

Contrôle, preuve et démonstration. Trois régimes de la validation

Nicolas Balacheff

▶ **To cite this version:**

Nicolas Balacheff. Contrôle, preuve et démonstration. Trois régimes de la validation. Séminaire national de didactique des mathématiques, Association pour la recherche en didactique des mathématiques (ARDM), Nov 2017, Paris, France. pp.423-456. hal-02333720

HAL Id: hal-02333720
https://hal.science/hal-02333720

Submitted on 18 Jan 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CONTRÔLE, PREUVE ET DÉMONSTRATION
TROIS RÉGIMES DE LA VALIDATION

Nicolas Balacheff
Laboratoire d'informatique de Grenoble
Université Grenoble Alpes CNRS

Pour citer cette version :
Balacheff N. (2019) Contrôle, preuve et démonstration. Trois régimes de la validation. In : Pilet J., Vendeira C. (eds.) Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2018 (pp.423-456). Paris : ARDM et IREM de Pris - Université de Pari Diderot.

Texte du séminaire prononcé le 18 novembre 2017

Résumé : *Raisonner* est l'une des six *compétences* du socle commun des mathématiques du cycle 4 (années 7, 8 et 9 du cursus français obligatoire). Elle inclut *prouver*, *argumenter*, *démontrer* et affirme le caractère central de la *démonstration*. Les commentaires des programmes reconnaissent la difficulté de cet enseignement. Le texte qui suit interroge les avancées de la recherche sur l'apprentissage et l'enseignement de la démonstration et leur capacité à éclairer la mise en œuvre des programmes actuels. Il revient sur le vocabulaire en insistant notamment sur les différents régimes de la validation dans l'activité de l'élève. Puis il aborde ces questions dans la problématique de la validation au sens de la *théorie des situations didactiques*. Les principaux thèmes sont l'articulation entre preuve et connaissance en évoquant brièvement le modèle ck¢, et la relation entre démonstration et argumentation.

1. INTRODUCTION ET AVERTISSEMENT

Ce texte reprend et complète le contenu de mon exposé au séminaire national de didactique des mathématiques du 18 novembre 2017[1]. Je souhaitais ce jour-là proposer une réflexion sur l'apprentissage et l'enseignement de la démonstration en prenant comme élément structurant les programmes actuels des cycles 1 à 4 de l'enseignement obligatoire, puis interroger la recherche pour comprendre la complexité du projet éducatif et ouvrir sur des questions sur lesquelles il serait important que nous progressions ; en quelque sorte, des priorités de recherche. Le texte qui suit prend quelques libertés avec l'exposé lui-même[2], par exemple pour prendre en compte le rapport de la mission Villani-Torossian publié en janvier 2018.

Le cadre théorique dans lequel je me place est celui de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998) et de la théorie des champs conceptuels (Vergnaud, 1990). Je m'appuierai par ailleurs tout particulièrement sur les travaux de Raymond Duval (1992) sur la preuve et l'argumentation. L'arrière-plan de ma réflexion est constitué de mes travaux sur la preuve que je revisiterai ponctuellement, et de mon essai de modélisation des conceptions, notamment le modèle cK¢, dont la motivation est d'établir un lien entre connaitre et prouver.

[1] Vidéo de l'exposé à l'URL : https://video.irem.univ-paris-diderot.fr/videos/watch/9b24c7f9-30c1-4ed3-9f38-fb969f1f1b2e

[2] Je ne reprends pas ici la dernière partie de l'exposé qui abordait les problématiques induites pour la conception d'environnements informatiques pour l'apprentissage de la preuve, cela allongerait exagérément ce texte. Un texte développant ce thème sera prochainement disponible, dans l'attente on pourra se reporter à (Balacheff & Boy de la Tour, 2019).

Je commencerai donc ce texte par une lecture des programmes actuels en m'attachant à comprendre leur implication pour les enseignants, tant du point de vue du projet d'apprentissage que de celui du projet d'enseignement. Les notions de *contrôle*, *preuve* et *démonstration* sont ici un moyen d'analyser les relations entre conception et preuve, afin d'aborder le problème de l'ingénierie didactique de situations pour l'apprentissage de la preuve. Enfin, la conclusion proposera deux thèmes de recherche dont je suggère qu'ils soient une priorité pour contribuer à la réussite de l'enseignement de la preuve en mathématique dans l'enseignement obligatoire.

2. DANS LES PROGRAMMES

2.1. ARGUMENTER, PROUVER, DÉMONTRER AU CYCLE 4.

Le programme du cycle 4 de l'enseignement obligatoire (MENESR, 2015c) inclut le *raisonnement* parmi les six compétences[3] majeures de l'activité mathématique. Le document d'accompagnement (EDUSCOL, 2016), intitulé « Raisonnement », souligne la « place de choix » donnée à cette compétence dans le programme et en précise le sens en distinguant quatre « démarches » : *résoudre*, *collaborer*, *démontrer* ainsi que *fonder et défendre un jugement*. Je reviendrai plus loin sur la dimension sociale sous-jacente à la seconde, collaborer, et la quatrième de ces démarches, fonder et défendre un jugement. *Démontrer*, selon ce document, c'est « utiliser un raisonnement logique et des règles établies (propriétés, théorèmes, formules) pour parvenir à une conclusion. » C'est aussi le « moyen mathématique d'accès à la vérité » en « '[donnant] à voir' les différentes étapes d'une preuve par la présentation, rédigée sous forme déductive, des liens logiques qui la sous-tendent. » (ibid. p.1). Ainsi cette démarche est-elle présente à la fois dans le *processus de résolution d'un problème* et dans le *processus de validation de sa solution*. Une autre démarche constitutive du raisonnement, qui renvoie à la validation, est celle de « fonder et défendre ses jugements en s'appuyant sur des résultats établis et sur sa maîtrise de l'argumentation » (ibid.). Un peu plus loin dans le texte, est introduit un autre verbe, « prouver », à propos d'une conjecture, dans l'expression « prouver sa vérité par une démonstration » (ibid. p.2). Ainsi les termes *démontrer*, *prouver* et *argumenter* dessinent-ils ensemble la problématique de la validation du programme de ce cycle.

Les commentaires officiels contiennent par ailleurs des indices de la complexité, tant pour l'enseignant que pour les élèves, de la réalisation des objectifs de ce programme. Du côté de l'enseignant, « il n'est pas question de démontrer tous les théorèmes ou propriétés figurant au programme » (EDUSCOL, 2016 p.3). La formulation est forte. Bien que la démonstration soit l'outil canonique de la validation en mathématique, le législateur suggère qu'elle a un coût tel qu'elle ne peut être le moyen exclusif de validation dans la classe. L'enseignant doit cependant « systématiquement qualifier les énoncés mathématiques selon leur statut, en distinguant définitions, théorèmes admis et théorèmes démontrés. » (ibid. p.3). Dans la pratique, les théorèmes admis sont accompagnés d'activités ou de discours qui en facilitent l'acceptation par les élèves.

[3] « Alors que le terme de "connaissances" renvoie plutôt à des savoirs codifiés, à un programme scolaire, celui de compétences reçoit bien des définitions distinctes. Elles tendent à s'accorder sur une signification plus large ou "transversale". "Une compétence est une combinaison de connaissances, de capacités à mettre en œuvre ces connaissances, et d'attitudes, c'est-à-dire de dispositions d'esprit nécessaires à cette mise en œuvre" (HCE). "Une compétence est une capacité d'action efficace face à une famille de situations, qu'on arrive à maîtriser en disposant à la fois des connaissances nécessaires et de la capacité de les mobiliser, pour identifier et résoudre de vrais problèmes". (Perrenoud) » (in : *Les définitions des termes et indicateurs statistiques de l'éducation nationale* http://www.education.gouv.fr/cid23200/les-definitions-des-termes-et-indicateurs-statistiques-de-l-education-nationale.html -- consulté le 13 février 2019)

Ainsi la démonstration doit-elle prendre sa juste place dans l'activité mathématique et en même temps cohabiter avec d'autres formes de validation relevant nécessairement de l'argumentation voire de la persuasion. Par ailleurs, des indications attestent de la prise en compte des difficultés des élèves : « Afin de ne pas détourner de la résolution de problèmes les élèves ayant des difficultés à entrer dans les codes de rédaction d'une démonstration, il importe de valoriser les productions spontanées, écrites ou orales, issues des phases de recherche et d'expérimentation. » (ibid. p.4).

Le travail de la classe comprendra ainsi « des temps de mise en commun et d'argumentation permettant de produire une preuve et des temps de mise en forme (démonstrations rédigées) » (ibid. p.4). Argumentation, preuve et démonstration sont distinguées et mises en relation comme ordres de discours oral ou écrit. Cependant, les commentaires des programmes de 2016, reprenant ceux de 2008, stipulent que « la mise en forme écrite [d'une preuve] ne fait pas partie des exigibles [du socle commun] » (EDUSCOL, 2009 p.2). L'enseignant se trouve devant cette complexité : d'une part amener les élèves à comprendre ce qu'est une démonstration et son rôle en mathématiques, d'autre part rester en quelque sorte en arrière de cet objectif en équilibrant les niveaux de discours qui vont relever de l'argumentation et de la démonstration ; il lui faut parvenir à les placer l'une par rapport à l'autre, négocier cette double exigence. Du côté des élèves, la difficulté anticipée est de « […] passer d'un raisonnement inductif à un raisonnement déductif pour établir la preuve ; [puis] mettre en forme ce raisonnement déductif pour en faire une démonstration c'est-à-dire une preuve communicable. » (ibid. p.3). On notera que le législateur ne parait considérer que l'induction, alors que l'abduction – ou raisonnement plausible, selon Polya – et bien d'autres stratégies heuristiques sont à l'œuvre dans la résolution de problèmes confrontant les élèves à la difficulté de la synthèse et de la mise en forme au moment de la validation. Si ce moment est essentiellement un moment de mise en cohérence et de mise en forme des produits de l'activité de résolution (Garuti, Boero, & Lemut, 1998), la réduction des écarts structurels voire logiques entre cette activité et une preuve acceptable peut être difficile (Pedemonte, 2007), aussi est-il ajouté que « la rédaction et la mise en forme d'une preuve gagnent à être travaillées collectivement, avec l'aide du professeur et à être présentées comme une façon convaincante de communiquer un raisonnement aussi bien à l'oral que par écrit. » (EDUSCOL, 2009 p.4).

Résoudre, *argumenter*, *prouver*, *démontrer*, *communiquer* et *convaincre* à l'oral ou à l'écrit, sont autant de dimensions de la compétence « raisonnement » dont les programmes veulent l'acquisition. La recherche a montré qu'elles sont structurantes, parfois complémentaires mais aussi en opposition, créant des tensions tant dans l'apprentissage que dans l'enseignement. Je reprendrai tous ces points plus précisément dans ce qui suit, mais avant cela je propose de vérifier rapidement ce qu'il en est dans les cycles 2 et 3 qui préparent les apprentissages du cycle 4.

2.2. ARGUMENTER, PROUVER, DÉMONTRER AUX CYCLES 2 ET 3

Au cycle 3, cycle de consolidation, « les mathématiques contribuent à construire chez les élèves l'idée de preuve et d'argumentation. » (MENESR, 2015b). Cet objectif s'inscrit dans le projet plus global d'apprendre à « justifier ses affirmations et rechercher la validité des informations dont on dispose. » (MENESR, 2018b). La géométrie est signalée, classiquement, comme le lieu privilégié de cet apprentissage. Son enseignement doit « [permettre] aux élèves de passer progressivement d'une géométrie où les objets […] et leurs propriétés sont contrôlés par la perception à une géométrie où ils le sont par le recours à des instruments, par l'explicitation de propriétés pour aller ensuite vers une géométrie dont la validation ne s'appuie que sur le raisonnement et l'argumentation. » (ibid.).

Les distinctions entre preuve et argumentation, justifier et valider ne sont pas précisées, ni leurs définitions respectives. L'objectif d'apprentissage est lui-même exprimé de façon assez générale : « construire l'idée » de

preuve ou d'argumentation. Ces formulations suffisent pour exprimer l'intention du législateur de faire évoluer le rapport des élèves à la connaissance par la prise de conscience de ce qui la sépare de l'opinion et de la croyance. L'enseignant devra pour cela susciter le passage de démarches empiriques à des démarches intellectuelles mobilisant des compétences discursives pour « expliquer sa démarche ou son raisonnement, comprendre les explications d'un autre et argumenter dans l'échange. » (ibid.)

Les textes du cycle 2 font des suggestions pour préparer ces apprentissages. Ainsi, à propos des systèmes naturels et techniques (domaine 4), il est écrit : « Étayé par le professeur, l'élève s'essaie à expérimenter, présenter la démarche suivie, expliquer, démontrer, exploiter et communiquer les résultats de mesures ou de recherches, la réponse au problème posé en utilisant un langage précis. Le discours produit est argumenté et prend appui sur des observations et des recherches et non sur des croyances. » (MENESR, 2018a). L'objectif, dans la tradition de la formation de l'esprit critique, est de former le futur citoyen à « débattre, argumenter rationnellement, émettre des conjectures et des réfutations simples, s'interroger sur les objets de la connaissance, commencer à résoudre des problèmes notamment en mathématiques en formulant et en justifiant ses choix développent le jugement et la confiance en soi. » (ibid.)

D'une façon explicite, les mathématiques ne sont pas un élément du programme du cycle 1 (maternelle) cependant, dans une perspective plus large, l'enseignant est invité à organiser des « moments de langage », notamment des moments de résolution de problème collectifs, « Il y a alors argumentation, explication, questions, intérêt pour ce que les autres croient, pensent et savent. L'enseignant commente alors l'activité qui se déroule pour en faire ressortir l'importance et la finalité. » (MENESR, 2015a).

2.3. UN PROJET QUI TRAVERSE LES CYCLES DE L'ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

La lecture des programmes[4] montre que la problématique de la validation, fondatrice de la culture scientifique et citoyenne, traverse toute la scolarité obligatoire et occupe une place particulière dans l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques. Le rapport remis au gouvernement en février 2018 l'affirme très clairement : « la notion de preuve est au cœur de l'activité mathématique, quel que soit le niveau (de façon adaptée, cette assertion est valable de la maternelle à l'université) » (Villani & Torossian, 2018 p.25).

La traduction de cette affirmation dans les programmes et leurs commentaires recourt à une variété de termes (argumenter, prouver, justifier, démontrer) dont la signification n'est pas stable (e.g. démontrer ne peut avoir la même signification au cycle 2 et au cycle 4) et dont les relations ne sont pas clairement élucidées (e.g. entre « preuve » et « preuve communicable »). La lecture du rapport dit Villani-Torossian rencontre les mêmes difficultés. La section dédiée à « La preuve » (ibid. pp.25-26) recourt à des formulations telles que : « démarche de justification argumentée », « formes d'argumentation propres aux mathématiques », « démonstration » dont on comprend l'intention mais difficilement les nuances : comment différencier une argumentation propre aux mathématiques de la démonstration ? Ces désignations seraient-elles simplement équivalentes comme preuve et démonstration seraient synonymes selon l'un des auteurs exprimant la position des mathématiciens[5] ? Des réponses précises à ces questions sont nécessaires à la mise en œuvre des programmes et à l'exercice quotidien de l'enseignement de mathématiques.

