LA THÉORIE DE LITTLEWOOD-PALEY : FIL CONDUCTEUR DE NOMBREUX TRAVAUX EN ANALYSE NON LINÉAIRE

Hajer Bahouri

LA THÉORIE DE LITTLEWOOD-PALEY : FIL CONDUCTEUR DE NOMBREUX TRAVAUX EN ANALYSE NON LINÉAIRE

HAJER BAHOURI

Ce texte a pour vocation de présenter la théorie de Littlewood-Paley et d'illustrer l'efficacité de cet outil d'analyse microlocale dans l'étude des équations aux dérivées partielles dans un contexte le moins technique possible. Comme on le verra dans ce texte, la théorie de Littlewood-Paley fournit une approche robuste pour étudier séparément les différents régimes des solutions des équations aux dérivées partielles non linéaires, mais aussi pour étudier de manière fine les inégalités fonctionnelles et de les préciser.

1. La théorie de Littlewood-Paley : un outil devenu indispensable

La théorie de Littlewood-Paley est une procédure de localisation en fréquences qui depuis près de trois décennies s'est imposée comme un outil très puissant en analyse harmonique. Le premier objectif de ce texte est de présenter aussi simplement que possible [1] cette théorie dont l'idée de base est contenue dans deux inégalités fondamentales connues sous le nom d'inégalités de Bernstein et qui décrivent quelques propriétés des fonctions dont la transformée de Fourier est à support compact.

La première inégalité dit que, pour une distribution tempérée [2] sur $\mathbb{R}^d$ dont la transformée de Fourier est supportée dans une couronne de taille λ, dériver puis prendre la norme L^p revient à faire agir une homothétie de rapport λ sur la norme L^p. Cette propriété remarquable découle facilement dans le cadre L^2 de l'action de la transformée de Fourier sur les dérivations et de la formule de Fourier-Plancherel. La preuve du cas général L^p fait à la fois appel aux inégalités de Young et au fait que la transformée de Fourier échange le produit de convolution et le produit numérique des fonctions.

La seconde inégalité précise en outre que, pour une telle distribution, le passage de la norme L^p à la norme L^q, $q \geq p \geq 1$, coûte $\lambda^{d\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}$, ce qui doit être compris comme une injection de Sobolev. Elle se démontre comme la première inégalité en invoquant les inégalités de Young et le comportement de la transformée de Fourier vis-à-vis du produit de convolution des fonctions.

L'analyse de Fourier est au coeur de la théorie de Littlewood-Paley qui a inspiré un grand nombre de mes travaux. C'est en conduisant ses expériences sur la propagation de la chaleur que Joseph Fourier à la fin du 18ème siècle a ouvert la voie à cette théorie qui s'est renforcée au cours du 20ème et qui intervient dans la plupart des branches de la physique.

1. Pour une présentation plus détaillée de cette théorie, on renvoie le lecteur à la monographie [3].
2. Une distribution tempérée est un élément du dual topologique de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Dans cette théorie portant le nom de son inventeur, on effectue l'analyse en fréquences d'une fonction f de $L^1(\mathbb{R}^d)$ par la formule :

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-ix\cdot\xi} f(x)\,dx\,.$$

Sous des conditions convenables, $\widehat{f}$ la transformée de Fourier de f (notée également $\mathcal{F}f$ dans ce texte) permet la synthèse de f par la formule d'inversion :

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{ix\cdot\xi}\widehat{f}(\xi)\,d\xi\,.$$

Comme conséquence, on obtient l'identité de Fourier-Plancherel

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2\,dx = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi\,.$$

En effet, pour tout fonction f de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on a en vertu du théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{f}(x)\,dx &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\Big(\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{e}^{ix\cdot\xi}\widehat{f}(\xi)\,d\xi\Big)\overline{f}(x)\,dx\\ &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\widehat{f}(\xi)\overline{\Big(\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{e}^{-ix\cdot\xi}f(x)\,dx\Big)}\,d\xi\,.\end{aligned}$$

Cette représentation a créé une véritable révolution dans la manière de penser une fonction. La donnée de $\widehat{f}$ est exactement équivalente à celle de f et cette dualité entre analyse en amplitude (dans l'espace physique décrit par x) et analyse en fréquence (dans l'espace des fréquences décrit par ξ) est d'une grande importance en physique comme en mathématiques.

Un fait fondamental de la théorie des distributions est que la transformée de Fourier peut être prolongée à l'espace des distributions tempérées $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Le point clef réside dans le fait que $\mathcal{F}$ est un isomorphisme bi-continu sur l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ (l'espace des fonctions régulières qui décroissent ainsi que leurs dérivées plus vite que n'importe quel polynôme) et cette extension sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ est définie par dualité [3].

La transformation de Fourier a un grand nombre de propriétés que nous ne souhaitons pas énumérer ici. Rappelons simplement les deux principes de base de cette transformation qu'on ne peut pas dissocier du produit de convolution. Le premier principe de la transformée de Fourier est que la régularité implique la décroissance, le second étant que la décroissance entraîne la régularité. L'utilité de ces propriétés qui jouent un rôle crucial dans l'étude de la transformée de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ apparaîtra vite dans ce qui suit.

L'analyse de Fourier permet la résolution explicite des équations linéaires à coefficients constants [4]. En particulier, en alliant la transformation de Fourier et le produit de convolution, on peut déterminer explicitement les solutions de l'équation de Schrödinger qui est fondamentale en mécanique quantique

$$\text{(S)}\quad\begin{cases} i\,\partial_t v + \Delta v = 0\\ v_{|t=0} = v_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\,.\end{cases}$$

3. Pour une présentation complète de la théorie des distributions, on peut par exemple consulter les références fondamentales [34, 36].

4. Les équations à coefficients variables et surtout les équations non linéaires requièrent d'autres méthodes.

En effet, en prenant la transformée de Fourier partielle de l'équation par rapport à la variable x, on obtient pour tout (t,ξ) dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$:

$$\begin{cases} i\,\partial_t\widehat{v}(t,\xi)-|\xi|^2\widehat{v}(t,\xi)=0\\ \widehat{v}(0,\xi)=\widehat{v}_0(\xi)\,, \end{cases}$$

ce qui implique par intégration que

$$\widehat{v}(t,\xi)=\mathrm{e}^{-it|\xi|^2}\widehat{v}_0(\xi).$$

En invoquant la formule de Fourier inverse et les propriétés de la transformée de Fourier vis-à-vis du produit de convolution, on déduit que la solution de (S) s'écrit pour $t\neq 0$ sous le forme :

$$v(t,\cdot)=\frac{\mathrm{e}^{i\frac{|x|^2}{4t}}}{(4\pi it)^{\frac{d}{2}}}\star v_0\,\cdot$$

Par l'inégalité de Young, il en découle la propriété fondamentale suivante dite de dispersion :

$$\|v(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}\leq\frac{1}{|4\pi t|^{\frac{d}{2}}}\|v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\,\cdot$$

Cette technique de représentation explicite des solutions s'adapte à toutes les équations d'évolution linéaires à coefficients constants. Cependant, ce n'est pas toujours aussi immédiat d'en déduire des effets de dispersion. En effet, établir par exemple des estimations dispersives pour l'équation des ondes dans $\mathbb{R}^d$ nécessiste des techniques plus élaborées comportant des intégrales oscillantes ce qui exige une hypothèse de localisation spectrale dans une couronne des données de Cauchy.

