au-delà de la bonne forme du discours qui garantit cette validité. C'est donc la question du lien entre preuve et connaissance, voire celui du lien entre calcul, qui réduit la validité au respect de règles syntaxiques, et raisonnement où subsiste une part d'exigence sémantique.

Dans ce qui suit « Explication » est utilisé pour désigner un « système de relations au sein duquel la donnée à expliquer trouve sa place » (Duval, 1992, p. 40). En effet, « la question de la valeur épistémique résolue, se pose celle de la construction de la cohérence ou appartenance de la nouvelle production au système de connaissance. » (ibid.). L'explication est ainsi la mise en relation de l'énoncé produit de la résolution d'un problème avec les connaissances explicitement disponibles : il y a compréhension s'il y a clôture pour cette mise en relation.

Raymond Duval (1992) affirmait un clivage entre explication et raisonnement. La première, écrivait-il, « donne une ou plusieurs raisons pour rendre compréhensible une donnée (un phénomène, un résultat, un comportement, ...) » (ibid. p.40), alors que pour le second « le rôle des raisons avancées y est tout différent : il est de "communiquer" aux affirmations qui sont à justifier leur force d'argument » (ibid. p.41).

3. Explication, argumentation, preuve et démonstration

En soutenant l'existence d'un clivage entre explication et raisonnement, Raymond Duval induit celui entre explication et preuve que rejette Gila Hanna : « a proof actually becomes legitimate and convincing to a mathematician only when it leads to real mathematical understanding » (Hanna, 1995, p. 42). J'avais pour ma part fortement lié explication et preuve dans un effort de clarification et de définition (Balacheff, 1987, p. 148). Mon choix a suscité quelques difficultés tant avec Raymond Duval en raison même de ce lien, qu'avec Gila Hanna[6] en raison de la disjonction qu'elle affirmait entre preuves qui prouvent et preuves qui expliquent. Je reviens et précise ici ces distinctions dans la perspective d'une réduction des contradictions. Pour cela il faut revenir sur le terme « argumentation ».

L'argumentation, rappelle Raymond Duval (1992, p. 37), citant Jean-Blaise Grize, est le mode naturel de raisonnement. Sa finalité est la vraisemblance et la conviction d'autrui sans égard pour les critères logiques canoniques. Ainsi est-elle acceptée ou rejetée selon deux critères : sa pertinence (cohérence sémantique) et sa force (valeur épistémique 'positive') (ibid. p.39) ; c'est-à-dire la force de la croyance que l'on attache à ses énoncés pour de bonnes ou de mauvaises raisons.

L'introduction de la distinction entre *argumentation rhétorique* et *argumentation heuristique* (Duval, 1992, p. 51) a permis de rapprocher cette acception générale d'argumentation et une acception congruente aux exigences de l'activité mathématique. En effet, selon cette distinction, l'argumentation rhétorique vise à convaincre un interlocuteur, alors que l'argumentation heuristique guide la résolution de problème en favorisant des choix stratégiques ou en soutenant la validité supposée de tel ou tel énoncé.

On peut remarquer que si Raymond Duval a forgé la notion de « valeur épistémique » d'un énoncé (force de la croyance d'un agent – personne ou groupe de personnes) d'une argumentation rhétorique, il ne propose pas de terme distinguant les sources de la valeur de ceux de l'argumentation heuristique. Une proposition récente de Gila Hanna (2017) offre la possibilité de combler ce manque en reprenant la distinction introduite par les philosophes Frans Delarivière et Bart van Kerkhove (2017) entre *valeur épistémique*, qui implique l'existence d'un agent, et *valeur ontique* indépendante de tout agent. Il s'agissait ici de qualifier le caractère intrinsèque ou relatif de la valeur explicative d'une preuve, cette distinction tient aussi bien pour l'argumentation. Voici ce qui en est dit :

> *« A mathematical proof can be seen as an argument by which one convinces oneself or others that something is true, so it might seem hard to go beyond epistemic talk about an explanatory proof. However, while the content of any particular proof is the fruit of a person's epistemic work, it can be separated as an object independent of a particular mind. Other people can read this proof and be convinced by it. This leads us to the question whether showing why a theorem is true is a feature of the proof itself or a feature of communicative acts, texts or representations. » (ibid. p.3)*

Ceci est à rapprocher du critère de reconnaissance du caractère heuristique ou épistémique d'un argument « [qui] tient ou bien à l'existence d'une organisation théorique du champ de connaissances et de représentations dans lequel se déroule l'argumentation, ou à l'absence d'une telle organisation théorique. » (Duval, 1992, p. 51). « Une argumentation heuristique requiert l'existence d'une organisation théorique du champ de connaissances et de représentations dans lequel se déroule l'argumentation » et « que l'on soit en mesure de comprendre ou de produire

[6] « For Balacheff, then, a proof would seem to be an explanation by virtue of being a proof. » (Hanna, 1990 p.9).

une relation de justification entre des propositions qui soit de nature déductive et non pas seulement de nature sémantique. » (ibid. p.52). Ainsi la distinction entre argumentation rhétorique et argumentation heuristique, revient-elle à l'évaluation de la valeur épistémique et de la valeur ontique des énoncés, et de leurs relations. Nous pouvons alors avancer qu'une argumentation sera recevable au sens des mathématiques si la valeur épistémique de ses énoncés est conditionnée par leur valeur ontique ; c'est ce critère qui permettra de lui reconnaitre le statut de preuve en mathématique. La structure normalisée des démonstrations est le moyen technique de cette évaluation.

La distinction entre argumentation rhétorique et argumentation heuristique, et entre valeur épistémique et valeur ontique d'un énoncé, permet de reformuler et de préciser l'opposition entre argumentation et démonstration parfois trop abrupte comme ici : « Duval's model of deductive reasoning is formal derivation, while for us it is only a model for the final product, not adequate for the school approach totheorems and proof » (Boero, Douek, Morselli & Pedemonte, 2010, p. 17).

Cette discussion me permet de revenir et de préciser le schéma (Figure 1) que j'ai proposé en 1988, repris nombre de fois, pour lequel j'ai longtemps sous-estimé le risque de malentendu.

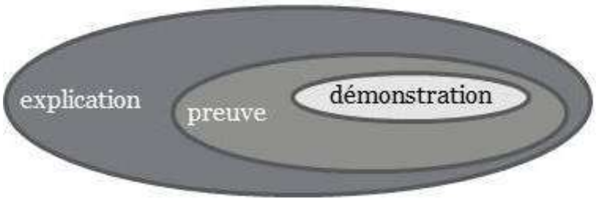


Figure 1.

Je n'ai pris conscience de l'importance de revenir sur ce schéma en lisant en lisant une première version d'une communication que Gila Hanna a mis en libre accès sur Research Gate (Hanna, 2018, fol. 3) : « If one were to take the position that an explanation is simply a deductive argument, then all proofs would automatically be explanations (Balacheff, 2010, p. 30) ». Sa remarque est légitimement induite par la représentation (**Erreur ! Source du renvoi introuvable.**) que j'avais choisie ; celle-ci n'était conçue que comme un croquis accompagnant un texte dont je reprends ci-dessous la version anglaise[7] pour rester dans le contexte de lecture que put faire Gila Hanna :

> *« This structuration [of the relations between explanation, proof and mathematical proof] distinguished between pragmatic and intellectual proof, and within both it identified categories related first to the nature of the student knowing and his or her available means of representation. The rationale for this organisation (sketched [here figure 1.]) is the postulate that the explaining power of a text (or non-textual "discourse") is directly related to the quality and density of its roots in the learner's (or even mathematician's) knowing. What is produced first is an "explanation" of the validity of a statement from the subject's own perspective. This text can achieve the status of proof if it gets enough support from a community that accepts and values it as such. Finally, it can be claimed as mathematical proof if it meets the current standards of mathematical practice. So, the keystone of a problématiques of proof in mathematics (and possibly any field) is the nature of the relation between the subject's knowing and what is involved in the 'proof'. »*

Ces relations entre explication, preuve et démonstration étaient précisées dans la perspective de l'individu engagé dans la résolution d'un problème et la validation de sa solution. La qualification d'explication d'une énonciation ne préjuge pas de la valeur épistémique ou ontique en soi de ses énoncés ; tel énoncé peut avoir la valeur épistémique positive d'un théorème-en-acte (croyance empiriquement fondée sur une invariance constatée). En restant

[7] Voir en français (Balacheff, 1987, fol. 3) – texte accessible en ligne.

dans le cadre de Duval, le passage de l'explication à l'argumentation est celui qu'impose le besoin de formuler les raisons et leur organisation, que cela soit pour soi-même ou pour autrui. Faire accepter par autrui qu'une argumentation établit la validité d'une solution change son statut et sa valeur par le caractère public qu'elle acquiert. Elle gagne le statut de preuve. Parmi ces preuves certaines ont une structure particulière qui satisfait des normes collectives, telle en mathématiques celles de la démonstration.
Je me suis essayé à dessiner un nouveau croquis (**Erreur ! Source du renvoi introuvable.**) qui pourrait limiter les malentendus mais il n'est pas sûr qu'un dessin vaille mieux qu'un discours.

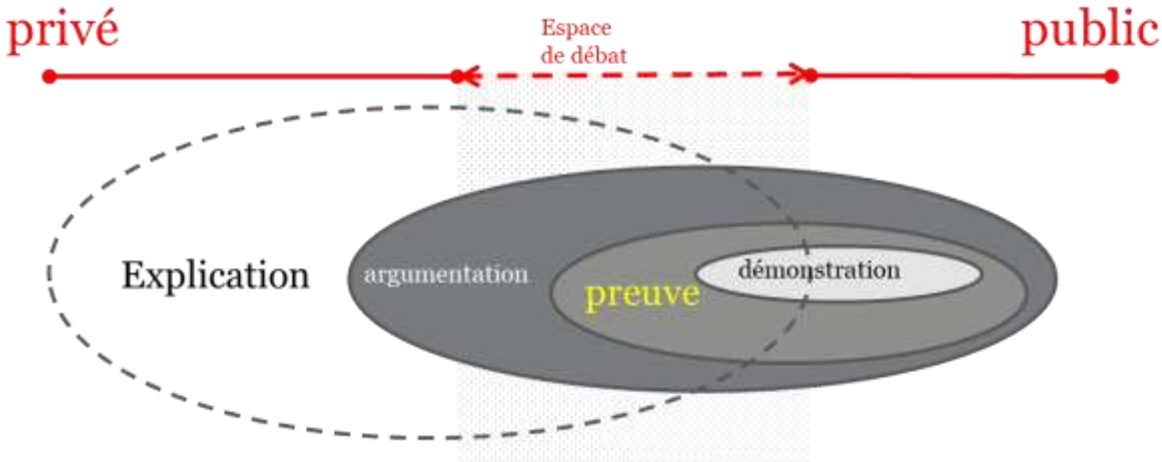


Figure 2[8].

Le point important est la mise en évidence de l'existence d'une frontière entre sphère privée et sphère publique. Dans la sphère privée, l'explication travaille sur les objets et leurs relations, elle est le socle de la construction de l'argumentation qui sera le moyen de convaincre de la validité de la solution d'un problème, que ce travail assure ou non la soumission de la valeur épistémique à la valeur ontique. Le franchissement de cette frontière implique la recherche d'un consensus, c'est-à-dire un processus social qui, par nature, ne peut garantir qu'individuellement les protagonistes reconnaitront le caractère explicatif de l'argumentation collectivement acceptée – la preuve. Cette incertitude est plus forte encore dans le cas de la démonstration du fait de son caractère normatif qui prend le pas sur ses propriétés rhétoriques.

IV. LES TYPES DE PREUVES

1. Illustration 1 : aux origines de la convergence uniforme

L'ouvrage de Gilbert Arsac (2013) sur la genèse du concept de convergence uniforme[9] met précisément en évidence les contraintes qui pèsent sur l'argumentation en mathématique en se gardant autant que possible des anachronismes d'une réécriture contemporaine. Je retiens ici la partie de cette étude (ibid. p.57 sqq.) qui porte sur la limite d'une série de fonctions d'une variable réelle continues dans le cours d'Analyse de Cauchy de 1821. Il s'agit de comprendre ce texte mathématique dans le contexte des ressources et des moyens disponibles à une époque ; en quelque sorte une archéologie du savoir mathématique.

[8] Ces questions et ce schéma ont été repris et détaillés lors de mon exposé au colloque CORFEM en juin 2019 à Strasbourg (texte à paraitre en 2020).
[9] La lecture de ce livre devrait faire partie de la formation des jeunes chercheurs en didactique des mathématiques.

La formulation du théorème sur la continuité de la limite d'une série de fonctions continues telle qu'elle apparait dans le cours de Cauchy formule est reproduite ci-dessous (Figure 3). Ce texte ne présente pas de difficultés particulières pour le lecteur contemporain. Cependant, on peut noter des expressions aujourd'hui disparues, telle : « les termes de la série (I) renfermant une même variable ». Pourquoi n'écrit-il pas $u_n(x)$? Ce n'est pas que Cauchy ignorerait la notation $f(x)$, il en fait usage ailleurs dans le cours. L'hypothèse la plus plausible est qu'il ne le fait pas ici parce que la problématique des séries de fonctions hérite très fortement de celle des séries numériques.

