

Comptes rendus de  
l'Académie des sciences.  
Série 1, Mathématique

Académie des sciences (France). Auteur du texte. Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique. 1996-03-01.

**1/** Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

- La réutilisation non commerciale de ces contenus ou dans le cadre d'une publication académique ou scientifique est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source des contenus telle que précisée ci-après : « Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France » ou « Source gallica.bnf.fr / BnF ».

- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service ou toute autre réutilisation des contenus générant directement des revenus : publication vendue (à l'exception des ouvrages académiques ou scientifiques), une exposition, une production audiovisuelle, un service ou un produit payant, un support à vocation promotionnelle etc.

[CLIQUER ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE](#)

**2/** Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

**3/** Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.

- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

**4/** Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

**5/** Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

**6/** L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

**7/** Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter [utilisation.commerciale@bnf.fr](mailto:utilisation.commerciale@bnf.fr).

## Métriques d'Einstein-Kähler sur les variétés à première classe de Chern positive

Christophe REAL

Université Pierre-et-Marie-Curie, Département de Mathématiques, Boîte courrier 172,  
4, place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France.

---

**Résumé.** Pour prouver l'existence d'une métrique d'Einstein-Kähler sur des variétés kählériennes compactes à première classe de Chern positive, on étudie l'invariant  $\alpha_{G,p}$ , introduit par Tian, tout d'abord sur  $\mathbb{P}_m(\mathbb{C})$  puis sur les hypersurfaces de Fermat  $X_{m,p}$ . On prouve la conjecture de Tian et Yau:  $\alpha_{G,p}(\mathbb{P}_m(\mathbb{C})) \geq \inf\{1, p/(m+1)\}$ . Ceci conduit au théorème : dès que  $p \geq (m+2)/2$ , il existe sur  $X_{m,p}$  une métrique d'Einstein-Kähler.

### *Einstein-Kähler metric on manifolds with positive first Chern class*

**Abstract.** To prove the existence of an Einstein-Kähler metric on compact Kähler manifolds with positive first Chern class, we study the invariant  $\alpha_{G,p}$ , introduced by Tian, first on  $\mathbb{P}_m(\mathbb{C})$  then on the hypersurface of Fermat  $X_{m,p}$ . We prove the conjecture of Tian and Yau:  $\alpha_{G,p}(\mathbb{P}_m(\mathbb{C})) \geq \inf\{1, p/(m+1)\}$ . This yields the theorem: if  $p \geq (m+2)/2$ , there is on  $X_{m,p}$  an Einstein-Kähler metric.

---

### Le problème

Sur une variété kählérienne compacte  $V$  donnée, existe-t-il une métrique d'Einstein-Kähler ?

Les équations différentielles qui se rapportent à ce problème ont été étudiées de manière approfondie par Aubin ([1] et [2]) et Yau [6].

Une métrique d'Einstein-Kähler ne peut exister que si la première classe de Chern est positive, négative ou nulle. Les cas nuls et négatifs ont été entièrement résolus. Seul le dernier cas nous intéresse désormais.

Aubin a ramené l'existence d'une telle métrique à la valeur prise par un invariant. Puis Tian a introduit les invariants  $\alpha$  et  $\alpha_G$  que nous étudions. Précisons qu'une fonction  $\phi \in C^\infty$  est dite admissible pour  $g$  dès que, la métrique  $g$  étant désormais fixée dans la première classe de Chern, la forme  $g + \partial \bar{\partial} \phi$

---

Note présentée par Thierry AUBIN.

### C. Real

est définie positive. Si  $V$  désigne la variété étudiée, on note :

$$\alpha(V) = \sup \left\{ \alpha > 0 / \exists C > 0 \text{ tel que toute fonction } \phi \in C^\infty \text{ admissible} \right. \\ \left. \text{vérifiant } \sup \phi = 0 \text{ satisfait à } \int_V e^{-\alpha\phi} dV < C \right\}.$$

On note  $\alpha_G(V)$  l'invariant obtenu en restreignant l'inégalité précédente aux fonctions  $\phi$   $G$ -invariantes,  $G$  représentant un groupe d'automorphismes de  $V$ .

Les travaux de Aubin et Tian permettent d'établir :

THÉORÈME. –  $\alpha(V) > 0$  et si  $\alpha_G(V) > m/(m+1)$  où  $m$  désigne la dimension complexe de  $V$ , alors il existe sur  $V$  une métrique d'Einstein-Kähler.