L'analyse de la dispersion qui est un phénomène central en mécanique ondulatoire linéaire fournit un cadre redoutablement efficace pour la résolution et l'étude qualitative des équations aux dérivées partielles non linéaires dispersives. C'est grâce au travail remarquable de Robert Strichartz [37] vers la fin des années 1970 qu'on est parvenu à transcrire le phénomène de dispersion qui est une inégalité ponctuelle en inégalités robustes. La philosophie de ces estimations connues sous le nom d'estimations de Strichartz est de passer d'une estimation de décroissance ponctuelle en temps à un gain d'intégrabilité spatiale après moyenne en temps adéquate. Ces estimations de Strichartz qui ont connu un grand essor ces dernières décennies vont de pair avec la théorie de Littlewood-Paley : elles s'expriment aussi bien dans les espaces de Lebesgue que dans les espaces de Besov qu'on définira dans la suite.

La théorie de Littlewood-Paley fut introduite par John Edensor Littlewood et Raymond Paley ([29, 30]) dans les années 1930 pour l'analyse harmonique des espaces L^p, mais son utilisation systématique dans l'analyse des équations aux dérivées partielles est plutôt récente. En fait, la percée principale de cette théorie a été réalisée après le papier fondateur [12] de Jean-Michel Bony en 1981 sur le calcul paradifférentiel qui relie les fonctions non linéaires et la décomposition de Littlewood-Paley.

L'idée principale de cette théorie consiste à échantillonner les fréquences à l'aide d'un découpage de leur espace en couronnes de taille 2^j, permettant ainsi de décomposer une fonction en une somme dénombrable de fonctions régulières dont la transformée de Fourier est supportée dans une couronne de taille 2^j :

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \dot{\Delta}_j f \,, \tag{1}$$

où les $\dot{\Delta}_j f$ appelés blocs dyadiques homogènes de f sont définis par le filtrage de f aux fréquences de l'ordre de 2^j. Notons que cette décomposition dite de Littlewood-Paley homogène n'est vérifiée que modulo les polynômes P. En effet, comme la transformée de Fourier de tout polynôme est supportée à l'origine, l'identité (1) ne peut s'appliquer aux polynômes. Cette restriction sur les basses fréquences est levée dans le cas de la décomposition de Littlewood-Paley inhomogène :

$$f = \sum_{j \geq -1} \Delta_j f \,, \tag{2}$$

où $\Delta_j f := \dot{\Delta}_j f$ pour j décrivant $\mathbb{N}$ et $\Delta_{-1} f$ est un opérateur filtrant les basses fréquences, c'est-à-dire qu'il ne conserve que les fréquences dans une boule centrée à l'origine.

Les décompositions de Littlewood-Paley (1)-(2) définies ci-dessus s'obtiennent par un échantillonnage de l'espace des fréquences grâce à des partitions de l'unité dyadiques. Plus précisément, étant donnée χ une fonction radiale de $\mathcal{D}(B(0,4/3))$ identiquement égale à 1 dans $B(0,3/4)$, nous avons les identités suivantes

$$\chi + \sum_{j \geq 0} \varphi(2^{-j} \cdot) = 1 \ \text{ dans } \ \mathbb{R}^d \ \text{ et } \ \sum_{j \in \mathbb{Z}} \varphi(2^{-j} \cdot) = 1 \ \text{ dans } \ \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \,,$$

où l'on a posé $\varphi(\xi) = \chi(\xi/2) - \chi(\xi)$.

Avec cette normalisation, la fonction φ est une fonction radiale de $\mathcal{D}(\mathcal{C})$ où $\mathcal{C}$ est la couronne centrée à l'origine de petit rayon 3/4 et de grand rayon 8/3 et l'on définit les blocs dyadiques homogènes $\dot{\Delta}_j$ par [5]

$$\dot{\Delta}_j f := \varphi(2^{-j} D) f := \mathcal{F}^{-1}(\varphi(2^{-j} \cdot) \mathcal{F} f) = 2^{jd} h(2^j \cdot) \star f \,,$$

où $h = \mathcal{F}^{-1} \varphi$ et les blocs dyadiques inhomogènes Δ_j par

$$\Delta_j f := \dot{\Delta}_j f = 2^{jd} h(2^j \cdot) \star f \ \text{ si } \ j \geq 0 \ \text{ et } \ \Delta_{-1} f := \chi(D) f := \mathcal{F}^{-1}(\chi \mathcal{F} f) = \widetilde{h} \star f \,,$$

où $\widetilde{h} = \mathcal{F}^{-1} \chi$.

De la même manière, on introduit les opérateurs de troncature en basse fréquences :

$$\dot{S}_j f := \sum_{k \leq j-1} \dot{\Delta}_k f := \mathcal{F}^{-1}(\chi(2^{-j} \cdot) \mathcal{F} f) = 2^{jd} \widetilde{h}(2^j \cdot) \star f \ \text{ pour } \ j \in \mathbb{Z} \ \text{ et}$$

$$S_j f := \sum_{k \leq j-1} \Delta_k f = 2^{jd} \widetilde{h}(2^j \cdot) \star f \ \text{ pour } \ j \in \mathbb{N} \,.$$

Il est à noter que les blocs dyadiques qui sont des opérateurs de troncature en fréquences sont des opérateurs de convolution. Cette propriété qui découle trivialement du fait que la transformée de Fourier échange le produit de convolution et le produit numérique des fonctions joue un rôle central dans les techniques issues de la théorie de Littlewood-Paley. En particulier, tous ces opérateurs opèrent sur les espaces L^p de manière uniforme par rapport à p et j.

5. Ici $\mathcal{F}^{-1}$ désigne la transformée de Fourier inverse sur $\mathbb{R}^d$ et $\mathcal{F}(\varphi(2^{-j} D) f)(\xi) = \varphi(2^{-j} \xi) \widehat{f}(\xi)$ ce qui montre que $\mathcal{F}(\dot{\Delta}_j f)$ est supportée dans la couronne $2^j \mathcal{C}$.

Il est également important pour la suite de souligner que les propriétés de support des fonctions φ et χ entraînent des relations de quasi-orthogonalité pour la décomposition de Littlewood-Paley, notamment

$$\dot{\Delta}_j \dot{\Delta}_k = 0 \text{ et } \Delta_j \Delta_k = 0 \text{ si } |j-k| > 1\,,$$

ce qui implique aisément que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d\,,\ \frac{1}{2} \leq \chi^2(\xi) + \sum_{j \geq 0} \varphi^2(2^{-j}\xi) \leq 1 \text{ et} \tag{3}$$

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}\,,\ \frac{1}{2} \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \varphi^2(2^{-j}\xi) \leq 1. \tag{4}$$

L'analyse de Littlewood-Paley permet de caractériser avec exactitude la régularité d'une fonction f en fonction des propriétés de décroissance de ses blocs dyadiques par rapport à l'indice de sommation j. On retrouve ainsi avec plus de précision l'idée, déjà présente dans l'analyse de Fourier, que la régularité se traduit par de la décroissance.