(I) $u_0, u_1, u_2 \ldots u_n, u_{n+1}$, &c…

Lorsque, les termes de la série (1) renfermant une même variable x, cette série est convergente, et ses différens termes fonctions continues de x, dans le voisinage d'une valeur particulière attribuée à cette variable ;

$$s_n, \quad r_n \quad \text{et} \quad s$$

sont encore trois fonctions de la variable x, dont la première est évidemment continue par rapport à x dans le voisinage de la valeur particulière dont il s'agit. Cela posé, considérons les accroissemens que reçoivent ces trois fonctions, lorsqu'on fait croître x d'une quantité infiniment petite α. L'accroissement de s_n sera, pour toutes les valeurs possibles de n, une quantité infiniment petite ; et celui de r_n deviendra insensible en même temps que r_n, si l'on attribue à n une valeur très-considérable. Par suite, l'accroissement de la fonction s ne pourra être qu'une quantité infiniment petite. De cette remarque on déduit immédiatement la proposition suivante.

1.er THÉORÈME. *Lorsque les différens termes de la série (1) sont des fonctions d'une même variable x, continues par rapport à cette variable dans le voisinage d'une valeur particulière pour laquelle la série est convergente, la somme s de la série est aussi, dans le voisinage de cette valeur particulière, fonction continue de x.*

Figure 3 : Cauchy (1821, pp. 131–132).

Par ailleurs, Gilbert Arsac relève que le terme « variable », utilisé comme substantif dans l'énoncé ci-dessous est utilisé comme adjectif ailleurs dans le cours pour évoquer un comportement dynamique :

> *« Lorsque des quantités variables son tellement liées que, la valeur de l'une d'entre elles étant donnée, on puisse en conclure les valeurs de toutes les autres, on conçoit d'ordinaire ces diverses quantités exprimées au moyen de l'une d'entre elles, qui prend alors le nom de variable indépendante ; et les autres quantités exprimées au moyen de la variable indépendante sont ce qu'on appelle des fonctions de cette variable. » (Cauchy, 1821, p. 19)*

Cette relation étroite entre variable et quantité dénote une conception cinématique de la limite qui remonte à Neper et Newton (Arsac, 2013, p. 17). Cette conception est confortée par la force d'évocation de la représentation graphique des fonctions comme en témoigne le texte de Cauchy à propos du théorème des valeurs intermédiaires (Cauchy, 1821, p. 44)[10]. Elle est présente dans la définition de la continuité :

[10] Une preuve analytique de ce théorème est cependant donnée dans la note III de ce même ouvrage (ibid. p.378 sqq).

« En d'autres termes, la fonction f(x) restera continue par rapport à x entre les limites données, si, entre ces limites, un accroissement infiniment petit de la variable produit toujours un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même. » (ibid. pp.34-35)

Cette conception des rapports entre fonction et variable est dominante à l'époque.
Le texte qui précède l'énoncé du théorème n'est pas une démonstration comme on peut en lire ailleurs dans le cours, mais la narration d'un raisonnement de même nature que celle que la conception qui sous-tend la définition de la continuité. Cauchy a la précaution de qualifier ce texte de « remarque », signifiant clairement son statut singulier.
Les premières lignes de ce texte fixent la signification des écritures s, s_n et r_n comme cela serait fait pour une série numérique. Le fait qu'il s'agisse de fonctions est introduit par la phrase : « Lorsque les termes de la série (I) renfermant une même variable x […] ». Ainsi ce qui apparait en premier sont des nombres (i.e. des variables représentant des quantités) et leurs dépendances. Ceci ne signifie pas que ce soit ce que Cauchy conçoit précisément, mais atteste des limites que lui imposent les moyens d'expression dont il dispose. On perçoit de plus la conception sous-jacente d'une évolution continue, voire monotone, de la variable x et de son effet sur celle de la fonction à chaque étape du raisonnement. L'incrément de la variable x est explicitement désigné mais cette désignation n'est pas exploitée par Cauchy. Il exprime la continuité sur un intervalle et non en un point. Par ailleurs, elle la continuité de la fonction est liée à celle de la courbe (représentation graphique) et elle est sous-tendue par l'idée d'une dynamique temporelle de l'évolution conjointe de la variable et de la fonction (Arsac, 2013, sec. I.6).
Cauchy a reconnu des exceptions au théorème formulé dans son cours de 1821, notamment celle des séries de Fourier (Arsac, 2013, Chapitres IV & V). Aussi, trente ans après la publication de son cours, il propose une nouvelle formulation en affirmant « [qu'il] est facile de voir comment on doit modifier l'énoncé du théorème, pour qu'il n'y ait plus lieu à aucune exception » (Cauchy, 1853, p. 455). Cette modification consiste en l'introduction d'une condition, restée sous le nom de critère de Cauchy (Figure 4).
Cette fois, Cauchy qualifie de « démonstration » cette preuve publiée aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (CRAS). Cependant, le lecteur vérifiera la distance qui existe entre cette formulation et la formulation moderne. Gibert Arsac (2013, p. 61 sqq.) en propose une analyse précise dont je retiendrai ici l'un des éléments qui est particulièrement éclairant quant aux limites qu'imposent les moyens de représentation ou de formulation sur l'expression de la pensée mathématique : l'organisation du discours en langue naturelle place les termes {n, x, ε}[11] dans un ordre qui n'est pas congruent à celui dans lequel ils apparaissent dans la formalisation contemporaine du théorème : ($\forall \varepsilon \ \exists N \ \forall x \ \forall n>N \ \forall n'>n \ \ |s_n - s_{n'}| < \varepsilon$), rendant ainsi difficile de relever le fait que N dépende deεet non de x.
La nouvelle formulation de Cauchy est plus proche de ce que l'on pourrait appeler une argumentation mathématique, dans laquelle la valeur épistémique des énoncés est leur valeur ontique, que d'une démonstration selon les standards contemporains. Ce constat ne met pas en question la rigueur du mathématicien, celle-ci est soumise aux limites des représentations et des moyens techniques disponibles à cette époque : la notion of variable domine celle de fonction (variable dépendante) avec une conception dynamique de la convergence qui influe sur celle de limite et de continuité, la notation algébrique de la valeur absolue est manquante[12], la continuité est définie sur un intervalle—et non en un point—et est intimement liée à la perception de la continuité graphique de la courbe. De plus, l'indisponibilité[13] des quantificateurs rend difficile l'identification des dépendances présentent dans le discours, et la négation des énoncés qui les impliquent (e.g. la discontinuité comme négation de la continuité). La construction de

[11] En notant par commodité ε « un nombre aussi petit que l'on voudra », ce que ne fait pas Cauchy.
[12] Elle est introduite par Weierstrass en 1841.
[13] Il faut attendre le XX° siècle.

l'argumentation est guidée par une conception cinématique de la continuité et de la convergence et par le principe de continuité (*lex continuitatis*, Leibniz[14])

Si l'on nomme n' un nombre entier supérieur à n, le reste r_n ne sera autre chose que la limite vers laquelle convergera, pour des valeurs croissantes de n', la différence

$$s_{n'} - s_n = u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n'-1}. \quad (3)$$

Concevons, maintenant, qu'en attribuant à n une valeur suffisamment grande, on puisse rendre, pour toutes les valeurs de n comprises entre les limites données, le module de l'expression (3) (quel que soit n'), et, par suite, le module de r_n, inférieur à un nombre ε aussi petit que l'on voudra. Comme un accroissement attribué à x pourra encore être supposé assez rapproché de zéro pour que l'accroissement correspondant de s_n offre un module inférieur à un nombre aussi petit que l'on voudra, il est clair qu'il suffira d'attribuer au nombre n une valeur infiniment grande, et à l'accroissement de x une valeur infiniment petite, pour démontrer, entre les limites données, la continuité de la fonction

$$s = s_n + r_n.$$

Mais cette démonstration suppose évidemment que l'expression (3) remplit la condition ci-dessus énoncée, c'est-à-dire que cette expression devient infiniment petite pour une valeur infiniment grande attribuée au nombre entier n. D'ailleurs, si cette condition est remplie, la série (1) sera évidemment convergente. En conséquence, on peut énoncer le théorème suivant :

» 1^er^ *Théorème*. Si les différents termes de la série

$$u_0,\ u_1,\ u_2, \ldots,\ u_n,\ u_{n+1}, \ldots \quad (1)$$

sont des fonctions de la variable réelle x, continues, par rapport à cette variable, entres des limites données, si, d'ailleurs, la somme

$$u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n'-1} \quad (3)$$

…/…

devient toujours infiniment petite pour des valeurs infiniment grandes des nombres entiers n et $n' > n$, la série (1) sera convergente, et la somme s de la série (1) sera, entre les limites données, fonction continue de la variable x.

Figure 3 : Cauchy (1853 pp.456-457).

De l'analyse de Gilbert Arsac, à laquelle le lecteur doit se reporter, je retiens les éléments suivants : d'une part elle n'est pas à visée cognitive mais épistémique[15], d'autre part elle traite un matériau – le cours de Cauchy de 1821 et le CRAS de 1853 – dans son contexte – les mathématiques de la première moitié du XIX° siècle. Si l'on examine précisément le travail réalisé on remarque que la connaissance de Cauchy est caractérisée par la donnée simultanée et reliée d'une part du problème en jeu, ici la conservation d'une propriété lors d'un passage à la limite, les systèmes de représentation disponibles, les opérations possibles et les moyens de validation accessibles. Différents niveaux de validation sont présents dans le cours de 1821, de la démonstration à l'argumentation. Ils dépendent essentiellement de l'accès aux objets mathématiques (représentations, opérations, relations) qu'ils mobilisent.
Le cas de la convergence uniforme illustre le lien étroit entre preuve et connaissance. Il conforte l'affirmation selon laquelle il n'y a pas de problématique de la validation sans problématique de la connaissance, et inversement. Il n'y a pas d'apprentissage des mathématiques sans un apprentissage des moyens de validation attachés à ces connaissances qui les façonnent et dont

[14] Voir p. ex. *Philosophie et mathématique leibniziennes*, Gilles-Gaston Granger (1981).
[15] Jean Piaget nomme « sujet épistémique » les structures d'actions ou de pensée communes à tous les sujets d'un même niveau de développement, par opposition au « sujet individuel ou psychologique » utilisant ces instruments de connaissance. (M.-F. Legendre, Fondation Jean Piaget, Piaget et l'épistémologie, consulté 190311 17:00) http://www.fondationjeanpiaget.ch/fjp/site/ModuleFJP001/index_gen_page.php?IDPAGE=320&IDMODULE=72

elles dépendent. Il est nécessaire que la question de la validité et de la validation soit posée dès les premiers moments de cet apprentissage. C'est un défi.
Les normes de la validation en mathématiques se singularisent au cours de la scolarité relativement à ce qu'elles sont dans d'autres disciplines. En une formule un peu facile, cela tient à ce que *les mathématiciens font ce qu'ils font parce que leurs objets sont ce qu'ils sont* au moment de leur activité. La question de la rigueur n'est pas abstraite, elle est une problématique dont la possibilité et la nature du développement dépend à la fois de conditions épistémiques, au sens piagétien, et de moyens techniques (les représentations et leurs traitements). Cette question est difficile en mathématique dont les objets sont déjà des représentations.

2. Précisions sur les types de preuve

La dépendance mutuelle de la conceptualisation, des systèmes de représentation et des systèmes de validation oblige à distinguer et à caractériser différents types de preuve pour pouvoir modéliser les évolutions possibles et leurs conditions. Cette nécessité est classiquement affirmée dans le cadre d'une problématique cognitive, ainsi l'un de ses représentants les plus actifs, le mathématicien David Tall, écrit-il : « The cognitive development of students needs to be taken into account so that proofs are presented in forms that are potentially meaningful for them. This requires educators and mathematicians to rethink the nature of mathematical proof and to consider the use of different types of proof related to the cognitive development of the individual. » (Tall, 1998, p. 136). L'histoire des mathématiques invite à élargir cette perspective, si le développement cognitif est l'un des déterminants des niveaux de validation – on le sait depuis les travaux de Jean Piaget – ils ne sont pas les seuls loin s'en faut. Il faut aller au-delà des problématiques cognitives (Balacheff, 1990) en prenant en compte, au moins, l'économie propre des situations de validation et l'état des connaissances.
La typologie des preuves que j'ai proposée à la fin des années 80 a souvent été utilisée en la réduisant à une liste de stades, ce qu'elle n'est pas. Sa construction, adossée à une recherche expérimentale, mettait en évidence l'imprudence qu'il y aurait à enfermer un ou une élève dans un type particulier. Les observations attestaient qu'il ou elle accepte un type de preuve selon ce que ses connaissances permettent de construire *et* sa perception de la situation. Cette dépendance est particulièrement manifeste lors du traitement de contre-exemples (Balacheff, 1987, p. 166 sqq.). De plus, plusieurs types de preuves peuvent être identifiés dans le cours de la résolution d'un problème ou dans le cours d'un débat. Ceci confirme un résultat classique d'Éphraïm Fishbein (1982, p. 17) qui observait que des étudiants revenaient à des vérifications élémentaires après avoir produit une démonstration. Les enjeux de l'interaction sociale, ou ceux de la situation, peuvent susciter cet effacement de l'argumentation mathématique au profit d'un discours visant à persuader, voire à se persuader.
Un type de preuve est moins une information sur l'élève que sur *l'élève en situation à un moment donné de son histoire mathématique*.

