



**HAL**  
open science

## Suite de permutations lors d'une course de $n$ coureurs de vitesses constantes

Hugues Déprés

► **To cite this version:**

Hugues Déprés. Suite de permutations lors d'une course de  $n$  coureurs de vitesses constantes. [Rapport de recherche] Ecole normale supérieure de lyon - ENS LYON. 2019. hal-02300013

**HAL Id: hal-02300013**

**<https://hal.science/hal-02300013>**

Submitted on 29 Sep 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - ShareAlike 4.0 International License

# Suite de permutations lors d'une course de n coureurs de vitesses constantes

Hugues Déprés

**Résumé :** On considère  $n$  coureurs avec des vitesses constantes et différentes sur une piste circulaire de longueur unitaire. On les numérote de 1 à  $n$  ; leur ordre sur la piste forme une permutation. On étudie la suite de ces permutations au cours du temps et plus particulièrement, combien de permutations apparaissent.

On utilise le théorème de Kronecker pour montrer qu'avec des vitesses  $\mathbb{Q}$  linéairement indépendantes, toutes les permutations apparaissent. On montre également que, dans ce cas, les fréquences d'apparition sont les mêmes. Plus généralement on donne une méthode géométrique pour calculer la fréquence dans un cas quelconque.

## 1. Introduction

On s'intéresse à  $n$  coureurs de dossards numérotés de 1 à  $n$  dans une course, sur un circuit circulaire, pendant un nombre infini de tours (figure 1, voir annexe).

On suppose que leurs vitesses sont constantes, toutes différentes et on les notera  $v_1 < v_2 < v_3 < \dots < v_n$ .

On appelle alors permutation, la liste d'entiers de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  obtenue par lecture des numéros des coureurs, dans l'ordre, à partir de la ligne de départ, à un instant où ils ne se dépassent pas.

C'est une permutation des entiers de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .

On note cette permutation :  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  avec  $x_i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Par exemple, la figure 1 correspond à la permutation  $(4, 5, 1, 3, 2)$ . La permutation suivante dépend de l'évènement qui se produit en premier :

- soit le coureur 5 (le plus rapide) dépasse le coureur 1 ce qui donne la permutation  $(4, 1, 5, 3, 2)$ ,
- soit le coureur 2 franchit la ligne ce qui donne la permutation  $(2, 4, 5, 1, 3)$ ,
- soit le coureur 3 dépasse le coureur 2 ce qui donne la permutation  $(4, 5, 1, 2, 3)$ .

Ce problème est inspiré de questions posées dans [1] et [3].

L'objet de ce travail est l'étude de la suite des permutations apparaissant au cours du temps et plus particulièrement :

- trouver cas toutes les permutations apparaissent,
- sinon savoir lesquelles apparaissent,
- trouver la fréquence d'apparition de chaque permutation.

## 2. Table des matières

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 1.  | Introduction . . . . .  | 1  |
| 2.  | Table des matières . . . . .  | 1  |
| 3.  | Simplifications . . . . .   | 1  |
| 4.  | Cas particulier : $n = 2$ coureurs . . . . .  | 2  |
| 5.  | Théorème d'approximation de Kronecker . . . . .   | 2  |
| 6.  | Cas de $n$ coureurs de vitesses $\mathbb{Q}$ -linéairement indépendantes . . . . .                                | 2  |
| 7.  | Introduction d'une base . . . . .   | 2  |
| 8.  | Symétrie du problème . . . . .  | 3  |
| 9.  | Cas de $n = 3$ coureurs . . . . .   | 4  |
| 10. | Cas de $n = 4$ coureurs . . . . .   | 4  |
| 11. | Fréquence d'apparition de chaque permutation pour des vitesses $\mathbb{Q}$ -linéairement indépendantes . . . . . | 5  |
| 12. | Fréquences d'apparition pour des coureurs de vitesse non $\mathbb{Q}$ -linéairement indépendantes . . . . .       | 8  |
| 13. | Cas où les $n$ vitesses forment un $\mathbb{Q}$ espace vectoriel de dimension $n-1$ . . . . .                     | 9  |
| 14. | Conclusion . . . . .  | 10 |
| 15. | Bibliographie . . . . .   | 11 |
| 16. | Figures . . . . .   | 12 |

## 3. Simplifications

On normalise le problème en considérant que le temps et la longueur du circuit sont tels qu'un coureur de vitesse 1 met un temps 1 pour effectuer un tour.

La position des coureurs sur le circuit est alors déterminée par la partie fractionnaire de leur vitesse multipliée par le temps  $t$  depuis le début de la course : c'est à dire les parties fractionnaires de  $v_1 t, v_2 t, \dots, v_n t$  que l'on notera  $\{v_1 t\}, \{v_2 t\}, \dots, \{v_n t\}$  où  $\{x\}$  désigne la partie fractionnaire de  $x$ .

Si  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  est le vecteur des vitesses, alors on notera  $\{t.\mathbf{v}\}$  le vecteur des parties fractionnaires des positions :  $\{t.\mathbf{v}\} = (\{v_1 t\}, \{v_2 t\}, \dots, \{v_n t\})$ .

**Lemme 1.** *Dans le cas où au plus un croisement se produit à un instant  $t$ , soit entre 2 coureurs, soit entre un coureur et la ligne d'arrivée, alors, la permutation suivante s'obtient :*

- soit en échangeant deux éléments consécutifs dont le premier a une vitesse plus grande que le deuxième,
- soit en mettant le dernier élément en 1<sup>er</sup> et en décalant tous les autres.

En effet, un coureur qui va moins vite ne peut pas doubler un coureur qui va plus vite.

Cependant, la situation se complique si plusieurs croisements se produisent en même temps, car il faut alors séparer les coureurs en groupes qui se croisent au même point et en déduire les effets sur la nouvelle permutation.

Dans chaque groupe (voir figure 2), c'est le coureur le plus rapide qui sera le premier après le croisement et ainsi de suite dans l'ordre décroissant des vitesses.

**Lemme 2.** *Tous les coureurs se retrouvent au départ après un certain temps  $T \iff$  tous les rapports de vitesses sont rationnels.*

**Preuve 1.** Il existe  $p_i$  entier (nombre de tours parcouru) tel que  $v_i \times T = p_i \times 1$  (la longueur du parcours est 1) et donc  $\frac{v_i}{v_j}$  est rationnel.