En particulier, en invoquant la formule de Fourier-Plancherel et les propriétés de quasi-orthogonalité (3)-(4), il est aisé d'observer que l'appartenance d'une fonction f à $L^2(\mathbb{R}^d)$ se caractérise par l'appartenance de la suite $(\|\dot{\Delta}_j f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)})_{j \in \mathbb{Z}}$ à $\ell^2(\mathbb{Z})$ ainsi que pour ses blocs dyadiques inhomogènes. Plus précisément, on peut montrer à l'aide d'un lemme élémentaire d'analyse hilbertienne l'existence d'une constante $C \geq 1$ telle que l'on ait

$$C^{-1} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \|\dot{\Delta}_j f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C \sum_{j \in \mathbb{Z}} \|\dot{\Delta}_j f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \text{ et}$$
$$C^{-1} \sum_{j \geq -1} \|\Delta_j f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C \sum_{j \geq -1} \|\Delta_j f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\,.$$

De même, plusieurs normes classiques peut être écrites en fonction de la décomposition de Littlewood-Paley. C'est par exemple le cas des normes Sobolev ou Hölder, notamment l'appartenance aux espaces de Sobolev (resp. Hölder) va se traduire par des propriétés de décroissance en j de la norme L^2 de $\dot{\Delta}_j u$ ou $\Delta_j u$ selon qu'il s'agisse des espaces homogènes ou inhomogènes (resp. de la norme L^∞).

Rappelons que les espaces de Sobolev inhomogènes $H^s(\mathbb{R}^d)$ qui apparaissent naturellement dans un grand nombre de problèmes liés à la physique mathématique sont dans le cas où $s = m$ est un entier naturel le sous-espace des fonctions de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dont toutes les dérivées (au sens des distributions) d'ordre inférieur ou égal à m appartiennent à $L^2(\mathbb{R}^d)$. Il est alors clair au vu de la quasi-orthogonalité de la décomposition de Littlewood-Paley et de l'action de la transformée de Fourier sur les dérivations que l'appartenance d'une fonction f à $H^m(\mathbb{R}^d)$ se caractérise comme suit :

$$\|f\|_{H^m(\mathbb{R}^d)} \sim \|(2^{jm}\, \|\Delta_j f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)})\|_{\ell^2(j \geq -1)}\,.$$

Une équivalence similaire a lieu pour les espaces de Sobolev homogènes $\dot{H}^m(\mathbb{R}^d)$ qui sont plus adéquats dans les problèmes invariants par scaling tels que le système de Navier-Stokes incompressible[6] et diverses variantes de ce système en météorologie et océanographie ou

6. Rappelons que pour le système de Navier-Stokes homogène incompressible, la question de l'apparition éventuelle de singularités en temps fini fait partie des problèmes du Millenium proposés par le Clay Institute.

les équations d'ondes non linéaires qu'on a traitées dans [1, 7, 2] et bien sûr diverses autres équations comme celles par exemple étudiées dans [25, 26].

De manière générale, dire qu'une fonction f appartient à $H^s(\mathbb{R}^d)$ signifie en gros que f a s dérivées (fractionnelles lorsque s est non entier) dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ et comme précédemment on peut montrer l'existence d'une constante $C \geq 1$ telle que l'on ait

$$C^{-1} \sum_{j\geq -1} 2^{2js} \|\Delta_j f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|^2_{H^s(\mathbb{R}^d)} \leq C \sum_{j\geq -1} 2^{2js} \|\Delta_j f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \,.$$

Cette heuristique s'applique également aux normes de Sobolev homogènes donnant lieu à la correspondance suivante dans le cadre de la théorie de Littlewood-Paley

$$C^{-1} \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{2js} \|\dot\Delta_j f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|^2_{\dot H^s(\mathbb{R}^d)} \leq C \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{2js} \|\dot\Delta_j f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \,.$$

En examinant ces analyses, on voit qu'il y a trois paramètres qui rentrent en jeu : le paramètre de régularité s, l'exposant de la norme Lebesgue utilisé pour mesurer les blocs dyadiques $\dot\Delta_j f$ ou $\Delta_j f$ et le type de sommation effectué sur $\mathbb{Z}$ ou pour $j \geq -1$. Cette observation permet plus généralement de caractériser de manière efficace les normes des espaces Besov homogènes $\dot B^s_{p,r}(\mathbb{R}^d)$ ou inhomogènes $B^s_{p,r}(\mathbb{R}^d)$. Les normes de ces espaces qu'on peut définir par différence finie ou à l'aide du noyau de la chaleur (comme on peut le voir par exemple dans [3, 40]) s'expriment comme suit en fonction des décompositions de Littlewood-Paley [7] :

$$\|f\|_{B^s_{p,r}(\mathbb{R}^d)} \sim \Big(\sum_{j\geq -1} 2^{rjs} \|\Delta_j f\|^r_{L^p(\mathbb{R}^d)}\Big)^{\frac{1}{r}} \text{ et}$$

$$\|f\|_{\dot B^s_{p,r}(\mathbb{R}^d)} \sim \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{rjs} \|\dot\Delta_j f\|^r_{L^p(\mathbb{R}^d)}\Big)^{\frac{1}{r}} \,.$$

Bien qu'invariants par scaling, les espaces de Sobolev homogènes (et plus généralement les espaces de Besov homogènes) sont à manipuler avec précaution, puisque comme il a été mentionné ci-dessus la décomposition de Littlewood-Paley homogène (1) n'est vérifiée que modulo les polynômes. Il n'y a pas de consensus autour de la définition de ces espaces. Dans certaines références dont [11], ils sont définis modulo les polynômes de degré arbitraire. Dans d'autres références dont [3], ils sont définis moyennant une condition sur les basses fréquences. Cette condition exige de se restreindre aux distributions tempérées f vérifiant (au sens des distributions)

$$\|\dot S_j f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \overset{j\to-\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Les décompositions dyadiques fournissent non seulement la possibilité de caractériser l'appartenance d'une fonction à la quasi-totalité des espaces classiques (Hölder, Sobolev, Besov, Lebesgue, Triebel-Lizorkin) par des conditions portant uniquement sur les blocs dyadiques de cette fonction mais aussi permettent de définir une pléthore d'espaces fonctionnels.

Les décompositions de Littlewood-Paley et plus simplement le découpage des fonctions en basses et hautes fréquences sont des techniques qui ont fait leur preuve dans l'étude

7. Notons que les espaces de Besov sont indépendants des blocs dyadiques $\dot\Delta_j$ et Δ_j.

des inégalités fonctionnelles et dans l'analyse des équations aux dérivées partielles non linéaires.

Les injections de Sobolev sont parmi les inégalités fonctionnelles les plus célèbres. Elles fournissent des outils clefs dans l'étude des équations aux dérivées partielles linéaires et non linéaires, que ce soit dans le cadre elliptique, parabolique ou hyperbolique. Les inégalités de Sobolev expriment une forte propriété d'intégrabilité ou de régularité pour une fonction f en termes de propriétés d'intégrabilité pour certaines dérivées de f.