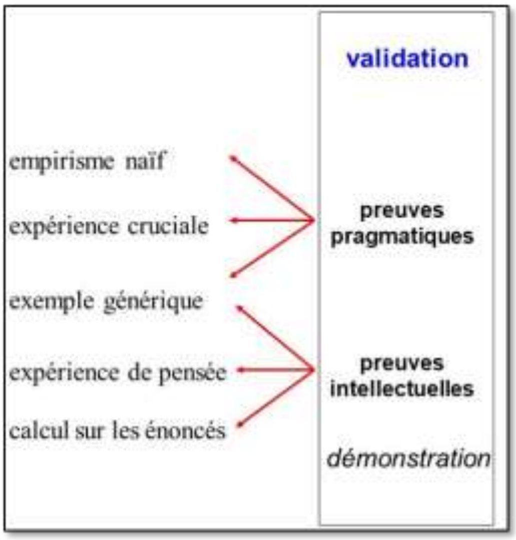


Figure 4.

La figure ci-dessus (Figure 5) présente sous une forme synthétique les types de preuves et rappelle les deux catégories auxquelles ils peuvent être rattachés. Ces catégories sont importantes pour situer les types de preuves dans la problématique de l'apprentissage de la démonstration[16].

Le passage de l'empirisme naïf à la démonstration peut, en une formule rapide, décrire le mouvement de l'apprentissage de la preuve en mathématique. Ce passage de preuves pragmatiques à des preuves intellectuelles nécessaire pour aller vers la démonstration, est aussi celui d'une *problématique pragmatique* à une *problématique théorique* et donc d'une évolution de la lecture des situations dans lesquels l'activité mathématique se déploie et celle du statut des connaissances mobilisées.

La compréhension de la complexité de l'apprentissage de la preuve requiert celle des relations entre connaissance et preuve, ou plus précisément entre conception et preuve. Par « conception » j'entends ici la caractérisation d'une connaissance en situation (Balacheff, 1995; Balacheff & Margolinas, 2005) qui associe en référence à l'interaction avec le milieu, les opérateurs qui sont mis en œuvre, les représentations (langagières ou non) et les contrôles. Sans entrer dans les détails de ce modèle, l'exemple qui suit illustre le rôle des contrôles en interaction avec les systèmes de représentation utilisés.

V. CONTROLE, VALIDATION ET PREUVE

1. Illustration 2 : un problème d'approximation

De multiples décisions stratégiques, tactiques ou liées à la mise en œuvre d'actions sont prises dans le cours de la résolution d'un problème. L'étude de cette part de l'activité est difficile car elle est souvent silencieuse ou associée à des comportements difficiles à interpréter. Ce sont des temps de réflexion dont la prise en compte pose des problèmes méthodologiques qu'il faut pouvoir résoudre car ils sont nécessaires à la compréhension du processus de résolution. La théorie des situations didactiques apporte des moyens pour cela. Notamment les situations de

[16] Faute de place, je ne développe pas ici la présentation des types de preuve, on peut pour cela se rapporter à (Balacheff, 1988, vol. 1) disponible en ligne.

formulation (Brousseau, 1998, p. 104 sqq.), en s'appuyant sur les interactions avec le milieu et les interactions sociales, permettent de susciter des propos ou des productions directement liées à la prise de décision. Une forme élémentaire de telles situations consiste à associer des élèves pour la résolution collaborative d'un problème avec la contrainte de se mettre d'accord sur une solution commune. Cette contrainte donne à la situation de formulation, qui requiert un langage commun, la caractéristique minimale d'une situation de validation qui requiert l'accord sur les critères et les moyens d'une décision.

Nathalie Gaudin (2005) a étudié les conceptions des étudiants engagés dans la résolution de problèmes impliquant des fonctions d'une variable réelles. Je présente ici une partie de ce travail qui n'a pas été publié par ailleurs. Il s'agit de la résolution d'un problème d'approximation. De tels problèmes donnent aux contrôles une place qui facilite l'observation de leur rôle et de leur fonctionnement. L'incertitude sur les critères de meilleure approximation favorise la discussion des caractéristiques générales ou recherchées d'une fonction en relation avec les données du problème. Les questions de lissage, en particulier, requièrent la considération de multiples aspects pour prendre des décisions fondées sur des raisonnements qualitatifs ou analytiques qui mettent en jeu les propriétés des systèmes de représentation algébrique ou graphique.

La situation conçue par Nathalie Gaudin exploite les fonctionnalités de Mapple[17] pour la constitution d'un milieu dans l'interaction avec lequel les étudiants vont construire leurs stratégies. Les systèmes de représentation graphique ou algébrique associés aux conceptions le plus souvent initialement mobilisées sont insuffisants pour comparer les fonctions-solutions envisagées, leurs formes et leurs régularités. Le problème posé aux étudiants, qui travaillent en binômes et doivent s'accorder sur une solution, est le suivant[18] (Gaudin, 2005 esp. chapitre 5) :

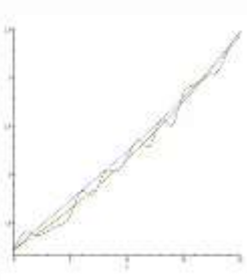
> *Ci-dessous des valeurs y_i, entachées d'erreurs aléatoires pouvant aller jusqu'à 10 %. Ces valeurs sont issues d'un polynôme P de degré 3 de coefficients inconnus, évalué en x_i.*

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y_i	1.22	1.41	1.38	1.42	1.48	1.58	1.84	1.79	2.03	2.04	2.17	2.36	2.30	2.57	2.52	2.85	2.93	3.03	3.07	3.31	3.48

On propose cinq approximations de ce polynôme.
Choisissez celle qui approche au mieux ce polynôme :

- *sur l'intervalle* [0;20]
- *sur* [0 ; +∞ [

$f_1(x) = 1,2310 + 0,0752\, x + 1,789 \times 10^{-3}\, x^2$



$f_2(x) = 1,2429 + 0,06706\, x + 2,833\times10^{-3}x^2 - 3,48 \times10^{-5}x^3$

$f_3(x) = 1,2712 + 0,0308\, x + 0,0115\, x^2 - 7,1626 \times 10^{-4}x^3 + 1,704 \times 10^{-5}x^4$

f_4 définie par :

• elle passe par chacun des points (x_i, y_i)

• sur chaque intervalle [x_i ; y_i], f_4 est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3

• elle est deux fois dérivable et sa dérivée seconde est continue

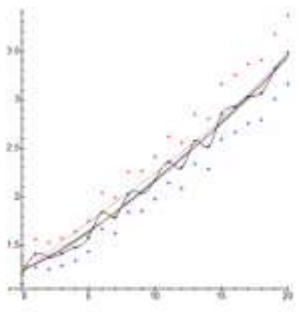
• sa représentation algébrique est la suivante (sur chaque intervalle [x_i ; y_i]) : [polynômes de degré 3 par intervalles]

17 https://fr.maplesoft.com/

18 Je ne reproduis pas ici la totalité de l'énoncé qui inclut la très longue définition de f4, et des indications pour l'usage de Mapple.

Vous expliquerez les raisons pour lesquelles vous retenez ou vous refusez chacune des approximations.

L'extrait de dialogue ci-dessous est repris du protocole d'observation de deux élèves, Rémi et Olivier (Gaudin, 2005, p. 233 sqq.) :



RÉMI : [*Donc le polynôme est quelque part là-dedans.*] A26
OLIVIER : [*Ouais. La meilleure approximation a le droit d'en sortir.*] A27a [*donc on est pas bien avancé*] A27 b
RÉMI : [*Ca dépend comment on définit meilleure. Ca dépend si tu considères un point sort c'est pas bien ou si c'est une moyenne… si c'est l'ensemble des point qui soit bien…*] A28 [*Tu vois ce que je veux dire. On essaie de retracer les polynômes si tu vois ce que je veux dire ? On les trace toutes.*
OLIVIER : *Toutes en même temps ?*] A29
RÉMI : [*Je sais pas si on va y voir grand-chose mais on peut essayer. Ou sinon on met des bonnes couleurs.*
OLIVIER : *Tu te rappelleras que c'est vert la première ? Tu peux noter ? Alors vert… bleu, il faut choisir les couleurs, rouge...*] A30

Le premier temps du traitement des dialogues, induit par le modèle cK¢ qui a sous-tendu l'analyse des données (Balacheff, 2017), a consisté à identifier les « atomes » qui seront les composant élémentaires de la description de l'activité de résolution de problème. Un atome peut être composé de plusieurs énoncés (e.g. A30), ou être constitué d'une partie d'un énoncé (e.g. A28, A29). Lorsque la convergence est suffisante, les énonciations de deux élèves peuvent être réunies dans un seul atome (e.g. A29, A30) sans hypothéquer l'identification des conceptions en jeu qui parfois s'opposent. Les contrôles sont particulièrement présents dans l'exemple retenu. Dans le cas de cette situation, ils sont à l'origine de la question critique de la définition de « approximation » (e.g. A28) ou des questions qu'elle soulève (e.g. A27a, A27b). Bien que limité, cet extrait illustre leur importance pour orienter et stabiliser la stratégie de résolution du problème.

RÉMI : [*Donc le polynôme est quelque part là-dedans.*] A26	A26 + A27a – évaluation d'un fait
OLIVIER : [*Ouais. La meilleure approximation a le droit d'en sortir.*] A27a [*donc on est pas bien avancé*] A27 b	A27b - jugement
RÉMI : [*Ca dépend comment on définit meilleure. Ca dépend si tu considères un point sort c'est pas bien ou si c'est une moyenne… si c'est l'ensemble des point qui soit bien…*] A28	A28 – évaluation d'un jugement
[*Tu vois ce que je veux dire. On essaie de retracer les polynômes si tu vois ce que je veux dire ? On les trace toutes.* OLIVIER : *Toutes en même temps ?*] A29	A29 – décision d'une action
RÉMI : [*Je sais pas si on va y voir grand-chose mais on peut essayer. Ou sinon on met des bonnes couleurs.* OLIVIER : *Tu te rappelleras que c'est vert la première ? Tu peux noter ? Alors vert… bleu, il faut choisir les couleurs, rouge...*] A30	A30 – évaluation d'une action

L'analyse des dialogues, souvent des débats contradictoires, entre les élèves révèle la présence de différents types et niveaux de contrôles que Nathalie Gaudin désigne et caractérise ainsi :

> Les *contrôles référents* (Gaudin, 2005, p. 161) qui guident la recherche. Par exemple : la forme de la courbe d'un polynôme du 3° degré, la proximité des $f_i(x_i)$ et y_i, la position de la courbe par rapport à (x_i, y_i).
>
> Ces contrôles se mettent en place en ayant à l'esprit qu'au terme de la résolution il faudra établir la validité de ce qui est fait. La validité de la solution se construit ainsi au cours de la résolution du problème ; cependant cela ne rendra pas nécessairement immédiat la production de la preuve en raison de possibles différences structurelles entre la structuration heuristique et les standards acceptés d'expression de la preuve (Pedemonte, 2005).
>
> Les *contrôles d'instrumentation* (ibid.) qui guident le choix des opérateurs en cohérence avec les contrôles référents. Par exemple : distance entre la courbe d'approximation et les points (x_i, y_i), critère de la meilleure approximation.
>
> Ces contrôles président au choix des bons outils pour la mise en œuvre de la stratégie qui a été choisie. Ils vont guider la sélection des actions en cohérence avec les contrôles référents.
>
> Les *contrôles locaux* qui garantissent la bonne mise en œuvre d'un opérateur.
>
> Les contrôles locaux sont ceux de la vérification locale de la possibilité d'utiliser un instrument ou d'appliquer un théorème. C'est la vérification de la valeur de « condition » dans le schéma [Si <condition> alors <action>] qui modélise un opérateur.

Ces distinctions permettent de repérer trois conceptions de la notion de fonction : (1) la conception « courbe » qui assimile la fonction de sa représentation graphique, (2) la conception « analytique » qui attache de façon privilégiée à la fonction sa représentation algébrique et (3) la conception « objet » (Sfard, 1991) qui mobilise les représentations et les outils des deux conceptions précédentes, mais avec la capacité de passer de façon en quelque sorte continue, fluide, d'un mode de représentation et de traitement, graphique ou algébrique, à l'autre (Balacheff & Gaudin, 2010). Pour chacune de ces conceptions les contrôles référents assurent la pertinence et la validité des procédures de résolution engagées et ils préparent la validation finale.