#### 1. $\alpha_G$ sur $\mathbb{P}_m(\mathbb{C})$

THÉORÈME. – Dans ce cas :  $\alpha_G = 1$ .

On dit qu'une fonction est  $G$ -invariante si, dans le système de coordonnées usuel  $[z_0, z_1, \dots, z_m]$ , elle est indépendante des arguments et symétrique par rapport à toutes les variables. Elle ne dépend donc que de  $x_0, x_1, \dots, x_m$ , où pour tout  $i$ ,  $x_i = z_i \bar{z}_i$ . On note  $K$  le potentiel de Kähler associé à  $g$  qui est la métrique de Fubini-Study multipliée par  $(m+1)$ . On considère les fonctions  $\phi \in C^\infty$  admissibles pour  $g$  et on se place sur la carte  $z_0 = 1$ . Fixons  $(x_1, \dots, x_m) \in ([0, 1])^m$ . Puisque  $(K + \phi)$  est symétrique par rapport aux variables  $z_1$  et  $z_2$ , on peut supposer  $x_2 < x_1$ .

On vérifie que la plurisousharmonicité de  $(K + \phi)$  se traduit par la sousharmonicité de la fonction  $F$  de  $\lambda$  définie sur  $C : (\lambda, \bar{\lambda}) \rightarrow (K + \phi)(u/x_1, u^2 x_2/x_1, ux_3/x_1, \dots, ux_m/x_1)$  où  $u = \lambda \bar{\lambda}$ .

Cette sousharmonicité implique la croissance en  $u$  de  $M(u) = u F'(u)$  (pour  $1 < u < \sqrt{x_1/x_2}$ ). Or la  $G$ -invariance de  $\phi$  et la valeur explicite de  $K$  permettent d'obtenir après calcul :  $M(\sqrt{x_1/x_2}) = (m+1)$ . Ainsi, pour  $1 < u < \sqrt{x_1/x_2}$ ,  $u F'(u) < (m+1)$ . En divisant cette inégalité par  $u$  et en intégrant de 1 à  $\sqrt{x_1/x_2}$ , on obtient :

$$(A) \quad - (K + \phi)(1/x_1, x_2/x_1, \dots, x_m/x_1) \\ < - (K + \phi)(1/\sqrt{x_1 x_2}, 1, x_3/\sqrt{x_1 x_2}, \dots, x_m/\sqrt{x_1 x_2}) + (m+1) \text{Log } \sqrt{x_1/x_2}.$$

$\phi$  étant invariante par la transformation qui échange  $z_0$  et  $z_1$ ,  $\phi(x_1, \dots, x_m) = \phi(1/x_1, x_2/x_1, \dots, x_m/x_1)$ . Puis la forme explicite de  $K$  nous donne :

$$(B) \quad - (K + \phi)(1/x_1, \dots, x_m/x_1) = - (K + \phi)(x_1, \dots, x_m) + (m+1) \text{Log } x_1.$$

En transformant de la même manière le deuxième membre de (A), il vient, après simplifications :

$$(C) \quad - (K + \phi)(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m) < - (K + \phi)(\sqrt{x_1 x_2}, \sqrt{x_1 x_2}, x_3, \dots, x_m).$$

En appliquant (C) aux différentes variables plusieurs fois de suite, dans le cadre d'une récurrence et après passage éventuel à la limite, on établit :

$$(D) \quad - (K + \phi)(x_1, x_2, \dots, x_m) < - (K + \phi)(\xi, \xi, \dots, \xi) \quad \text{où } \xi^m = x_1 x_2 \dots x_m.$$

Cette dernière expression, comme fonction de  $\xi$ , est sousharmonique et il en résulte une inégalité, l'analogue de (A) :

$$(A') \quad - (K + \phi)(\xi, \dots, \xi) < - (K + \phi)(1, \dots, 1) - m \text{Log } \xi < C - \text{Log} \left( \prod_{i=1}^m x_i \right),$$

où  $C$  est une constante qui ne dépend pas des fonctions  $\phi$ . En comparant (D) et (A') on obtient :

$$(E) \quad -(K + \phi)(x_1, \dots, x_m) < C - \text{Log} \left( \prod_{i=1}^m x_i \right).$$

Supposons que pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$ ,  $x_i \leq 1$ . Alors :  $K = \text{Log}(1 + x_1 + \dots + x_m) \leq \text{Log}(m + 1)$ . Soit  $\alpha < 1$ . Puisque  $\phi$  est symétrique par rapport à toutes ses variables :

$$\begin{aligned} \int_V e^{-\alpha\phi} dV &\leq (m + 1) \int_{V, x_i \leq 1} e^{-\alpha\phi(x)} dV(x) \\ &\leq e^{\alpha C} (m + 1)^{1+\alpha} \int_{[0,1]^m} \frac{dx_1 \dots dx_m}{x_1^\alpha \dots x_m^\alpha} \leq C'. \end{aligned}$$

Ceci prouve le théorème :  $\alpha_G(P_m) \geq 1$ .