Parmi ces inégalités, on peut mentionner les inégalités de Sobolev dans les espaces de Lebesgue :

$$\dot{H}^s(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^d)\,, \tag{5}$$

avec $0 \leq s < d/2$ et $p = 2d/(d-2s)$.

Notons que l'indice $p = 2d/(d-2s)$ peut être deviné facilement grâce à un argument d'homogénéité. En effet, en désignant pour toute fonction v sur $\mathbb{R}^d$ et tout $\lambda > 0$, v_λ la fonction définie par $v_\lambda(x) = v(\lambda x)$, il est facile de vérifier que

$$\|v_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = \lambda^{-\frac{d}{p}} \quad \text{et} \quad \|v_\lambda\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)} = \lambda^{s-\frac{d}{2}}\|v_\lambda\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)}\,.$$

Les deux quantités $\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$ et $\|\cdot\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)}$ ayant donc même homogèneité dans le cas où $p = 2d/(d-2s)$ (c'est-à-dire qu'elles se comportent de la même manière par changement d'unité de longueur), il est donc naturel de les comparer et l'on peut supposer dans la suite que $\|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)} = 1$.

On sait que pour tout réel $p \geq 1$ et toute fonction mesurable f, on a en vertu du théorème de Fubini :

$$\|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^d)} = p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\mu\big(|f| > \lambda/2\big)\,d\lambda\,.$$

Pour établir l'injection de Sobolev (5), on va décomposer f en basses et hautes fréquences en posant :

$$f = f_{\ell,A} + f_{h,A} \quad \text{avec} \quad f_{\ell,A} = \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{1}_{B(0,A)}\widehat{f})\,.$$

Comme le support de la transformée de Fourier de $f_{\ell,A}$ est compact, la fonction $f_{\ell,A}$ est bornée et plus précisement, on a en alliant la formule d'inversion et l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
\|f_{\ell,A}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} &\leq (2\pi)^{-d}\|\widehat{f}_{\ell,A}\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\\
&\leq (2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^s|\xi|^{-s}|\widehat{f}_{\ell,A}(\xi)|\,d\xi\\
&\leq C_s\,A^{\frac{d}{2}-s}\,\|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)}\,.
\end{aligned}$$

Or, l'inégalité triangulaire implique pour tout $A > 0$

$$\big(|f| > \lambda\big) \subset \big(|f_{\ell,A}| > \lambda/2\big) \cup \big(|f_{h,A}| > \lambda/2\big)\,.$$

Par conséquent, en choisissant

$$A = A_\lambda \overset{\text{déf}}{=} \Big(\frac{\lambda}{4C_s}\Big)^{\frac{p}{d}}\,,$$

on déduit que

$$\|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\mu\big(|f_{h,A_\lambda}| > \lambda/2\big)\,d\lambda\,.$$

Comme par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$\mu\big(|f_{h,A_\lambda}| > \lambda/2\big) \leq 4\frac{\|f_{h,A_\lambda}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}}{\lambda^2}\,,$$

on obtient

$$\|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq 4p\int_0^\infty \lambda^{p-3}\|f_{h,A_\lambda}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\,d\lambda\,.$$

Or, par l'identité de Fourier-Plancherel

$$\|f_{h,A_\lambda}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = (2\pi)^{-d}\int_{(|\xi|\geq A_\lambda)} |\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi\,,$$

ce qui entraîne en vertu du théorème de Fubini que pour tout $p > 2$

$$\begin{aligned}\|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^d)} &\leq 4p\,(2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d}\Big(\int_0^{4C_s|\xi|^{\frac{d}{p}}}\lambda^{p-3}d\lambda\Big)|\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi\\ &\leq (2\pi)^{-d}\frac{4p}{p-2}\,(4C_s)^{p-2}\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{\frac{d(p-2)}{p}}|\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi\,.\end{aligned}$$

Comme $s = d\Big(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{p}\Big)$, ceci achève la preuve de l'injection de Sobolev.

La preuve présentée dans ce texte est empreintée à l'article [16]. On dispose d'autres preuves antérieures de cette estimation, notamment celle s'appuyant sur l'inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev et qui est par exemple détaillée dans [3]. Notons que les arguments de la preuve ci-dessus ont inspiré plusieurs autres travaux. Entre autres, on peut citer l'article [5] où les auteurs se sont intéressés aux injections de Sobolev dans les espaces de Lorentz $L^{p,q}$. Rappelons que les espaces de Lorentz [8] ont été introduits dans les années 1950 par Lorentz, de manière que $L^{p,\infty}$ soit l'espace faible introduit par Marcinkiewicz dans les années 1930, et que $L^{p,p}$ soit l'espace de Lebesgue habituel L^p.

Cette technique de découpage en basses et hautes fréquences a été également pertinente dans l'étude d'équations aux dérivées partielles non linéaires, notamment pour établir que certains problèmes de Cauchy sont globalement bien posés. Parmi d'autres travaux, on peut citer l'article de Fujita-Kato [18] sur le système de Navier-Stokes. Dans ce type de démarche, la philosophie est de décomposer la donnée de Cauchy (supposée ici par souci de clarté dans un certain espace de Sobolev $\dot{H}^s$) en basses et hautes fréquences de sorte que la partie relative aux hautes fréquences soit de norme assez petite dans $\dot{H}^s$. Si l'on dispose d'un théorème d'existence globale pour données petites, la partie relative aux hautes fréquences va donner lieu à une solution globale du problème et la partie relative aux basses fréquences (qui va être régulière) va satisfaire une équation modifiée. Après, tout l'enjeu consiste à montrer qu'on peut résoudre globalement cette équation perturbée.

L'injection de Sobolev (5) est invariante par translation et par scaling. Mais elle n'est pas invariante par oscillation, c'est-à-dire par multiplication par des fonctions oscillantes, notamment par multiplication par des fonctions de type $u_\epsilon(x) = e^{i\frac{(x|\omega)}{\epsilon}}\varphi(x)$, où ω est un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^d$ et φ est une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. En révisitant la preuve de

8. Pour plus de détails, on peut consulter [11, 40] .

l'injection de Sobolev exposée ci-dessus, on peut établir l'inégalité précisée suivante qui est due à Gérard-Meyer-Oru [20] :

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{C}{(p-2)^{\frac{1}{p}}} \|u\|^{1-\frac{2}{p}}_{\dot{B}^{s-\frac{d}{2}}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^d)} \|u\|^{\frac{2}{p}}_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)} \,. \tag{6}$$

Cette inégalité de Sobolev précisée est optimale comme le montre l'exemple oscillant $u_\epsilon(x) = e^{i\frac{(x|\omega)}{\epsilon}}\varphi(x)$. Plusieurs autres exemples illustrent l'optimalité de l'estimation (6), en particulier un exemple fractal supporté dans un ensemble de type Cantor construit dans [4] et l'exemple du chirp traité dans [5] et défini comme suit :

$$f(x) = x^{-\alpha} \sin\left(\frac{1}{x}\right), \;\; \alpha > 0\,.$$

L'estimation précisée (6) fait partie des arguments clefs dans l'article [19] où Patrick Gérard a caractérisé le défaut de compacité de l'injection de Sobolev critique (5) à l'aide des décompositions en profils [9]. Rappelons que l'étude du défaut de compacité des injections de Sobolev entre espaces fonctionnels, qui remonte aux travaux fondateurs de Pierre-Louis Lions ([27, 28]), répond à des problèmes géométriques et permet de comprendre le comportement des solutions d'équations aux dérivées partielles non linéaires. L'analyse non linéaire a considérablement progressé ces dernières décennies grâce aux décompositions en profils. Notons que ce type de décompositions a été généralisé par des approches différentes à d'autres cadres fonctionnels.