Eléments de la conception	**Courbe**	**Analytique**	**Objet**
Nature des contrôles référents (CR)	$CR1_{courbe}$: Allure globale de la courbe de l'approximation $CR2_{courbe}$: Proximité de la courbe de l'approximation aux points xiyi	$CR1_{ana}$: proximité des valeurs f(xi) de l'approximation aux valeurs yi ou proximité des points (xi, f(xi)) aux points xiyi	$CR1_{objet}$: Allure globale de la courbe de l'approximation $CR2_{objet}$: proximité des valeurs f(xi) de l'approximation aux valeurs yi ou proximité des points (xi, f(xi)) aux points xiyi
Nature des contrôles d'instrumentation (CI)	$CI1_{courbe}$: $CR1_{courbe}$ instrumenté par les représentations graphiques des courbes des fj $CR2_{courbe}$ non instrumenté	$CI1_{ana}$: $CR1_{ana}$ instrumenté par $\sum_{0}^{20}(fj(xi) - P(xi))^2$	$CI1_{objet}$: $CR1_{objet}$ instrumenté par les représentations graphiques des courbes des fj $CI2_{objet}$: $CR2_{objet}$ instrumenté par $\sum_{0}^{20}(fj(xi) - P(xi))^2$
Systèmes de représentation	Graphique	Analytique et graphique	Analytique et graphique

Figure 5.

Nathalie Gaudin a ainsi pu confirmer le rôle des conceptions courbe et analytique et dans la phase d'initialisation de la résolution du problème, puis l'évolution vers la conception fonction-objet dont le système de représentation inclut les registres graphique et algébrique de façon intégrée, et dont la structure de contrôle considère la fonction en soi distinguée du choix de sa représentation. Le tableau ci-dessous (**Erreur ! Source du renvoi introuvable.**) donne une représentation synthétique des caractéristiques de ces conceptions dans le contexte du problème étudié, selon les critères potentiels de sélection de la meilleure approximation.

Critère de choix de l'approximation	Conception courbe	Conception analytique	Conception objet
Mesure discrète	Σ : proximité visuelle de la courbe de f et des points xiyi R : tracer les courbes des fj et les points	Σ : minimiser l'opérateur $\sum_j [f_i(x_j) - y_j]^2$, j = 2, 5 R : évaluer $\sum_j [f_i(x_j) - y_j]^2$, j = 2, 5	Σ : minimiser l'écart (f – P) R : évaluer $\sum_j [f_i(x_j) - y_j]^2$, j = 1…5
Régularités de l'approximation	Σ : continuité, nombre de variations ≤ 2 R : tracer les courbes des fj et les points	Σ : conformité de f(x) à l'expression ax^3+bx^2+cx+d R : évaluer les expressions fj(x), j=1…5	Σ : faire le choix des régularités de l'approximation R : évaluer les régularités des fj
Incertitude	f1, f2 et f3 sont des approximations équivalentes relativement aux critères	f2 est la meilleure approximation	Pas de meilleure approximation sans définir l'usage de celle-ci, mais f1 et f2 assurent le plus de régularité

Figure 6.

L'activité de contrôle structure aux niveaux stratégiques et opérationnels la résolution d'un problème. Elle forge les liens étroits entre validation de la solution, préalable au jugement qui clôt la résolution, et l'élaboration d'une possible preuve. Ces liens tiennent à la nature de la connaissance et au rôle des structures de contrôles qui les constituent en interaction avec les systèmes de représentation et l'ensemble des opérateurs disponibles pour agir.

2. Contrôle, validation et preuve

L'étude de la genèse de la preuve m'avait conduit à remarquer que « [des] *contrôles logiques et sémantiques fonctionnent localement dans le cours de l'élaboration de la solution*. » (Balacheff, 1988, p. 36). Souligner ce caractère local était une négligence alors que j'observais par ailleurs la dépendance de ces contrôles aux conceptions engagées par les élèves (ibid. p. 305), leur place dans le choix d'une stratégie de résolution et leur rôle dans la décision de bonne fin — par exemple en revenant aux définitions. Il fallait lier contrôle, validation et preuve. Claire Margolinas va dans ce sens lors de son étude sur *l'importance du vrai et du faux dans la* *classe de mathématiques*, en mettant en évidence le lien fort entre contrôle et validation qu'elle l'exprime dans la définition qu'elle propose : « *nous appellerons processus de contrôle le processus d'anticipation de la validation*. » (Margolinas, 1993, p. 213).

Claire Margolinas distingue trois types de processus : (1) choix de la méthode, (2) procédé et procédure de résolution, (3) fin de résolution, (4) interprétation—distinction résultat/réponse (ibid. pp.214-215). Le séquencement de ces processus n'est le plus souvent pas linéaire (la fin de la résolution peut remettre en question la méthode, l'interprétation peut remettre en question le procédé, etc.). Ils puisent dans le répertoire des moyens stratégiques ou tactiques, globaux ou locaux, qui permettent de juger, vérifier, choisir et valider une décision. L'ensemble de ces moyens, en relation avec à des systèmes de représentation et des opérateurs dont ils dépendent et dont ils règlent l'usage, constitue la « structure de contrôle » qui entre dans la caractérisation d'une conception (Balacheff, 1995 ; Balacheff & Margolinas, 2005 ; Balacheff, 2017).

Les contrôles référents, d'instrumentation ou locaux qui constituent les processus de contrôle fournissent le matériau de l'argumentation heuristique qui prend forme dans la phase privée de la résolution d'un problème. Dans cette phase, résolution et validation sont intriquées sans qu'il y ait le besoin pour l'élève, ou le groupe d'élèves, d'expliciter systématiquement ou précisément les raisons des actions mises en œuvre. Toutefois, cette explicitation est nécessaire à l'apprentissage de la preuve, le problème de l'enseignant est de créer les conditions qui la sollicitent. Pour cela, les principaux leviers sont la création d'un défi peu tolérant à l'incertitude, un contexte d'interaction sociale (e.g. prise de décision collective) obligeant la formulation de l'argumentation dans un contexte susceptible de porter la contradiction, et un transfert vers les élèves de la responsabilité de la preuve. Le concept de *situation de validation* (Brousseau, 1998, pp. 109–110) thématise et modélise les situations qui associent ces trois leviers. Le travail sur la validation y domine celui de la résolution en donnant une place prépondérante aux processus de contrôle et rend difficilement évitable leur explicitation. En particulier dans la phase de fin de la résolution. Alors que la solution est assurée du point de vue de celui ou celle qui l'a produite, il faut la faire accepter par d'autres, passer de l'explication (privée) à l'argumentation (publique) acceptée comme preuve (instituée). Au cours du débat de preuve, la solution défendue peut être modifiée marginalement voire rejetée. Ce rejet relance la résolution du problème.

L'idée, présente dans les programmes, qu'il y ait d'une part la résolution du problème et d'autre part la preuve ou démonstration n'est pas en contradiction avec l'observation de l'imbrication entre résolution et validation. Mais le discours clivant de l'institution induit leur séparation dans la pratique de l'enseignement alors que la résolution ne perd pas de vue la validation, et la bonne fin de la phase conclusive dépend de la possibilité de construire un lien opérationnel en terme de connaissance ou de structuration logique entre résolution et validation (Garuti et al., 1998; Pedemonte, 2005).

Les processus de validation – contrôle, validation, preuve – se construisent sous au moins trois contraintes :

> Les *conceptions* mobilisées que caractérisent les opérateurs, les représentations et les *contrôles* disponibles.
>
> Le *langage* et *son organisation dans le discours* que l'on distinguera de la représentation des objets et de leur fonctionnement technique dans la résolution du problème. Ce langage décrit les mises en œuvre qu'il permet de communiquer et d'analyser.
>
> La *situation* qui fait peser des enjeux de validation plus ou moins forts qui règlent des principes d'économies de logique liés à toute pratique. Parmi ces situations celles incluant

un débat de preuve engagent la personne au risque d'un glissement du projet de convaincre vers celui de persuader.

Le *contrat didactique* qui, pour une situation donnée, détermine les responsabilités de la charge de la preuve.

VI. LA PREUVE COMME PRATIQUE DISCURSIVE

L'institution scolaire, les commentaires des programmes en témoignent, accepte que certains élèves échouent à apprendre la démonstration et que l'enseignant ne puisse être astreint à la démonstration de tous les énoncés qui sont au programme. La norme de communication et d'échanges nécessaire au fonctionnement du groupe social que constitue la classe de mathématique, incluant les élèves et l'enseignant, doit donc se construire en préservant la légitimité de plusieurs niveaux de discours sans cependant hypothéquer la place particulière de la démonstration dans l'établissement de la validité d'un énoncé.

1. Illustration 3 : faut-il laisser les élèves s'exprimer dans leur langage ?

Le document « Raisonnement » qui accompagne le programme du cycle 4 renvoie à un compte-rendu de recherche de l'équipe académique Mathématiques de l'académie de Bordeaux (2003) qui propose un exemple de progression pour « *l'initiation au raisonnement déductif* ». L'introduction de ce texte commence par l'exemple d'un problème de géométrie (**Erreur ! Source du renvoi introuvable.**).

Tracer un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 3 cm. Tracer un diamètre [AB]. Placer deux points K et L sur le cercle $\mathscr{C}$ tels que K et L sont dans le même demi-plan de frontière (AB).

1) Démontrer que les triangles AKB et ALB sont rectangles.
2) Les droites (AK) et (BL) se coupent en C. Les droites (AL) et (BK) se coupent en H.
   Démontrer que (CH) est perpendiculaire à (AB).

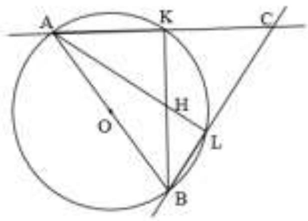


Figure 7.

Le problème est posé sous la forme habituelle des activités d'évaluation dans une classe de quatrième. Les élèves remettent leurs copies, l'image ci-dessous (**Erreur ! Source du renvoi introuvable.**) présente la transcription de l'une d'entre-elles.

1) On sait que [AB] sont le diamètre du cercle et que K et L sont sur le cercle. Dans un cercle circonscrit tout points se trouvant sur ce cercle est rectangle à un triangle, là c'est le cas « AKB » K est rectangle.
   Donc AKB est rectangle et ALB et rectangle.
2) On sait que : c'est le sommet du triangle ABC est H coupe le milieu du segment [AB].
   Donc (CH) ⊥ (AB).

Figure 8.

La transcription est accompagnée de peu d'information hors l'effet de surface de la mise en page et de la régularité de l'écriture qui suggèrent l'attention de l'élève au respecter d'une norme. Ce choix conforte le commentaire des auteurs qui suggèrent que l'élève « a compris le mécanisme d'une démonstration à un pas, même si ses formulations sont extrêmement maladroites. En revanche, il n'aborde en aucune façon la démonstration à deux pas et fournit des arguments qui n'ont plus aucune cohérence avec la recherche conduite. » (ibid. p.11). Le lecteur conviendra de ce que le schéma ternaire de l'inférence parait saisi dans sa forme sinon « compris » par l'élève, il est difficile d'en dire plus. Quant à ses « maladresses de langage », elles invitent à s'interroger sur un possible conflit entre le langage qu'il utiliserait s'il en prenait la liberté et celui qu'il cherche—probablement—à adopter. Des questions se posent naturellement à l'enseignant qui n'aura le plus souvent, même s'il a une connaissance personnelle de ses élèves, que des copies comme données pour ses évaluations : « l'élève n'est-il pas perturbé par ce modèle de rédaction ? N'est-il pas préférable de le laisser s'exprimer dans son langage ? » (ibid.). La rédaction de la solution est en effet un problème parce que l'élève ne peut se soustraire à l'obligation d'attester qu'il acquiert les formes d'expression nouvelles qui lui sont enseignées ; cette obligation est constitutive du rapport didactique au savoir. Il est « perturbé » au sens où il ne peut simplement exprimer par écrit l'éventuelle argumentation qu'il partagerait avec d'autres élèves ; il opère en quelque sorte une « *transposition inverse* » qui n'est pas un renoncement à ce que serait son argumentation privée (Keskessa, 1994, p. 363 sqq.). Il l'est aussi parce que le passage à l'écrit est à la fois un retour sur la résolution et un processus d'objectivation dans un but particulier et précisé (ici la validation dans le cadre d'un travail qui sera évalué). Le passage à l'écrit est en soi d'une grande complexité à quoi s'ajoute celle de l'apprentissage de la norme particulière de discours de la classe de mathématique (Duval, 1998). La suggestion à l'enseignant de laisser l'élève « s'exprimer dans son langage » a un caractère paradoxal en vidant son action du sens qui la fonde. Le faire par le moyen d'une progression qui conduirait peu à peu à l'acquisition de différents aspects de « l'expression d'un raisonnement déductif » est une proposition qui peut être efficace sur le versant technique, reste celle sur le versant fonctionnel de la relation entre résolution et validation ; c'est-à-dire « la *nécessité de prouver* » (Équipe académique Mathématiques, 2003, p. 11).

D'une façon générale, et donc pour l'élève, reconnaitre la nécessité de prouver tient à l'évaluation des enjeux du contexte de l'activité. Ce peut être la réponse à une injonction, celle de l'énoncé du problème posé lors d'un examen, ou témoigner de l'endossement de la responsabilité d'une prise de décision, résolution d'un problème ou achèvement d'une tâche. Les deux problématiques sont inséparables dans la classe en raison de la nature même de la relation qui lie les élèves et l'enseignant, mais le poids respectif de l'injonction et du nécessaire peut être ajusté en agissant sur les caractéristiques de la situation.