Réciproquement, si  $k_j \times v_1 = p_j \times v_j$  alors on choisit  $T = \frac{1}{v_1} \prod_{i=2}^n p_i \times 1$

#### 4. Cas particulier : $n = 2$ coureurs

**Théorème 3.** *Dans le cas  $n = 2$ , toutes les permutations apparaissent et la suite des permutations est périodique de période 2 : les permutations (1,2) et (2,1) alternent.*

#### 5. Théorème d'approximation de Kronecker

**Définition 1.** Des réels  $v_1, v_2, \dots, v_n$  sont dit  $\mathbb{Q}$ -linéairement indépendants s'il n'existe pas d'entiers  $a_1, \dots, a_n$ , non tous nuls, vérifiant :  $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = 0$

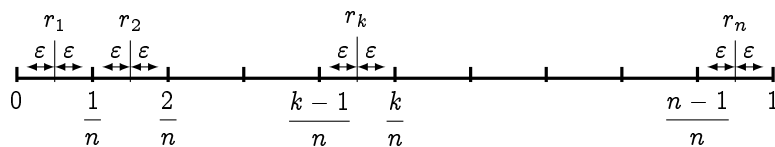
**Théorème 4** (Kronecker [5, Théorème 444 p486]). *Si  $v_1, v_2, \dots, v_n$  sont  $\mathbb{Q}$ -linéairement indépendants, alors pour tous réels  $r_1, r_2, \dots, r_n, \epsilon$  et  $T$ , on peut trouver un réel  $t > T$  et des entiers  $p_1, p_2, \dots, p_n$  tels que pour tout  $i$  entre 1 et  $n$  on ait :*

$$|v_i t - p_i - r_i| < \epsilon$$

#### 6. Cas de $n$ coureurs de vitesses $\mathbb{Q}$ -linéairement indépendantes

Une conséquence du théorème d'approximation de Kronecker est le théorème suivant :

En définissant  $n$  valeurs distinctes  $r_i$  parmi les valeurs  $\frac{2k-1}{2n}$  avec  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et  $\epsilon < \frac{1}{2n}$ , par exemple



le théorème de Kronecker garantit qu'il existe un temps  $t$  pour lequel les  $n$  coureurs sont proches, à moins de  $\epsilon$ , d'un  $r_i$ . On en déduit le théorème suivant en utilisant les  $n!$  choix possibles pour les  $r_i$  sur les  $n$  positions  $\left(\frac{2k-1}{2n}\right)_{k=1, \dots, n}$ .

**Théorème 5.** *Si les vitesses sont  $\mathbb{Q}$ -linéairement indépendantes, les  $n!$  permutations possibles pour  $n$  coureurs apparaissent.*

#### 7. Introduction d'une base

Le théorème de Kronecker permet de traiter les cas de vitesses  $\mathbb{Q}$ -linéairement indépendantes, mais pas les autres cas. Or, on a envie de l'utiliser quand seulement une partie des vitesses sont  $\mathbb{Q}$ -linéairement indépendantes entre elles.

**Lemme 6.** *On peut écrire les vitesses des coureurs comme combinaisons linéaires à coefficients entiers de quantités  $\mathbb{Q}$ -linéairement indépendantes.*

*C'est-à-dire : pour tous réels  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ , il existe un entier  $r \neq 0$ , des entiers  $(c_{i,j})_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket, j \in \llbracket 1, r \rrbracket}$  et des réels  $w_1, w_2, \dots, w_r$   $\mathbb{Q}$ -linéairement indépendants tels que  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad v_i = \sum_{j \in \llbracket 1, r \rrbracket} c_{i,j} w_j$ .*

Si on prend  $\mathbb{R}$  comme  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel, il s'agit en fait d'extraire d'une famille de vecteurs, une base de l'espace engendré par  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  que l'on modifie pour avoir des  $c_{i,j}$  entiers.

**Preuve 2.** Si les vitesses des coureurs ne sont pas  $\mathbb{Z}$ -linéairement indépendantes, on a pour un entier  $i_1 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $mv_{i_1} = \sum_{j \neq i_1} b_j v_j$  avec  $m, b_1, b_2, \dots$  entiers. On pose alors  $v_{j,1} = \frac{v_j}{m}$ , alors on a  $v_{i_1} = \sum_{j \neq i_1} b_j v_{j,1}$ .

Si les  $n-1$  quantités  $(v_{j,1})_{j \neq i_1}$  ne sont pas  $\mathbb{Z}$ -linéairement indépendantes, on recommence : l'une des vitesses  $v_{i_2}$  s'écrit  $mv_{i_2} = \sum_{j \neq i_2} b_j v_j$  avec  $m, b_1, b_2, \dots$  entiers.

On crée ainsi des quantités  $(v_{j,2}), (v_{j,3}), \dots$  qui sont en nombre décroissant, jusqu'à avoir des quantités  $(v_{j,p})_{j \in \llbracket 1, r \rrbracket}$  qui sont  $\mathbb{Z}$ -linéairement indépendantes et qui permettent d'écrire les vitesses des coureurs.

Les vitesses  $v_1, v_2, \dots, v_n$  s'écrivent alors comme combinaisons linéaires à coefficients entiers de ces  $(v_{j,r})_{j \in \llbracket 1, r \rrbracket}$  □

## 8. Symétrie du problème

Dans une configuration donnée :  $n$  coureurs de vitesse  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , on obtient une certaine suite de permutations.

Si on renverse le temps, on va obtenir la suite des permutations renversées :  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  devient  $(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1)$ .

On se pose donc la question de savoir si ces permutations renversées apparaissent quand le temps s'écoule normalement.

On observe dans les simulations que le nombre de permutations est toujours pair. On conjecture donc que si une permutation  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  apparaît dans la suite de permutations, alors la permutation renversée  $(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1)$  apparaît aussi.

On utilise le lemme précédent et le théorème d'approximation de Kronecker pour prouver le théorème suivant :

**Lemme 7.** *Pour tout  $\varepsilon > 0$  et pour tout temps  $T$ , on peut trouver un instant  $t > T$  tel que à  $t$ , tous les coureurs sont à une distance au plus  $\varepsilon$  de la ligne d'arrivée.*

$$\forall \varepsilon > 0, \forall T \in \mathbb{R}, \exists t > T : \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad |\{v_i t\}| \leq \varepsilon \text{ ou } |1 - \{v_i t\}| \leq \varepsilon$$

**Preuve 3.** On utilise les quantités  $(v_{j,r})_j$  définies par le lemme précédent et qui permettent d'écrire les vitesses des coureurs.

Soit  $\varepsilon' > 0$ . D'après le théorème de Kronecker, on peut trouver un temps  $T$  tel que pour  $t > T$ , ces quantités donnent des positions à une distance  $\varepsilon'$  près de la ligne d'arrivée :  $\forall j, \quad |\{v_{j,r} t\}| \leq \varepsilon'$ .