En particulier, on peut citer les récents travaux [8, 9] concernant la description du défaut de compacité de l'injection de Sobolev critique de $H^1(\mathbb{R}^2)$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ où $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ appelé espace d'Orlicz est l'espace des fonctions mesurables $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ pour lesquelles il existe un nombre réel $\lambda > 0$ tel que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \Big(\mathrm{e}^{\frac{|\mathrm{u}(\mathrm{x})|^2}{\lambda^2}} - 1\Big)\, \mathrm{dx} < \infty\,,$$

ainsi que leur généralisation aux dimensions supérieures dans [10]. Cette injection de Sobolev qui repose sur les inégalités de Trudinger-Moser [10] concerne le cas limite de l'injection de Sobolev (5) et intervient dans plusieurs problèmes géométriques et physiques, notamment dans la propagation des faisceaux laser dans différents milieux. L'étude de cette injection a été menée dans [10] par des arguments basés sur l'analyse de Fourier qui mettent en evidence [11] le fait que les éléments responsables du défaut de compacité dans ce cadre sont contrairement au cas de l'injection de Sobolev (5) étalés en fréquences.

Il est également à noter qu'une approche initiée par Stéphane Jaffard dans [23] a permis d'étendre le résultat de Patrick Gérard dans [19] au cadre des espaces de Triebel-Lizorkin et a inspiré l'analyse abstraite conduite dans [6]. Cette approche est basée sur la théorie des ondelettes qui a été inspirée par la théorie de Littlewood-Paley et qu'on évoquera plus tard.

Comme il l'a été mentioné ci-dessus, la seconde inégalité de Bernstein doit être comprise comme une injection de Sobolev. En fait, il est aisé de déduire de cette seconde inégalité

9. Les profils ont apparu dans un travail de Brézis-Coron [15].
10. Pour une intoduction aux espaces d'Orlicz, on peut consulter [35, 41].
11. moyennant une hypothèse de compacité.

que pour tout nombre réel s, pour tous $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$ et $1 \leq r_1 \leq r_2 \leq \infty$,

$$\dot{B}^s_{p_1,r_1}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \dot{B}^{s-d(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2})}_{p_2,r_2}(\mathbb{R}^d)\,, \tag{7}$$

et il en est de même dans le cadre inhomogène.

Notons que ces injections de Sobolev sont strictes comme l'illustre dans le cas particulier de l'injection de Sobolev $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \dot{B}^s_{2,\infty}(\mathbb{R}^d)$, l'exemple suivant qui est basé sur l'idée des séries lacunaires. Étant donnés une fonction χ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dont la transformée de Fourier est supportée dans une petite boule de centre 0 et de rayon ϵ_0 et un vecteur ω de $\mathbb{R}^d$ de norme euclidienne 3/2, il s'agit de considérer la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$f_n(x) = \sqrt{n}\sum_{j\geq n} 2^{-js}\frac{1}{j+1}e^{i2^j(x|\omega)}\chi(x).$$

Il est facile d'observer que

$$\begin{cases} \dot{\Delta}_j f_n = 0 \quad \text{pour} \quad j \leq n-1 \quad \text{et} \\ (\dot{\Delta}_j f_n)(x) = \dfrac{\sqrt{n}\,2^{-js}}{j+1}e^{i2^j(x|\omega)}\chi(x) \quad \text{pour} \quad j \geq n\,. \end{cases}$$

Par un calcul élémentaire, il en découle que

$$\|f_n\|^2_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)} \sim n\sum_{j\geq n}\frac{1}{(j+1)^2} \sim 1 \;\text{ et }\; \|f_n\|_{\dot{B}^s_{2,\infty}(\mathbb{R}^d)} \lesssim \frac{1}{\sqrt{n}}\,,$$

ce qui montre bien la stricte inclusion de $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ dans $\dot{B}^s_{2,\infty}(\mathbb{R}^d)$.

Les techniques issues de la théorie de Littlewood-Paley permettent aussi d'analyser le produit (lorsqu'il existe) de deux distributions tempérées au moyen du calcul paradifférentiel de J.-M. Bony. La façon de les utiliser est la suivante. Étant données deux distributions tempérées u et v, on écrit

$$u = \sum_p \Delta_p u \;\text{ et }\; v = \sum_q \Delta_q v\,.$$

De manière formelle, le produit, lorsqu'il existe, va s'écrire

$$uv = \sum_{p,q}\Delta_p u\,\Delta_q v\,.$$

L'idée consiste à décomposer le produit uv en trois parties : la première relative aux termes où les fréquences de u sont grandes devant celles de v, la deuxième relative aux termes où les fréquences de v sont grandes devant celles de u et enfin la troisième relative aux termes où les fréquences de u et de v sont de taille comparable. Cela conduit à la définition suivante introduite pour la première fois par Jean-Michel Bony dans [12] : on écrit

$$\begin{aligned} uv &= T_u v + T_v u + R(u,v) \quad \text{avec} \\ T_u v &\overset{\text{déf}}{=} \sum_{p\leq q-2}\Delta_p u\Delta_q v = \sum_q S_{q-1}u\Delta_q v \quad \text{et} \\ R(u,v) &\overset{\text{déf}}{=} \sum_{|q-p|\leq 1}\Delta_q u\Delta_p v\,. \end{aligned}$$

Cette décomposition dite décomposition de Jean-Michel Bony est fondamentale dans l'étude des lois de produit ainsi que dans l'étude des équations aux dérivées partielles non linéaires. Bien sûr, elle admet une version homogène. Rappelons que l'opérateur bilinéaire $T_u v$ est appelé paraproduit de v par u tandis que l'opérateur bilinéaire symétrique $R(u, v)$ est appelé reste.

De l'étude précise de la façon dont le paraproduit et le reste opèrent dans les espaces de Sobolev, de Hölder et plus généralement dans les espaces de Besov vont se dégager quelques principes généraux facilement énonçables :

— Le paraproduit est toujours défini pour deux distributions à support compact et la régularité de $T_u v$ est principalement déterminée par celle de v.

— Le reste par contre n'est pas toujours défini, mais lorsqu'il l'est, les régularités de u et de v s'ajoutent pour déterminer la sienne.