2. Situation de validation au sens de la théorie des situations didactiques

Les caractéristiques de la situation dans laquelle se trouve l'élève conditionne, tout particulièrement aux niveaux élémentaires, le fait qu'il accepte ou non la responsabilité de la validité de la solution d'un problème. Prendre cette responsabilité, c'est-à-dire ne pas la déléguer à un autre élève, pas même à l'enseignant, est le moteur de l'apprentissage de la preuve en mathématique, de son rôle, de ses méthodes et critères, de ses formes. La théorie des situations didactiques conceptualise et modélise de telles situations pour les comprendre et les concevoir. Je ne présenterai pas de façon détaillée le concept de situation de validation, je rappelle simplement ci-dessous l'idée que Brousseau avait en le forgeant à la fin des années 60 parce qu'elle donne une direction à la réflexion que nous devons avoir aujourd'hui pour satisfaire aux ambitions des programmes :

> *« L'élève doit établir la validité d'une assertion, il doit s'adresser en tant que sujet à un autre sujet susceptible d'accepter ou de refuser ses assertions, de lui demander d'administrer des preuves de ce qu'il avance, de lui opposer d'autres assertions. Ces échanges contribuent à faire expliciter les théories mathématiques mais aussi à mettre en*

> *place les mathématiques en tant que moyen d'éprouver celles que l'on conçoit. Une démarche de preuve est construite dans une dialectique de la validation qui conduit l'élève, successivement à user spontanément des figures de rhétorique puis à y renoncer. Les relations que l'élève doit pouvoir établir pour cela sont spécifiques de cette dialectique. » (Brousseau, 1998, p. 127)*

Le modèle d'une situation de validation est un jeu social dont l'enjeu est la validité d'un énoncé qui doit pouvoir être explicitement défendu ou rejeté par les protagonistes sur un pied d'égalité quant à la légitimité de prétendre ou de réfuter. Les échanges requièrent un système de représentation, langagier et/ou non langagier, et une référence (savoirs, milieu matériel, ressources documentaires) partagées.
Une *situation de validation orientée vers un apprentissage explicite de la preuve* devra inclure le besoin de reconnaitre la nécessité de règles du débat, de les énoncer et dans convenir collectivement, ainsi que celle d'un accord sur la structure du discours et les critères d'acception de la preuve. La situation de résolution de problème sur laquelle se construit la situation de validation doit susciter non seulement le débat de preuve, mais aussi celui sur la nature et la légitimité de cette preuve. Pour cela, le milieu en tant que « système antagoniste du système enseigné » (Brousseau, 1998, p. 93) doit inclure, outre les protagonistes du jeu, le milieu pour la résolution du problème (« milieu pour l'action » dans le schéma classique de la validation). Pour autant, le milieu, qui n'est pas nécessairement matériel, construit par chacun des protagonistes dans le cours de la résolution, doit être partagé parce qu'il est une référence commune nécessaire à l'arbitrage du débat de preuve. Ainsi chaque élève a pour « antagoniste » le milieu « contre lequel » il résout le problème et les autres élèves « *contre qui* » il ou elle défend la validité de sa solution ou la légitimité de sa réfutation d'une solution par ailleurs défendue.
Le schéma ci-dessous (Figure 10) reprend le schéma initial de la théorie des situations didactiques. Il explicite, dans le modèle du jeu à deux joueurs et du point de vue du « joueur A », tour à tour proposant et opposant, le milieu pour la validation qui inclut le milieu pour la résolution du problème et le « joueur B ». Dans ce schéma, le « *milieu action* » est le produit d'une dialectique action/rétroaction au cours de laquelle l'élève construit une représentation de la situation qui lui sert de « *modèle* » et de guide pour prendre ses décisions.

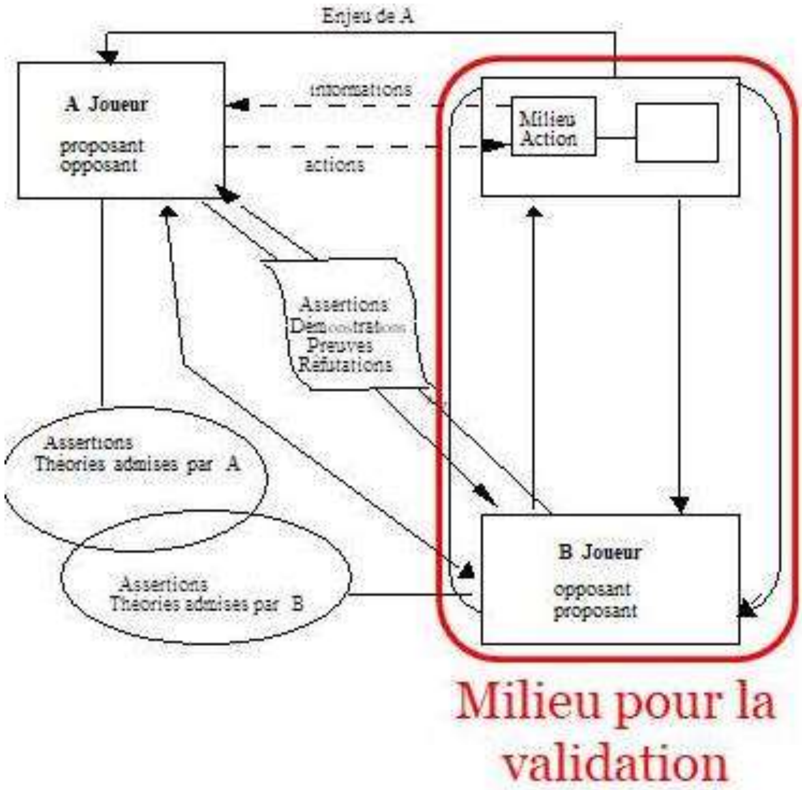


Figure 10 : adapté de « Schéma de la validation explicite » (Brousseau, 1998, p. 110).

Dans le jeu de la validation, *la compétence langagière est l'instrument de la dialectique du vrai et du faux* : le milieu matériel ne suffit pas (Margolinas, 1993, p. 84). Cette compétence inclut les techniques propres aux registres sémiotiques des mathématiques (e.g. écriture algébrique, représentation et codage des objets géométriques) et les figures rhétoriques spécifiques de la discipline. S'il y a un accord sur la spécificité du discours mathématiques et un consensus sur les critères de bonne forme d'une démonstration dans la communauté des mathématiciens[19], il n'en va plus de même quand il s'agit de s'accorder sur la nature et la forme souhaitable et acceptable d'une preuve en mathématique dans le contexte de son enseignement. Ainsi, l'observation de l'évolution des programmes France ou les choix faits dans divers pays (Knipping, 2003; Miyakawa, 2016) montrent que les normes et les pratiques peuvent significativement différer. Il faut chercher dans la diversité des cultures sous-jacentes, celle des normes sociales du débat et celle des épistémologies sous-jacentes la source de ces différences. L'apprentissage de la preuve, au-delà de l'apprentissage de techniques, passe par une acculturation à des pratiques discursives.

Cet apprentissage pose des problèmes à l'enseignant aux niveaux élémentaires sous-estimés par l'institution ; ils sont aussi un défi pour la recherche. Les travaux de recherche expérimentale et empirique très nombreux montrent ces difficultés, j'en retiendrai deux pour illustrer cet exposé : ceux d'Andreas J. Stylianides qui propose une conceptualisation de la preuve à l'école élémentaire, et ceux de Carolyn Maher qui portent sur le suivi de l'évolution de « l'idée de preuve mathématique » d'une élève sur cinq années.

3. Illustration 4 : La somme de deux nombres pairs est-elle toujours paire ? Une activité collective en CE2

Les recherches d'Andreas Stylianides sur l'enseignement de la preuve à l'école primaire sont dans la suite de ceux de Deborah Ball qui identifie trois problèmes auxquels les professeurs des

[19] Ce consensus n'exclut pas des remises en question, par exemple lorsque le recours à des moyens informatiques ont été possibles.

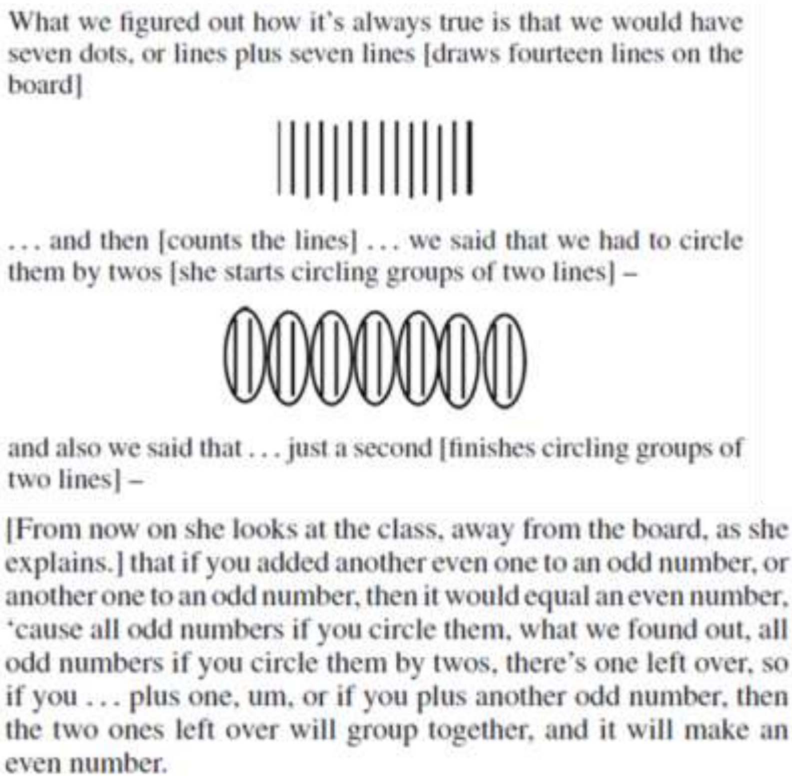
écoles sont confrontés : (1) la représentation des connaissances mathématiques (Ball, 1993, p. 378 sqq.), (2) respecter l'élève comme acteur en mathématique (*mathematical thinker* – ibid. p.384 sqq.), (3) créer une communauté de discours mathématique (ibid. p. 388 sqq.). Andreas Stylianides en retient que la preuve à l'école primaire *« should be conceptualized so that it is, at once, honest to mathematics as a discipline and honoring of students as mathematical learners.* » (Stylianides, 2007, p. 3). Pour en étudier la possibilité, il s'appuie sur une caractérisation par quatre éléments :

> *« The four elements are the argument's foundation (i.e., what constitutes its basis: definitions, axioms, etc.), formulation (i.e., how it is developed: as a logical deduction, as a generalization from particular cases, etc.), representation (i.e., how it is expressed: using everyday language, algebraically, etc.), and social dimension (i.e., how it plays out in the social context of the community wherein it is created). » (ibid. p.2)*

Pour conforter cette proposition, il prend pour exemple une séquence filmée dans le cadre du *Teaching and Learning to Teach Project* de l'université de Michigan[20] dans la classe de Deborah Ball (ibid. section 4). Cette classe de troisième année—celle de la fin du cycle 2 en France—cherche à répondre à la question suivante : est-ce que la somme de deux nombres impairs est toujours paire ?
Après des vérifications sur plusieurs exemples, les élèves conjecturent que la somme de deux nombres impairs sera toujours paire. Deborah Ball les met au défi d'expliquer pourquoi cette conjecture est vraie ; l'une des élèves, Jeannie, doute que ce soit possible parce qu'il y a une infinité de nombre (« [they] go on for ever »), d'autres, telle Ofala, pensent que la vérification faite sur 18 cas suffit. Quelques jours plus tard, Deborah Ball revient sur sa question en expliquant que les mathématiciens chercheraient dans ce cas à comprendre quelles propriétés des nombres impairs font que la somme de deux d'entre eux soit un nombre pair. Elle aide les élèves à se souvenir des définitions des nombres pairs et impairs (groupement par deux des éléments d'une collection, avec ou sans reste d'un élément). Le défi de prouver la conjecture est renouvelé en utilisant la définition ; les élèves travaillent en groupes. La troisième séance commence par le compte-rendu des groupes d'élèves. Un premier élève, Tembe, donne un nouvel exemple (7+7=14), puis une élève, Betsy, dit qu'elle a une preuve—elle l'expose en reprenant le cas 7+7 mais avec une représentation montrant la propriété utilisée (Figure 11). Deborah Ball résume la preuve proposée par Betsy puis sollicite l'avis des élèves. Alors que certains élèves contestent parce que 7+7 est un cas particulier[21], Jeannie l'accepte en remarquant : « […] she didn't say it had to be those two numbers, those two odd numbers, it could be any two odd numbers because, um, there's always one left. » Le travail collectif reprend. Quelques temps plus tard, le représentant d'un groupe, Mark, est invité à faire un bilan : « And we were still getting answers and we were thinking about, we were trying to prove, and Betsy came and she had proved it, and then we all agreed that it would work ». La classe passe à autre chose.

[20] Le site de ce projet et ses ressources ne sont plus disponibles en ligne.

[21] Il n'est pas relevé que 7+7 est le double de 7 et que donc la parité a deux origines dont l'une n'est pas générique -- sauf à changer de propriété pour « le double d'un nombre impair est pair ».