À ce point, je retiendrai que la commande de l'institution articule un volet éducatif et un volet didactique non exclusifs d'autres aspects, complémentaires et fortement liées. Dans le volet éducatif, l'enseignement doit

[4] Programmes en vigueur au moment du prononcé du séminaire en novembre 2017 et à celui de l'écriture de ce texte, en mars 2019.

[5] Cédric Villani, à l'occasion d'un bref échange de courriels à propos du rapport sur l'enseignement des mathématiques (30 mars 2018).

amener les élèves à prendre conscience de la distinction entre croyance et connaissance en s'appuyant sur des interactions sociales réglées par les principes du débat scientifique. Dans le volet didactique, il s'agit de répondre avec des moyens adaptés au niveau concerné à la question du vrai en mathématique dès les premiers apprentissages. L'objectif au terme de la scolarité obligatoire est que les élèves comprennent et pratiquent la démonstration comme un type de preuve spécifique des mathématiques, ce qui implique d'éclaircir le rapport entre preuve et démonstration et de savoir préciser ce que peuvent être d'autres types de preuve qui seraient pratiqués par les élèves et les enseignants et enseignantes aux niveaux plus élémentaires.

Dans la suite de ce texte, je préciserai ce que peut apporter la recherche en didactique des mathématiques à la compréhension des mots-clés utilisés par les programmes et les documents d'accompagnement. Je reviendrai alors sur les types de preuve, la distinction entre preuve et contrôle dans le contexte de la résolution de problèmes, et sur la relation entre argumentation et preuve. Je rappellerai le rôle et les caractéristiques des situations de validation au sens de la théorie des situations didactiques qui donne les éléments essentiels de la conception de situations pour l'apprentissage de la preuve.

En revanche, je n'aborderai pas la discussion sur les limites de l'interaction sociale dont on sait qu'elle est l'un des points d'appui pour susciter des débats de preuve. J'ai souligné la difficulté de la gestion de ces situations pour l'enseignant ou l'enseignante (Balacheff, 1991) dont la source se trouve dans la frontière fragile entre persuader et argumenter. L'inclusion des catégories persuasion et argumentation dans la typologie des schèmes de preuves de Harel et Sowder (1998) est justifiée par la légitimité de l'appel à l'autorité pour affirmer la validité d'un énoncé, soit que l'élève invoque l'enseignant ou l'enseignante, soit que celui-ci ou celle-ci doive faire accepter un théorème sans démonstration. L'art de persuader est un art qu'il faudra reconsidérer dans la classe de mathématiques.

3. EXPLICATION, PREUVE, DÉMONSTRATION, LE SENS DES MOTS

3.1. RAISONNEMENT

La compétence « raisonner », c'est-à-dire le *raisonnement*, constitue le cadre général dans lequel l'institution situe résoudre et démontrer. Par raisonnement elle entend « [un] processus mental permettant d'effectuer des inférences. Rappelons qu'une inférence est une opération mentale par laquelle on accepte qu'une proposition soit vraie en vertu de sa liaison avec d'autres propositions » (EDUSCOL, 2016, p. 1). J'ai utilisé une définition très proche au début de mon travail sur l'apprentissage de la preuve, en désignant par raisonnement une activité intellectuelle consistant à obtenir de nouvelles informations à partir d'informations données (Balacheff, 1987, p. 148). Cette formulation était maladroite dans la mesure où le problème posé n'est pas de modéliser les activités mentales mais de les caractériser grâce à leurs manifestations tangibles pour pouvoir créer des situations d'apprentissage propres à susciter leur évolution par l'effet des retours spécifiques qu'elles apporteraient ; c'est-à-dire des situations didactiques au sens de la *théorie des situations didactiques* (Brousseau, 1998), cadre dans lequel je me plaçais explicitement.

Je propose de retenir la définition donnée par Raymond Duval qui, d'une part, est congruente avec les cadres théoriques dans lesquels je me place et, d'autre part, n'introduit pas de contradiction avec une problématique psychologique :

> Le raisonnement « [est l']organisation de propositions qui est orientée vers un énoncé-cible pour modifier la valeur épistémique que cet énoncé-cible a dans un état de connaissance donné, ou dans un milieu social donné, et, qui par voie de conséquence, en modifie la valeur de vérité lorsque certaines conditions particulières d'organisation sont remplies » (Duval, 1992, p. 52).

Par valeur épistémique il faut comprendre « *le degré de certitude ou de conviction attaché à une proposition* » (Duval, 1991, p. 254). Le rôle de cette valeur est particulièrement présent lors des échanges dans la classe, ou lors de la résolution collaborative de problèmes. Cette définition fait de l'analyse du raisonnement – pour l'enseignement comme pour la recherche – un travail sur le discours et sur le texte, dont on prendra en compte le caractère contextualisé par l'état des connaissances, les niveaux de langage et les contraintes de situation.

Les « conditions particulières d'organisation » mentionnées par Raymond Duval sont une référence à la fois à la structure logique et à la norme particulière du discours de preuve. La compréhension de la nature et du rôle de cette norme est l'un des enjeux essentiels de l'enseignement de la démonstration. J'en aborderai certains aspects dans la section sur les types de preuve.

3.2. EXPLICATION

« Explication » n'est pas un mot-clé saillant des textes des programmes et de leurs commentaires. Il est en revanche, avec « argumentation », le terme le plus clivant au sein de la communauté scientifique lorsqu'est en question la distinction entre *preuve qui prouve* et *preuve qui explique*, pour reprendre la formulation de Gila Hanna qui très tôt a porté cette problématique (Hanna, 1990). Le problème sous-jacent est celui de la compréhension de la preuve et de sa capacité à répondre à la question de savoir pourquoi un énoncé est vrai au-delà de la bonne forme du discours qui garantit cette validité. C'est donc la question du lien entre preuve et connaissance. Voire celui du lien entre calcul, qui réduit la validité au respect de règles syntaxiques, et raisonnement où subsiste une part d'exigence sémantique.

Dans ce qui suit « Explication » est utilisé pour désigner un « système de relations au sein duquel la donnée à expliquer trouve sa place » (Duval, 1992, p. 40). En effet, « la question de la valeur épistémique résolue, se pose celle de la construction de la cohérence ou appartenance de la nouvelle production au système de connaissance. » (ibid.). L'explication est ainsi la mise en relation de l'énoncé produit de la résolution d'un problème avec les connaissances explicitement disponibles : il y a compréhension s'il y a clôture pour cette mise en relation.

Raymond Duval (1992) affirmait un clivage entre explication et raisonnement. La première, écrivait-il, « donne une ou plusieurs raisons pour rendre compréhensible une donnée (un phénomène, un résultat, un comportement, ...) » (ibid. p.40), alors que pour le second « le rôle des raisons avancées y est tout différent : il est de "communiquer" aux affirmations qui sont à justifier leur force d'argument » (ibid. p.41).

3.3. EXPLICATION, ARGUMENTATION, PREUVE ET DÉMONSTRATION

En soutenant l'existence d'un clivage entre explication et raisonnement, Raymond Duval induit celui entre explication et preuve que rejette Gila Hanna : « a proof actually becomes legitimate and convincing to a mathematician only when it leads to real mathematical understanding » (Hanna, 1995, p. 42). J'avais pour ma part fortement lié explication et preuve dans un effort de clarification et de définition (Balacheff, 1987, p. 148). Mon choix a suscité quelques difficultés tant avec Raymond Duval en raison même de ce lien, qu'avec Gila Hanna[6] en raison de la disjonction qu'elle affirmait entre preuves qui prouvent et preuves qui expliquent. Je reviens et précise ici ces distinctions dans la perspective d'une réduction des contradictions. Pour cela il faut revenir sur le terme « argumentation ».

[6] « For Balacheff, then, a proof would seem to be an explanation by virtue of being a proof. » (Hanna, 1990 p.9).

L'argumentation, rappelle Raymond Duval (1992, p. 37), citant Jean-Blaise Grize, est le mode naturel de raisonnement. Sa finalité est la vraisemblance et la conviction d'autrui sans égard pour les critères logiques canoniques. Ainsi est-elle acceptée ou rejetée selon deux critères : sa pertinence (cohérence sémantique) et sa force (valeur épistémique 'positive') (ibid. p.39) ; c'est-à-dire la force de la croyance que l'on attache à ses énoncés pour de bonnes ou de mauvaises raisons.

L'introduction de la distinction entre *argumentation rhétorique* et *argumentation heuristique* (Duval, 1992, p. 51) a permis de rapprocher cette acception générale d'argumentation et une acception congruente aux exigences de l'activité mathématique. En effet, selon cette distinction, l'argumentation rhétorique vise à convaincre un interlocuteur, alors que l'argumentation heuristique guide la résolution de problème en favorisant des choix stratégiques ou en soutenant la validité supposée de tel ou tel énoncé.

On peut remarquer que si Raymond Duval a forgé la notion de « valeur épistémique » d'un énoncé (force de la croyance d'un agent – personne ou groupe de personnes) d'une argumentation rhétorique, il ne propose pas de terme distinguant les sources de la valeur de ceux de l'argumentation heuristique. Une proposition récente de Gila Hanna (2017) offre la possibilité de combler ce manque en reprenant la distinction introduite par les philosophes Frans Delarivière et Bart van Kerkhove (2017) entre *valeur épistémique*, qui implique l'existence d'un agent, et *valeur ontique* indépendante de tout agent. Il s'agissait ici de qualifier le caractère intrinsèque ou relatif de la valeur explicative d'une preuve, cette distinction tient aussi bien pour l'argumentation. Voici ce qui en est dit :

> « A mathematical proof can be seen as an argument by which one convinces oneself or others that something is true, so it might seem hard to go beyond epistemic talk about an explanatory proof. However, while the content of any particular proof is the fruit of a person's epistemic work, it can be separated as an object independent of a particular mind. Other people can read this proof and be convinced by it. This leads us to the question whether showing why a theorem is true is a feature of the proof itself or a feature of communicative acts, texts or representations. » (ibid. p.3)

Ceci est à rapprocher du critère de reconnaissance du caractère heuristique ou épistémique d'un argument « [qui] tient ou bien à l'existence d'une organisation théorique du champ de connaissances et de représentations dans lequel se déroule l'argumentation, ou à l'absence d'une telle organisation théorique. » (Duval, 1992, p. 51). « Une argumentation heuristique requiert l'existence d'une organisation théorique du champ de connaissances et de représentations dans lequel se déroule l'argumentation » et « que l'on soit en mesure de comprendre ou de produire une relation de justification entre des propositions qui soit de nature déductive et non pas seulement de nature sémantique. » (ibid. p.52). Ainsi la distinction entre argumentation rhétorique et argumentation heuristique, revient-elle à l'évaluation de la valeur épistémique et de la valeur ontique des énoncés, et de leurs relations. Nous pouvons alors avancer qu'une argumentation sera recevable au sens des mathématiques si la valeur épistémique de ses énoncés est conditionnée par leur valeur ontique ; c'est ce critère qui permettra de lui reconnaitre le statut de preuve en mathématique. La structure normalisée des démonstrations est le moyen technique de cette évaluation.

La distinction entre argumentation rhétorique et argumentation heuristique, et entre valeur épistémique et valeur ontique d'un énoncé, permet de reformuler et de préciser l'opposition entre argumentation et démonstration parfois trop abrupte comme ici : « Duval's model of deductive reasoning is formal derivation, while for us it is only a model for the final product, not adequate for the school approach to theorems and proof » (Boero, Douek, Morselli, & Pedemonte, 2010, p. 17).

Cette discussion me permet de revenir et de préciser le schéma (figure 1.) que j'ai proposé en 1988, repris nombre de fois, pour lequel j'ai longtemps sous-estimé le risque de malentendu.

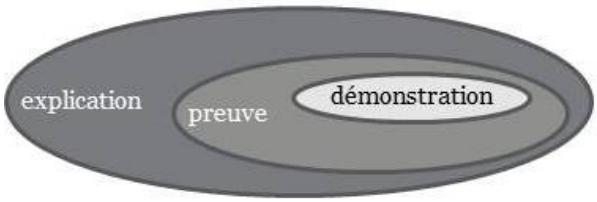


FIGURE 1

Je n'ai pris conscience de l'importance de revenir sur ce schéma en lisant une première version d'une communication que Gila Hanna a mis en libre accès sur Research Gate (Hanna, 2018, fol. 3) : « If one were to take the position that an explanation is simply a deductive argument, then all proofs would automatically be explanations (Balacheff, 2010, p. 30) ». Sa remarque est légitimement induite par la représentation (Figure 1) que j'avais choisie ; celle-ci n'était conçue que comme un croquis accompagnant un texte dont je reprends ci-dessous la version anglaise[7] pour rester dans le contexte de lecture que put faire Gila Hanna :

> « This structuration [of the relations between explanation, proof and mathematical proof] distinguished between pragmatic and intellectual proof, and within both it identified categories related first to the nature of the student knowing and his or her available means of representation. The rationale for this organisation (sketched [here figure 1.]) is the postulate that the explaining power of a text (or non-textual "discourse") is directly related to the quality and density of its roots in the learner's (or even mathematician's) knowing. What is produced first is an "explanation" of the validity of a statement from the subject's own perspective. This text can achieve the status of proof if it gets enough support from a community that accepts and values it as such. Finally, it can be claimed as mathematical proof if it meets the current standards of mathematical practice. So, the keystone of a *problématiques* of proof in mathematics (and possibly any field) is the nature of the relation between the subject's knowing and what is involved in the 'proof'. »

Ces relations entre explication, preuve et démonstration étaient précisées dans la perspective de l'individu engagé dans la résolution d'un problème et la validation de sa solution. La qualification d'explication d'une énonciation ne préjuge pas de la valeur épistémique ou ontique en soi de ses énoncés ; tel énoncé peut avoir la valeur épistémique positive d'un théorème-en-acte (croyance empiriquement fondée sur une invariance constatée). En restant dans le cadre de Duval, le passage de l'explication à l'argumentation est celui qu'impose le besoin de formuler les raisons et leur organisation, que cela soit pour soi-même ou pour autrui. Faire accepter par autrui qu'une argumentation établit la validité d'une solution change son statut et sa valeur par le caractère publique qu'elle acquiert. Elle gagne le statut de preuve. Parmi ces preuves certaines ont une structure particulière qui satisfait des normes collectives, telle en mathématiques celles de la démonstration.

Je me suis essayé à dessiner un nouveau croquis (Figure 2) qui pourrait limiter les malentendus mais il n'est pas sûr qu'un dessin vaille mieux qu'un discours...

[7] Voir en français (Balacheff, 1987, fol. 3) – texte accessible en ligne.