Le calcul paradifférentiel de Jean-Michel Bony s'est avéré très efficace dans l'étude des équations d'évolution, lesquelles décrivent le comportement d'un phénomène physique dépendant du temps. On va illustrer la pertinence de ce calcul en présentant une méthode de découpage microlocale qu'on a introduite dans [1, 2] en collaboration avec Jean-Yves Chemin (voir aussi [38, 39]) pour étudier les équations d'ondes quasi-linéaires du type

$$(E)\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t^2 u - \Delta u - \partial(G(u)\partial u) & = & Q(\nabla u, \nabla u) \\ (u, \partial_t u)_{|t=0} & = & (u_0, u_1) \end{array}\right.$$

avec

$$\partial(G\partial u) = \sum_{1\leq j,k\leq d} \partial_j(G^{j,k}\partial_k u),$$

G désignant une fonction C^∞, nulle en 0, bornée ainsi que toutes ses dérivées de $\mathbb{R}$ dans l'ensemble des matrices symétriques sur $\mathbb{R}^d$ prenant leurs valeurs dans un compact K tel que $Id + K$ soit inclus dans le cône des matrices symétriques définies positives et Q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^{1+d}$.

La théorie classique des équations strictement hyperboliques [12] dit que l'on peut résoudre une telle équation pour des données intiales telles que (u_0, u_1) appartienne à l'espace $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d) \times \dot{H}^{s-1}(\mathbb{R}^d)$ pour s strictement supérieur à $\frac{d}{2} + 1$. Mais, il est important de penser aux invariances d'une telle équation par scaling. Il est immédiat de vérifier que, si u est solution de l'équation (E), alors la fonction u_λ définie par $u_\lambda(t, x) = u(\lambda t, \lambda x)$ est aussi solution de (E). Une vaste série de travaux s'est attachée à résoudre des équations d'ondes non linéaires en essayant de descendre l'indice de régularité minimale des données initiales aussi bas que possible vers un espace de données initiales qui soit invariant par le changement de scaling ci-dessus, par exemple dans l'espace $\dot{H}^{\frac{d}{2}}$.

Le but ici est de résoudre l'équation (E) pour des données de Cauchy moins régulières que ce qu'imposent les méthodes d'énergie. Cette démarche s'inscrit dans le programme de Christodoulou-Klainerman de la relativité générale, qui comprend également des travaux de Klainerman, Bourgain, Tao et leurs écoles. Pour se rapprocher des espaces invariants par scaling pour la donnée initiale, il est évident qu'il faut utiliser les propriétés particulières de l'équation des ondes, à savoir les effets de dispersion évoqués ci-dessus. Ceci exige de démontrer des estimées de type Strichartz pour cette équation qu'on peut interpréter comme une équation d'ondes à coefficients variables et très peu réguliers. C'est l'alliance de l'optique géométrique et de l'analyse harmonique à travers le calcul paradifférentiel

12. Consulter par exemple Chapitre 4 dans [3].

de Jean-Michel Bony qui permet d'établir ces estimées, d'améliorer l'indice de régularité minimale et de donner une réponse à une question restée longtemps ouverte.

Comme mentionné ci-dessus, les estimations de Strichartz s'obtiennent grâce à un phénomène dispersif couplé à un argument abstrait d'analyse fonctionnelle connu sous le nom de TT^* mis au point par Ginibre et Velo dans [21] et élargi à l'ensemble des indices admissibles par Keel et Tao dans [24]. Comme également souligné ci-dessus, ce phénomène dispersif s'obtient pour l'équation des ondes, dans le cadre de coefficients constants, par un argument de phase stationnaire sur une représentation explicite de la solution qu'on obtient par l'analyse de Fourier. Le cas des coefficients variables nécessite plus d'attention car on ne dispose pas de représentation explicite, et on a recours à des méthodes d'optique géométrique faisant intervenir des équations d'Hamilton-Jacobi et des équations de transport. Quand les coefficients sont peu réguliers, comme dans le cas quasilinéaire par exemple, une telle approche ne peut fonctionner car l'équation de Hamilton-Jacobi développe des singularités. C'est la théorie de Littlewood-Paley qui permet de surmonter cette difficulté.

En fait, faire fonctionner une telle méthode dans ce cadre nécessite une régularisation des coefficients. Plus précisément, en utilisant le calcul paradifférentiel de Jean-Michel Bony, on se ramène à l'etude de la partie de la solution relative aux fréquences de taille 2^j, qui satisfait une équation d'ondes à coefficients réguliers. Par une méthode tout à fait classique, on construit une approximation microlocale de la solution de cette équation, c'est-à-dire valable sur un intervalle de temps dont la taille dépend de la fréquence ce qui permet d'établir une estimation de Strichartz microlocale. En fait, il semble impossible de construire une approximation locale de la solution car l'équation de Hamilton-Jacobi associée développe des singularités à un instant lié à la taille de la fréquence : ceci est dû au fait que ces coefficients réguliers gardent en mémoire la régularité d'origine de la solution. L'estimation de Strichartz locale (avec perte bien sûr) est obtenue en décomposant l'intervalle $[0,T]$ en intervalles où l'estimation de Strichartz microlocale est vérifiée.

Les applications de la théorie de Littlewood-Paley et plus particulièrement du calcul paradifférentiel sont très nombreuses et nous ne pouvons toutes les énumérer ici. Pour un éventail plus large de champs d'applications, que ce soit dans les inégalités fonctionnelles et leurs formes précisées ou dans l'analyse des équations aux dérivées partielles non linéaires issues de la mécanique des fluides ou en lien avec la théorie des champs ou la relativité générale, on renvoie le lecteur à la monographie [3].

La théorie de Littlewood-Paley a inspiré les ondelettes qui ont été à l'origine de nombreuses avancées dans divers domaines appliqués tels que le traitement du signal et de l'image. On peut illustrer simplement la théorie des ondelettes en rappelant le système de Haar introduit au début du 20ème siècle par Alfred Haar dans sa thèse. Ce système est défini par les fonctions

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j x - k), \quad j,k \in \mathbb{Z},$$

où l'ondelette génératrice

$$\psi = \chi_{[0,\frac{1}{2}[} - \chi_{[\frac{1}{2},1]}$$

est la fonction constante par morceaux qui vaut 1 sur $[0,\frac{1}{2}[$ et -1 sur $[1/2,1[$. Ce système constitue une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$ et donc il est immédiat que toute fonction f de

$L^2(\mathbb{R})$ se décompose comme suit :

(8) $$f = \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k}\rangle \psi_{j,k}\,,$$

où $\langle f, \psi_{j,k}\rangle$ désigne le produit scalaire de f et $\psi_{j,k}$ dans $L^2(\mathbb{R})$. Dans la décomposition en ondelettes (8), les blocs dyadiques homogènes $\dot\Delta_j f$ sont remplacés par les projections

$$P_j f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k}\rangle \psi_{j,k}\,,$$

l'indice k apportant ainsi un niveau supplémentaire de discrétisation.

Le défaut principal du système de Haar est son manque de régularité puisque l'ondelette mère ψ n'est pas continue. D'autres bases d'ondelettes plus régulières ont été construites par la suite, permettant ainsi d'obtenir des décompositions en ondelettes similaires à (8), souvent tenant compte du scaling de l'espace en question.

Comme pour les décompositions de Littlewood-Paley, on peut caractériser l'appartenance d'une fonction à la quasi-totalité des espaces fonctionnels classiques par des conditions portant uniquement sur les modules des coefficients de cette fonction dans une base d'ondelettes inconditionnelle normalisée[13].