Si  $v_i = \sum_j b_{i,j} v_{j,r}$  avec  $b_{i,j}$  des entiers définis au lemme 2, alors la distance de  $v_i$  à la ligne d'arrivée est majorée par

$$\sum_j |b_{i,j}| \varepsilon' : \quad |\{v_i t\}| \leq \sum_j |b_{i,j}| \varepsilon'.$$

Il suffit donc de prendre  $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\max_i \sum_j |b_{i,j}|}$  et on a le résultat :

$$\text{il existe un temps } T \text{ tel que pour } t > T, \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad |\{v_i t\}| \leq \varepsilon$$

□

On obtient donc le théorème suivant qui prouve la symétrie du problème pour toutes les configurations de vitesse (figure 6) :

**Théorème 8.** *Si il existe un réel  $t \in \mathbb{R}_+$  et des vitesses  $v_1, v_2, \dots, v_n$  telles qu'on observe une permutation  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , alors il existe un temps  $t' \in \mathbb{R}_+$  tel qu'on observe la permutation  $(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1)$ .*

**Preuve 4.** Soit  $\varepsilon$ , d'après le lemme précédent, il existe  $t_0 > t$  tel que  $(v_1 t_0, v_2 t_0, \dots, v_n t_0)$  soient à une distance de moins de  $\varepsilon$  d'un entier.

Alors à l'instant  $t_0 - t$ ,  $\{v_1(t_0 - t)\}, \{v_2(t_0 - t)\}, \dots, \{v_n(t_0 - t)\}$  est à une distance au plus  $\varepsilon$  de  $1 - \{v_1(t)\}, 1 - \{v_2(t)\}, \dots, 1 - \{v_n(t)\}$ .

On note  $d(a, b) = \min(|b - a|, 1 - |b - a|)$  la distance modulo 1.

On prend  $\varepsilon < \frac{1}{2} \max \left( \max_{i \neq j} d(\{v_i t\}, \{v_j t\}), \max_i d(\{v_i t\}, 0) \right)$

Alors on a bien la permutation  $(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1)$  à l'instant  $t_0 - t$ . □

## 9. Cas de $n = 3$ coureurs

Dans le cas  $n = 3$ , la première permutation est  $(1, 2, 3)$  juste après le départ.

Comme les coureurs sont dans l'ordre de leurs vitesses, aucun dépassement ne peut avoir lieu avant que le plus rapide ne franchisse la ligne : la deuxième permutation est  $(3, 1, 2)$ .

La troisième permutation est  $(2, 3, 1)$  si le coureur 2 termine son tour avant que le 3 ne double le 1 ou bien dans le cas contraire, la troisième permutation est  $(1, 3, 2)$  (figure 3).

On obtient l'arbre de la figure 4 pour les évolutions possibles des permutations sans croisement simultané : pas de dépassement en même temps qu'un passage de la ligne d'arrivée. L'astérisque signale une permutation qui est déjà apparue dans l'arbre.

Le résultat suivant est connu pour  $n = 3$  avec des vitesses entières [2] et on le prouve en utilisant la symétrie du problème.

**Théorème 9.** *Les 6 permutations apparaissent pour la configuration  $v_1 < v_2 < v_3$  si et seulement si  $v_1 + v_2 \neq v_3$ . Seul les permutations  $(1, 2, 3), (2, 1, 3), (3, 1, 2), (3, 2, 1)$  apparaissent quand  $v_1 + v_2 = v_3$ .*

**Preuve 5.** Si  $v_3 = v_1 + v_2$ , alors supposons que la permutation  $(1, 3, 2)$  apparaisse. Il existe un réel  $t > 0$  tel que

$$\{v_1 t\} < \{(v_1 + v_2)t\} < \{v_2 t\} \quad \text{ce qui donne} \quad v_1 t - \lfloor v_1 t \rfloor < (v_1 + v_2)t - \lfloor (v_1 + v_2)t \rfloor < v_2 t - \lfloor v_2 t \rfloor.$$

On obtient alors :

- soit  $v_1 t - \lfloor v_1 t \rfloor < (v_1 + v_2)t - \lfloor v_1 t \rfloor - \lfloor v_2 t \rfloor < v_2 t - \lfloor v_2 t \rfloor$

d'où  $0 \leq v_2 t - \lfloor v_2 t \rfloor \leq (v_2 t - \lfloor v_2 t \rfloor) + (\lfloor v_1 t \rfloor - v_1 t)$  et donc,  $0 \leq v_2 t - \lfloor v_2 t \rfloor < v_2 t - \lfloor v_2 t \rfloor$  ce qui est absurde,

- soit  $v_1 t - \lfloor v_1 t \rfloor < (v_1 + v_2)t - \lfloor v_1 t \rfloor - \lfloor v_2 t - 1 \rfloor + 1 < v_2 t - \lfloor v_2 t \rfloor$

d'où  $0 \leq v_2 t - \lfloor v_2 t \rfloor + 1 \leq (v_2 t - \lfloor v_2 t \rfloor) + (\lfloor v_1 t \rfloor - v_1 t)$  et donc,  $0 \leq v_2 t - \lfloor v_2 t \rfloor + 1 < v_2 t - \lfloor v_2 t \rfloor$  ce qui est absurde.

Donc la permutation  $(1, 3, 2)$  n'arrive pas. De plus, par symétrie,  $(2, 3, 1)$  n'arrive pas.

Mais, comme  $(1, 2, 3)$  et  $(3, 1, 2)$  apparaissent et, par symétrie,  $(3, 2, 1)$  et  $(2, 1, 3)$  apparaissent aussi, alors l'ensemble des permutations est  $\{(1, 2, 3), (3, 2, 1), (2, 1, 3), (3, 2, 1)\}$ .

Si  $v_3 \neq v_1 + v_2$ , alors  $(1, 2, 3)$  et  $(3, 1, 2)$  apparaissent. Ensuite, c'est soit  $(2, 3, 1)$ , soit  $(1, 3, 2)$ , soit 2 croise la ligne en même temps que 3 double 1, alors  $\begin{cases} v_3 t - 1 = v_2 t \\ v_2 t = 1 \end{cases} \implies v_3 = v_1 + v_2$ . Par symétrie, toutes les permutations apparaissent.

## 10. Cas de $n = 4$ coureurs

Si on connaît la suite de permutations générée par  $n = 4$  coureurs, comme la position d'un coureur ne dépend que du temps, pour connaître la suite de permutations générés par les 3 premiers coureurs, il suffit d'enlever le coureur 4 de toute la suite de permutations (et de supprimer les permutations identiques consécutives).

Par conséquent, pour obtenir le nombre maximal de permutations pour  $n = 4$  coureurs, il faut que chaque sous-ensemble de 3 coureurs vérifie la contrainte pour  $n = 3$  coureurs obtenue précédemment :  $v_3 \neq v_1 + v_2$ . Dans le cas contraire, au plus 16 permutations peuvent apparaître (En effet, pour chaque permutation du cas  $n = 3$  qui ne peut pas apparaître, 4 permutations du cas  $n = 4$ , ne peuvent pas apparaître).