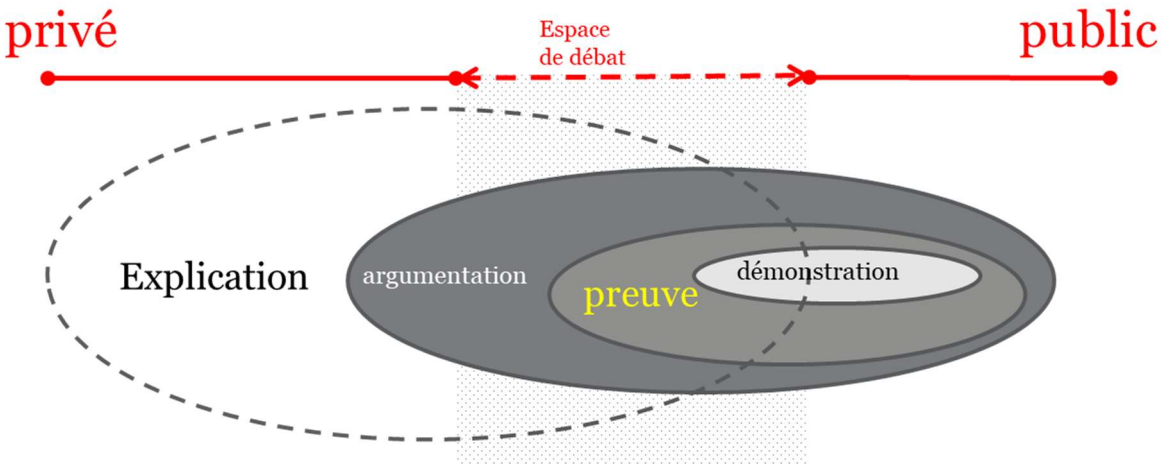


Figure 2[8]

Le point important est la mise en évidence de l'existence d'une frontière entre sphère privée et sphère publique. Dans la sphère privée, l'explication travaille sur les objets et leurs relations, elle est le socle de la construction de l'argumentation qui sera le moyen de convaincre de la validité de la solution d'un problème, que ce travail assure ou non la soumission de la valeur épistémique à la valeur ontique. Le franchissement de cette frontière implique la recherche d'un consensus, c'est-à-dire un processus social qui, par nature, ne peut garantir qu'individuellement les protagonistes reconnaitront le caractère explicatif de l'argumentation collectivement acceptée – la preuve. Cette incertitude est plus forte encore dans le cas de la démonstration du fait de son caractère normatif qui prend le pas sur ses propriétés rhétoriques.

4. LES TYPES DE PREUVES

4.1. ILLUSTRATION 1 : AUX ORIGINES DE LA CONVERGENCE UNIFORME

L'ouvrage de Gilbert Arsac (2013) sur la genèse du concept de convergence uniforme[9] met précisément en évidence les contraintes qui pèsent sur l'argumentation en mathématique en se gardant autant que possible des anachronismes d'une réécriture contemporaine. Je retiens ici la partie de cette étude (ibid. p.57 sqq.) qui porte sur la limite d'une série de fonctions d'une variable réelle continues dans le cours d'Analyse de Cauchy de 1821. Il s'agit de comprendre ce texte mathématique dans le contexte des ressources et des moyens disponibles à une époque ; en quelque sorte une archéologie du savoir mathématique.

La formulation du théorème sur la continuité de la limite d'une série de fonctions continues telle qu'elle apparait dans le cours de Cauchy est reproduite ci-dessous (figure 3). Ce texte ne présente pas de difficultés particulières pour le lecteur contemporain. Cependant, on peut noter des expressions aujourd'hui disparues, telle : « les termes de la série (I) renfermant une même variable ». Pourquoi n'écrit-il pas $u_n(x)$? Ce n'est pas que Cauchy ignorerait la notation $f(x)$, il en fait usage ailleurs dans le cours. L'hypothèse la plus plausible est qu'il ne le fait pas ici parce que la problématique des séries de fonctions hérite très fortement de celle des séries numériques.

[8] Ces questions et ce schéma ont été repris et détaillés lors de mon exposé au colloque CORFEM en juin 2019 à Strasbourg (texte à paraitre en 2020).

[9] La lecture de ce livre devrait faire partie de la formation des jeunes chercheurs en didactique des mathématiques.

(I) $u_0, u_1, u_2 \ldots u_n, u_{n+1}$, &c…

Lorsque, les termes de la série (1) renfermant une même variable x, cette série est convergente, et ses différens termes fonctions continues de x, dans le voisinage d'une valeur particulière attribuée à cette variable ;

$$s_n, \quad r_n \quad \text{et} \quad s$$

sont encore trois fonctions de la variable x, dont la première est évidemment continue par rapport à x dans le voisinage de la valeur particulière dont il s'agit. Cela posé, considérons les accroissemens que reçoivent ces trois fonctions, lorsqu'on fait croître x d'une quantité infiniment petite α. L'accroissement de s_n sera, pour toutes les valeurs possibles de n, une quantité infiniment petite; et celui de r_n deviendra insensible en même temps que r_n, si l'on attribue à n une valeur très-considérable. Par suite, l'accroissement de la fonction s ne pourra être qu'une quantité infiniment petite. De cette remarque on déduit immédiatement la proposition suivante.

1.er THÉORÈME. *Lorsque les différens termes de la série* (1) *sont des fonctions d'une même variable* x, *continues par rapport à cette variable dans le voisinage d'une valeur particulière pour laquelle la série est convergente, la somme* s *de la série est aussi, dans le voisinage de cette valeur particulière, fonction continue de* x.

Cauchy (1821, pp. 131–132)

Figure 3

Par ailleurs, Gilbert Arsac relève que le terme « variable », utilisé comme substantif dans l'énoncé ci-dessous est utilisé comme adjectif ailleurs dans le cours pour évoquer un comportement dynamique :

> « Lorsque des quantités variables sont tellement liées que, la valeur de l'une d'entre elles étant donnée, on puisse en conclure les valeurs de toutes les autres, on conçoit d'ordinaire ces diverses quantités exprimées au moyen de l'une d'entre elles, qui prend alors le nom de variable indépendante ; et les autres quantités exprimées au moyen de la variable indépendante sont ce qu'on appelle des fonctions de cette variable. » (Cauchy, 1821, p. 19)

Cette relation étroite entre variable et quantité dénote une conception cinématique de la limite qui remonte à Neper et Newton (Arsac, 2013, p. 17). Cette conception est confortée par la force d'évocation de la

représentation graphique des fonctions comme en témoigne le texte de Cauchy à propos du théorème des valeurs intermédiaires (Cauchy, 1821, p. 44)[10]. Elle est présente dans la définition de la continuité :

> « En d'autres termes, la fonction f(x) restera continue par rapport à x entre les limites données, si, entre ces limites, un accroissement infiniment petit de la variable produit toujours un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même. » (ibid. pp.34-35)

Cette conception des rapports entre fonction et variable est dominante à l'époque.

Le texte qui précède l'énoncé du théorème n'est pas une démonstration comme on peut en lire ailleurs dans le cours, mais la narration d'un raisonnement de même nature que celle que la conception qui sous-tend la définition de la continuité. Cauchy a la précaution de qualifier ce texte de « remarque », signifiant clairement son statut singulier.

Les premières lignes de ce texte fixent la signification des écritures s, s_n et r_n comme cela serait fait pour une série numérique. Le fait qu'il s'agisse de fonctions est introduit par la phrase : « Lorsque les termes de la série (I) renfermant une même variable x […] ». Ainsi ce qui apparait en premier sont des nombres (i.e. des variables représentant des quantités) et leurs dépendances. Ceci ne signifie pas que ce soit ce que Cauchy conçoit précisément, mais atteste des limites que lui imposent les moyens d'expression dont il dispose. On perçoit de plus la conception sous-jacente d'une évolution continue, voire monotone, de la variable x et de son effet sur celle de la fonction à chaque étape du raisonnement. L'incrément de la variable x est explicitement désigné mais cette désignation n'est pas exploitée par Cauchy. Il exprime la continuité sur un intervalle et non en un point. Par ailleurs, la continuité de la fonction est liée à celle de la courbe (représentation graphique) et elle est sous-tendue par l'idée d'une dynamique temporelle de l'évolution conjointe de la variable et de la fonction (Arsac, 2013, sec. I.6).

Cauchy a reconnu des exceptions au théorème formulé dans son cours de 1821, notamment celle des séries de Fourier (Arsac, 2013, Chapitres IV & V). Aussi, trente ans après la publication de son cours, il propose une nouvelle formulation en affirmant « [qu'il] est facile de voir comment on doit modifier l'énoncé du théorème, pour qu'il n'y ait plus lieu à aucune exception » (Cauchy, 1853, p. 455). Cette modification consiste en l'introduction d'une condition, restée sous le nom de critère de Cauchy (figure 4).

Cette fois, Cauchy qualifie de « démonstration » cette preuve publiée aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (CRAS). Cependant, le lecteur vérifiera la distance qui existe entre cette formulation et la formulation moderne. Gibert Arsac (2013, p. 61 sqq.) en propose une analyse précise dont je retiendrai ici l'un des éléments qui est particulièrement éclairant quant aux limites qu'imposent les moyens de représentation ou de formulation sur l'expression de la pensée mathématique : l'organisation du discours en langue naturelle place les termes {n, x, ε}[11] dans un ordre qui n'est pas congruent à celui dans lequel ils apparaissent dans la formalisation contemporaine du théorème : ($\forall\ \varepsilon\ \ \exists N\ \ \forall x\ \ \forall n>N\ \ \forall n'>n\ \ |s_n-s_{n'}|<\varepsilon$), rendant ainsi difficile de relever le fait que N dépende de ε et non de x.

La nouvelle formulation de Cauchy est plus proche de ce que l'on pourrait appeler une argumentation mathématique, dans laquelle la valeur épistémique des énoncés est leur valeur ontique, que d'une démonstration selon les standards contemporains. Ce constat ne met pas en question la rigueur du mathématicien, celle-ci est soumise aux limites des représentations et des moyens techniques disponibles à

[10] Une preuve analytique de ce théorème est cependant donnée dans la note III de ce même ouvrage (ibid. p.378 sqq)
[11] En notant par commodité ε « un nombre aussi petit que l'on voudra », ce que ne fait pas Cauchy.

cette époque : la notion of variable domine celle de fonction (variable dépendante) avec une conception dynamique de la convergence qui influe sur celle de limite et de continuité, la notation algébrique de la valeur absolue est manquante[12], la continuité est définie sur un intervalle—et non en un point—et est intimement liée à la perception de la continuité graphique de la courbe. De plus, l'indisponibilité[13] des quantificateurs rend difficile l'identification des dépendances présentent dans le discours, et la négation des énoncés qui les impliquent (e.g. la discontinuité comme négation de la continuité). La construction de l'argumentation est guidée par une conception cinématique de la continuité et de la convergence et par le principe de continuité (*lex continuitatis* , Leibniz[14])

Si l'on nomme n' un nombre entier supérieur à n, le reste r_n ne sera autre chose que la limite vers laquelle convergera, pour des valeurs croissantes de n', la différence

(3) $$s_{n'} - s_n = u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n'-1}.$$

Concevons, maintenant, qu'en attribuant à n une valeur suffisamment grande, on puisse rendre, pour toutes les valeurs de n comprises entre les limites données, le module de l'expression (3) (quel que soit n'), et, par suite, le module de r_n, inférieur à un nombre ε aussi petit que l'on voudra. Comme un accroissement attribué à x pourra encore être supposé assez rapproché de zéro pour que l'accroissement correspondant de s_n offre un module inférieur à un nombre aussi petit que l'on voudra, il est clair qu'il suffira d'attribuer au nombre n une valeur infiniment grande, et à l'accroissement de x une valeur infiniment petite, pour démontrer, entre les limites données, la continuité de la fonction

$$s = s_n + r_n.$$

Mais cette démonstration suppose évidemment que l'expression (3) remplit la condition ci-dessus énoncée, c'est-à-dire que cette expression devient infiniment petite pour une valeur infiniment grande attribuée au nombre entier n. D'ailleurs, si cette condition est remplie, la série (1) sera évidemment convergente. En conséquence, on peut énoncer le théorème suivant :

» 1^er^ *Théorème*. Si les différents termes de la série

(1) $$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \ldots, \quad u_n, \quad u_{n+1}, \ldots,$$

sont des fonctions de la variable réelle x, continues, par rapport à cette variable, entres des limites données, si, d'ailleurs, la somme

(3) $$u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n'-1}$$

.../...

devient toujours infiniment petite pour des valeurs infiniment grandes des nombres entiers n et $n' > n$, la série (1) sera convergente, et la somme s de la série (1) sera, entre les limites données, fonction continue de la variable x.

Cauchy (1853 pp.456-457)

FIGURE 4

[12] Elle est introduite par Weierstrass en 1841.

[13] Il faut attendre le XX° siècle.

[14] Voir p. ex. *Philosophie et mathématique leibniziennes*, Gilles-Gaston Granger (1981)

De l'analyse de Gilbert Arsac, à laquelle le lecteur doit se reporter, je retiens les éléments suivants : d'une part, elle n'est pas à visée cognitive mais épistémique[15], d'autre part, elle traite un matériau – le cours de Cauchy de 1821 et le CRAS de 1853 – dans son contexte – les mathématiques de la première moitié du XIX° siècle. Si l'on examine précisément le travail réalisé on remarque que la connaissance de Cauchy est caractérisée par la donnée simultanée et reliée d'une part du problème en jeu, ici la conservation d'une propriété lors d'un passage à la limite, les systèmes de représentation disponibles, les opérations possibles et les moyens de validation accessibles. Différents niveaux de validation sont présents dans le cours de 1821, de la démonstration à l'argumentation. Ils dépendent essentiellement de l'accès aux objets mathématiques (représentations, opérations, relations) qu'ils mobilisent.

Le cas de la convergence uniforme illustre le lien étroit entre preuve et connaissance. Il conforte l'affirmation selon laquelle il n'y a pas de problématique de la validation sans problématique de la connaissance, et inversement. Il n'y a pas d'apprentissage des mathématiques sans un apprentissage des moyens de validation attachés à ces connaissances qui les façonnent et dont elles dépendent. Il est nécessaire que la question de la validité et de la validation soit posée dès les premiers moments de cet apprentissage. C'est un défi.

Les normes de la validation en mathématiques se singularisent au cours de la scolarité relativement à ce qu'elles sont dans d'autres disciplines. En une formule un peu facile, cela tient à ce que *les mathématiciens font ce qu'ils font parce que leurs objets sont ce qu'ils sont* au moment de leur activité. La question de la rigueur n'est pas abstraite, elle est une problématique dont la possibilité et la nature du développement dépend à la fois de conditions épistémiques, au sens piagétien, et de moyens techniques (les représentations et leurs traitements). Cette question est difficile en mathématique dont les objets sont déjà des représentations.

4.2. PRÉCISIONS SUR LES TYPES DE PREUVE

La dépendance mutuelle de la conceptualisation, des systèmes de représentation et des systèmes de validation oblige à distinguer et à caractériser différents types de preuve pour pouvoir modéliser les évolutions possibles et leurs conditions. Cette nécessité est classiquement affirmée dans le cadre d'une problématique cognitive, ainsi l'un de ses représentants les plus actifs, le mathématicien David Tall, écrit-il : « The cognitive development of students needs to be taken into account so that proofs are presented in forms that are potentially meaningful for them. This requires educators and mathematicians to rethink the nature of mathematical proof and to consider the use of different types of proof related to the cognitive development of the individual. » (Tall, 1998, p. 136). L'histoire des mathématiques invite à élargir cette perspective, si le développement cognitif est l'un des déterminants des niveaux de validation – on le sait depuis les travaux de Jean Piaget – ils ne sont pas les seuls loin s'en faut. Il faut aller au-delà des problématiques cognitives (Balacheff, 1990) en prenant en compte, au moins, l'économie propre des situations de validation et l'état des connaissances.