Par exemple, dans l'espace de Besov $\dot B^s_{p,p}(\mathbb{R}^d)$ $1 \le p < \infty$ et $s < \dfrac{d}{p}$, la décomposition en ondelettes d'une fonction prend la forme :

(9) $$f = \sum_{\lambda\in\nabla} d_\lambda \psi_\lambda,$$

où $\lambda = (j,k)$ contient l'indice d'échelle $j = j(\lambda)$ et l'indice d'espace $k = k(\lambda)$ et

$$\psi_\lambda = \psi_{j,k} = 2^{jr}\psi(2^j\cdot -k), \;\; j\in\mathbb{Z},\;\; k\in\mathbb{Z}^d,$$

où ψ est l'ondelette mère et $r = \dfrac{d}{p} - s\cdot$ L'analyse de la théorie des ondelettes permet de caractériser l'appartenance à l'espace de Besov $\dot B^s_{p,p}(\mathbb{R}^d)$ en termes des coefficients des fonctions dans la base d'ondelettes ci-dessus comme suit :

(10) $$\|f\|_{\dot B^s_{p,p}(\mathbb{R}^d)} \sim \|(d_\lambda)_{\lambda\in\nabla}\|_{\ell^p}\,.$$

La possibilité de caractériser la régularité d'une fonction par la taille de ses coefficients d'ondelettes a permis de multiplier les applications de la théorie des ondelettes. En particulier, on peut traduire l'équivalence (10) par la décroissance des coefficients d'ondelettes à l'exception d'une minorité d'entre eux. Cette propriété de concentration de l'information sur un petit nombre de coefficients - souvent appelée parcimonie ou sparsity - joue un rôle crucial dans le traitement de l'image. Dans ce type de procédure par essence non linéaire, il est clair que l'ensemble des coefficients retenus varie selon la fonction que l'on approche. Une théorie générale connue sous le nom de théorie de l'approximation non linéaire a été initiée par Ronald DeVore dans les années 1980 pour analyser ce phénomène.

Un premier résultat dans la théorie de l'approximation non linéaire consiste à représenter un élément par ses N coefficients les plus significatifs. Plus précisément, étant donné un

13. Pour plus de détails, on peut consulter [17, 32, 33].

élément f de $\dot{B}^s_{p,p}(\mathbb{R}^d)$ admettant la décomposition donnée par (9) dans la base d'ondelettes $(\psi_\lambda)_{\lambda\in\nabla}$, il s'agit de ne conserver que la projection non linéaire $Q_N f$ défini par :

$$Q_N f = \sum_{\lambda\in E_N} d_\lambda \psi_\lambda,$$

où $E_N = E_N(f)$ est le sous ensemble de ∇ de cardinal N correspondant aux N plus grands coefficients d'ondelettes $|d_\lambda|$.

Parmi les nombreuses applications du projecteur non linéaire $Q_N f$, on peut citer l'estimation suivante :

$$\sup_{\|f\|_{\dot{B}^s_{p,p}(\mathbb{R}^d)}\leq 1} \|f - Q_N f\|_{\dot{B}^t_{q,q}(\mathbb{R}^d)} \leq C N^{-\frac{s-t}{d}}, \tag{11}$$

qui a joué un rôle clef dans [6] dans l'étude du défaut de compacité de l'injection de Sobolev critique :

$$\dot{B}^s_{p,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \dot{B}^t_{q,q}(\mathbb{R}^d)\,,$$

avec $0 < \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q} = \dfrac{s-t}{d}\cdot$

En effet, étant donnée une fonction f dans $\dot{B}^s_{p,p}(\mathbb{R}^d)$, on obtient en vertu de (10) et en utilisant $(d_m)_{m>0}$ le réarrangement décroissant de $|d_\lambda|$

$$\begin{aligned}
\|f - Q_N f\|_{\dot{B}^t_{q,q}(\mathbb{R}^d)} &\sim \big(\sum_{\lambda\notin E_N} |d_\lambda|^q\big)^{1/q} = \big(\sum_{m>N} |d_m|^q\big)^{1/q}\\
&\leq |d_N|^{1-p/q}\big(\sum_{m>N} |d_m|^p\big)^{1/q}\\
&\leq \big(N^{-1}\sum_{m=1}^{N} |d_m|^p\big)^{1/p-1/q}\big(\sum_{m>N} |d_m|^p\big)^{1/q}\\
&\leq N^{-(1/p-1/q)}\big(\sum_{m>0} |d_m|^p\big)^{1/p}\\
&\leq N^{-\frac{s-t}{d}}\|(d_\lambda)_{\lambda\in\nabla}\|_{\ell^p} \sim N^{-\frac{s-t}{d}}\|f\|_{\dot{B}^s_{p,p}(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}$$

Le succés de la théorie des ondelettes n'est plus à démontrer ni dans le traitement du signal et de l'image, ni dans le domaine de la simulation numérique des équations aux dérivées partielles. Pour un aperçu général des applications de cette théorie, on peut consulter la monographie [31] et les références qui s'y trouvent.

La théorie de Littlewood-Paley est considérée comme l'outil d'analyse microlocale le plus simple. On peut voir l'analyse microlocale comme l'étude des fonctions par le découpage de l'espace des phases, c'est-à-dire l'espace des (x,ξ). De manière générale, cette procédure consiste à localiser dans l'espace physique en x puis en variable de Fourier ξ, ce qui revient à localiser dans une boule pour une métrique de $T^\star\mathbb{R}^d$ (l'espace cotangent de $\mathbb{R}^d$) : c'est le calcul de Weyl-Hörmander [14]. L'intérêt de ce type de procédure introduite dans les années 1970 est de permettre d'analyser des propriétés fines de fonctions définies dans l'espace physique en opérant l'analyse dans l'espace des phases où le nombre de variables a doublé. En particulier cela s'est avéré particulièrement utile dans l'étude d'équations aux

14. Voir par exemple [13, 14, 22].

dérivées partielles non linéaires, par exemple pour prendre en compte certaines spécificités géométriques du cadre.

Tout l'enjeu du calcul de Weyl-Hörmander consiste à localiser dans l'espace des phases à l'aide de métriques raisonnables dites de Hörmander. À titre d'exemple, la procédure consistant à localiser en x sur une boule euclidienne de taille α, puis en variable de Fourier dans une boule euclidienne de taille $\alpha(1+|\xi_0|^2)^{\frac{1}{2}}$ revient à localiser dans une boule pour la métrique suivante dite la métrique $(1,0)$:

$$g_{(x,\xi)}(dx^2,d\xi^2)=dx^2+\frac{d\xi^2}{1+|\xi|^2}\,\cdot$$

Le calcul dit de Weyl-Hörmander qui a trouvé son formalisme actuel à la fin des années 1970 dans les travaux de L. Hörmander généralise cette métrique. Il consiste en fait à décrire les modes de découpage raisonnables de l'espace des phases. Ces découpages sont choisis en fonction de la nature et de la géométrie du problème à étudier. Les découpages admissibles sont ceux construits sur des métriques dites de Hörmander. Ces métriques sont des fonctions g de $T^\star\mathbb{R}^d$, muni de sa structure symplectique standard, dans l'ensemble des formes quadratiques définies positives sur $T^\star\mathbb{R}^d$ qui vérifient :

— une hypothèse dite de lenteur disant que la métrique varie peu sur ses propres boules et ce de manière uniforme ;
— une hypothèse dite du principe d'incertitude qui interdit de trop localiser. En particulier, le principe d'incertitude impose que le volume d'une g_X boule de rayon 1 soit supérieur ou égal au volume de la boule euclidienne de rayon 1 ;
— et enfin une hypothèse dite de tempérance qui exprime le fait que l'on peut estimer le rapport des métriques en des points quelconques par la métrique duale.