What we figured out how it's always true is that we would have seven dots, or lines plus seven lines [draws fourteen lines on the board]

... and then [counts the lines] ... we said that we had to circle them by twos [she starts circling groups of two lines] –

and also we said that ... just a second [finishes circling groups of two lines] –

[From now on she looks at the class, away from the board, as she explains.] that if you added another even one to an odd number, or another one to an odd number, then it would equal an even number, 'cause all odd numbers if you circle them, what we found out, all odd numbers if you circle them by twos, there's one left over, so if you ... plus one, um, or if you plus another odd number, then the two ones left over will group together, and it will make an even number.

Figure 11.

La séquence choisie montre la coexistence de l'empirisme naïf (Tembe), de l'exemple générique (Betsy) et de l'expérience mentale (Jeannie). En revanche, ces possibilités ne sont que marginalement débattues. Ou plutôt, l'enseignante fait émerger des positions, des arguments et des désaccords mais les élèves ne vont pas jusqu'au bout de la discussion dont elle reste la médiatrice qui distribue la parole, la reçoit et la reformule. Aussi, cet exemple illustre-t-il trois des éléments de la caractérisation proposée par Andreas Stylianides (les savoirs, la structure du discours, les représentations), mais reste confus sur le quatrième élément, la dimension sociale.

L'enseignante joue un rôle clé tout au long de la séquence, mais s'efface dans la phase finale dont on peut même imaginer qu'elle soit peu remarquée ; sa parole ne relaie pas celle de Mark. Andreas Stylianides note que la séquence se termine sans institutionnalisation. En fait, le rôle clé de l'enseignante tout au long de cette séquence est occulté par l'analyse centrée sur les échanges d'arguments (ibid. section 4.5.3), il en résulte l'illusion d'un débat de validation entre les élèves. Pour autant, l'insuffisance de la séquence est relevée :

> « […] one can draw two conclusions. First, Betsy's argument cannot count as proof, because it was not accepted as such by the classroom community. Second, the classroom community had not yet developed, or socially shared, all the necessary rules of discourse that would support the elevation of Betsy's argument to the status of proof within the community. » (ibid. p.15)

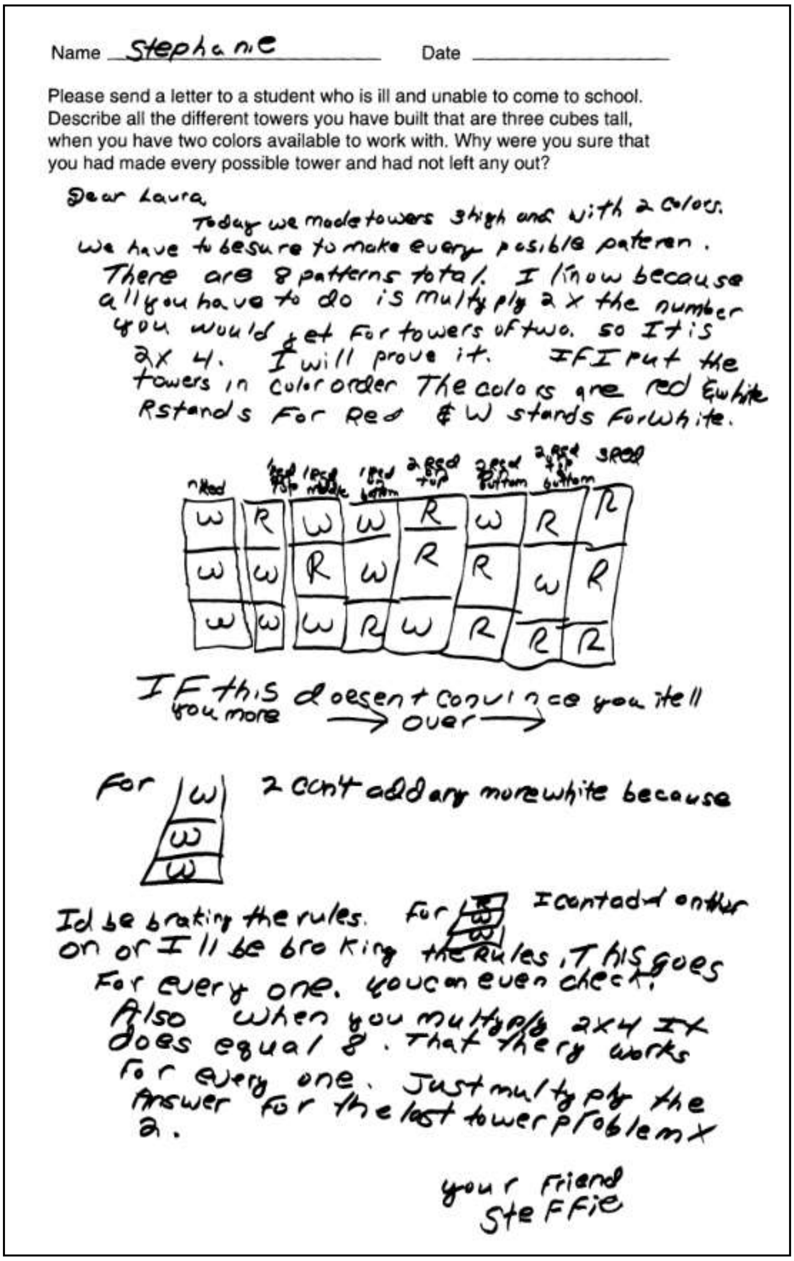
En fait, tel que rapporté, l'épisode se termine par une acceptation de la déclaration de Mark puisque l'enseignante de la rejette pas. Ce qui est observé me parait relever d'un effet Topaze par lequel l'enseignante valide implicitement la proposition de Betsy comme preuve et les élèves sont quittes pour cette activité.

La question de la validation était présente dans la classe de Deborah Ball ; *des* élèves—et non *les* élèves—ont élaboré une argumentation qui pouvait être candidate au statut de preuve. Le cas rapporté par Andreas Stylianides illustre que pour que ce statut soit reconnu il faut d'une part que la preuve soit prise comme objet du débat, pour sa nature et sa forme, et que d'autre part un processus en permette la reconnaissance puis l'intégration dans les règles de fonctionnement de la classe.

4. Illustration 5 : la longue exploration d'un problème combinatoire

Carolyn Maher a conduit au début des années 90, à l'université Rutgers, l'une des rares recherches sur la résolution de problèmes attentive aux processus de preuve sur une longue durée ; les observations ont été réalisées, avec un groupe d'élèves stable, de la première à la cinquième année de scolarité—soit le cycle 2 et les deux premières années du cycle 3 en France. L'objectif était de lever la contrainte temporelle et celle des programmes pour permettre aux élèves de construire, murir, discuter les solutions qu'ils envisagent. Les problèmes appartenaient à un même domaine, la combinatoire élémentaire propice à l'invention de méthodes, de représentations, et à la création d'un espace d'expérience autonome sur lequel le programme ne pèse pas mais cependant riche d'un point de vue mathématique (conceptualisation, formalisation, argumentation). Je retiens ici un exemple tiré de l'étude du cas de Stéphanie (Maher & Martino, 1996a).
Un ensemble d'épisodes jugés « critiques » a été extrait des données récoltées (enregistrements vidéo, interviews), ils éclairent l'activité de Stéphanie pour résoudre le problème de dénombrement des différentes tours que l'on peut construire avec un nombre donné de cubes de deux couleurs ; ce nombre est petit, il est fixé par l'enseignant (4 en octobre 1990, 5 puis 6 en février 1992)[22]. Les 11 épisodes critiques résument de façon compacte la période 1990-1992. Ils montrent l'évolution des moyens de représentation qu'élabore Stéphanie en passant de la manipulation des cubes à leur représentation et codage (« *letter-grid* »). Le besoin de contrôler le dénombrement est le moteur de l'évolution des représentations. Les stratégies évoluent de l'essai-erreur jusqu'à un raisonnement par cas : dénombrer les tours ayant un cube rouge, puis deux cubes rouges, etc… La nécessité d'une validation est présente mais reste une exigence interne à l'activité de résolution jusqu'à ce que l'enseignante, jusque-là tenue à la neutralité, invite les élèves à *lui* proposer une preuve de leur solution : « How do you know that you have them all? […] Can you convince me that you have all possibilities, that there are no more or no fewer ? » (ibid. p.211 – *event 10*, mars 1992). Certes l'enseignante demande aux élèves de *la convaincre*, mais la tâche effectivement prescrite consiste à rédiger une lettre destinée à des élèves absents dans laquelle seraient décrites les différentes tours construites avec trois cubes de deux couleurs, pourquoi il est assuré que toutes les possibilités sont présentes et aucune n'est oubliée (traduction libre, voir Figure 12).

[22] Cette situation a été précédée d'une situation analogue, combiner des chemises et des jeans (3-2 puis 3-3).



Name Stephanie Date

Please send a letter to a student who is ill and unable to come to school. Describe all the different towers you have built that are three cubes tall, when you have two colors available to work with. Why were you sure that you had made every possible tower and had not left any out?

Dear Laura,
Today we made towers 3 high and with 2 colors. We have to be sure to make every posible pateren. There are 8 patterns total. I know because all you have to do is multyply 2 x the number you would get for towers of two. so It is 2x 4. I will prove it. If I put the towers in color order The colors are red & white. R stands for Red & W stands for White.

0 Red	1 red top	1 red middle	1 red bottom	2 red top	2 red bottom	2 red bottom	3 red
W	R	W	W	R	W	R	R
W	W	R	W	R	R	W	R
W	W	W	R	W	R	R	R

If this doesent convince you I tell you more → over →

For W W W I can't add any more white because I'd be braking the rules. For R W W I cant add enther on or I'll be broking the Rules. This goes for every one. you can even check. Also when you multyply 2x4 It does equal 8. That thery works for every one. Just multyply the Answer for the last tower problem x 2.

your friend
Steffie

Figure 12.

Stéphanie joue le jeu de la communication en s'adressant à une autre élève de sa classe, Laura. Elle expose ses arguments pour assurer qu'exactement 8 tours sont constructibles en dessinant un schéma (« *letter grid*») qui code les tours et suggère le mode d'énumération par cas avec une légende au sommet de chacune (0 red, 1 red, 2 red, 3 red). Stéphanie envisage que cette argumentation puisse ne pas suffire et ajoute qu'elle ne peut ajouter un cube sur une tour blanche sans enfreindre la règle, ce que l'on peut interpréter comme une tentative d'argumenter l'exhaustivité pour ce cas. De même, il ne resterait qu'à ajouter un cube pour changer une tour de trois cubes blancs, ce qui n'est pas possible, etc. « This goes for every one. You can even check. » L'ensemble de cette argumentation et la rédaction de Stéphanie ont enchanté Carolyn Maher et Amy Martino qui soulignent « l'invention » de la *preuve par cas* au terme d'une longue évolution. Mais le lecteur attentif notera que Stéphanie énonce la conjecture selon laquelle le nombre de tours différentes de hauteur 3 est deux fois celui des tours de hauteur 2. Elle conclut même sa lettre en affirmant : « Just multiply the answer for the last tower problem *x*2 » ; la preuve par cas proposée n'est pas pertinente pour valider cette conjecture (ce qui serait possible en réarrangeant les colonnes).

L'écart entre la conjecture avancée par Stéphanie et l'argumentation qu'elle propose pour convaincre une autre élève (ou le professeur) offre une opportunité de prendre la question de la preuve pour objet d'un travail collectif. La question du dénombrement est résolue avec un exemple générique dont une évolution permettrait d'établir la conjecture. D'autres élèves avaient d'ailleurs remarqué la relation de récurrence (Maher & Martino, 1996b, p. 442), notamment Jeff qui lui associera plus tard une représentation (Figure 13), source possible d'une évolution de la preuve de Stéphanie.

Jeff: You multiply by two, the last number you got you multiply by two because you make branches off of them. [He referred to adding two branches to the top of each tower to represent the two possible colors which could be added to the top a tower.]

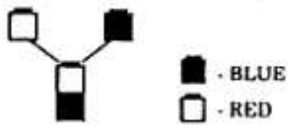


FIG. 24.8. Milin's method for finding all towers (b).

Figure 13.