La typologie des preuves que j'ai proposée à la fin des années 80 a souvent été utilisée en la réduisant à une liste de stades, ce qu'elle n'est pas. Sa construction, adossée à une recherche expérimentale, mettait en évidence l'imprudence qu'il y aurait à enfermer un ou une élève dans un type particulier. Les observations attestaient qu'il ou elle accepte un type de preuve selon ce que ses connaissances permettent de construire *et* sa perception de la situation. Cette dépendance est particulièrement manifeste lors du traitement de contre-exemples (Balacheff, 1987, p. 166 sqq.). De plus, plusieurs types de preuves peuvent être identifiés dans le

[15] Jean Piaget nomme « sujet épistémique » les structures d'actions ou de pensée communes à tous les sujets d'un même niveau de développement, par opposition au « sujet individuel ou psychologique » utilisant ces instruments de connaissance. (M.-F. Legendre, Fondation Jean Piaget, Piaget et l'épistémologie, consulté 190311 17:00)
http://www.fondationjeanpiaget.ch/fjp/site/ModuleFJP001/index_gen_page.php?IDPAGE=320&IDMODULE=72

cours de la résolution d'un problème ou dans le cours d'un débat. Ceci confirme un résultat classique d'Éphraïm Fishbein (1982, p. 17) qui observait que des étudiants revenaient à des vérifications élémentaires après avoir produit une démonstration. Les enjeux de l'interaction sociale, ou ceux de la situation, peuvent susciter cet effacement de l'argumentation mathématique au profit d'un discours visant à persuader, voire à se persuader.

Un type de preuve est moins une information sur l'élève que sur *l'élève en situation à un moment donné de son histoire mathématique*.

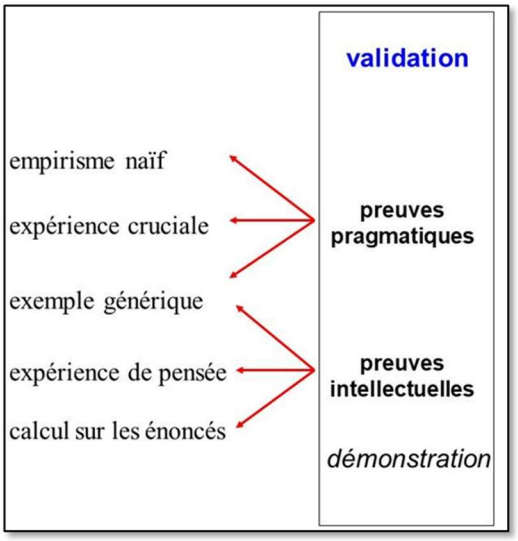


FIGURE 5

La figure ci-dessus présente sous une forme synthétique les types de preuves et rappelle les deux catégories auxquelles ils peuvent être rattachés. Ces catégories sont importantes pour situer les types de preuves dans la problématique de l'apprentissage de la démonstration[16].

Le passage de l'empirisme naïf à la démonstration peut, en une formule rapide, décrire le mouvement de l'apprentissage de la preuve en mathématique. Ce passage de preuves pragmatiques à des preuves intellectuelles nécessaire pour aller vers la démonstration, est aussi celui d'une *problématique pragmatique* à une *problématique théorique* et donc d'une évolution de la lecture des situations dans lesquels l'activité mathématique se déploie et celle du statut des connaissances mobilisées.

La compréhension de la complexité de l'apprentissage de la preuve requiert celle des relations entre connaissance et preuve, ou plus précisément entre conception et preuve. Par « conception » j'entends ici la caractérisation d'une connaissance en situation (Balacheff, 1995; Balacheff & Margolinas, 2005) qui associe en référence à l'interaction avec le milieu, les opérateurs qui sont mis en œuvre, les représentations (langagières ou non) et les contrôles. Sans entrer dans les détails de ce modèle, l'exemple qui suit illustre le rôle des contrôles en interaction avec les systèmes de représentation utilisés.

[16] Faute de place, je ne développe pas ici la présentation des types de preuve, on peut pour cela se rapporter à (Balacheff, 1988, vol. 1) disponible en ligne.

5. CONTRÔLE, VALIDATION ET PREUVE

5.1. ILLUSTRATION 2 : UN PROBLÈME D'APPROXIMATION

De multiples décisions stratégiques, tactiques ou liées à la mise en œuvre d'actions sont prises dans le cours de la résolution d'un problème. L'étude de cette part de l'activité est difficile car elle est souvent silencieuse ou associée à des comportements difficiles à interpréter. Ce sont des temps de réflexion dont la prise en compte pose des problèmes méthodologiques qu'il faut pouvoir résoudre car ils sont nécessaires à la compréhension du processus de résolution. La théorie des situations didactiques apporte des moyens pour cela. Notamment les situations de formulation (Brousseau, 1998, p. 104 sqq.), en s'appuyant sur les interactions avec le milieu et les interactions sociales, permettent de susciter des propos ou des productions directement liées à la prise de décision. Une forme élémentaire de telles situations consiste à associer des élèves pour la résolution collaborative d'un problème avec la contrainte de se mettre d'accord sur une solution commune. Cette contrainte donne à la situation de formulation, qui requiert un langage commun, la caractéristique minimale d'une situation de validation qui requiert l'accord sur les critères et les moyens d'une décision.

Nathalie Gaudin (2005) a étudié les conceptions des étudiants engagés dans la résolution de problèmes impliquant des fonctions d'une variable réelle. Je présente ici une partie de ce travail qui n'a pas été publié par ailleurs. Il s'agit de la résolution d'un problème d'approximation. De tels problèmes donnent aux contrôles une place qui facilite l'observation de leur rôle et de leur fonctionnement. L'incertitude sur les critères de meilleure approximation favorise la discussion des caractéristiques générales ou recherchées d'une fonction en relation avec les données du problème. Les questions de lissage, en particulier, requièrent la considération de multiples aspects pour prendre des décisions fondées sur des raisonnements qualitatifs ou analytiques qui mettent en jeu les propriétés des systèmes de représentation algébrique ou graphique.

La situation conçue par Nathalie Gaudin exploite les fonctionnalités de Mapple[17] pour la constitution d'un milieu dans l'interaction avec lequel les étudiants vont construire leurs stratégies. Les systèmes de représentation graphique ou algébrique associés aux conceptions le plus souvent initialement mobilisées sont insuffisants pour comparer les fonctions-solutions envisagées, leurs formes et leurs régularités. Le problème posé aux étudiants, qui travaillent en binômes et doivent s'accorder sur une solution, est le suivant[18] (Gaudin, 2005 esp. chapitre 5) :

> *Ci-dessous des valeurs y_i, entachées d'erreurs aléatoires pouvant aller jusqu'à 10 %. Ces valeurs sont issues d'un polynôme P de degré 3 de coefficients inconnus, évalué en x_i.*

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y_i	1.22	1.41	1.38	1.42	1.48	1.58	1.84	1.79	2.03	2.04	2.17	2.36	2.30	2.57	2.52	2.85	2.93	3.03	3.07	3.31	3.48

> *On propose cinq approximations de ce polynôme.*

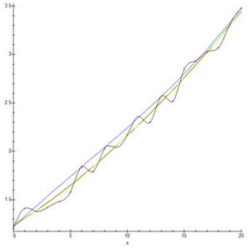
[17] https://fr.maplesoft.com/

[18] Je ne reproduis pas ici la totalité de l'énoncé qui inclut la très longue définition de f_4, et des indications pour l'usage de Mapple

Choisissez celle qui approche au mieux ce polynôme :

- *sur l'intervalle* [0;20]
- *sur* [0 ; +∞ [

$f_1(x) = 1{,}2310 + 0{,}0752\,x + 1{,}789 \times 10^{-3}\,x^2$



$f_2(x) = 1{,}2429 + 0{,}06706\,x + 2{,}833\times10^{-3}x^2 - 3{,}48\times10^{-5}x^3$

$f_3(x) = 1{,}2712 + 0{,}0308\,x + 0{,}0115\,x^2 - 7{,}1626 \times 10^{-4}x^3 + 1{,}704 \times 10^{-5}x^4$

f_4 définie par :

• elle passe par chacun des points (x_i, y_i)

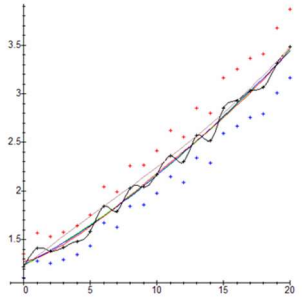
• sur chaque intervalle $[x_i ; y_i]$, f_4 est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3

• elle est deux fois dérivable et sa dérivée seconde est continue

• sa représentation algébrique est la suivante (sur chaque intervalle $[x_i ; y_i]$) : [polynômes de degré 3 par intervalles]

Vous expliquerez les raisons pour lesquelles vous retenez ou vous refusez chacune des approximations.

L'extrait de dialogue ci-dessous est repris du protocole d'observation de deux élèves, Rémi et Olivier (Gaudin, 2005, p. 233 sqq.) :



RÉMI : [*Donc le polynôme est quelque part là-dedans.*] A26

OLIVIER : [*Ouais. La meilleure approximation a le droit d'en sortir.*] A27a [*donc on est pas bien avancé*] A27 b

RÉMI : [*Ça dépend comment on définit meilleure. Ça dépend si tu considères un point sort c'est pas bien ou si c'est une moyenne… si c'est l'ensemble des point qui soit bien…*] A28 [*Tu vois ce que je veux dire. On essaie de retracer les polynômes si tu vois ce que je veux dire ? On les trace toutes.*

OLIVIER : *Toutes en même temps ?*] A29

RÉMI : [*Je sais pas si on va y voir grand-chose mais on peut essayer. Ou sinon on met des bonnes couleurs.*

OLIVIER : *Tu te rappelleras que c'est vert la première ? Tu peux noter ? Alors vert… bleu, il faut choisir les couleurs, rouge...*] A30

Le premier temps du traitement des dialogues, induit par le modèle cK¢ qui a sous-tendu l'analyse des données (Balacheff, 2017), a consisté à identifier les « atomes » qui seront les composants élémentaires de la description de l'activité de résolution de problème. Un atome peut être composé de plusieurs énoncés (e.g. A30), ou être constitué d'une partie d'un énoncé (e.g. A28, A29). Lorsque la convergence est suffisante, les énonciations de deux élèves peuvent être réunies dans un seul atome (e.g. A29, A30) sans hypothéquer l'identification des conceptions en jeu qui parfois s'opposent. Les contrôles sont particulièrement présents dans l'exemple retenu. Dans le cas de cette situation, ils sont à l'origine de la question critique de la définition de « approximation » (e.g. A28) ou des questions qu'elle soulève (e.g. A27a, A27b). Bien que limité, cet extrait illustre leur importance pour orienter et stabiliser la stratégie de résolution du problème.

RÉMI : [*Donc le polynôme est quelque part là-dedans.*] A26 OLIVIER : [*Ouais. La meilleure approximation a le droit d'en sortir.*] A27a [*donc on est pas bien avancé*] A27 b	A26 + A27a – évaluation d'un fait A27b - jugement
RÉMI : [*Ca dépend comment on définit meilleure. Ca dépend si tu considères un point sort c'est pas bien ou si c'est une moyenne… si c'est l'ensemble des point qui soit bien…*] A28 [*Tu vois ce que je veux dire. On essaie de retracer les polynômes si tu vois ce que je veux dire ? On les trace toutes.*] OLIVIER : *Toutes en même temps ?*] A29	A28 – évaluation d'un jugement A29 – décision d'une action
RÉMI : [*Je sais pas si on va y voir grand-chose mais on peut essayer. Ou sinon on met des bonnes couleurs.*] OLIVIER : *Tu te rappelleras que c'est vert la première ? Tu peux noter ? Alors vert… bleu, il faut choisir les couleurs, rouge...*] A30	A30 – évaluation d'une action

L'analyse des dialogues, souvent des débats contradictoires, entre les élèves révèle la présence de différents types et niveaux de contrôles que Nathalie Gaudin désigne et caractérise ainsi :

- Les *contrôles référents* (Gaudin, 2005, p. 161) qui guident la recherche. Par exemple : la forme de la courbe d'un polynôme du 3° degré, la proximité des $f_i(x_i)$ et y_i, la position de la courbe par rapport à (x_i, y_i).

  Ces contrôles se mettent en place en ayant à l'esprit qu'au terme de la résolution il faudra établir la validité de ce qui est fait. La validité de la solution se construit ainsi au cours de la résolution du problème ; cependant cela ne rendra pas nécessairement immédiat la production de la preuve en raison de possibles différences structurelles entre la structuration heuristique et les standards acceptés d'expression de la preuve (Pedemonte, 2005).
- Les *contrôles d'instrumentation* (ibid.) qui guident le choix des opérateurs en cohérence avec les contrôles référents. Par exemple : distance entre la courbe d'approximation et les points (x_i, y_i), critère de la meilleure approximation.

  Ces contrôles président au choix des bons outils pour la mise en œuvre de la stratégie qui a été choisie. Ils vont guider la sélection des actions en cohérence avec les contrôles référents.
- Les *contrôles locaux* qui garantissent la bonne mise en œuvre d'un opérateur.

  Les contrôles locaux sont ceux de la vérification locale de la possibilité d'utiliser un instrument ou d'appliquer un théorème. C'est la vérification de la valeur de « condition » dans le schéma [Si <condition> alors <action>] qui modélise un opérateur.

Ces distinctions permettent de repérer trois conceptions de la notion de fonction : (1) la conception « courbe » qui assimile la fonction de sa représentation graphique, (2) la conception « analytique » qui attache de façon privilégiée à la fonction sa représentation algébrique et (3) la conception « objet » (Sfard, 1991) qui mobilise les représentations et les outils des deux conceptions précédentes, mais avec la capacité de passer de façon en

quelque sorte continue, fluide, d'un mode de représentation et de traitement, graphique ou algébrique, à l'autre (Balacheff & Gaudin, 2010). Pour chacune de ces conceptions les contrôles référents assurent la pertinence et la validité des procédures de résolution engagées et ils préparent la validation finale.

Eléments de la conception	Courbe	Analytique	Objet
Nature des contrôles référents (CR)	$CR1_{courbe}$: Allure globale de la courbe de l'approximation $CR2_{courbe}$: Proximité de la courbe de l'approximation aux points xiyi	$CR1_{ana}$: proximité des valeurs f(xi) de l'approximation aux valeurs yi ou proximité des points (xi, f(xi)) aux points xiyi	$CR1_{objet}$: Allure globale de la courbe de l'approximation $CR2_{objet}$: proximité des valeurs f(xi) de l'approximation aux valeurs yi ou proximité des points (xi, f(xi)) aux points xiyi
Nature des contrôles d'instrumentation (CI)	$CI1_{courbe}$: $CR1_{courbe}$ instrumenté par les représentations graphiques des courbes des fj $CR2_{courbe}$ non instrumenté	$CI1_{ana}$: $CR1_{ana}$ instrumenté par $\sum_{0}^{20}(fj(xi)-P(xi))^2$	$CI1_{objet}$: $CR1_{objet}$ instrumenté par les représentations graphiques des courbes des fj $CI2_{objet}$: $CR2_{objet}$ instrumenté par $\sum_{0}^{20}(fj(xi)-P(xi))^2$
Systèmes de représentation	Graphique	Analytique et graphique	Analytique et graphique

FIGURE 6

Nathalie Gaudin a ainsi pu confirmer le rôle des conceptions courbe et analytique dans la phase d'initialisation de la résolution du problème, puis l'évolution vers la conception fonction-objet dont le système de représentation inclut les registres graphique et algébrique de façon intégrée, et dont la structure de contrôle considère la fonction en soi distinguée du choix de sa représentation. Le tableau ci-dessous (Figure 7) donne une représentation synthétique des caractéristiques de ces conceptions dans le contexte du problème étudié, selon les critères potentiels de sélection de la meilleure approximation.