Mais ces contraintes ne suffisent pas comme l'indique le théorème suivant :

**Théorème 10.** *Si  $v_2 + v_3 = v_1 + v_4$ , alors au plus 16 permutations peuvent apparaître.*

**Preuve 6.** On a alors

$$(v_4 - v_3) + (v_4 - v_2) = v_4 - v_1$$

Alors  $(v_4 - v_3, v_4 - v_2, v_4 - v_1)$  sont 3 vitesses dont l'une est la somme des 2 autres, alors elles correspondent à une configuration à 3 coureurs dont toutes les permutations n'apparaissent pas.

On en déduit que pour la configuration  $(v_4 - v_3, v_4 - v_2, v_4 - v_1, v_4)$  toutes les configurations n'apparaissent pas.

En effet le nombre de permutations est le même que pour  $(v_1, v_2, v_3, v_4)$  : considérons la ligne d'arrivée comme un coureur de vitesse 0, et maintenant observons la course depuis le coureur de vitesse  $v_4$ . Pour lui c'est comme si les autres coureurs tournaient dans l'autre sens avec les vitesses  $(v_4 - v_3, v_4 - v_2, v_4 - v_1)$ . On conclut en remarquant qu'il existe une bijection entre les permutations obtenus par ces 2 visions.

En particulier pour  $(v_1, v_2, v_3, v_4) = (1, 4, 7, 10)$ , par simulation, on constate que 16 permutations apparaissent sur les 24 possibles. Mais, on a  $v_3 \neq v_1 + v_2$ ,  $v_4 \neq v_1 + v_2$ ,  $v_4 \neq v_1 + v_3$  et  $v_4 \neq v_3 + v_2$ , donc toutes les permutations de chacun des sous-ensembles de 3 coureurs apparaissent.

## 11. Fréquence d'apparition de chaque permutation pour des vitesses $\mathbb{Q}$ -linéairement indépendantes

On note  $\{x\}$  le vecteur des parties fractionnaires des composantes du vecteur  $x$ ,

On note  $\chi_{[a,b]}$  la fonction caractéristique du pavé  $[a, b] = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_j \leq x_j \leq b_j\}$  avec  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ,  $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ .

On note  $f : t \mapsto (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$  une fonction continue de  $[0, +\infty[$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 2.** On dit que la fonction  $f$  est équirépartie modulo 1 sur  $\mathbb{R}^n$  si

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \chi_{[a,b]}(\{f(t)\}) dt = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j)$$

pour tous pavés  $[a, b] \subset [0, 1]^n$  avec  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ,  $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$

Kuipers et Niederreiter [4] définissent les fonctions équiréparties en dimension  $n$  mais ne donnent pas le théorème suivant :

**Théorème 11.** La fonction  $f$  est équirépartie modulo 1 sur  $[0, 1]^n$  si et seulement si pour toute fonction continue  $w : [0, 1]^n \rightarrow \mathbb{R}$ , on a

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T w(\{f(t)\}) dt = \int_{[0,1]^n} w(x) dx$$

**Preuve 7.** Réécrivons la définition de l'équirépartition pour la fonction  $f$  :

$$f \text{ est équirépartie modulo 1 sur } [0, 1]^n \iff \forall a, b \in [0, 1]^n, \quad \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \chi_{[a,b]}(\{f(t)\}) dt = \int_{[0,1]^n} \chi_{[a,b]}(x) dx$$

Soit  $f$  équirépartie modulo 1 sur  $[0, 1]^n$ , alors la propriété

$$P(h) : \ll \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T h(\{f(t)\}) dt = \int_{[0,1]^n} h(x) dx \gg$$

est vraie par linéarité pour toute fonction en escalier  $h : [0, 1]^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

Soit  $w$  une fonction continue sur  $[0, 1]^n$ .  $[0, 1]^n$  est compact, donc on peut appliquer le théorème de Heine. On en déduit que  $w$  est uniformément continue.

Alors pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une fonction en escalier  $h$  telle que  $\|w - h\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3}$ .

Alors pour tout  $T > 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T w(\{f(t)\}) dt - \int_{[0,1]^n} w(x) dx &= \frac{1}{T} \int_0^T w(\{f(t)\}) dt - \frac{1}{T} \int_0^T h(\{f(t)\}) dt \\ &\quad + \frac{1}{T} \int_0^T h(\{f(t)\}) dt - \int_{[0,1]^n} h(x) dx \\ &\quad + \int_{[0,1]^n} h(x) dx - \int_{[0,1]^n} w(x) dx \end{aligned}$$

On en déduit par inégalité triangulaire et par linéarité et croissance de l'intégrale :

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{T} \int_0^T w(\{f(t)\}) dt - \int_{[0,1]^n} w(x) dx \right| &\leq \frac{1}{T} \int_0^T |(w - h)(\{f(t)\})| dt \\ &\quad + \left| \frac{1}{T} \int_0^T h(\{f(t)\}) dt - \int_{[0,1]^n} h(x) dx \right| \\ &\quad + \int_{[0,1]^n} |(h - w)(x)| dx \end{aligned}$$

D'après la propriété  $P(h)$ , il existe  $T_1$  tel que pour tout  $T \geq T_1$ , on a

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T h(\{f(t)\}) dt - \int_{[0,1]^n} h(x) dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

On en déduit que

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T w(\{f(t)\}) dt - \int_{[0,1]^n} w(x) dx \right| \leq \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\varepsilon}{3} dt + \frac{\varepsilon}{3} + \int_{[0,1]^n} \frac{\varepsilon}{3} dx \leq \varepsilon$$

Ce qui prouve  $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T w(\{f(t)\}) dt = \int_{[0,1]^n} w(x) dx$

La réciproque se démontre de la même façon que le théorème 12 (ci-dessous Preuve 8). □

**Définition 3.** Pour  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  une permutation de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , on définit :

$$V_\sigma = \{v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in [0, 1]^n \mid v_{\sigma(1)} \leq v_{\sigma(2)} \leq \dots \leq v_{\sigma(n)}\}.$$

**Théorème 12.** Soit  $f$  une fonction équirépartie modulo 1 sur  $[0, 1]^n$ .

Pour tout  $\sigma$  appartenant à  $\mathcal{S}_n$ ,  $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \chi_{V_\sigma}(\{f(t)\}) dt = \int_{[0,1]^n} \chi_{V_\sigma}(x) dx$

**Preuve 8.**

Soit  $\varepsilon > 0$ . On définit  $f_\varepsilon^- = \min\left(1, \frac{d(x, \bar{V}_\sigma)}{\varepsilon}\right)$  et  $f_\varepsilon^+ = \max\left(0, 1 - \frac{d(x, V_\sigma)}{\varepsilon}\right)$ .