Références

[1] H. Bahouri et J.-Y. Chemin, Équations d'ondes quasilinéaires et estimations de Strichartz, *American Journal of Mathematics*, **121**, pages 1337-1377, 1999.

[2] H. Bahouri et J.-Y. Chemin, Microlocal analysis, bilinear estimates and cubic quasilinear wave equation, *Astérisque, Bulletin de la Société Mathématique de France* pages 93-142, 2003.

[3] H. Bahouri, J.-Y. Chemin et R. Danchin, Fourier analysis and applications to nonlinear partial differential equations, *Grundlehren der Mathematischen Wisserchaften, Springer Verlag*, **343**, 2011.

[4] H. Bahouri, J.-Y. Chemin et I. Gallagher, Refined Hardy inequalities, *Annali della Scuola Normale di Pisa*, **59**, pages 375-391, 2006.

[5] H. Bahouri et A. Cohen, Refined Sobolev inequalities in Lorentz spaces, *Journal of Fourier Analysis and Applications*, **17**, pages 662-673, 2011.

[6] H. Bahouri, A. Cohen et G. Koch, A general wavelet-based profile decomposition in critical embedding of function spaces, *Confluentes Mathematici*, **3**, pages 387-411, 2011.

[7] H. Bahouri et P. Gérard, High frequency approximation of solutions to critical nonlinear wave equations, *American Journal of Math*, **121**, pages 131-175, 1999.

[8] H. Bahouri, M. Majdoub et N. Masmoudi, Lack of compactness in the 2D critical Sobolev embedding, *Journal of Functional Analysis*, **260**, pages 208-252, 2011.

[9] H. Bahouri, M. Majdoub et N. Masmoudi, Lack of compactness in the 2D critical Sobolev embedding, the general case, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **101**, pages 415-457, 2014.

[10] H. Bahouri et G. Perelman, A Fourier approach to the profile decomposition in Orlicz spaces, *Mathematical Research Letters*, **21**, pages 33-54, 2014.

[11] J. Bergh et J. Löfström, Interpolation Spaces, an Introduction, Springer Verlag, Berlin, 1976.

[12] J.-M. Bony, Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires, *Annales de l'École Normale Supérieure*, **14**, pages 209–246, 1981.

[13] J.-M. Bony et J.-Y. Chemin, Espaces fonctionnels associés au calcul de Weyl-Hörmander, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, **122**, pages 77-118, 1994.

[14] J.-M. Bony et N. Lerner, Quantification asymptotique et microlocalisation d'ordre supérieur, *Annales de l'École Normale Supérieure*, **22**, pages 377-433, 1989.

[15] H. Brézis and J.-M. Coron, Convergence of solutions of H-Systems or how to blow bubbles, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **89**, pages 21-86, 1985.

[16] J.-Y. Chemin et C.-J. Xu : Inclusions de Sobolev en calcul de Weyl-Hörmander et systèmes sous-elliptiques, *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, **30**, pages 719-751, 1997.

[17] A. Cohen, Sur la route des ondelettes, *Gazette des Mathmaticiens* , **130**, pages 19-36, 2011.

[18] H. Fujita and T. Kato : On the Navier-Stokes initial value problem I, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **16**, pages 269-315, 1964.

[19] P. Gérard, Description du défaut de compacité de l'injection de Sobolev, *ESAIM Contrôle Optimal et Calcul des Variations*, **3**, pages 213-233, 1998.

[20] P. Gérard, Y. Meyer and F. Oru, Inégalités de Sobolev précisées, *Séminaire X-EDP*, École Polytechnique, 1996.

[21] J. Ginibre and G. Velo, Generalized Strichartz inequalities for the wave equations, *Journal of Functional Analysis*, **133**, pages 50-68, 1995.

[22] L. Hörmander, The analysis of linear partial differential equations, **3**, Springer Verlag, 1985.

[23] S. Jaffard, Analysis of the lack of compactness in the critical Sobolev embeddings, *Journal of Functional Analysis*, **161**, pages 384-396, 1999.

[24] M. Keel and T. Tao, Endpoint Strichartz estimates, *American Journal of Mathematics*, **120**, pages 955-980, 1998.

[25] C. E. Kenig et F. Merle, Global well-posedness, scattering and blow-up for the energy critical focusing non-linear wave equation, *Acta Mathematica*, **201**, pages 147-212, 2008.

[26] S. Klainerman and I. Rodnianski, Rough solutions of the Einstein-vacuum equations, *Annals of Mathematics*, **161**, pages 1143-1193, 2005.

[27] P.-L. Lions, The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case. I., *Revista Matematica Iberoamericana* **1** , pages 145-201, 1985.

[28] P.-L. Lions, The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case. II., *Revista Matematica Iberoamericana* **1** , pages 45-121, 1985.

[29] J. Littlewood et R. Paley, Theorems on Fourier series and power series I, *Journal of the London Mathematical Society*, **6**, pages 230-233, 1931.

[30] J. Littlewood et R. Paley, Theorems on Fourier series and power series II, *Proceedings of the London Mathematical Society*, **42**, pages 52-89, 1936.

[31] Stéphane Mallat, A wavelet tour of image processing : the sparse way, *Academic Press*, 2008

[32] Y. Meyer, *Ondelettes et opérateurs. I*, Hermann, 1990.

[33] Y. Meyer, *Ondelettes et opérateurs. II*, Hermann, 1990.

[34] W. Rudin, *Fourier analysis on groups*, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, **12**, New York–London, 1962.

[35] B. Ruf, A sharp Trudinger-Moser type inequality for unbounded domains in $\mathbb{R}2$, *Journal of Functional Analysis*, **219**, pages 340-367, 2005.

[36] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Editions Hermann.

[37] R. Strichartz, Restriction Fourier transform of quadratic surfaces and decay of solutions of the wave equations, *Duke Mathematical Journal*, **44**, pages 705-714, 1977.

[38] D.Tataru, Strichartz estimates for operators with non smooth coefficients and the non- linear wave equation, *American Journal of Mathematics*, **122**, pages 349-376, 2000.

[39] D.Tataru, Strichartz estimates for second order hyperbolic operators with non smooth coefficients II, *American Journal of Mathematics*, **123**, pages 385-423, 2000.

[40] H. Triebel : *Theory of function spaces*, Birkhäuser, Basel, 1983.

[41] N.S. Trudinger, On imbedding into Orlicz spaces and some applications, *Journal of Mathematics and Mechanics*, **17**, pages 473-484, 1967.

(H. Bahouri) Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées UMR 8050, Université Paris-Est Créteil, 61, avenue du Général de Gaulle, 94010 Créteil Cedex, France

E-mail address: hbahouri@math.cnrs.fr