Critère de choix de l'approximation	Conception courbe	Conception analytique	Conception objet
Mesure discrète	Σ : proximité visuelle de la courbe de f et des points xiyi R : tracer les courbes des fj et les points	Σ : minimiser l'opérateur $\sum_j\left[f_i(x_j)-y_j\right]^2$, j = 2, 5 R : évaluer $\sum_j\left[f_i(x_j)-y_j\right]^2$, j = 2, 5	Σ : minimiser l'écart (f – P) R : évaluer $\sum_j\left[f_i(x_j)-y_j\right]^2$, j = 1…5
Régularités de l'approximation	Σ : continuité, nombre de variations ≤ 2 R : tracer les courbes des fj et les points	Σ : conformité de f(x) à l'expression ax^3+bx^2+cx+d R : évaluer les expressions fj(x), j=1…5	Σ : faire le choix des régularités de l'approximation R : évaluer les régularités des fj
Incertitude	f1, f2 et f3 sont des approximations équivalentes relativement aux critères	f2 est la meilleure approximation	Pas de meilleure approximation sans définir l'usage de celle-ci, mais f1 et f2 assurent le plus de régularité

FIGURE 7

L'activité de contrôle structure aux niveaux stratégiques et opérationnels la résolution d'un problème. Elle forge les liens étroits entre validation de la solution, préalable au jugement qui clôt la résolution, et l'élaboration d'une possible preuve. Ces liens tiennent à la nature de la connaissance et au rôle des structures de contrôles qui les constituent en interaction avec les systèmes de représentation et l'ensemble des opérateurs disponibles pour agir.

2.1. CONTRÔLE, VALIDATION ET PREUVE

L'étude de la genèse de la preuve m'avait conduit à remarquer que « [des] *contrôles logiques et sémantiques fonctionnent localement dans le cours de l'élaboration de la solution*. » (Balacheff, 1988, p. 36). Souligner ce caractère local était une négligence alors que j'observais par ailleurs la dépendance de ces contrôles aux conceptions engagées par les élèves (ibid. p. 305), leur place dans le choix d'une stratégie de résolution et leur rôle dans la décision de bonne fin — par exemple en revenant aux définitions. Il fallait lier contrôle, validation et preuve. Claire Margolinas va dans ce sens lors de son étude sur *l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*, en mettant en évidence le lien fort entre contrôle et validation qu'elle exprime dans la définition qu'elle propose : « *nous appellerons processus de contrôle le processus d'anticipation de la validation*. » (Margolinas, 1993, p. 213).

Claire Margolinas distingue trois types de processus : (1) choix de la méthode, (2) procédé et procédure de résolution, (3) fin de résolution, (4) interprétation—distinction résultat/réponse (ibid. pp.214-215). Le séquencement de ces processus n'est le plus souvent pas linéaire (la fin de la résolution peut remettre en question la méthode, l'interprétation peut remettre en question le procédé, etc.). Ils puisent dans le répertoire des moyens stratégiques ou tactiques, globaux ou locaux, qui permettent de juger, vérifier, choisir et valider une décision. L'ensemble de ces moyens, en relation avec des systèmes de représentation et des opérateurs dont ils dépendent et dont ils règlent l'usage, constitue la « structure de contrôle » qui entre dans la caractérisation d'une conception (Balacheff, 1995 ; Balacheff & Margolinas, 2005 ; Balacheff, 2017).

Les contrôles référents, d'instrumentation ou locaux qui constituent les processus de contrôle fournissent le matériau de l'argumentation heuristique qui prend forme dans la phase privée de la résolution d'un problème. Dans cette phase, résolution et validation sont intriquées sans qu'il y ait le besoin pour l'élève, ou le groupe d'élèves, d'expliciter systématiquement ou précisément les raisons des actions mises en œuvre. Toutefois, cette explicitation est nécessaire à l'apprentissage de la preuve, le problème de l'enseignant est de créer les conditions qui la sollicitent. Pour cela, les principaux leviers sont la création d'un défi peu tolérant à l'incertitude, un contexte d'interaction sociale (e.g. prise de décision collective) obligeant la formulation de l'argumentation dans un contexte susceptible de porter la contradiction, et un transfert vers les élèves de la responsabilité de la preuve. Le concept de *situation de validation* (Brousseau, 1998, pp. 109–110) thématise et modélise les situations qui associent ces trois leviers. Le travail sur la validation y domine celui de la résolution en donnant une place prépondérante aux processus de contrôle et rend difficilement évitable leur explicitation. En particulier dans la phase de fin de la résolution. Alors que la solution est assurée du point de vue de celui ou celle qui l'a produite, il faut la faire accepter par d'autres, passer de l'explication (privée) à l'argumentation (publique) acceptée comme preuve (instituée). Au cours du débat de preuve, la solution défendue peut être modifiée marginalement voire rejetée. Ce rejet relance la résolution du problème.

L'idée, présente dans les programmes, qu'il y ait d'une part la résolution du problème et d'autre part la preuve ou démonstration n'est pas en contradiction avec l'observation de l'imbrication entre résolution et validation. Mais le discours clivant de l'institution induit leur séparation dans la pratique de l'enseignement alors que la résolution ne perd pas de vue la validation, et la bonne fin de la phase conclusive dépend de la possibilité de

construire un lien opérationnel en terme de connaissance ou de structuration logique entre résolution et validation (Garuti et al., 1998; Pedemonte, 2005).

Les processus de validation – contrôle, validation, preuve – se construisent sous au moins trois contraintes :

- Les *conceptions* mobilisées que caractérisent les opérateurs, les représentations et les *contrôles* disponibles.
- Le *langage* et *son organisation dans le discours* que l'on distinguera de la représentation des objets et de leur fonctionnement technique dans la résolution du problème. Ce langage décrit les mises en œuvre qu'il permet de communiquer et d'analyser.
- La *situation* qui fait peser des enjeux de validation plus ou moins forts qui règlent des principes d'économies de logique liés à toute pratique. Parmi ces situations celles incluant un débat de preuve engagent la personne au risque d'un glissement du projet de convaincre vers celui de persuader.
- Le *contrat didactique* qui, pour une situation donnée, détermine les responsabilités de la charge de la preuve.

3. LA PREUVE COMME PRATIQUE DISCURSIVE

L'institution scolaire, les commentaires des programmes en témoignent, accepte que certains élèves échouent à apprendre la démonstration et que l'enseignant ne puisse être astreint à la démonstration de tous les énoncés qui sont au programme. La norme de communication et d'échanges nécessaire au fonctionnement du groupe social que constitue la classe de mathématique, incluant les élèves et l'enseignant, doit donc se construire en préservant la légitimité de plusieurs niveaux de discours sans cependant hypothéquer la place particulière de la démonstration dans l'établissement de la validité d'un énoncé.

3.1. ILLUSTRATION 3 : FAUT-IL LAISSER LES ÉLÈVES S'EXPRIMER DANS LEUR LANGAGE ?

Le document « Raisonnement » qui accompagne le programme du cycle 4 renvoie à un compte-rendu de recherche de l'équipe académique Mathématiques de l'académie de Bordeaux (2003) qui propose un exemple de progression pour « *l'initiation au raisonnement déductif* ». L'introduction de ce texte commence par l'exemple d'un problème de géométrie (Figure 8).

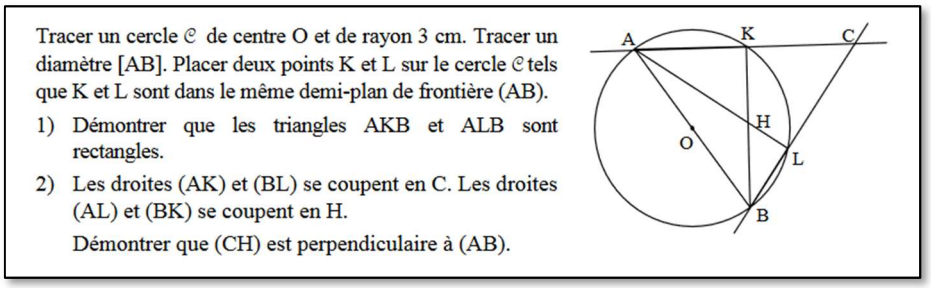


FIGURE 8

Le problème est posé sous la forme habituelle des activités d'évaluation dans une classe de quatrième. Les élèves remettent leurs copies, l'image ci-dessous (Figure 9) présente la transcription de l'une d'entre-elles.

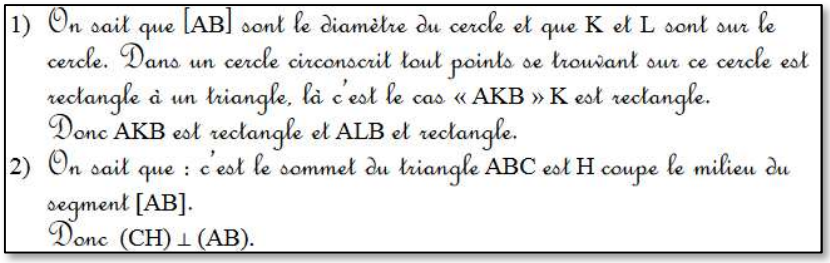

1) On sait que [AB] sont le diamètre du cercle et que K et L sont sur le cercle. Dans un cercle circonscrit tout points se trouvant sur ce cercle est rectangle à un triangle, là c'est le cas « AKB » K est rectangle.
Donc AKB est rectangle et ALB et rectangle.
2) On sait que : c'est le sommet du triangle ABC est H coupe le milieu du segment [AB].
Donc (CH) ⊥ (AB).

FIGURE 9

La transcription est accompagnée de peu d'information hors l'effet de surface de la mise en page et de la régularité de l'écriture qui suggèrent l'attention de l'élève au respect d'une norme. Ce choix conforte le commentaire des auteurs qui suggèrent que l'élève « a compris le mécanisme d'une démonstration à un pas, même si ses formulations sont extrêmement maladroites. En revanche, il n'aborde en aucune façon la démonstration à deux pas et fournit des arguments qui n'ont plus aucune cohérence avec la recherche conduite. » (ibid. p.11). Le lecteur conviendra de ce que le schéma ternaire de l'inférence parait saisi dans sa forme sinon « compris » par l'élève, il est difficile d'en dire plus. Quant à ses « maladresses de langage », elles invitent à s'interroger sur un possible conflit entre le langage qu'il utiliserait s'il en prenait la liberté et celui qu'il cherche—probablement—à adopter. Des questions se posent naturellement à l'enseignant qui n'aura le plus souvent, même s'il a une connaissance personnelle de ses élèves, que des copies comme données pour ses évaluations : « l'élève n'est-il pas perturbé par ce modèle de rédaction ? N'est-il pas préférable de le laisser s'exprimer dans son langage ? » (ibid.). La rédaction de la solution est en effet un problème parce que l'élève ne peut se soustraire à l'obligation d'attester qu'il acquiert les formes d'expression nouvelles qui lui sont enseignées ; cette obligation est constitutive du rapport didactique au savoir. Il est « perturbé » au sens où il ne peut simplement exprimer par écrit l'éventuelle argumentation qu'il partagerait avec d'autres élèves ; il opère en quelque sorte une « *transposition inverse* » qui n'est pas un renoncement à ce que serait son argumentation privée (Keskessa, 1994, p. 363 sqq.). Il l'est aussi parce que le passage à l'écrit est à la fois un retour sur la résolution et un processus d'objectivation dans un but particulier et précisé (ici la validation dans le cadre d'un travail qui sera évalué). Le passage à l'écrit est en soi d'une grande complexité à quoi s'ajoute celle de l'apprentissage de la norme particulière de discours de la classe de mathématique (Duval, 1998). La suggestion à l'enseignant de laisser l'élève « s'exprimer dans son langage » a un caractère paradoxal en vidant son action du sens qui la fonde. Le faire par le moyen d'une progression qui conduirait peu à peu à l'acquisition de différents aspects de « l'expression d'un raisonnement déductif » est une proposition qui peut être efficace sur le versant technique, reste celle sur le versant fonctionnel de la relation entre résolution et validation ; c'est-à-dire « la *nécessité de prouver* » (Équipe académique Mathématiques, 2003, p. 11).

D'une façon générale, et donc pour l'élève, reconnaitre la nécessité de prouver tient à l'évaluation des enjeux du contexte de l'activité. Ce peut être la réponse à une injonction, celle de l'énoncé du problème posé lors d'un examen, ou témoigner de l'endossement de la responsabilité d'une prise de décision, résolution d'un problème ou achèvement d'une tâche. Les deux problématiques sont inséparables dans la classe en raison de la nature même de la relation qui lie les élèves et l'enseignant, mais le poids respectif de l'injonction et du nécessaire peut être ajusté en agissant sur les caractéristiques de la situation.

3.2. SITUATION DE VALIDATION AU SENS DE LA THÉORIE DES SITUATIONS DIDACTIQUES

Les caractéristiques de la situation dans laquelle se trouve l'élève conditionne, tout particulièrement aux niveaux élémentaires, le fait qu'il accepte ou non la responsabilité de la validité de la solution d'un problème. Prendre cette responsabilité, c'est-à-dire ne pas la déléguer à un autre élève, pas même à l'enseignant, est le moteur de l'apprentissage de la preuve en mathématique, de son rôle, de ses méthodes et critères, de ses formes. La théorie des situations didactiques conceptualise et modélise de telles situations pour les comprendre et les concevoir. Je ne présenterai pas de façon détaillée le concept de situation de validation, je rappelle simplement ci-dessous l'idée que Brousseau avait en le forgeant à la fin des années 60 parce qu'elle donne une direction à la réflexion que nous devons avoir aujourd'hui pour satisfaire aux ambitions des programmes :

> « L'élève doit établir la validité d'une assertion, il doit s'adresser en tant que sujet à un autre sujet susceptible d'accepter ou de refuser ses assertions, de lui demander d'administrer des preuves de ce qu'il avance, de lui opposer d'autres assertions. Ces échanges contribuent à faire expliciter les théories mathématiques mais aussi à mettre en place les mathématiques en tant que moyen d'éprouver celles que l'on conçoit. Une démarche de preuve est construite dans une dialectique de la validation qui conduit l'élève, successivement à user spontanément des figures de rhétorique puis à y renoncer. Les relations que l'élève doit pouvoir établir pour cela sont spécifiques de cette dialectique. » (Brousseau, 1998, p. 127)

Le modèle d'une situation de validation est un jeu social dont l'enjeu est la validité d'un énoncé qui doit pouvoir être explicitement défendu ou rejeté par les protagonistes sur un pied d'égalité quant à la légitimité de prétendre ou de réfuter. Les échanges requièrent un système de représentation, langagier et/ou non langagier, et une référence (savoirs, milieu matériel, ressources documentaires) partagées.