On a

$$f_\varepsilon^+ \geq \chi_{V_\sigma} \geq f_\varepsilon^-.$$

qui donne

$$\int_{[0,1]^n} f_\varepsilon^+(x) dx \geq \int_{[0,1]^n} \chi_{V_\sigma}(x) dx \geq \int_{[0,1]^n} f_\varepsilon^-(x) dx \quad (1).$$

Soit  $S$  la surface de contact entre  $V_\sigma$  et  $\bar{V}_\sigma$ , alors

$$0 \leq \int_{[0,1]^n} f_\varepsilon^+(x) dx - \int_{[0,1]^n} f_\varepsilon^-(x) dx \leq 2\varepsilon S \quad (2)$$

Par ailleurs, pour  $T > 0$ , on a pour tout  $t \in [0, T]$  :

$$f_\varepsilon^+(\{f(t)\}) \geq \chi_{V_\sigma}(\{f(t)\}) \geq f_\varepsilon^-(\{f(t)\}).$$

qui donne par croissance de l'intégrale

$$\frac{1}{T} \int_0^T f_\varepsilon^+(\{f(t)\}) dt \geq \frac{1}{T} \int_0^T \chi_{V_\sigma}(\{f(t)\}) dt \geq \frac{1}{T} \int_0^T f_\varepsilon^-(\{f(t)\}) dt.$$

Comme les fonctions  $f_\varepsilon^+$  et  $f_\varepsilon^-$  sont continues, on peut appliquer le théorème 11 et on trouve :

$$\int_{[0,1]^n} f_\varepsilon^+(x) dx \geq \frac{1}{T} \int_0^T \chi_{V_\sigma}(\{f(t)\}) dt \geq \int_{[0,1]^n} f_\varepsilon^-(x) dx \quad (3).$$

Les inégalités (1), (2) et (3) donnent

$$0 \leq \int_0^T \chi_{V_\sigma}(\{f(t)\}) dt - \int_{[0,1]^n} \chi_{V_\sigma}(x) dx \leq 2\varepsilon S$$

On conclut en faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0. □

Or les  $V_\sigma$  ont par symétrie tous le même volume, ils sont disjoints sauf aux bords et leur union donne  $[0, 1]^n$ , donc par théorème de Chasles :  $\int_{[0,1]^n} \chi_{V_\sigma}(x) dx = \frac{1}{|\mathcal{S}_n|} = \frac{1}{n!}$ .

De plus, on a le critère suivant, en notant  $\langle x, y \rangle$  le produit scalaire canonique de  $\mathbb{R}^n$  :

**Théorème 13** ([4, Théorème 9.9 p83]). *La fonction  $f$  est équirépartie modulo 1 sur  $\mathbb{R}^n$  si et seulement si pour tout vecteur  $h$  de  $\mathbb{Z}^n$ ,  $h \neq 0$ ,*

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{2\pi i \langle h, f(t) \rangle} dt = 0$$

**Preuve 9.** On prouve que le théorème 11 implique le théorème 13.

⟹

On suppose que la fonction  $f$  est équirépartie modulo 1 sur  $\mathbb{R}^n$ .

La fonction  $x \mapsto e^{2\pi i \langle h, x \rangle}$  est continue sur  $[0, 1]^n$ .

Alors, on a, d'après le théorème 11, en utilisant  $\int_0^1 e^{2\pi i \alpha x} dx = 0$  pour tout entier non nul  $\alpha$  et ici  $h \neq 0$  :

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{2\pi i \langle h, \{f(t)\} \rangle} dt = \int_{[0,1]^n} e^{2\pi i \langle h, x \rangle} dx \quad (1)$$

$$= \int \dots \int_0^1 e^{2\pi i \sum h_k x_k} dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (2)$$

$$= 0 \quad (3)$$

⟸

On suppose maintenant que pour tout vecteur  $h$  de  $\mathbb{Z}^n$ ,  $h \neq 0$ ,  $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{2\pi i \langle h, f(t) \rangle} dt = 0$ .

On note  $(e_i)_i$  les vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

Soit  $w$  une fonction continue vérifiant pour tout  $x \in [0, 1]^n$ ,  $w(x + e_i) = w(x)$  pour tout  $i$ .

Alors d'après le théorème de Stone-Weierstrass trigonométrique (ADMIS), il existe une suite de polynômes trigonométriques qui convergent uniformément vers  $w$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe un polynôme trigonométrique  $P$  qui s'écrit :  $P(x) = \sum_{h \in H} c_h e^{2\pi i \langle h, x \rangle}$  avec  $H$  fini tel que  $\|w - P\|_\infty \leq \varepsilon$ .

$\varepsilon$ .

Alors,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{T} \int_0^T w(\{f(t)\}) dt - \int_{[0,1]^n} w(x) dx \right| &\leq \left| \frac{1}{T} \int_0^T w(\{f(t)\}) - P(\{f(t)\}) dt \right| \\ &\quad + \left| \frac{1}{T} \int_0^T P(\{f(t)\}) dt - \int_{[0,1]^n} P(x) dx \right| \\ &\quad + \left| \int_{[0,1]^n} P(x) - w(x) dx \right| \end{aligned}$$

$$\text{On a } \left| \frac{1}{T} \int_0^T w(\{f(t)\}) - P(\{f(t)\}) dt \right| \leq \frac{1}{T} \int_0^T |w(\{f(t)\}) - P(\{f(t)\})| dt \leq \frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon dt = \varepsilon$$

$$\text{et } \left| \int_{[0,1]^n} P(x) - w(x) dx \right| \leq \int_{[0,1]^n} |P(x) - w(x)| dx \leq \int_{[0,1]^n} \varepsilon dx = \varepsilon$$

On a  $e^{2\pi i \langle h, f(t) \rangle} = e^{2\pi i \langle h, \{f(t)\} \rangle + c}$  où  $c$  est un entier. Alors  $e^{2\pi i \langle h, f(t) \rangle} = e^{2\pi i \langle h, \{f(t)\} \rangle}$

Par linéarité,  $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T P(\{f(t)\}) dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{h \in H} c_h e^{2\pi i \langle h, \{f(t)\} \rangle} dt$

Pour les termes non constants de  $P$ ,  $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T c_h e^{2\pi i \langle h, \{f(t)\} \rangle} dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} c_h \frac{1}{T} \int_0^T e^{2\pi i \langle h, f(t) \rangle} dt = 0$  car  $h \neq 0$

Pour le terme constant,  $h \neq 0$ , on a  $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T c_0 e^{2\pi i \langle 0, \{f(t)\} \rangle} dt = c_0$ .



