Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique

C. R. Acad. Sci. Paris, t. 322, Série I, p. 461-464, 1996
Géométrie différentielle/*Differential Geometry*

Métriques d'Einstein-Kähler sur les variétés à première classe de Chern positive

Christophe REAL

Université Pierre-et-Marie-Curie, Département de Mathématiques, Boîte courier 172, 4, place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France.

Résumé. Pour prouver l'existence d'une métrique d'Einstein-Kähler sur des variétés kählériennes compactes à première classe de Chern positive, on étudie l'invariant α_{Gp}, introduit par Tian, tout d'abord sur $\mathbb{P}_m(\mathbb{C})$ puis sur les hypersurfaces de Fermat $X_{m,p}$. On prouve la conjecture de Tian et Yau: $\alpha_{Gp}(\mathbb{P}_m(\mathbb{C})) \geqq \inf\{1, p/(m+1)\}$. Ceci conduit au théorème : dès que $p \geqq (m+2)/2$, il existe sur $X_{m,p}$ une métrique d'Einstein-Kähler.

Einstein-Kähler metric on manifolds with positive first Chern class

Abstract. *To prove the existence of an Einstein-Kähler metric on compact Kähler manifolds with positive first Chern class, we study the invariant α_{Gp}, introduced by Tian, first on $\mathbb{P}_m(\mathbb{C})$ then on the hypersurface of Fermat $X_{m,p}$. We prove the conjecture of Tian and Yau: $\alpha_{Gp}(\mathbb{P}_m(\mathbb{C})) \geqq \inf\{1, p/(m+1)\}$. This yields the theorem: if $p \geqq (m+2)/2$, there is on $X_{m,p}$ an Einstein-Kähler metric.*

Le problème

Sur une variété kählerienne compacte V donnée, existe-t-il une métrique d'Einstein-Kähler ?

Les équations différentielles qui se rapportent à ce problème ont été étudiées de manière approfondie par Aubin ([1] et [2]) et Yau [6].

Une métrique d'Einstein-Kähler ne peut exister que si la première classe de Chern est positive, négative ou nulle. Les cas nuls et négatifs ont été entièrement résolus. Seul le dernier cas nous intéresse désormais.

Aubin a ramené l'existence d'une telle métrique à la valeur prise par un invariant. Puis Tian a introduit les invariants α et α_G que nous étudions. Précisons qu'une fonction ϕ C^∞ est dite admissible pour g dès que, la métrique g étant désormais fixée dans la première classe de Chern, la forme $g + \partial\overline{\partial}\phi$

Note présentée par Thierry Aubin.

est définie positive. Si V désigne la variété étudiée, on note :

$$\alpha(V) = \sup\left\{\alpha > 0/\exists\, C > 0 \text{ tel que toute fonction } \phi\, C^\infty \text{ admissible}\right.$$
$$\left.\text{vérifiant } \sup \phi = 0 \text{ satisfait à } \int_V e^{-\alpha\phi}\, dV < C\right\}.$$

On note $\alpha_G(V)$ l'invariant obtenu en restreignant l'inégalité précédente aux fonctions ϕ G-invariantes, G représentant un groupe d'automorphismes de V.

Les travaux de Aubin et Tian permettent d'établir :

THÉORÈME. – $\alpha(V) > 0$ *et si* $\alpha_G(V) > m/(m+1)$ *où* m *désigne la dimension complexe de* V*, alors il existe sur* V *une métrique d'Einstein-Kähler.*

1. α_G sur $\mathbb{P}_m(\mathbb{C})$

THÉORÈME. – *Dans ce cas :* $\alpha_G = 1$.

On dit qu'une fonction est G-invariante si, dans le système de coordonnées usuel $[z_0, z_1, \ldots, z_m]$, elle est indépendante des arguments et symétrique par rapport à toutes les variables. Elle ne dépend donc que de $x_0, x_1, \ldots, x_m$, où pour tout i, $x_i = z_i \bar{z}_i$. On note K le potentiel de Kähler associé à g qui est la métrique de Fubini-Study multipliée par $(m+1)$. On considère les fonctions $\phi\, C^\infty$ admissibles pour g et on se place sur la carte $z_0 = 1$. Fixons $(x_1, \ldots, x_m) \in ([0, 1])^m$. Puisque $(K + \phi)$ est symétrique par rapport aux variables z_1 et z_2, on peut supposer $x_2 < x_1$.