Une *situation de validation orientée vers un apprentissage explicite de la preuve* devra inclure le besoin de reconnaitre la nécessité de règles du débat, de les énoncer et dans convenir collectivement, ainsi que celle d'un accord sur la structure du discours et les critères d'acception de la preuve. La situation de résolution de problème sur laquelle se construit la situation de validation doit susciter non seulement le débat de preuve, mais aussi celui sur la nature et la légitimité de cette preuve. Pour cela, le milieu en tant que « système antagoniste du système enseigné » (Brousseau, 1998, p. 93) doit inclure, outre les protagonistes du jeu, le milieu pour la résolution du problème (« milieu pour l'action » dans le schéma classique de la validation). Pour autant, le milieu, qui n'est pas nécessairement matériel, construit par chacun des protagonistes dans le cours de la résolution, doit être partagé parce qu'il est une référence commune nécessaire à l'arbitrage du débat de preuve. Ainsi chaque élève a pour « antagoniste » le milieu « contre lequel » il résout le problème et les autres élèves « *contre qui* » il ou elle défend la validité de sa solution ou la légitimité de sa réfutation d'une solution par ailleurs défendue.

Le schéma ci-dessous reprend le schéma initial de la théorie des situations didactiques. Il explicite, dans le modèle du jeu à deux joueurs et du point de vue du « joueur A », tour à tour proposant et opposant, le milieu pour la validation qui inclut le milieu pour la résolution du problème et le « joueur B ». Dans ce schéma, le « *milieu action* » est le produit d'une dialectique action/rétroaction au cours de laquelle l'élève construit une représentation de la situation qui lui sert de « *modèle* » et de guide pour prendre ses décisions.

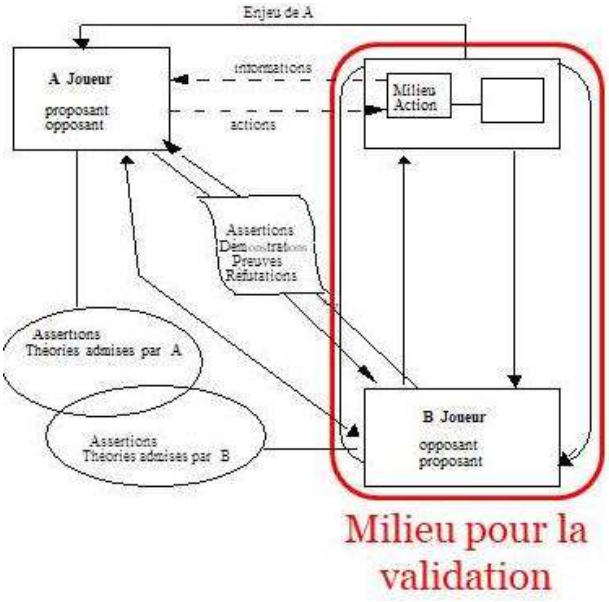


Figure 6 : adapté de « Schéma de la validation explicite »
(Brousseau, 1998, p. 110)

Dans le jeu de la validation, *la compétence langagière est l'instrument de la dialectique du vrai et du faux* : le milieu matériel ne suffit pas (Margolinas, 1993, p. 84). Cette compétence inclut les techniques propres aux registres sémiotiques des mathématiques (e.g. écriture algébrique, représentation et codage des objets géométriques) et les figures rhétoriques spécifiques de la discipline. S'il y a un accord sur la spécificité du discours mathématique et un consensus sur les critères de bonne forme d'une démonstration dans la communauté des mathématiciens[19], il n'en va plus de même quand il s'agit de s'accorder sur la nature et la forme souhaitable et acceptable d'une preuve en mathématique dans le contexte de son enseignement. Ainsi, l'observation de l'évolution des programmes France ou les choix faits dans divers pays (Knipping, 2003; Miyakawa, 2016) montrent que les normes et les pratiques peuvent significativement différer. Il faut chercher dans la diversité des cultures sous-jacentes, celles des normes sociales du débat et celles des épistémologies sous-jacentes la source de ces différences. L'apprentissage de la preuve, au-delà de l'apprentissage de techniques, passe par une acculturation à des pratiques discursives.

Cet apprentissage pose des problèmes à l'enseignant aux niveaux élémentaires sous-estimés par l'institution ; ils sont aussi un défi pour la recherche. Les travaux de recherche expérimentale et empirique très nombreux montrent ces difficultés, j'en retiendrai deux pour illustrer cet exposé : ceux d'Andreas J. Stylianides qui propose une conceptualisation de la preuve à l'école élémentaire, et ceux de Carolyn Maher qui portent sur le suivi de l'évolution de « l'idée de preuve mathématique » d'une élève sur cinq années.

3.3. ILLUSTRATION 4 : LA SOMME DE DEUX NOMBRES PAIRS EST-ELLE TOUJOURS PAIRE ? UNE ACTIVITÉ COLLECTIVE EN CE2

Les recherches d'Andreas Stylianides sur l'enseignement de la preuve à l'école primaire sont dans la suite de ceux de Deborah Ball qui identifie trois problèmes auxquels les professeurs des écoles sont confrontés : (1) la

[19] Ce consensus n'exclut pas des remises en question, par exemple lorsque le recours à des moyens informatiques ont été possibles.

représentation des connaissances mathématiques (Ball, 1993, p. 378 sqq.), (2) respecter l'élève comme acteur en mathématique (*mathematical thinker* – ibid. p.384 sqq.), (3) créer une communauté de discours mathématique (ibid. p. 388 sqq.). Andreas Stylianides en retient que la preuve à l'école primaire *« should be conceptualized so that it is, at once, honest to mathematics as a discipline and honoring of students as mathematical learners.* » (Stylianides, 2007, p. 3). Pour en étudier la possibilité, il s'appuie sur une caractérisation par quatre éléments :

> « *The four elements are the argument's foundation (i.e., what constitutes its basis: definitions, axioms, etc.), formulation (i.e., how it is developed: as a logical deduction, as a generalization from particular cases, etc.), representation (i.e., how it is expressed: using everyday language, algebraically, etc.), and social dimension (i.e., how it plays out in the social context of the community wherein it is created)*. » (ibid. p.2)

Pour conforter cette proposition, il prend pour exemple une séquence filmée dans le cadre du *Teaching and Learning to Teach Project* de l'université de Michigan[20] dans la classe de Deborah Ball (ibid. section 4). Cette classe de troisième année—celle de la fin du cycle 2 en France—cherche à répondre à la question suivante : est-ce que la somme de deux nombres impairs est toujours paire ?

Après des vérifications sur plusieurs exemples, les élèves conjecturent que la somme de deux nombres impairs sera toujours paire. Deborah Ball les met au défi d'expliquer pourquoi cette conjecture est vraie ; l'une des élèves, Jeannie, doute que ce soit possible parce qu'il y a une infinité de nombre (« [they] go on for ever »), d'autres, telle Ofala, pensent que la vérification faite sur 18 cas suffit. Quelques jours plus tard, Deborah Ball revient sur sa question en expliquant que les mathématiciens chercheraient dans ce cas à comprendre quelles propriétés des nombres impairs font que la somme de deux d'entre eux soit un nombre pair. Elle aide les élèves à se souvenir des définitions des nombres pairs et impairs (groupement par deux des éléments d'une collection, avec ou sans reste d'un élément). Le défi de prouver la conjecture est renouvelé en utilisant la définition ; les élèves travaillent en groupes. La troisième séance commence par le compte-rendu des groupes d'élèves. Un premier élève, Tembe, donne un nouvel exemple (7+7=14), puis une élève, Betsy, dit qu'elle a une preuve—elle l'expose en reprenant le cas 7+7 mais avec une représentation montrant la propriété utilisée (Figure 10). Deborah Ball résume la preuve proposée par Betsy puis sollicite l'avis des élèves. Alors que certains élèves contestent parce que 7+7 est un cas particulier[21], Jeannie l'accepte en remarquant : « […] she didn't say it had to be those two numbers, those two odd numbers, it could be any two odd numbers because, um, there's always one left. » Le travail collectif reprend. Quelques temps plus tard, le représentant d'un groupe, Mark, est invité à faire un bilan : « And we were still getting answers and we were thinking about, we were trying to prove, and Betsy came and she had proved it, and then we all agreed that it would work ». La classe passe à autre chose.

[20] Le site de ce projet et ses ressources ne sont plus disponibles en ligne.

[21] Il n'est pas relevé que 7+7 est le double de 7 et que donc la parité a deux origines dont l'une n'est pas générique -- sauf à changer de propriété pour « le double d'un nombre impair est pair ».

What we figured out how it's always true is that we would have seven dots, or lines plus seven lines [draws fourteen lines on the board]



. . . and then [counts the lines] . . . we said that we had to circle them by twos [she starts circling groups of two lines] –



and also we said that . . . just a second [finishes circling groups of two lines] –

[From now on she looks at the class, away from the board, as she explains.] that if you added another even one to an odd number, or another one to an odd number, then it would equal an even number, 'cause all odd numbers if you circle them, what we found out, all odd numbers if you circle them by twos, there's one left over, so if you . . . plus one, um, or if you plus another odd number, then the two ones left over will group together, and it will make an even number.

FIGURE 10

La séquence choisie montre la coexistence de l'empirisme naïf (Tembe), de l'exemple générique (Betsy) et de l'expérience mentale (Jeannie). En revanche, ces possibilités ne sont que marginalement débattues. Ou plutôt, l'enseignante fait émerger des positions, des arguments et des désaccords mais les élèves ne vont pas jusqu'au bout de la discussion dont elle reste la médiatrice qui distribue la parole, la reçoit et la reformule. Aussi, cet exemple illustre-t-il trois des éléments de la caractérisation proposée par Andreas Stylianides (les savoirs, la structure du discours, les représentations), mais reste confus sur le quatrième élément, la dimension sociale.

L'enseignante joue un rôle clé tout au long de la séquence, mais s'efface dans la phase finale dont on peut même imaginer qu'elle soit peu remarquée ; sa parole ne relaie pas celle de Mark. Andreas Stylianides note que la séquence se termine sans institutionnalisation. En fait, le rôle clé de l'enseignante tout au long de cette séquence est occulté par l'analyse centrée sur les échanges d'arguments (ibid. section 4.5.3), il en résulte l'illusion d'un débat de validation entre les élèves. Pour autant, l'insuffisance de la séquence est relevée :

> « […] one can draw two conclusions. First, Betsy's argument cannot count as proof, because it was not accepted as such by the classroom community. Second, the classroom community had not yet developed, or socially shared, all the necessary rules of discourse that would support the elevation of Betsy's argument to the status of proof within the community. » (ibid. p.15)

En fait, tel que rapporté, l'épisode se termine par une acceptation de la déclaration de Mark puisque l'enseignante de la rejette pas. Ce qui est observé me parait relever d'un effet Topaze par lequel l'enseignante valide implicitement la proposition de Betsy comme preuve et les élèves sont quittes pour cette activité.

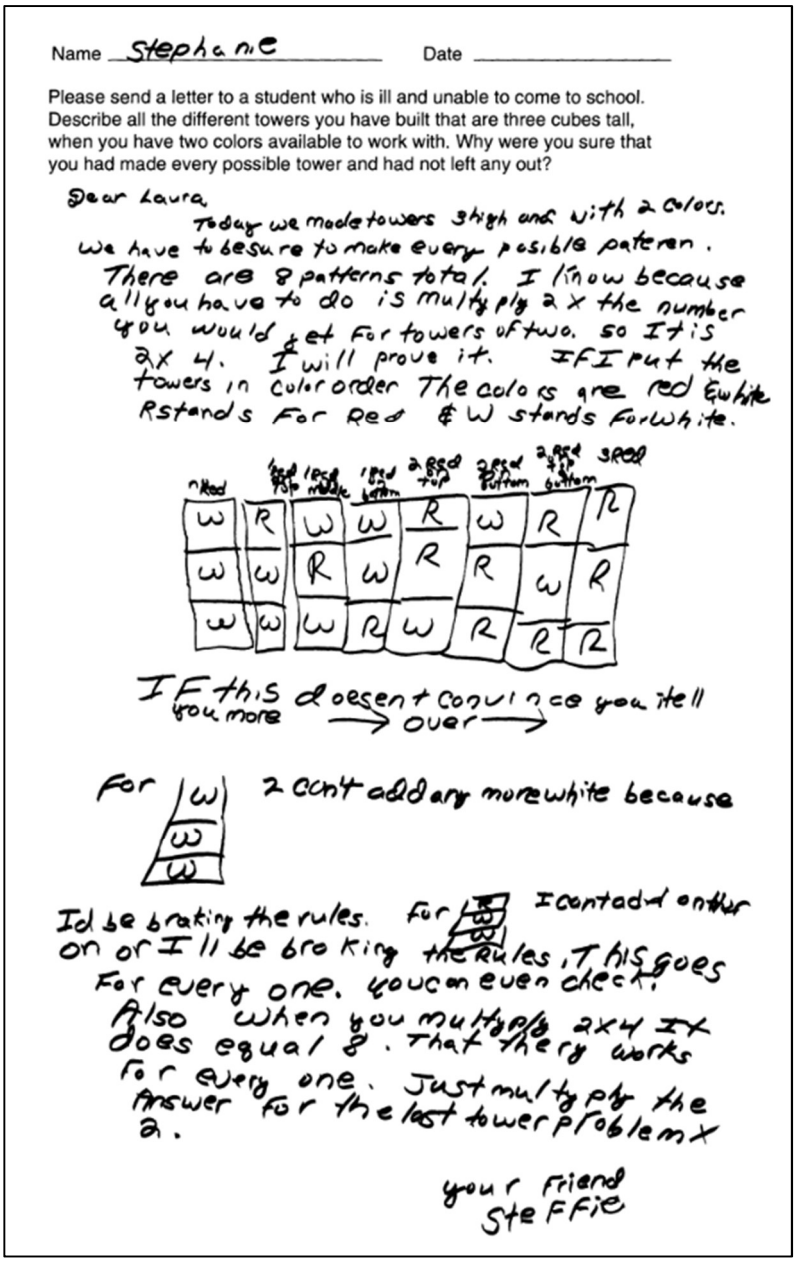
La question de la validation était présente dans la classe de Deborah Ball ; *des* élèves—et non *les* élèves—ont élaboré une argumentation qui pouvait être candidate au statut de preuve. Le cas rapporté par Andreas Stylianides illustre que pour que ce statut soit reconnu il faut d'une part que la preuve soit prise comme objet du débat, pour sa nature et sa forme, et que d'autre part un processus en permette la reconnaissance puis l'intégration dans les règles de fonctionnement de la classe.

3.4. ILLUSTRATION 5 : LA LONGUE EXPLORATION D'UN PROBLÈME COMBINATOIRE

Carolyn Maher a conduit au début des années 90, à l'université Rutgers, l'une des rares recherches sur la résolution de problèmes attentive aux processus de preuve sur une longue durée ; les observations ont été réalisées, avec un groupe d'élèves stable, de la première à la cinquième année de scolarité—soit le cycle 2 et les deux premières années du cycle 3 en France. L'objectif était de lever la contrainte temporelle et celle des programmes pour permettre aux élèves de construire, murir, discuter les solutions qu'ils envisagent. Les problèmes appartenaient à un même domaine, la combinatoire élémentaire propice à l'invention de méthodes, de représentations, et à la création d'un espace d'expérience autonome sur lequel le programme ne pèse pas mais cependant riche d'un point de vue mathématique (conceptualisation, formalisation, argumentation). Je retiens ici un exemple tiré de l'étude du cas de Stéphanie (Maher & Martino, 1996a).