## 2. $\alpha_G$ sur $\mathbb{P}_m(\mathbb{C})$

Si  $p \in \mathbb{N}^*$  est fixé, on dit qu'une fonction est  $G_p$ -invariante si, dans le système de coordonnées  $[z_0, \dots, z_m]$ , elle est invariante par les permutations de coordonnées et par  $\gamma_{j, 2\pi/p}$ , la multiplication d'un  $z_j$  par  $e^{2i\pi/p}$ . Pour montrer que  $\alpha_{G_p} \geq \inf\{1, p/(m+1)\}$  on énonce tout d'abord une :

**PROPOSITION 1.** – Soit  $\omega_g$  la métrique de Fubini-Study sur  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ . Posons pour  $\mu > 0$  et  $p \in \mathbb{N}^*$  fixé :  $E_{\mu, p} = \{\varphi \in C^2(\mathbb{P}_1(\mathbb{C})), \varphi \text{ admissible pour } \mu\omega_g, \text{ invariante par les } \gamma_{j, 2\pi/p}, j = 0, 1\}$ . Soit  $\alpha < p/\mu$ . Alors :  $\exists C > 0, \forall \varphi \in E_{\mu, p}$ ,

$$(1) \quad \begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-\alpha\varphi(re^{i\theta})} d\theta \\ &\leq C \exp \left[ -\frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(re^{i\theta}) d\theta \right] \int_{Q \in \mathbb{P}_1} B(r, Q) \frac{p(\mu - \Delta\varphi(Q))}{4\pi\mu} dV(Q). \end{aligned}$$

où :

$$B(r, Q) = \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d(re^{i\theta}, Q) d\theta \right)^\beta \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d(re^{iu}, Q)^{-\beta} du \right), \quad \beta = \frac{2\alpha\mu}{p} < 2.$$

Pour montrer ce résultat, on se réfère à Aubin [3], qui prouve que si  $E'_{p, \mu}$  se définit comme  $E_{p, \mu}$  à ceci près que l'on n'impose aux fonctions aucune invariance, mais qu'on leur demande d'être d'intégrale nulle, alors  $(1/2\pi) \int_0^{2\pi} e^{-\alpha\varphi(re^{i\theta})} d\theta \leq C$ , pour  $\alpha < 1/\mu$ . En appliquant sa démonstration, valable sur  $E'_{p, \mu}$ , à  $\varphi(re^{i\theta}) - (1/2\pi) \int_0^{2\pi} \varphi(re^{i\theta}) d\theta$ , on démontre (1) sur  $E_{p, \mu}$  pour  $\alpha < 1/\mu$ .

Dans le cas où les fonctions possèdent les symétries imposées par la définition de  $E_{\mu, p}$ , on modifie le raisonnement précédent en remarquant que  $(\mu - \Delta\phi)$  est positive et qu'il existe des parties  $\Sigma_k$  de  $\mathbb{P}_1$  telles que  $\mathbb{P}_1 = \bigcup_k \Sigma_k$  et  $(1/4\pi) \int_{\Sigma_k} (\mu - \Delta\phi) dV = \mu/p$ . Ces deux conditions permettent d'obtenir la proposition pour  $\alpha < p/\mu$ . On démontre ensuite la :

**PROPOSITION 2 :**

$$\forall \gamma \in [0, 1[. \quad \exists K_\gamma > 0 / \forall Q \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C}), \quad \int_0^1 B(r, Q) \frac{dr}{r^\gamma} \leq K_\gamma.$$

### C. Real

Pour montrer cela, on établit tout d'abord qu'il existe  $k > 0$ , tel que :

$$B(r, Q) \leq \frac{k}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| e^{iu} - \frac{\inf(r, |Q|)}{\sup(r, |Q|)} \right|^{-\beta} du,$$

et l'on majore l'intégrale de 0 à 1 en majorant chacune des intégrales de 0 à  $|Q|$  et de  $|Q|$  à 1.