On vérifie que la plurisousharmonicité de $(K + \phi)$ se traduit par la sousharmonicité de la fonction F de λ définie sur C : $(\lambda, \bar\lambda) \to (K + \phi)(u/x_1, u^2 x_2/x_1, u x_3/x_1, \ldots, u x_m/x_1)$ où $u = \lambda\bar\lambda$.

Cette sousharmonicité implique la croissance en u de $M(u) = u F'(u)$ (pour $1 < u < \sqrt{x_1/x_2}$). Or la G-invariance de ϕ et la valeur explicite de K permettent d'obtenir après calcul : $M(\sqrt{x_1/x_2}) = (m+1)$. Ainsi, pour $1 < u < \sqrt{x_1/x_2}$, $u F'(u) < (m+1)$. En divisant cette inégalité par u et en intégrant de 1 à $\sqrt{x_1/x_2}$, on obtient :

$$\text{(A)}\qquad \begin{aligned} &-(K+\phi)(1/x_1, x_2/x_1, \ldots, x_m/x_1)\\ &\quad< -(K+\phi)(1/\sqrt{x_1 x_2}, 1, x_3/\sqrt{x_1 x_2}, \ldots, x_m/\sqrt{x_1 x_2}) + (m+1)\operatorname{Log}\sqrt{x_1/x_2}.\end{aligned}$$

ϕ étant invariante par la transformation qui échange z_0 et z_1, $\phi(x_1, \ldots, x_m) = \phi(1/x_1, x_2/x_1, \ldots, x_m/x_1)$. Puis la forme explicite de K nous donne :

$$\text{(B)}\qquad -(K+\phi)(1/x_1, \ldots, x_m/x_1) = -(K+\phi)(x_1, \ldots, x_m) + (m+1)\operatorname{Log} x_1.$$

En transformant de la même manière le deuxième membre de (A), il vient, après simplifications :

$$\text{(C)}\qquad -(K+\phi)(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m) < -(K+\phi)(\sqrt{x_1 x_2}, \sqrt{x_1 x_2}, x_3, \ldots, x_m).$$

En appliquant (C) aux différentes variables plusieurs fois de suite, dans le cadre d'une récurrence et après passage éventuel à la limite, on établit :

$$\text{(D)}\qquad -(K+\phi)(x_1, x_2, \ldots, x_m) < -(K+\phi)(\xi, \xi, \ldots, \xi) \qquad \text{où} \quad \xi^m = x_1 x_2 \ldots x_m.$$

Cette dernière expression, comme fonction de ξ, est sousharmonique et il en résulte une inégalité, l'analogue de (A) :

$$\text{(A}')\qquad -(K+\phi)(\xi, \ldots, \xi) < -(K+\phi)(1, \ldots, 1) - m\operatorname{Log}\xi < C - \operatorname{Log}\left(\prod_{i=1}^m x_i\right),$$

où C est une constante qui ne dépend pas des fonctions ϕ. En comparant (D) et (A′) on obtient :

$$\text{(E)} \qquad -(K+\phi)(x_1, \dots, x_m) < C - \operatorname{Log}\left(\prod_{i=1}^{m} x_i\right).$$

Supposons que pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, $x_i \leq 1$. Alors : $K = \operatorname{Log}(1+x_1+\dots+x_m) \leqq \operatorname{Log}(m+1)$. Soit $\alpha < 1$. Puisque ϕ est symétrique par rapport à toutes ses variables :

$$\begin{aligned} \int_V e^{-\alpha\phi}\, dV &\leqq (m+1) \int_{V, x_i \leq 1} e^{-\alpha\phi(x)}\, dV(x) \\ &\leqq e^{\alpha C}(m+1)^{1+\alpha} \int_{[0,1]^m} \frac{dx_1 \dots dx_m}{x_1^\alpha \dots x_m^\alpha} \leqq C'. \end{aligned}$$

Ceci prouve le théorème : $\alpha_G(P_m) \geqq 1$.