Un ensemble d'épisodes jugés « critiques » a été extrait des données récoltées (enregistrements vidéo, interviews), ils éclairent l'activité de Stéphanie pour résoudre le problème de dénombrement des différentes tours que l'on peut construire avec un nombre donné de cubes de deux couleurs ; ce nombre est petit, il est fixé par l'enseignant (4 en octobre 1990, 5 puis 6 en février 1992)[22]. Les 11 épisodes critiques résument de façon compacte la période 1990-1992. Ils montrent l'évolution des moyens de représentation qu'élabore Stéphanie en passant de la manipulation des cubes à leur représentation et codage (« *letter-grid* »). Le besoin de contrôler le dénombrement est le moteur de l'évolution des représentations. Les stratégies évoluent de l'essai-erreur jusqu'à un raisonnement par cas : dénombrer les tours ayant un cube rouge, puis deux cubes rouges, etc… La nécessité d'une validation est présente mais reste une exigence interne à l'activité de résolution jusqu'à ce que l'enseignante, jusque-là tenue à la neutralité, invite les élèves à *lui* proposer une preuve de leur solution : « How do you know that you have them all? […] Can you convince me that you have all possibilities, that there are no more or no fewer? » (ibid. p.211 – *event 10*, mars 1992). Certes l'enseignante demande aux élèves de *la convaincre*, mais la tâche effectivement prescrite consiste à rédiger une lettre destinée à des élèves absents dans laquelle seraient décrites les différentes tours construites avec trois cubes de deux couleurs, pourquoi il est assuré que toutes les possibilités sont présentes et aucune n'est oubliée (traduction libre, voir Figure 11).

[22] Cette situation a été précédée d'une situation analogue, combiner des chemises et des jeans (3-2 puis 3-3).



Name Stephanie Date

Please send a letter to a student who is ill and unable to come to school. Describe all the different towers you have built that are three cubes tall, when you have two colors available to work with. Why were you sure that you had made every possible tower and had not left any out?

Dear Laura,

Today we made towers 3 high and with 2 colors. We have to be sure to make every posible pateren. There are 8 patterns total. I know because all you have to do is multyply 2 x the number you would get for towers of two. so It is 2 x 4. I will prove it. If I put the towers in color order The colors are red & white R stands for Red & W stands for white.

If this doesent convince you it'll you more over

For W W W I cant add any more white because

Id be braking the rules. for R W W I contadict onther on or I'll be braking the rules, This goes For every one. you can even check. Also when you multyply 2x4 It does equal 8. That they works for every one. Just multyply the answer for the last tower problem x 2.

your friend
SteFFie

FIGURE 11

Stéphanie joue le jeu de la communication en s'adressant à une autre élève de sa classe, Laura. Elle expose ses arguments pour assurer qu'exactement 8 tours sont constructibles en dessinant un schéma (« *letter grid*») qui code les tours et suggère le mode d'énumération par cas avec une légende au sommet de chacune (0 red, 1 red, 2 red, 3 red). Stéphanie envisage que cette argumentation puisse ne pas suffire et ajoute qu'elle ne peut ajouter un cube sur une tour blanche sans enfreindre la règle, ce que l'on peut interpréter comme une tentative d'argumenter l'exhaustivité pour ce cas. De même, il ne resterait qu'à ajouter un cube pour changer une tour de trois cubes blancs, ce qui n'est pas possible, etc. « This goes for every one. You can even check. » L'ensemble de cette argumentation et la rédaction de Stéphanie ont enchanté Carolyn Maher et Amy Martino qui soulignent « l'invention » de la *preuve par cas* au terme d'une longue évolution. Mais le lecteur attentif notera que Stéphanie énonce la conjecture selon laquelle le nombre de tours différentes de hauteur 3 est deux fois celui des tours de hauteur 2. Elle conclut même sa lettre en affirmant : « Just multiply the answer for the

last tower problem *x*2 » ; la preuve par cas proposée n'est pas pertinente pour valider cette conjecture (ce qui serait possible en réarrangeant les colonnes).

L'écart entre la conjecture avancée par Stéphanie et l'argumentation qu'elle propose pour convaincre une autre élève (ou le professeur) offre une opportunité de prendre la question de la preuve pour objet d'un travail collectif. La question du dénombrement est résolue avec un exemple générique dont une évolution permettrait d'établir la conjecture. D'autres élèves avaient d'ailleurs remarqué la relation de récurrence (Maher & Martino, 1996b, p. 442), notamment Jeff qui lui associera plus tard une représentation (Figure 11), source possible d'une évolution de la preuve de Stéphanie.

Jeff: You multiply by two, the last number you got you multiply by two because you make branches off of them. [He referred to adding two branches to the top of each tower to represent the two possible colors which could be added to the top a tower.]

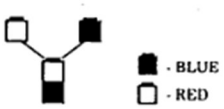


FIG. 24.8. Milin's method for finding all towers (b).

FIGURE 12

3.5. DE L'ARGUMENTATION OUTIL À LA PREUVE OBJET

Quelle que soit leur nature, les problématiques de la validation et les processus de contrôle sont constitutifs de la résolution de problèmes. Il s'agit d'éveiller les élèves à leur rôle, de faire prendre conscience de leur spécificité en mathématique et de permettre l'apprentissage de leurs caractéristiques et fonctionnements. Cet apprentissage ne peut relever seulement de l'instruction ou de l'injonction, parce que c'est l'évolution d'une rationalité qui est en question, l'autonomie des élèves est une composante critique de sa possibilité.

La théorie des situations modélise les conditions qui maximisent la mise à l'écart des clauses d'un contrat didactique qui hypothèqueraient l'autonomie des élèves, c'est-à-dire leur responsabilité, ou la pertinence des connaissances qu'ils mobilisent (e.g. en prenant en compte des éléments anecdotiques du contexte). Les échanges dans le cours de ces situations et les arguments sur lesquels les protagonistes se mettent d'accord permettent d'assurer la validité d'un résultat mais ils ne requièrent pas nécessairement la réflexion indispensable pour décider en quoi et pourquoi il s'agit d'une preuve. En effet, le travail de la validation largement silencieux dans l'activité privée peut le rester dans le travail collectif parce qu'il procède d'un accord tacite qui régit le travail ordinaire de la résolution de problème.

Lors de son cours intitulé « *Rationalité et démonstration mathématiques* » donné à la V° école d'été de didactique des mathématiques, Marc Legrand formulait l'hypothèse selon laquelle « *Il n'est pas beaucoup plus raisonnable d'espérer pouvoir introduire inductivement et naturellement les élèves ou les étudiants dans la rationalité mathématique, à partir d'une pédagogie centrée sur les situations-problèmes, qu'il ne l'est de croire qu'ils finiront bien par entrer dans cette rationalité grâce à une pédagogie de simplement monstration*. » (Legrand, 1990, p. 386). Cette hypothèse est confortée tant par la pratique de l'enseignement que par la recherche expérimentale qui a bien des difficultés à situer le rôle de l'enseignant et ses moyens. La conception des situations de « *débat scientifique* » (Legrand, Lecorre, Leroux, & Parreau, 2011) cherchent à donner une réponse opérationnelle pour sortir de ce qui apparait comme un dilemme tant pour l'enseignement que pour l'institution (comme le montre les programmes). Elles reposent sur un engagement fort de l'enseignant

initiateur de situations ayant une « *consistance épistémologique* », une « *bonne adéquation avec la nature des savoirs à enseigner* [… et …] au *milieu des connaissances effectivement disponibles chez les élèves/étudiants* » (ibid. p. 115) puis son relatif retrait en arbitre des échanges jusqu'au moment d'une nécessaire institutionnalisation « *pour mettre de l'ordre dans le désordre qu'introduit fatalement le débat et pour introduire et expliquer ce qu'aucun débat ne peut introduire et/ou expliquer à un coût raisonnable*. » (ibid. p.116).

Ce que Marc Legrand désigne, et sur quoi il insiste, est l'ensemble des *règles du débat* pour l'établissement de la preuve et, corrélativement, de la réfutation en mathématique. Il faut, pour expliciter ces règles, passer de *l'argumentation outil du processus de validation* qui repose sur des règles tacites, au *débat sur l'argumentation comme objet* dont les caractéristiques explicitées conditionnent sa recevabilité comme *preuve*. En d'autres termes, la question de la validité de la solution du problème précisément en jeu doit être dépassée pour laisser la place à celle des critères du vrai qui n'est pas autre chose que poser les bases de la production des connaissances mathématiques. Avec toutes les précautions qu'appelle l'utilisation de ce vocabulaire, ce qui est à l'ordre du jour est l'entrée *des élèves dans une problématique théorique*[23].

Les difficultés de l'enseignement de la démonstration ont conduit à privilégier celui des règles de production de la preuve et des formes de sa formulation ramenées à un apprentissage de la logique. Ainsi l'acquisition du schéma fondamental du *modus ponens* (A, A⟶B ⊦ B) et de ses conditions d'utilisation apparait-elle être le principal objectif. Cette priorité met au second plan le fait que la validation d'un énoncé ne tire pas sa légitimité du seul statut des énoncés mobilisés par le problème considéré, mais de celui de l'ensemble de ceux auxquels ils sont liés au sein d'un ensemble structuré, une *théorie* qui doit être reconnue pour telle[24].

La comparaison de l'enseignement en France et dans d'autres pays conforte cette observation : *le caractère localement organisé des connaissances* impliquées dans la production d'une preuve dans les livres scolaires français contraste avec l'organisation quasi-axiomatique au Japon (Miyakawa, 2016, sec. 3.3.3), ce qui n'exclut pas l'existence et l'usage d'un répertoire de théorèmes qui constitue le savoir officiel (Knipping, 2003, p. 6/10) mais c'est autre chose. La référence à un cadre théorique explicite en tant que contexte de l'activité mathématique est présente dans nombre de recherches mais n'a pas été thématisée jusqu'à la proposition d'Alessandra Mariotti et de ses collègues de définir « *théorème mathématique* » comme le système des relations mutuelles entre trois composantes : un énoncé, sa preuve et la théorie au sein de laquelle cette preuve prend sens (Mariotti, Bussi, Boero, Ferri, & Garuti, 1997, pp. 182–183).

Outre la maitrise de compétences de raisonnement (logique) communément signalée comme un requis minimal, l'apprentissage de la preuve en mathématique implique la prise de conscience de ce qui la sépare de l'argumentation naturelle acquise au fil des interactions sociales quotidiennes, et une *rupture épistémologique* pour entrer dans une problématique théorique dont la nature est essentiellement différente de celle de la connaissance commune.

Modéliser les situations qui permettent de prendre en charge cette rupture reste le principal problème auquel nous sommes confrontés. De telles situations doivent réunir les conditions pour que l'argumentation, outil de

---

[23] Passage de *l'élève-praticien* à *l'élève-théoricien* (Balacheff, 1988, vol. 1 p.54)

[24] Ceci m'a conduit à affirmer que « le point fort qui sépare l'argumentation et la démonstration est la nécessité pour cette dernière d'exister relativement à une axiomatique explicite. » (Balacheff, 1999) et à rejeter l'idée d'une *argumentation mathématique* en m'appuyant sur les travaux des sciences du langage (ibid.). Ce point de vue peut être reconsidéré en introduisant en regard de la *valeur épistémique* d'un énoncé sa *valeur ontique*. J'évoque cette évolution dans la conclusion, je l'ai développée lors de mon exposé au CORFEM en juin 2019.

la résolution de problèmes, soit prise comme objet pour comprendre et apprendre ce qu'est *une preuve en mathématique*. L'apprentissage se fera dans une dialectique du pratique et du théorique au sens de la *dialectique outil-objet* modélisée par Régine Douady dans laquelle, il faut le rappeler, l'objet est plus que la somme de ses caractéristiques logiques et discursives :

> « Par objet, nous entendons l'objet culturel ayant sa place dans un édifice plus large qui est le savoir des mathématiciens, à un moment donné, reconnu socialement. L'objet est mathématiquement défini, indépendamment de ses usages. Le statut d'objet permet la capitalisation du savoir et donc l'extension du corps des connaissances. Il permet aussi le réinvestissement dans de nouveaux contextes éventuellement très éloignés du contexte d'origine. » (Douady, 1992, p. 134)

4. CONCLUSION

Contrôle, *preuve* et *démonstration* sont trois régimes de la validation dont les poids respectifs changent au long du continuum qui va de la résolution d'un problème à la communication formelle de sa solution (i.e. selon des normes institutionnelles). Leurs interactions mutuelles et leur dépendance aux conceptions sous-jacentes qui les rendent possibles et dont ils suscitent l'évolution, les constituent en un système dont la nature détermine celle des mathématiques elles-mêmes.

La longue histoire de l'enseignement de la démonstration et de ses échecs pour un trop grand nombre d'élèves a installé des pratiques qui tendaient à disjoindre ces trois régimes en séparant résolution et validation, et en introduisant la démonstration en rupture avec les pratiques qui la précèdent. Au cours des dernières décades, la doctrine institutionnelle a cherché à faire évoluer l'épistémologie scolaire qui en résultait vers un rapport aux mathématiques plus proche des caractéristiques épistémologiques de cette discipline. Ainsi l'acquisition de savoirs est-elle complétée, ou peut-être contextualisée, par celle de « compétences » parmi lesquelles les programmes actuels désignent *chercher*, *raisonner* et *communiquer*.

La définition assez large et non réductible à des techniques de ces compétences pourrait-elle permettre l'émergence d'une activité *qui donne de l'épaisseur au discours mathématique* et pourrait *faire vivre dans la classe une véritable petite société mathématique* ? En reprenant, pour formuler cette question, les mots de Guy Brousseau (1998, p. 111).

Bien sûr, il n'y a pas de réponse tranchée. En revanche, les résultats de la recherche tant sur l'amont épistémologique que sur l'ingénierie de situations pratiquées effectivement ou conçues à des fins expérimentales constituent une base solide pour construire un programme scientifique qui permettra d'y répondre.

Lorsque Guy Brousseau utilise les expressions que j'emprunte ci-dessus, il fait référence à des « situations de preuve », une expression que l'on ne retrouve que trois fois dans l'ouvrage référence « Théorie des situations didactiques » (Brousseau, 1998 voir pp.43, 111 & 313). Cette expression apparait dans la section consacrée au *schéma de la validation explicite* (ibid p.109 sqq). Comme on le sait, c'est le concept de « situation de validation » qui est retenu comme l'un des concepts fondateurs de la théorie. Il apparait, pour les questions que nous considérons ici, nécessaire mais insuffisant : les *situations de preuve* doivent avoir les caractéristiques des situations de validation avec la contrainte supplémentaire de créer les conditions d'un besoin intrinsèque d'analyse, de certification et d'institutionnalisation *des moyens de la preuve* dans le cadre collectif de la classe. Ces conditions et les moyens de les créer ne sont pas encore déterminés, en particulier parce que si on sait assez précisément ce qu'est une preuve en termes d'objectif d'acquisition du cycle 4, en revanche il n'y a pas de caractérisation précise et partagée qui puisse servir de référence dans le cours de la scolarité, dès le cycle 2.