5. De l'argumentation outil à la preuve objet

Quelle que soit leur nature, les problématiques de la validation et les processus de contrôle sont constitutifs de la résolution de problèmes. Il s'agit d'éveiller les élèves à leur rôle, de faire prendre conscience de leur spécificité en mathématique et de permettre l'apprentissage de leurs caractéristiques et fonctionnements. Cet apprentissage ne peut relever seulement de l'instruction ou de l'injonction, parce que c'est l'évolution d'une rationalité qui est en question, l'autonomie des élèves est une composante critique de sa possibilité.
La théorie des situations modélise les conditions qui maximisent la mise à l'écart des clauses d'un contrat didactique qui hypothèqueraient l'autonomie des élèves, c'est-à-dire leur responsabilité, ou la pertinence des connaissances qu'ils mobilisent (e.g. en prenant en compte des éléments anecdotiques du contexte). Les échanges dans le cours de ces situations et les arguments sur lesquels les protagonistes se mettent d'accord permettent d'assurer la validité d'un résultat mais ils ne requièrent pas nécessairement la réflexion indispensable pour décider en quoi et pourquoi il s'agit d'une preuve. En effet, le travail de la validation largement silencieux dans l'activité privée peut le rester dans le travail collectif parce qu'il procède d'un accord tacite qui régit le travail ordinaire de la résolution de problème.
Lors de son cours intitulé « *Rationalité et démonstration mathématiques* » donné à la V° école d'été de didactique des mathématiques, Marc Legrand formulait l'hypothèse selon laquelle « *Il n'est pas beaucoup plus raisonnable d'espérer pouvoir introduire inductivement et naturellement les élèves ou les étudiants dans la rationalité mathématique, à partir d'une pédagogie centrée sur les situations-problèmes, qu'il ne l'est de croire qu'ils finiront bien par entrer dans cette rationalité grâce à une pédagogie de simplement monstration*. » (Legrand, 1990, p. 386). Cette hypothèse est confortée tant par la pratique de l'enseignement que par la recherche expérimentale qui a bien des difficultés à situer le rôle de l'enseignant et ses moyens.
La conception des situations de « *débat scientifique* » (Legrand, Lecorre, Leroux, & Parreau, 2011) cherchent à donner une réponse opérationnelle pour sortir de ce qui apparait comme un dilemme tant pour l'enseignement que pour l'institution (comme le montre les programmes). Elles reposent sur un engagement fort de l'enseignant initiateur de situations ayant une « *consistance épistémologique* », une « *bonne adéquation avec la nature des savoirs à*

enseigner [… et …] au *milieu des connaissances effectivement disponibles chez les élèves/étudiants* » (ibid. p. 115) puis son relatif retrait en arbitre des échanges jusqu'au moment d'une nécessaire institutionnalisation « *pour mettre de l'ordre dans le désordre qu'introduit fatalement le débat et pour introduire et expliquer ce qu'aucun débat ne peut introduire et/ou expliquer à un coût raisonnable*. » (ibid. p.116).
Ce que Marc Legrand désigne, et sur quoi il insiste, est l'ensemble des *règles du débat* pour l'établissement de la preuve et, corrélativement, de la réfutation en mathématique. Il faut, pour expliciter ces règles, passer de *l'argumentation outil du processus de validation* qui repose sur des règles tacites, au *débat sur l'argumentation comme objet* dont les caractéristiques explicitées conditionnent sa recevabilité comme *preuve*. En d'autres termes, la question de la validité de la solution du problème précisément en jeu doit être dépassée pour laisser la place à celle des critères du vrai qui n'est pas autre chose que poser les bases de la production des connaissances mathématiques. Avec toutes les précautions qu'appelle l'utilisation de ce vocabulaire, ce qui est à l'ordre du jour est *l'entrée des élèves dans une problématique théorique*[23].
Les difficultés de l'enseignement de la démonstration ont conduit à privilégier celui des règles de production de la preuve et des formes de sa formulation ramenées à un apprentissage de la logique. Ainsi l'acquisition du schéma fondamental du *modus ponens* (A, A→B ⊢ B) et de ses conditions d'utilisation apparait-elle être le principal objectif. Cette priorité met au second plan le fait que la validation d'un énoncé ne tire pas sa légitimité du seul statut des énoncés mobilisés par le problème considéré, mais de celui de l'ensemble de ceux auxquels ils sont liés au sein d'un ensemble structuré, une *théorie* qui doit être reconnue pour telle[24].
La comparaison de l'enseignement en France et dans d'autres pays conforte cette observation : *le caractère localement organisé des connaissances* impliquées dans la production d'une preuve dans les livres scolaires français contraste avec l'organisation quasi-axiomatique au Japon (Miyakawa, 2016, sec. 3.3.3), ce qui n'exclut pas l'existence et l'usage d'un répertoire de théorèmes qui constitue le savoir officiel (Knipping, 2003, p. 6/10) mais c'est autre chose.
La référence à un cadre théorique explicite en tant que contexte de l'activité mathématique est présente dans nombre de recherches mais n'a pas été thématisée jusqu'à la proposition d'Alessandra Mariotti et de ses collègues de définir « *théorème mathématique* » comme le système des relations mutuelles entre trois composantes : un énoncé, sa preuve et la théorie au sein de laquelle cette preuve prend sens (Mariotti, Bussi, Boero, Ferri, & Garuti, 1997, pp. 182–183).
Outre la maitrise de compétences de raisonnement (logique) communément signalée comme un requis minimal, l'apprentissage de la preuve en mathématique implique la prise de conscience de ce qui la sépare de l'argumentation naturelle acquise au fil des interactions sociales quotidiennes, et une *rupture épistémologique* pour entrer dans une problématique théorique dont la nature est essentiellement différente de celle de la connaissance commune.
Modéliser les situations qui permettent de prendre en charge cette rupture reste le principal problème auquel nous sommes confrontés. De telles situations doivent réunir les conditions pour que l'argumentation, outil de la résolution de problèmes, soit prise comme objet pour comprendre et apprendre ce qu'est *une preuve en mathématique*. L'apprentissage se fera dans une dialectique du pratique et du théorique au sens de la *dialectique outil-objet* modélisée par

[23] Passage de *l'élève-praticien* à *l'élève-théoricien* (Balacheff, 1988, vol. 1 p.54)
[24] Ceci m'a conduit à affirmer que « le point fort qui sépare l'argumentation et la démonstration est la nécessité pour cette dernière d'exister relativement à une axiomatique explicite. » (Balacheff, 1999) et à rejeter l'idée d'une *argumentation mathématique* en m'appuyant sur les travaux des sciences du langage (ibid.). Ce point de vue peut être reconsidéré en introduisant en regard de la *valeur épistémique* d'un énoncé sa *valeur ontique*. J'évoque cette évolution dans la conclusion, je l'ai développée lors de mon exposé au CORFEM en juin 2019.

Régine Douady dans laquelle, il faut le rappeler, l'objet est plus que la somme de ses caractéristiques logiques et discursives :

> *« Par objet, nous entendons l'objet culturel ayant sa place dans un édifice plus large qui est le savoir des mathématiciens, à un moment donné, reconnu socialement. L'objet est mathématiquement défini, indépendamment de ses usages. Le statut d'objet permet la capitalisation du savoir et donc l'extension du corps des connaissances. Il permet aussi le réinvestissement dans de nouveaux contextes éventuellement très éloignés du contexte d'origine. » (Douady, 1992, p. 134)*

VII. CONCLUSION

Contrôle, *preuve* et *démonstration* sont trois régimes de la validation dont les poids respectifs changent au long du continuum qui va de la résolution d'un problème à la communication formelle de sa solution (i.e. selon des normes institutionnelles). Leurs interactions mutuelles et leur dépendance aux conceptions sous-jacentes qui les rendent possibles et dont ils suscitent l'évolution, les constituent en un système dont la nature détermine celle des mathématiques elles-mêmes.

La longue histoire de l'enseignement de la démonstration et de ses échecs pour un trop grand nombre d'élèves a installé des pratiques qui tendaient à disjoindre ces trois régimes en séparant résolution et validation, et en introduisant la démonstration en rupture avec les pratiques qui la précèdent. Au cours des dernières décades, la doctrine institutionnelle a cherché à faire évoluer l'épistémologie scolaire qui en résultait vers un rapport aux mathématiques plus proche des caractéristiques épistémologiques de cette discipline. Ainsi l'acquisition de savoirs est-elle complétée, ou peut-être contextualisée, par celle de « compétences » parmi lesquelles les programmes actuels désignent *chercher*, *raisonner* et *communiquer*.

La définition assez large et non réductible à des techniques de ces compétences pourrait-elle permettre l'émergence d'une activité *qui donne de l'épaisseur au discours mathématique* et pourrait *faire vivre dans la classe une véritable petite société mathématique* ? En reprenant, pour formuler cette question, les mots de Guy Brousseau (1998, p. 111).

Bien sûr, il n'y a pas de réponse tranchée. En revanche, les résultats de la recherche tant sur l'amont épistémologique que sur l'ingénierie de situations pratiquées effectivement ou conçues à des fins expérimentales constituent une base solide pour construire un programme scientifique qui permettra d'y répondre.

Lorsque Guy Brousseau utilise les expressions que j'emprunte ci-dessus, il fait référence à des « situations de preuve », une expression que l'on ne retrouve que trois fois dans l'ouvrage référence « Théorie des situations didactiques » (Brousseau, 1998 voir pp.43, 111 & 313). Cette expression apparait dans la section consacrée au *schéma de la validation explicite* (ibid p.109 sqq). Comme on le sait, c'est le concept de « situation de validation » qui est retenu comme l'un des concepts fondateurs de la théorie. Il apparait, pour les questions que nous considérons ici, nécessaire mais insuffisant : les *situations de preuve* doivent avoir les caractéristiques des situations de validation avec la contrainte supplémentaire de créer les conditions d'un besoin intrinsèque d'analyse, de certification et d'institutionnalisation *des moyens de la preuve* dans le cadre collectif de la classe. Ces conditions et les moyens de les créer ne sont pas encore déterminés, en particulier parce que si on sait assez précisément ce qu'est une preuve en termes d'objectif d'acquisition du cycle 4, en revanche il n'y a pas de caractérisation précise et partagée qui puisse servir de référence dans le cours de la scolarité, dès le cycle 2.

Ainsi, deux grands sujets devraient structurer le programme scientifique à venir : la caractérisation de *l'argumentation mathématique* et les formes de *l'institutionnalisation des moyens de preuve* en amont du moment si particulier de l'affirmation de la démonstration comme « moyen mathématique d'accès à la vérité » ainsi que le formule les commentaires (cf. § **Erreur ! Source du renvoi introuvable.**).

L'expression *argumentation mathématique* peut au moins signifier une argumentation potentiellement recevable au regard des normes de la classe de mathématiques. Ce n'est pas d'emblée une preuve pour autant, mais elle peut l'être si elle est reconnue pour telle par la classe et confirmée par l'enseignant. Il ne s'agit là que d'une clarification minimale prenant en compte la dimension sociale. Je propose de partir, pour ce qui concerne le contenu et la forme, de la proposition d'Andreas Stylianides :

> *« Proof is a mathematical argument, a connected sequence of assertions for or against a mathematical claim, with the following characteristics: 1. It uses statements accepted by the classroom community (set of accepted statements) that are true and available without further justification; 2. It employs forms of reasoning (modes of argumentation) that are valid and known to, or within the conceptual reach of, the classroom community; and 3. It is communicated with forms of expression (modes of argument representation) that are appropriate and known to, or within the conceptual reach of, the classroom community. » (Stylianides, 2007, p. 291).*

Les termes « *proof* » et « *mathematical argument* » apparaissent synonymes, ce qui est le plus souvent le cas dans la littérature anglo-saxonne. L'intérêt de cette proposition est de mettre en évidence trois dimensions qui correspondent raisonnablement à trois problèmes qui seront à résoudre pour disposer d'une caractérisation opérationnelle. La première pose la question de la création d'une *référence théorique* dont il faut modéliser la forme et préciser les conditions de création ; elle correspond au premier terme, Théorie, du triplet définitoire de Théorème (cf. § **Erreur ! Source du renvoi introuvable.**). La *mémoire institutionnelle* en est une prémisse mais elle ne suffit pas dans la mesure où elle n'apparaitrait que comme un répertoire de ressources. La deuxième et la troisième distinguent deux aspects de l'argumentation, sa nature (*mode of argumentation*) et son expression (*argument representation*). Ces deux dimensions sont en fait intriquées dans le processus de production de l'argumentation. Les problèmes nombreux qu'elles soulèvent incluent notamment celui leur séparation et celui de leur modélisation qui ne peut être abstraite de celle des connaissances qui les sous-tendent—que l'on pense, par exemple, au cas de l'exemple générique et celui de l'expérience mentale.

Enfin, les caractéristiques définitoires de l'argumentation mathématique doivent non seulement la distinguer d'autres formes d'argumentation mais aussi être opérationnelles lorsqu'il s'agit d'arbitrer les propositions des élèves et éventuellement de les institutionnaliser pour les organiser et les capitaliser dans la classe. L'évaluation du caractère mathématique ne pourra se réduire au jugement sur la seule forme de l'argumentation. Comment, par exemple, arbitrer le cas de l'exemple générique qui met en permanente balance le général et le particulier dont l'équilibre se trouve au terme d'un jeu d'interactions entre ces deux pôles, voire de compromis ? Bien que ses racines historiques lui donnent une légitimité (Arsac, 1987), le concept d'argumentation mathématique sera un concept didactique et non la transposition d'un savoir mathématique. On ne peut le concevoir comme transposition de la démonstration sauf à ne retenir de celle-ci que ce qui relève de sa dimension sociale au sein de la communauté scientifique. Ce serait une erreur tant épistémologique que théorique. Il s'agit là d'une difficulté attestée par la vigueur des débats sur la recevabilité des preuves « sans mots » ou des exemples génériques. La définition de l'argumentation mathématique ne peut se soustraire aux exigences de l'institutionnalisation.