2. α_G sur $\mathbb{P}_m(\mathbb{C})$

Si $p \in \mathbb{N}^*$ est fixé, on dit qu'une fonction est G_p-invariante si, dans le système de coordonnées $[z_0, \dots, z_m]$, elle est invariante par les permutations de coordonnées et par $\gamma_{j, 2\pi/p}$, la multiplication d'un z_j par $e^{2i\pi/p}$. Pour montrer que $\alpha_{Gp} \geqq \inf\{1, p/(m+1)\}$ on énonce tout d'abord une :

Proposition 1. – *Soit ω_g la métrique de Fubini-Study sur $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$. Posons pour $\mu > 0$ et $p \in \mathbb{N}^*$ fixé : $E_{\mu,p} = \{\varphi \in C^2(\mathbb{P}_1(\mathbb{C}))$, φ admissible pour $\mu\omega_g$, invariante par les $\gamma_{j,2\pi/p}$, $j = 0, 1\}$. Soit $\alpha < p/\mu$. Alors : $\exists C > 0$, $\forall \varphi \in E_{\mu,p}$,*

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} &\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-\alpha\varphi(re^{i\theta})}\, d\theta \\ &\leqq C \exp\left[-\frac{\alpha}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(re^{i\theta})\, d\theta\right] \int_{Q \in \mathbb{P}_1} B(r, Q)\, \frac{p(\mu - \Delta\varphi(Q))}{4\pi\mu}\, dV(Q). \end{aligned}$$

où :

$$B(r, Q) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d(re^{i\theta}, Q)\, d\theta\right)^\beta \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d(re^{iu}, Q)^{-\beta}\, du\right), \qquad \beta = \frac{2\alpha\mu}{p} < 2.$$

Pour montrer ce résultat, on se réfère à Aubin [3], qui prouve que si $E'_{p,\mu}$ se définit comme $E_{p,\mu}$ à ceci près que l'on n'impose aux fonctions aucune invariance, mais qu'on leur demande d'être d'intégrale nulle, alors $(1/2\pi)\int_0^{2\pi} e^{-\alpha\varphi(rei\theta)}\, d\theta \leqq C$, pour $\alpha < 1/\mu$. En appliquant sa démonstration, valable sur $E'_{p,\mu}$, à $\varphi(re^{i\theta}) - (1/2\pi)\int_0^{2\pi} \varphi(re^{i\theta})\, d\theta$, on démontre (1) sur $E_{p,\mu}$ pour $\alpha < 1/\mu$.

Dans le cas où les fonctions possèdent les symétries imposées par la définition de $E_{\mu,p}$, on modifie le raisonnement précédent en remarquant que $(\mu - \Delta\phi)$ est positive et qu'il existe des parties Σ_k de $\mathbb{P}_1$ telles que $\mathbb{P}_1 = \bigcup_k \Sigma_k$ et $(1/4\pi)\int_{\Sigma_k} (\mu - \Delta\phi)\, dV = \mu/p$. Ces deux conditions permettent d'obtenir la proposition pour $\alpha < p/\mu$. On démontre ensuite la :

Proposition 2 :

$$\forall \gamma \in [0, 1[, \quad \exists K_\gamma > 0 / \forall Q \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C}), \qquad \int_0^1 B(r, Q)\, \frac{dr}{r^\gamma} \leqq K_\gamma.$$

Pour montrer cela, on établit tout d'abord qu'il existe $k > 0$, tel que :

$$B(r, Q) \leqq \frac{k}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| e^{iu} - \frac{\inf(r, |Q|)}{\sup(r, |Q|)} \right|^{-\beta} du,$$

et l'on majore l'intégrale de 0 à 1 en majorant chacune des intégrales de 0 à $|Q|$ et de $|Q|$ à 1.