$$\text{Et } \int_{[0,1]^n} P(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{[0,1]^n} \sum_{\mathbf{h} \in H} c_{\mathbf{h}} e^{2\pi i \langle \mathbf{h}, \mathbf{x} \rangle} \, d\mathbf{x}.$$

$$\text{Or pour } \mathbf{h} \neq 0, \text{ on a } \int_{[0,1]^n} c_{\mathbf{h}} e^{2\pi i \langle \mathbf{h}, \mathbf{x} \rangle} \, d\mathbf{x} = 0 \text{ donc } \int_{[0,1]^n} P(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{[0,1]^n} \sum_{\mathbf{h} \in H} c_{\mathbf{h}} e^{2\pi i \langle \mathbf{h}, \mathbf{x} \rangle} \, d\mathbf{x} = \int_{[0,1]^n} c_0 \, d\mathbf{x} = c_0$$

$$\text{Alors } \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T P(\{\mathbf{f}(t)\}) \, dt - \int_{[0,1]^n} P(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0.$$

$$\text{Il existe donc } T_1 \text{ tel que pour } T \geq T_1, \quad \left| \frac{1}{T} \int_0^T P(\{\mathbf{f}(t)\}) \, dt - \int_{[0,1]^n} P(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right| \leq \varepsilon$$

Alors pour  $T \geq T_1$ ,

$$\left| \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{T} \int_0^T w(\{\mathbf{f}(t)\}) \, dt - \int_{[0,1]^n} w(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right| \leq 3\varepsilon$$

$$\text{On a prouvé } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{T} \int_0^T w(\{\mathbf{f}(t)\}) \, dt = \int_{[0,1]^n} P(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

Si  $w$  ne vérifie pas  $w(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i) = w(\mathbf{x})$  pour tout  $i$ , alors on applique la propriété à  $g$  vérifiant  $g(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i) = g(\mathbf{x})$  pour tout  $i$  et  $\int_{[0,1]^n} |w - g| \leq \varepsilon'$  avec  $g$  une fonction continue, définie par morceaux... (ADMIS)

□

En notant  $\mathbf{g}$  la fonction  $t \mapsto (v_1 t, v_2 t, \dots, v_n t) = t \cdot (v_1, \dots, v_n)$ , on a  $\langle \mathbf{h}, \mathbf{g}(t) \rangle = t \langle \mathbf{h}, (v_1, \dots, v_n) \rangle$ . D'autre part, on sait que  $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{2\pi i \alpha t} \, dt = 0$  si et seulement si  $\alpha \neq 0$

Or  $\langle \mathbf{h}, (v_1, \dots, v_n) \rangle$  n'est jamais nul lorsque les vitesses sont  $\mathbb{Q}$ -linéairement indépendantes, donc d'après le critère précédent, la fonction  $\mathbf{g}$  est équirépartie modulo 1.

On prend comme définition pour la fréquence d'apparition d'une permutation  $\sigma$ , dans le problème des coureurs, la proportion du temps pendant lequel la permutation apparaît. Ce qui conduit à la définition suivante :

**Définition 4.** On appelle fréquence d'apparition d'une permutation  $\sigma$  le réel suivant, quand il existe :

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \chi_{V_\sigma}(\{v_1 t, v_2 t, \dots, v_n t\}) \, dt.$$

On déduit des résultats précédents :

**Théorème 14.** Les fréquences d'apparition des permutations sont identiques et égales à  $\frac{1}{n!}$ , lorsque les vitesses sont  $\mathbb{Q}$ -linéairement indépendantes.

## 12. Fréquences d'apparition pour des coureurs de vitesse non $\mathbb{Q}$ -linéairement indépendantes

D'après la partie 8., lorsque les coureurs n'ont pas des vitesses  $\mathbb{Q}$ -linéairement indépendantes, il existe un entier  $r \neq 0$ , des entiers  $(c_{i,j})_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket, j \in \llbracket 1, r \rrbracket}$  et des réels  $w_1, w_2, \dots, w_r$   $\mathbb{Q}$ -linéairement indépendants tels que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad v_i = \sum_{j=1}^r c_{i,j} w_j.$$

On note  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_r)$  le vecteur des vitesses linéairement indépendantes. On dira dans la suite que ces vitesses correspondent à des coureurs fictifs.

On sait que la fonction vectorielle  $\mathbf{g} : t \mapsto t \cdot \mathbf{w} = (w_1 t, w_2 t, \dots, w_r t)$  où  $\mathbf{w}$  est le vecteur composé des vitesses des coureurs fictifs est équirépartie modulo 1 dans  $\mathbb{R}^n$ , d'après le paragraphe précédent.

Soit  $\mathbf{h} : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^n$  la fonction qui, à la position des coureurs fictifs modulo 1, associe la position des coureurs réels modulo 1 :  $\mathbf{h}(\{w_1 t\}, \{w_2 t\}, \dots, \{w_r t\}) = (\{v_1 t\}, \{v_2 t\}, \dots, \{v_n t\})$ .  $\mathbf{h}$  existe car  $\{v_i t\} = \{\sum c_{i,j} w_j t\}$  et les  $(c_{i,j})$  sont entiers.

On a, pour tout  $\sigma$  appartenant à  $\mathcal{S}_n$  :

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \chi_{V_\sigma}(\{v_1 t\}, \{v_2 t\}, \dots, \{v_n t\}) \, dt &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \chi_{V_\sigma}(\mathbf{h}(\{w_1 t\}, \{w_2 t\}, \dots, \{w_r t\})) \, dt \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \chi_{\mathbf{h}^{-1}(V_\sigma)}(\{w_1 t\}, \{w_2 t\}, \dots, \{w_r t\}) \, dt \end{aligned}$$

**Théorème 15.** La fréquence d'apparition d'une permutation  $\sigma$  vaut  $\int_{[0,1]^r} \chi_{h^{-1}(V_\sigma)}(x) dx$

**Utilisation :** On calcule l'image réciproque par  $h$  de chaque  $V_\sigma$ . Pour cela, on détermine les hyperplans qui séparent les  $h^{-1}(V_\sigma)$ . On en déduit les  $h^{-1}(V_\sigma)$ ; le volume de  $h^{-1}(V_\sigma)$  est proportionnel à la fréquence d'apparition de  $\sigma$ .

Voir la figure 7 : dans le cas  $n = 3$  et  $r = 2$  avec 3 coureurs de vitesses  $1, \pi, 2 + \pi$ . Les hyperplans qui séparent les  $h^{-1}(V_\sigma)$  sont les droites  $(d_i)$ . Les volumes  $h^{-1}(V_\sigma)$  sont les réunions des zones **Pn**.