Les recherches sur l'apprentissage du raisonnement et de la preuve ont en commun le recours à l'ingénierie de situations dites de recherche (p. ex. problème ouvert - Mantes & Arsac, 2007), ou de recherche et de preuve (Georget, 2009). Elles s'appuient largement sur celles de situations de validation dans lesquelles la construction d'une preuve est un outil de la résolution. Mais les comptes rendus de ces recherches montrent que la fermeture de ces situations se fait sur l'acceptation d'une solution – qui est l'objet discuté – et non sur la reconnaissance des caractéristiques, logiques et ontiques, de l'argumentation pour ce qu'elles auraient de général et de nécessaire au-delà de la situation particulière où elle est produite.

Enfin, les preuves sont à la fois fondatrices et organisatrices des connaissances. Dans le cours de l'apprentissage elles contribuent à conforter leur évolution et à outiller leur réorganisation. Dans l'enseignement, elles légitiment les nouveaux savoirs et les constituent en système : ensemble, savoirs et preuves font Théorie, au sens de Mariotti. La fonction d'institutionnalisation des *situations de preuve* place la *validation explicite* sous l'arbitrage de l'enseignant qui est in fine le garant de son caractère mathématique. Cette dimension sociale, au sens où le fonctionnement scientifique dépend d'une organisation construite et acceptée, est au cœur de la difficulté de l'enseignement de la preuve en mathématiques.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ARSAC, G. (1987). L'origine de la démonstration : Essai d'épistémologie didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *8*(3), 48.

ARSAC, G. (2013). *Cauchy, Abel, Seidel, Stokes et la convergence uniforme : De la difficulté historique du raisonnement sur les limites*. Paris : Hermann.

BALACHEFF, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, *18*(2), 147–176. https://doi.org/10.1007/BF00314724

BALACHEFF, N. (1988). *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège* (Doctorat ès-sciences). Université Joseph Fourier - Grenoble 1, Grenoble.

BALACHEFF, N. (1990). Beyond a psychological approach of the psychology of mathematics education. *For The Learning of Mathematics*, *10*(3), 2–8.

BALACHEFF, N. (1991). Benefits and limits of social interaction: The case of mathematical proof. In A. J. Bishop, S. Mellin-Olsen, & J. van Dormolen (Eds.), *Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching* (pp. 175–192). Kluwer Academic Publishers.

BALACHEFF, N. (1995). Conception, propriété du système sujet/milieu. In R. Noirfalise & M.-J. Perrin-Glorian (Eds.), *Actes de la VII° Ecole d'été de didactique des mathématiques* (pp. 215–229). Clermont-Ferrand : IREM de Clermont-Ferrand.

BALACHEFF, N. (1999). L'argumentation est-elle un obstacle ? Invitation à un débat... [Newsletter]. Retrieved 28 September 2019, from La lettre de la preuve website : http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/990506Theme/990506ThemeFR.html

BALACHEFF, N. (2010). Bridging knowing and proving in mathematics An essay from a didactical perspective. In G. Hanna, H. N. Jahnke, & H. Pulte (Eds.), *Explanation and Proof in Mathematics* (pp. 115–135). Springer Berlin Heidelberg.

BALACHEFF, N. (2017). CK¢, a model to understand learners' understanding – Discussing the case of functions. *El Calculo y Su Ensenanza*, *IX (Jul-Dic)*, 1–23.

BALACHEFF, N. & BOY DE LA TOUR, T. (2019). Proof Technology and Learning in Mathematics: Common Issues and Perspectives. In G. Hanna, D. Reid, & M. de Villiers (Eds.), *Proof Technology in Mathematics Research and Teaching*. Berlin: Springer.

BALACHEFF, N. & GAUDIN, N. (2010). Modeling students' conceptions: The case of function. In F. Hitt, D. Holton, & P. Thompson (Eds.), *CBMS Issues in Mathematics Education* (Vol. 16, pp. 207–234). https://doi.org/10.1090/cbmath/016/08

BALACHEFF, N. & MARGOLINAS, C. (2005). CK¢ Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. In A. Mercier & C. Margolinas (Eds.), *Balises pour la didactique des mathématiques* (pp. 1 – 32).

BALL, D. L. (1993). With an Eye on the Mathematical Horizon: Dilemmas of Teaching Elementary School Mathematics. *The Elementary School Journal*, *93*(4), 373–397. https://doi.org/10.1086/461730

BOERO, P., DOUEK, N., MORSELLI, F. & PEDEMONTE, B. (2010). Argumentation and proof: A contribution to theoretical perspectives and their classroom implementation. In M. M. F. Pinto & T. F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 179–209). Belo Horizonte, Brazil: PME.

BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques (Didactique des mathématiques 1970-1990)*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

CAUCHY, A. (1821). *Analyse algébrique ([Reprod. En fac-sim.])*. Retrieved from https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k29058v

CAUCHY, A. (1853). Note sur les séries convergentes don tles divers termes sont des fonctions continues d'une variable réelle ou imaginaire, entre des limites données. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, *XXXVI*(11), 454–457.

DELARIVIÈRE, S., FRANS, J. & VAN KERKHOVE, B. (2017). Mathematical Explanation: A Contextual Approach. *Journal of Indian Council of Philosophical Research*, *34*(2), 309–329. https://doi.org/10.1007/s40961-016-0086-2

DOUADY, R. (1992). Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. *Repères IREM*, *6*, 132–158.

DUVAL, R. (1991). Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(3), 233–261. https://doi.org/10.1007/BF00368340

DUVAL, R. (1992). Argumenter, prouver, expliquer : Continuité ou rupture cognitive ? *Petit x*, 31, 37–61.

DUVAL, R. (1998). Écriture et compréhension: Pourquoi faire écrire des textes de démonstration par les élèves ? *Produire et lire des textes de démonstration*, *S4*, 79–98. Retrieved from http://www.numdam.org/article/PSMIR_1998___S4_79_0.pdf

EDUSCOL. (2009). *Raisonnement et démonstration*. Retrieved from http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/50/0/doc_acc_clg_raisonnementetdemonstration_223500.pdf

EDUSCOL. (2016). Raisonner [Institutionnel]. Retrieved 30 September 2018, from Éduscol website: http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Competences_travaillees/83/6/RA16_C4_MATH_raisonner_547836.pdf

ÉQUIPE ACADEMIQUE MATHEMATIQUES. (2003). *Initiation au raisonnement*. Retrieved from http://mathematiques.ac-bordeaux.fr/pedaclg/dosped/raisonnement/brochure_init_raison/brochure_intro.htm

FISHBEIN, E. (1982). Intuition and proof. *For The Learning of Mathematics*, *3*(2), 9–18.

GARUTI, R., BOERO, P. & LEMUT, E. (1998). Cognitive unity of theorems and difficulties of proof. In A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 345–352). Retrieved from http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/garuti.html

GAUDIN, N. (2005). *Place de la validation dans la conceptualisation, le cas du concept de fonction* (PhD Thesis). Université Joseph Fourier - Grenoble 1, Grenoble, France.

GEORGET, J.-P. (2009). *Activités de recherche et de preuve entre pairs à l'école élémentaire : Perspectives ouvertes par les communautés de pratique d'enseignants* (Didactique des mathématiques, Paris-Diderot). Retrieved from https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00426603

GRANGER, G.-G. (1981). Philosophie et mathématique leibniziennes. *Revue de Métaphysique et de Morale*, *86*(1), 1–37. Retrieved from JSTOR.

HANNA, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange*, *21*(1), 6–13. https://doi.org/10.1007/BF01809605

HANNA, G. (1995). Challenges to the importance of proof. *For the Learning of Mathematics*, *15*(3), 42–49.

HANNA, G. (2017). Connecting two different views of mathematical explanation. *Enabling Mathematical Cultures*. Presented at the Enabling Mathematical Cultures, Mathematical Institute, University of Oxford. Retrieved from https://enablingmaths.wordpress.com/abstracts/

HANNA, G. (2018). Reflections on Proof as Explanation (draft). In A. J. Stylianides & G. Harel (Eds.), *Advances in Mathematics Education Research on Proof and Proving: An International Perspective* (pp. 3–18). https://doi.org/10.1007/978-3-319-70996-3_1

HAREL, G. & SOWDER, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In A. Schoenfeld, J. Kaput, E. Dubinsky, & T. Dick (Eds.), *CBMS Issues in Mathematics Education* (Vol. 7, pp. 234–283). https://doi.org/10.1090/cbmath/007/07

KESKESSA, B. (1994). Preuve et plans de signification : Une hypothèse. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, *14*(3), 357–391.

KNIPPING, C. (2003). Processus de preuve dans la pratique de l'enseignement – analyses comparatives des classes allemandes et françaises en 4èmeIntroduction. *Bulletin de l'APMEP*, 10.

LEGRAND, M. (1990). Rationalité et démonstration mathématiques, le rapport de la classe à une communauté scientifique. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, *9*(3), 365–406.

LEGRAND, M., LECORRE, T., LEROUX, L. & PARREAU, A. (2011). *Le principe du 'débat scientifique' dans un enseignement*. Retrieved from http://irem.univ-grenoble-alpes.fr/spip/IMG/pdf/principedebac949.pdf

MAHER, C. A. & MARTINO, A. M. (1996a). The Development of the Idea of Mathematical Proof: A 5-Year Case Study. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(2), 194. https://doi.org/10.2307/749600

MAHER, C. A. & MARTINO, A. M. (1996b). Yound children invent methods of proof: The gang of four. In L. P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. A. Goldin, & B. Greer (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 431–445). Retrieved from https://www.learner.org/workshops/pupmath/support/mahermartino96.pdf

MANTES, M. & ARSAC, G. (2007). *Les pratiques du problème ouvert*. CANOPE -CRDP Lyon.

MARGOLINAS, C. (1993). *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

MARIOTTI, M. A., BUSSI, M. G. B., BOERO, P., FERRI, F. & GARUTI, R. (1997). Approaching geometry theorems in contexts: From history and epistemology to cognition. In E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st PME Conference* (Vol. 1, pp. 180–195). Helsinki, Finland: University of Helsinki.

MENESR. (2015a). Cycle 1. *Bulletin Officiel de l'éducation Nationale*, *Spécial*(2), 21.

MENESR. (2015b). *Programme Mathématiques cycle 3*. Retrieved from http://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?cid_bo=94708

MENESR. (2015c). *Programme Mathématiques cycle 4*. Retrieved from http://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?cid_bo=94717

MENESR. (2018a). Cycle 2. *Bulletin Officiel de l'éducation Nationale*, (30 (26-07-2018)), 30.

MENESR. (2018b). Cycle 3. *Bulletin Officiel de l'éducation Nationale*, (30 (26-07-2018)), 35.

MIYAKAWA, T. (2016). Comparative analysis on the nature of proof to be taught in geometry: The cases of French and Japanese lower secondary schools. *Educational Studies in Mathematics*, *92*(2), 37–54. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9711-x

PEDEMONTE, B. (2005). Quelques outils pour l'analyse du rapport enrte argumentation et démonstration. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *25*(3), 313–347.

PEDEMONTE, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics*, *66*(1), 23–41. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9057-x

SFARD, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 1–36. https://doi.org/10.1007/BF00302715

STYLIANIDES, A. J. (2007). Proof and Proving in School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics*, *38*(3), 289–321.

TALL, D. (1998). The Cognitive Development of Proof: Is Mathematical Proof For All or For Some? In Z. Usiskin (Ed.), *Developments in School Mathematics Education Around the World* (pp. 117–136). Retrieved from https://pdfs.semanticscholar.org/d850/5fa1c58102b6a8e1ba3618f99cf3824ebe30.pdf

VERGNAUD, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *10*(2/3), 133–170.

VILLANI, C. & TOROSSIAN, C. (2018). *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques* (p. 96) [Rapport public]. Retrieved from Ministère de l'éducation nationale website : https://www.ladocumentationfrancaise.fr/rapports-publics/184000086/

TITRE

Actes du séminaire de didactique des mathématiques de l'ARDM, 2018

AUTEURS

Julia Pilet

Céline Vendeira

RESUME

Actes du séminaire de didactique des mathématiques de l'ARDM, session 2018

Le séminaire de didactique des mathématiques de l'ARDM, organisé par l'Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques (ARDM), a pour but de favoriser la mise en discussion et la diffusion des recherches en didactique des mathématiques. Il s'agit d'un outil que s'est donné l'ARDM pour soutenir la structuration d'une communauté de chercheur-e-s.

Au fur et à mesure de la finalisation des textes des interventions, ceux-ci sont mis à disposition sur le site de l'ARDM. Ils sont ensuite regroupés en un volume. Le présent ouvrage regroupe les textes issus des séminaires de l'année 2018.

Signalons que, depuis 2014, le groupe des jeunes chercheur-e-s de l'ARDM organise une session de posters durant les sessions du séminaire. En 2018, pour le colloquium CFEM-ARDM, des intervenants, issus de la diversité des communautés préoccupées par l'enseignement des mathématiques, sont venus éclairer une thématique choisie dans la concertation. C'est le thème *Concret et abstrait dans l'apprentissage des mathématiques, de la maternelle à l'université* qui a été retenu pour 2018. Ces interventions donnent lieu à des textes mis à disposition dans ce volume.

MOTS CLES

Didactique des mathématiques

IREM de Paris – Université Paris Diderot
Directeur de publication Christophe Hache
www.irem.univ-paris-diderot.fr
Dépôt légal : 2019 – ISBN : 978-2-86612-393-2