Pour montrer que $\alpha_{G_p} \geqq \inf\{1, p/(m+1)\}$, on choisit un réel $\alpha < \inf\{1, p/(m+1)\}$. Toute fonction ϕ sur $\mathbb{P}_m$, G_p-invariante, C^∞ admissible et d'intégrale nulle, vérifie les hypothèses de la proposition avec $\mu = m + 1$ pour chacune de ses m variables, les autres étant fixées. En appliquant (1) successivement à toutes les variables, on majore $\int_{\mathbb{P}_m} e^{-\alpha\phi}\, dV$ par :

$$k' \int_{[0,1]^m} e^{-\alpha\Phi(z)} r_1 \ldots r_m \, dr_1 \ldots dr_m$$
$$\times \int_{Q_1, \ldots, Q_m \in \mathbb{P}_1} B(r_1, Q_1) \ldots B(r_m, Q_m)\, dV'(Q_1) \ldots dV'(Q_m)$$

où k' est une constante qui ne dépend pas de ϕ et où Φ est la moyenne angulaire de ϕ [ceci est vrai car $\alpha < p/(m+1)$]. On majore cette dernière intégrale par une constante en utilisant (E) ainsi que la proposition 2. En effet Φ est G-invariante car ϕ est G_p-invariante et le calcul fait apparaître m intégrales du type de celle de la proposition 2 avec le paramètre $\gamma = 2\alpha - 1 < 1$, car $\alpha < 1$.

3. $X_{m,p}$ admet une métrique d'Einstein-Kähler

On définit la sous-variété $X_{m,p}$ de $\mathbb{P}_{m+1}(\mathbb{C})$ par l'équation : $z_0^p + \ldots + z_{m+1}^p = 0$. La métrique

$$\omega = (m + 2 - p)\, \partial\bar{\partial} \operatorname{Log}(|z_0|^2 + \ldots + |z_{m+1}|^2)|_X \in C_1(X_{m,p})$$

est invariante par G, le groupe d'automorphismes de $X_{m,p}$ induit par le groupe G_p de $\mathbb{P}_{m+1}(\mathbb{C})$. Comme sur $\mathbb{P}_m(\mathbb{C})$, $\omega_0 = (m+1)\, \partial\bar{\partial} \operatorname{Log}(|z_0|^2 + \ldots + |z_m|^2) \in C_1(\mathbb{P}_m)$, on peut montrer que :

$$\alpha_{G_p}(Xm, p) \geqq \frac{m+1}{m+2-p}\, \alpha_{G_p}(\mathbb{P}_m(\mathbb{C})) \geqq \frac{m+1}{m+2-p}\, \frac{p}{m+1} \geqq 1 \text{ dès que } p \geqq \frac{m+2}{2}.$$

$X_{m,p}$ admet donc une métrique d'Einstein-Kähler dès que $p \geqq (m+2)/2$.

Nadel [4] a démontré ce résultat, il est obtenu ici par une toute autre approche et d'une manière élémentaire.

Note remise le 9 juin 1994, acceptée le 15 novembre 1994.

Références bibliographiques

[1] **Aubin T., 1976, 1978**. Équations du type Monge-Ampère sur les variétés kählériennes compactes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 283, série A, p. 119-122 et *Bull. Sci. Math.*, 102, p. 63-95.

[2] **Aubin T., 1984**. Réduction du cas positif de l'équation de Monge-Ampère sur les variétés kählériennes compactes à la démonstration d'une inégalité, *J. Funct. Anal.*, 57, p. 143-153.

[3] **Aubin T., 1988**. *Métriques d'Einstein-Kähler. Differential Geometry, Peniscola,* **Naveira A. M.**, éd. Lecture Notes in Math., Springer-Verlag.

[4] **Nadel A., 1990**. Multiplier ideal sheaves and Kähler-Einstein metrics of positive scalar curvature, *Ann. Math.*, 132, p. 549-596.

[5] **Tian G., 1987**. On Kähler-Einstein metrics on certain Kähler manifolds with $c_1(M) > 0$, *Invent. Math.*, 89, p. 225-246.

[6] **Yau S. T., 1978**. On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère équation, I, *Comm. Pure Appl. Math.*, 31, p. 339-411.

[7] **Tian G. et Yau S. T., 1987**. Kähler-Einstein metrics on complex surfaces with $C_1 > 0$, *Comm. Math. Phys.*, 112, p. 175-203.