### 13. Cas où les n vitesses forment un $\mathbb{Q}$ espace vectoriel de dimension n-1

Si les vitesses forment un  $\mathbb{Q}$  espace vectoriel de dimension n-1, il existe des coefficients  $c_i \in \mathbb{Z}$  tels que :  $\sum_{i=1}^n c_i \times v_i = 0$ ; et si l'on impose  $\text{pgcd}_i c_i = 1$ , ces coefficients sont uniques (à un changement de signe de tous les  $c_i$  près)

**Théorème 16.** Dans  $[0, 1]^n$ , la fonction  $\{(v_1t, v_2t, \dots, v_nt)\}$  est dense dans les hyperplans  $\sum_{i=1}^n c_i \times x_i = l$  où  $l$  est un entier relatif quelconque.

**Preuve 10.** La fonction ne peut pas prendre d'autre valeur. Puisqu'au départ  $\sum_{i=1}^n c_i \times x_i$  est un entier et le reste quand l'un des coureur fait un tour.

Montrons que la fonction est dense dans ces hyperplans. Pour ça, on utilise les coureurs fictifs définie à la partie 7 :  $\frac{v_2}{c_1}, \frac{v_3}{c_1}, \dots, \frac{v_n}{c_1}$ . On déduit alors du théorème de Kronecker, qu'il existe pour chaque position des coureurs de 2 à n, un instant  $t$  où les coureurs sont proches de ces positions. Mais il nous reste un degré de liberté, puisque pour chaque position du coureur  $i$ , il y a  $c_1$  positions qui conviennent pour le coureur fictif associée.

On utilise le théorème de Bezout : on sait qu'il existe  $(a_1, \dots, a_n)$  tel que  $1 = \sum_{i=1}^n a_i \times c_i$ .

Donc on sait qu'il existe, d'après le théorème de Kronecker, un instant  $T$  où les coureurs fictifs de 2 à n ont une position proche de  $\frac{a_i \times c_i}{c_i}$ , alors  $x_1 = 1/c_1$ .

Donc soit  $(y_1, \dots, y_n)$  un point dans un des hyperplans, on sait d'après le théorème de Kronecker qu'il existe un instant  $T'$ , où les coureurs de 2 à n ont des positions proches de  $y_2, \dots, y_n$ , et ensuite en prenant les instants  $T', T' + T, T' + 2 * T, \dots$ , on sait qu'il en existe un où les coureurs ont des positions proches de  $(y_1, \dots, y_n)$ .

**Lemme 17.** La distance entre ces hyperplans est  $\frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2}}$

Pour qu'une permutation n'apparaisse pas, il faut que le  $V_\sigma$  correspondant n'intersecte aucun hyperplan.

**Théorème 18.** Dans  $\mathbb{R}^n$ , la distance minimale entre 2 hyperplans parallèles entre lesquels un  $V_\sigma$  puisse s'insérer est  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ .

**Preuve 11.** Les points d'un  $V_\sigma$  sont, à une permutation des coordonnées près,  $(0, 0, 0, \dots, 0); (1, 0, 0, \dots, 0); (1, 1, 0, \dots, 0); \dots; (1, 1, 1, \dots, 1)$ .

Prenons 2 hyperplans parallèles, et notons  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  un vecteur normal à ces plans et unitaire. La plus petite distance qu'il peut y avoir entre ces 2 plans sans qu'ils ne touchent  $V_\sigma$  est  $\max_{P \in V_\sigma} (\langle P; A \rangle) - \min_{Q \in V_\sigma} (\langle Q; A \rangle)$ , et on peut se contenter de prendre  $P$  et  $Q$  parmi les sommets. De plus on sait qu' il existe  $i$  tel que  $|a_i| \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$ , et alors soit  $P_{i-1}$  le sommet juste avant que la  $i$ -ème coordonnée passe à 1, et  $P_i$  celui juste après, on a  $|\langle A; P_i \rangle - \langle A; P_{i-1} \rangle| = |a_i| \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$  Donc  $\max_{P \in V_\sigma} (\langle P; A \rangle) - \min_{P \in V_\sigma} (\langle P; A \rangle) \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$ .

Le cas d'égalité est atteint avec  $A = (\frac{-1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{(-1)^i}{\sqrt{n}}, \dots)$

Maintenant, 2 possibilités, soit la relation entre les vitesses fait intervenir tout les coureurs et alors, comme tous les  $c_i$  sont entiers, on déduit des théorèmes précédents que toutes les permutations apparaissent si tous les  $c_i$  ne valent pas 1

ou -1, ou si  $|\sum_{i=1}^m c_i| \leq 1$ . Sinon on peut ignorer les coureurs qui n'apparaissent pas dans la relation, et utiliser le résultat précédent.

**Théorème 19.** *Le nombre de permutations qui apparaissent, selon  $m$  le nombre de coefficient non nul dans la relation entre les  $c_i$ , est :*

- $n!$  si tous les  $c_i$  ne valent pas 1 ou -1, ou si  $|\sum_{i=1}^m c_i| \leq 1$ .
- $\frac{n!}{m!} * \left( m! - 2 \times \left( \left( \frac{m}{2} \right)! \right)^2 \right)$  sinon et si  $m$  est pair
- $\frac{n!}{m!} * \left( m! - \left( \frac{m+1}{2} \right)! \times \left( \frac{m-1}{2} \right)! \right)$  sinon et si  $m$  est impair

**Preuve 12.** On se place dans  $\mathbb{R}^m$ , si tous les  $c_i$  ne valent pas 1 ou -1, ou si  $|\sum_{i=1}^m c_i| \leq 1$ , alors d'après le lemme 17 la

distance entre les hyperplans  $\sum_{i=1}^m c_i x_i = l$  est strictement inférieure à  $\frac{1}{\sqrt{m}}$ . On en déduit d'après le théorème 18 que les hyperplans intersectent tous les  $V_\sigma$  et donc d'après le théorème 16, toutes les permutations apparaissent.

Dans l'autre cas : la distance entre les hyperplans est  $\frac{1}{\sqrt{m}}$ . Il faut encore se demander si les  $V_\sigma$  sont dans le bon sens. Seules celles pour lesquelles les  $c_{\sigma(i)}$  alternent entre 1 et -1 conviennent. Pour celles-ci, comme elles sont comprises entre  $\sum_{i=1}^m c_i x_i = 0$  et  $\sum_{i=1}^m c_i x_i = 1$  ou entre  $\sum_{i=1}^m c_i x_i = 0$  et  $\sum_{i=1}^m c_i x_i = -1$ , et donc les permutations concernées n'apparaissent jamais. Les autres permutations sont intersectées par un hyperplan, et donc d'après le théorème 16, ces permutations apparaissent.