Pour montrer que  $\alpha_{G_p} \geq \inf\{1, p/(m+1)\}$ , on choisit un réel  $\alpha < \inf\{1, p/(m+1)\}$ . Toute fonction  $\phi$  sur  $\mathbb{P}_m$ ,  $G_p$ -invariante,  $C^\infty$  admissible et d'intégrale nulle, vérifie les hypothèses de la proposition avec  $\mu = m+1$  pour chacune de ses  $m$  variables, les autres étant fixées. En appliquant

(1) successivement à toutes les variables, on majore  $\int_{\mathbb{P}_m} e^{-\alpha\phi} dV$  par :

$$k' \int_{[0,1]^m} e^{-\alpha\Phi(z)} r_1 \dots r_m dr_1 \dots dr_m \\ \times \int_{Q_1, \dots, Q_m \in \mathbb{P}_1} B(r_1, Q_1) \dots B(r_m, Q_m) dV'(Q_1) \dots dV'(Q_m)$$

où  $k'$  est une constante qui ne dépend pas de  $\phi$  et où  $\Phi$  est la moyenne angulaire de  $\phi$  [ceci est vrai car  $\alpha < p/(m+1)$ ]. On majore cette dernière intégrale par une constante en utilisant (E) ainsi que la proposition 2. En effet  $\Phi$  est  $G$ -invariante car  $\phi$  est  $G_p$ -invariante et le calcul fait apparaître  $m$  intégrales du type de celle de la proposition 2 avec le paramètre  $\gamma = 2\alpha - 1 < 1$ , car  $\alpha < 1$ .

### 3. $X_{m,p}$ admet une métrique d'Einstein-Kähler

On définit la sous-variété  $X_{m,p}$  de  $\mathbb{P}_{m+1}(\mathbb{C})$  par l'équation :  $z_0^p + \dots + z_{m+1}^p = 0$ . La métrique

$$\omega = (m+2-p) \partial \bar{\partial} \text{Log} (|z_0|^2 + \dots + |z_{m+1}|^2)|_X \in C_1(X_{m,p})$$

est invariante par  $G$ , le groupe d'automorphismes de  $X_{m,p}$  induit par le groupe  $G_p$  de  $\mathbb{P}_{m+1}(\mathbb{C})$ . Comme sur  $\mathbb{P}_m(\mathbb{C})$ ,  $\omega_0 = (m+1) \partial \bar{\partial} \text{Log} (|z_0|^2 + \dots + |z_m|^2) \in C_1(\mathbb{P}_m)$ , on peut montrer que :

$$\alpha_{G_p}(X_{m,p}) \geq \frac{m+1}{m+2-p} \alpha_{G_p}(\mathbb{P}_m(\mathbb{C})) \geq \frac{m+1}{m+2-p} \frac{p}{m+1} \geq 1 \text{ dès que } p \geq \frac{m+2}{2}.$$

$X_{m,p}$  admet donc une métrique d'Einstein-Kähler dès que  $p \geq (m+2)/2$ .

Nadel [4] a démontré ce résultat, il est obtenu ici par une toute autre approche et d'une manière élémentaire.

Note remise le 9 juin 1994, acceptée le 15 novembre 1994.

### Références bibliographiques

- [1] Aubin T., 1976, 1978. Équations du type Monge-Ampère sur les variétés kählériennes compactes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 283, série A, p. 119-122 et *Bull. Sci. Math.*, 102, p. 63-95.
- [2] Aubin T., 1984. Réduction du cas positif de l'équation de Monge-Ampère sur les variétés kählériennes compactes à la démonstration d'une inégalité, *J. Funct. Anal.*, 57, p. 143-153.
- [3] Aubin T., 1988. *Métriques d'Einstein-Kähler. Differential Geometry*, Peniscola, Naveira A. M., éd. Lecture Notes in Math., Springer-Verlag.
- [4] Nadel A., 1990. Multiplier ideal sheaves and Kähler-Einstein metrics of positive scalar curvature, *Ann. Math.*, 132, p. 549-596.
- [5] Tian G., 1987. On Kähler-Einstein metrics on certain Kähler manifolds with  $c_1(M) > 0$ , *Invent. Math.*, 89, p. 225-246.
- [6] Yau S. T., 1978. On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation, I, *Comm. Pure Appl. Math.*, 31, p. 339-411.
- [7] Tian G. et Yau S. T., 1987. Kähler-Einstein metrics on complex surfaces with  $C_1 > 0$ , *Comm. Math. Phys.*, 112, p. 175-203.