Ainsi, deux grands sujets devraient structurer le programme scientifique à venir : la caractérisation de *l'argumentation mathématique* et les formes de *l'institutionnalisation des moyens de preuve* en amont du moment si particulier de l'affirmation de la démonstration comme « moyen mathématique d'accès à la vérité » ainsi que le formule les commentaires (cf. § 2.1).

L'expression *argumentation mathématique* peut au moins signifier une argumentation potentiellement recevable au regard des normes de la classe de mathématiques. Ce n'est pas d'emblée une preuve pour autant, mais elle peut l'être si elle est reconnue pour telle par la classe et confirmée par l'enseignant. Il ne s'agit là que d'une clarification minimale prenant en compte la dimension sociale. Je propose de partir, pour ce qui concerne le contenu et la forme, de la proposition d'Andreas Stylianides :

> « Proof is a mathematical argument, a connected sequence of assertions for or against a mathematical claim, with the following characteristics: 1. It uses statements accepted by the classroom community (set of accepted statements) that are true and available without further justification; 2. It employs forms of reasoning (modes of argumentation) that are valid and known to, or within the conceptual reach of, the classroom community; and 3. It is communicated with forms of expression (modes of argument representation) that are appropriate and known to, or within the conceptual reach of, the classroom community. » (Stylianides, 2007, p. 291).

Les termes « *proof* » et « *mathematical argument* » apparaissent synonymes, ce qui est le plus souvent le cas dans la littérature anglo-saxonne. L'intérêt de cette proposition est de mettre en évidence trois dimensions qui correspondent raisonnablement à trois problèmes qui seront à résoudre pour disposer d'une caractérisation opérationnelle. La première pose la question de la création d'une *référence théorique* dont il faut modéliser la forme et préciser les conditions de création ; elle correspond au premier terme, Théorie, du triplet définitoire de Théorème (cf. § 3.5). La *mémoire institutionnelle* en est une prémisse mais elle ne suffit pas dans la mesure où elle n'apparaitrait que comme un répertoire de ressources. La deuxième et la troisième distinguent deux aspects de l'argumentation, sa nature (*mode of argumentation*) et son expression (*argument representation*). Ces deux dimensions sont en fait intriquées dans le processus de production de l'argumentation. Les problèmes nombreux qu'elles soulèvent incluent notamment celui leur séparation et celui de leur modélisation qui ne peut être abstraite de celle des connaissances qui les sous-tendent—que l'on pense, par exemple, au cas de l'exemple générique et celui de l'expérience mentale.

Enfin, les caractéristiques définitoires de l'argumentation mathématique doivent non seulement la distinguer d'autres formes d'argumentation mais aussi être opérationnelles lorsqu'il s'agit d'arbitrer les propositions des élèves et éventuellement de les institutionnaliser pour les organiser et les capitaliser dans la classe. L'évaluation du caractère mathématique ne pourra se réduire au jugement sur la seule forme de l'argumentation. Comment, par exemple, arbitrer le cas de l'exemple générique qui met en permanente balance le général et le particulier dont l'équilibre se trouve au terme d'un jeu d'interactions entre ces deux pôles, voire de compromis ?

Bien que ses racines historiques lui donnent une légitimité (Arsac, 1987), le concept d'argumentation mathématique sera un concept didactique et non la transposition d'un savoir mathématique. On ne peut le concevoir comme transposition de la démonstration sauf à ne retenir de celle-ci que ce qui relève de sa dimension sociale au sein de la communauté scientifique. Ce serait une erreur tant épistémologique que théorique. Il s'agit là d'une difficulté attestée par la vigueur des débats sur la recevabilité des preuves « sans mots » ou des exemples génériques. La définition de l'argumentation mathématique ne peut se soustraire aux exigences de l'institutionnalisation.

Les recherches sur l'apprentissage du raisonnement et de la preuve ont en commun le recours à l'ingénierie de situations dites de recherche (p. ex. problème ouvert - Mantes & Arsac, 2007), ou de recherche et de preuve (Georget, 2009). Elles s'appuient largement sur celles de situations de validation dans lesquelles la construction d'une preuve est un outil de la résolution. Mais les comptes rendus de ces recherches montrent que la fermeture de ces situations se fait sur l'acceptation d'une solution – qui est l'objet discuté – et non sur la reconnaissance des caractéristiques, logiques et ontiques, de l'argumentation pour ce qu'elles auraient de général et de nécessaire au-delà de la situation particulière où elle est produite.

Enfin, les preuves sont à la fois fondatrices et organisatrices des connaissances. Dans le cours de l'apprentissage elles contribuent à conforter leur évolution et à outiller leur réorganisation. Dans l'enseignement, elles légitiment les nouveaux savoirs et les constituent en système : ensemble, savoirs et preuves font Théorie, au sens de Mariotti. La fonction d'institutionnalisation des *situations de preuve* place la *validation explicite* sous l'arbitrage de l'enseignant qui est in fine le garant de son caractère mathématique. Cette dimension sociale, au sens où le fonctionnement scientifique dépend d'une organisation construite et acceptée, est au cœur de la difficulté de l'enseignement de la preuve en mathématiques.

5. RÉFÉRENCES

Arsac, G. (1987). L'origine de la démonstration: Essai d'épistémologie didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *8*(3), 48.

Arsac, G. (2013). *Cauchy, Abel, Seidel, Stokes et la convergence uniforme: De la difficulté historique du raisonnement sur les limites*. Paris: Hermann.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, *18*(2), 147–176. https://doi.org/10.1007/BF00314724

Balacheff, N. (1988). *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège* (Doctorat ès-sciences). Université Joseph Fourier - Grenoble 1, Grenoble.

Balacheff, N. (1990). Beyond a psychological approach of the psychology of mathematics education. *For The Learning of Mathematics*, *10*(3), 2–8.

Balacheff, N. (1991). Benefits and limits of social interaction: The case of mathematical proof. In A. J. Bishop, S. Mellin-Olsen, & J. van Dormolen (Eds.), *Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching* (pp. 175–192). Kluwer Academic Publishers.

Balacheff, N. (1995). Conception, propriété du système sujet/milieu. In R. Noirfalise & M.-J. Perrin-Glorian (Eds.), *Actes de la VII° Ecole d'été de didactique des mathématiques* (pp. 215–229). Clermont-Ferrand: IREM de Clermont-Ferrand.

Balacheff, N. (1999). L'argumentation est-elle un obstacle? Invitation à un débat... [Newsletter]. Retrieved 28 September 2019, from La lettre de la preuve website: http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/990506Theme/990506ThemeFR.html

Balacheff, N. (2010). Bridging knowing and proving in mathematics An essay from a didactical perspective. In G. Hanna, H. N. Jahnke, & H. Pulte (Eds.), *Explanation and Proof in Mathematics* (pp. 115–135). Springer Berlin Heidelberg.

Balacheff, N. (2017). CK¢, a model to understand learners' understanding – Discussing the case of functions. *El Calculo y Su Ensenanza*, *IX (Jul-Dic)*, 1–23.

Balacheff, N., & Boy de la Tour, T. (2019). Proof Technology and Learning in Mathematics: Common Issues and Perspectives. In G. Hanna, D. Reid, & M. de Villiers (Eds.), *Proof Technology in Mathematics Research and Teaching*. Berlin: Springer.

Balacheff, N., & Gaudin, N. (2010). Modeling students' conceptions: The case of function. In F. Hitt, D. Holton, & P. Thompson (Eds.), *CBMS Issues in Mathematics Education* (Vol. 16, pp. 207–234). https://doi.org/10.1090/cbmath/016/08

Balacheff, N., & Margolinas, C. (2005). CK¢ Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. In A. Mercier & C. Margolinas (Eds.), *Balises pour la didactique des mathématiques* (pp. 1 – 32).

Ball, D. L. (1993). With an Eye on the Mathematical Horizon: Dilemmas of Teaching Elementary School Mathematics. *The Elementary School Journal*, *93*(4), 373–397. https://doi.org/10.1086/461730

Boero, P., Douek, N., Morselli, F., & Pedemonte, B. (2010). Argumentation and proof: A contribution to theoretical perspectives and their classroom implementation. In M. M. F. Pinto & T. F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 179–209). Belo Horizonte, Brazil: PME.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques (Didactique des mathématiques 1970-1990)*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Cauchy, A. (1821). *Analyse algébrique ([Reprod. En fac-sim.])*. Retrieved from https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k29058v

Cauchy, A. (1853). Note sur les séries convergentes don tles divers termes sont des fonctions continues d'une variable réelle ou imaginaire, entre des limites données. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, *XXXVI*(11), 454–457.

Delarivière, S., Frans, J., & Van Kerkhove, B. (2017). Mathematical Explanation: A Contextual Approach. *Journal of Indian Council of Philosophical Research*, *34*(2), 309–329. https://doi.org/10.1007/s40961-016-0086-2

Douady, R. (1992). Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. *Repères IREM*, *6*, 132–158.

Duval, R. (1991). Structure du raisonnement deductif et apprentissage de la demonstration. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(3), 233–261. https://doi.org/10.1007/BF00368340

Duval, R. (1992). Argumenter, prouver, expliquer: Continuité ou rupture cognitive ? *Petit x*, (31), 37–61.

Duval, R. (1998). Écriture et compréhension: Pourquoi faire écrire des textes de démonstration par les élèves ? *Produire et lire des textes de démonstration*, *S4*, 79–98. Retrieved from http://www.numdam.org/article/PSMIR_1998___S4_79_0.pdf

EDUSCOL. (2009). *Raisonnement et démonstration*. Retrieved from http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/50/0/doc_acc_clg_raisonnementetdemonstration_223500.pdf

EDUSCOL. (2016). Raisonner [Institutionnel]. Retrieved 30 September 2018, from Éduscol website: http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Competences_travaillees/83/6/RA16_C4_MATH_raisonner_547836.pdf

Équipe académique Mathématiques. (2003). *Initiation au raisonnement*. Retrieved from http://mathematiques.ac-bordeaux.fr/pedaclg/dosped/raisonnement/brochure_init_raison/brochure_intro.htm

Fishbein, E. (1982). Intuition and proof. *For The Learning of Mathematics*, *3*(2), 9–18.

Garuti, R., Boero, P., & Lemut, E. (1998). Cognitive unity of theorems and difficulties of proof. In A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 345–352). Retrieved from http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/garuti.html

Gaudin, N. (2005). *Place de la validation dans la conceptualisation, le cas du concept de fonction* (PhD Thesis). Université Joseph Fourier - Grenoble 1, Grenoble, France.

Georget, J.-P. (2009). *Activités de recherche et de preuve entre pairs à l'école élémentaire: Perspectives ouvertes par les communautés de pratique d'enseignants* (Didactique des mathématiques, Paris-Diderot). Retrieved from https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00426603

Granger, G.-G. (1981). Philosophie et mathématique leibniziennes. *Revue de Métaphysique et de Morale*, *86*(1), 1–37. Retrieved from JSTOR.

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange*, *21*(1), 6–13. https://doi.org/10.1007/BF01809605

Hanna, G. (1995). Challenges to the importance of proof. *For the Learning of Mathematics*, *15*(3), 42–49.

Hanna, G. (2017). Connecting two different views of mathematical explanation. *Enabling Mathematical Cultures*. Presented at the Enabling Mathematical Cultures, Mathematical Institute, University of Oxford. Retrieved from https://enablingmaths.wordpress.com/abstracts/

Hanna, G. (2018). Reflections on Proof as Explanation (draft). In A. J. Stylianides & G. Harel (Eds.), *Advances in Mathematics Education Research on Proof and Proving: An International Perspective* (pp. 3–18). https://doi.org/10.1007/978-3-319-70996-3_1

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In A. Schoenfeld, J. Kaput, E. Dubinsky, & T. Dick (Eds.), *CBMS Issues in Mathematics Education* (Vol. 7, pp. 234–283). https://doi.org/10.1090/cbmath/007/07

Keskessa, B. (1994). Preuve et plans de signification: Une hypothèse. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, *14*(3), 357–391.

Knipping, C. (2003). Processus de preuve dans la pratique de l'enseignement – analyses comparatives des classes allemandes et françaises en 4èmeIntroduction. *Bulletin de l'APMEP*, 10.

Legrand, M. (1990). Rationalité et démonstration mathématiques, le rapport de la classe à une communauté scientifique. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, *9*(3), 365–406.

Legrand, M., Lecorre, T., Leroux, L., & Parreau, A. (2011). *Le principe du 'débat scientifique' dans un enseignement*. Retrieved from http://irem.univ-grenoble-alpes.fr/spip/IMG/pdf/principedebac949.pdf

Maher, C. A., & Martino, A. M. (1996a). The Development of the Idea of Mathematical Proof: A 5-Year Case Study. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(2), 194. https://doi.org/10.2307/749600

Maher, C. A., & Martino, A. M. (1996b). Yound children invent methods of proof: The gang of four. In L. P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. A. Goldin, & B. Greer (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 431–445). Retrieved from https://www.learner.org/workshops/pupmath/support/mahermartino96.pdf

Mantes, M., & Arsac, G. (2007). *Les pratiques du problème ouvert*. CANOPE -CRDP Lyon.

Margolinas, C. (1993). *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Mariotti, M. A., Bussi, M. G. B., Boero, P., Ferri, F., & Garuti, R. (1997). Approaching geometry theorems in contexts: From history and epistemology to cognition. In E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st PME Conference* (Vol. 1, pp. 180–195). Helsinki, Finland: University of Helsinki.

MENESR. (2015a). Cycle 1. *Bulletin Officiel de l'éducation Nationale*, *Spécial*(2), 21.

MENESR. (2015b). *Programme Mathématiques cycle 3*. Retrieved from http://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?cid_bo=94708

MENESR. (2015c). *Programme Mathématiques cycle 4*. Retrieved from http://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?cid_bo=94717

MENESR. (2018a). Cycle 2. *Bulletin Officiel de l'éducation Nationale*, (30 (26-07-2018)), 30.

MENESR. (2018b). Cycle 3. *Bulletin Officiel de l'éducation Nationale*, (30 (26-07-2018)), 35.

Miyakawa, T. (2016). Comparative analysis on the nature of proof to be taught in geometry: The cases of French and Japanese lower secondary schools. *Educational Studies in Mathematics*, *92*(2), 37–54. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9711-x

Pedemonte, B. (2005). Quelques outils pour l'analyse du rapport enrte argumentation et démonstration. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *25*(3), 313–347.

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics*, *66*(1), 23–41. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9057-x

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 1–36. https://doi.org/10.1007/BF00302715

Stylianides, A. J. (2007). Proof and Proving in School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics*, *38*(3), 289–321.

Tall, D. (1998). The Cognitive Development of Proof: Is Mathematical Proof For All or For Some? In Z. Usiskin (Ed.), *Developments in School Mathematics Education Around the World* (pp. 117–136). Retrieved from https://pdfs.semanticscholar.org/d850/5fa1c58102b6a8e1ba3618f99cf3824ebe30.pdf

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *10*(2/3), 133–170.

Villani, C., & Torossian, C. (2018). *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques* (p. 96) [Rapport public]. Retrieved from Ministère de l'éducation nationale website: https://www.ladocumentationfrancaise.fr/rapports-publics/184000086/