Reste à savoir combien de permutations cela fait en tout. Pour alterner -1 et 1, si  $m$  est pair on a 2 possibilités : les 1 aux indices pairs et les -1 aux impairs où l'inverse ensuite on peut permuter les 1 où les -1, on a alors  $2 \times \left( \left( \frac{m}{2} \right)! \right)^2$  permutations qui n'apparaissent pas dans le problème à  $m$  coureurs. Si  $m$  est impair, ce sont les plus nombreux parmi les 1 et -1 qui sont aux indices impairs et les moins nombreux aux indices pairs. On a  $\left( \frac{m+1}{2} \right)! \times \left( \frac{m-1}{2} \right)!$

Ces résultats forment aussi un majorant pour le cas général, en prenant une relation entre les vitesses :

**Théorème 20.** *Le nombre de permutations qui apparaissent, selon  $m$  le nombre de coefficient non nul dans la relation entre les  $c_i$ , est majoré, quand tous les  $c_i$  ne valent pas 1 ou -1 et quand  $|\sum_{i=1}^m c_i| \leq 1$ , par :*

- $\frac{n!}{m!} * \left( m! - 2 \times \left( \left( \frac{m}{2} \right)! \right)^2 \right)$  si  $m$  est pair
- $\frac{n!}{m!} * \left( m! - \left( \frac{m+1}{2} \right)! \times \left( \frac{m-1}{2} \right)! \right)$  si  $m$  est impair

**Preuve 13.** La fonction  $\{(v_1 t, v_2 t, \dots, v_n t)\}$  prend toujours ses valeurs dans les hyperplans  $\sum_{i=1}^n c_i \times x_i = l$ , donc les permutations décrit ci-dessus ne peuvent pas non plus apparaître.

On retrouve pour  $n = 4$  les résultats de la partie 10.

## 14. Conclusion

On a démontré la symétrie du problème et résolu entièrement le cas  $n = 3$ .

Pour  $n$  quelconque, dans le cas de  $n$  vitesses  $\mathbb{Q}$ -linéairement indépendantes, on a démontré que toutes les permutations apparaissent et ont les mêmes fréquences d'apparition.

Dans le cas  $n = 4$ , on a étudié et démontré plusieurs résultats : vitesses indépendantes, symétrie, application du cas  $n = 3$ , cas particuliers de vitesse : 1 grande et 3 quelconques... Mais, ce cas  $n = 4$  reste un problème ouvert.

Pour le cas de  $n$  vitesses non  $\mathbb{Q}$ -linéairement indépendantes, on propose une méthode géométrique pour calculer les permutations qui apparaissent et leurs fréquences.

## 15. Bibliographie

- [1] Tournoi français des jeunes mathématiciennes et mathématiciens, problèmes du 1er tournoi français des jeunes mathématiciens, 2011, <https://www.tfjm.org/static/files/Problemes-TFJM2011-fr.pdf>, problème 3 : un boulier, p. 3, consulté le 8 mars 2017
- [2] G. BECK, <http://demonstrations.wolfram.com/>, The Four-Runner Problem, <http://demonstrations.wolfram.com/TheFourRunnerProblem/>, 12 janvier 2008, consulté le 8 mars 2017
- [3] G. BECK, <http://blog.wolfram.com>, The Celebration Continues : 5,000+ Demonstrations, <http://blog.wolfram.com/2009/07/22/the-celebration-continues-5000-demonstrations/>, 23 février 2016, consulté le 8 mars 2017
- [4] L. KUIPERS, H. NIEDERREITER, Uniform distribution of sequences, Chapitre 1, John Wiley & Sons, 1974
- [5] G.H.HARDY, E.M.WRIGHT, Introduction à la théorie des nombres, Chapitre 23, Vuibert, 2006

16. Figures

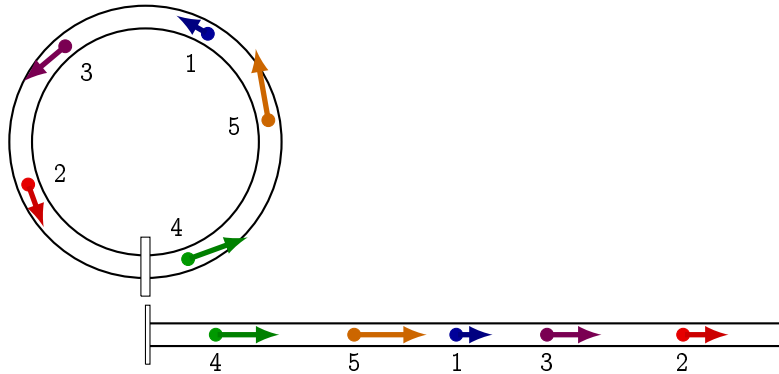


Figure 1 - Course de 5 coureurs et lecture de la permutation associée

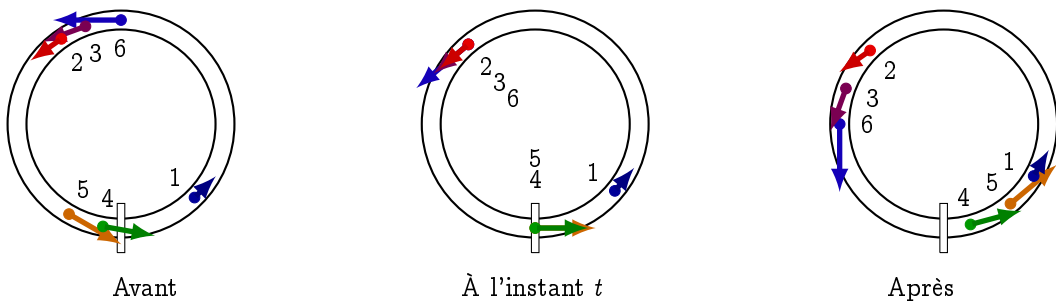


Figure 2 - Exemple de croisements multiples à un instant  $t$

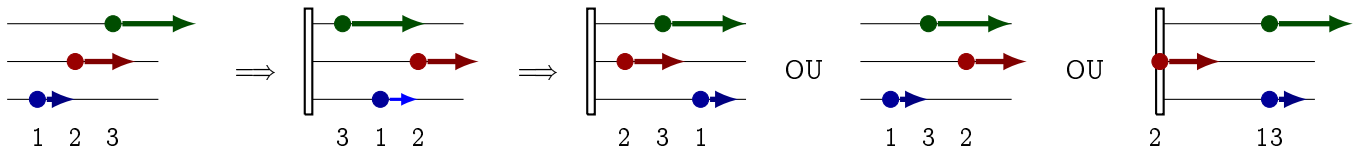


Figure 3 - Course de 3 coureurs : 3 premières permutations possibles

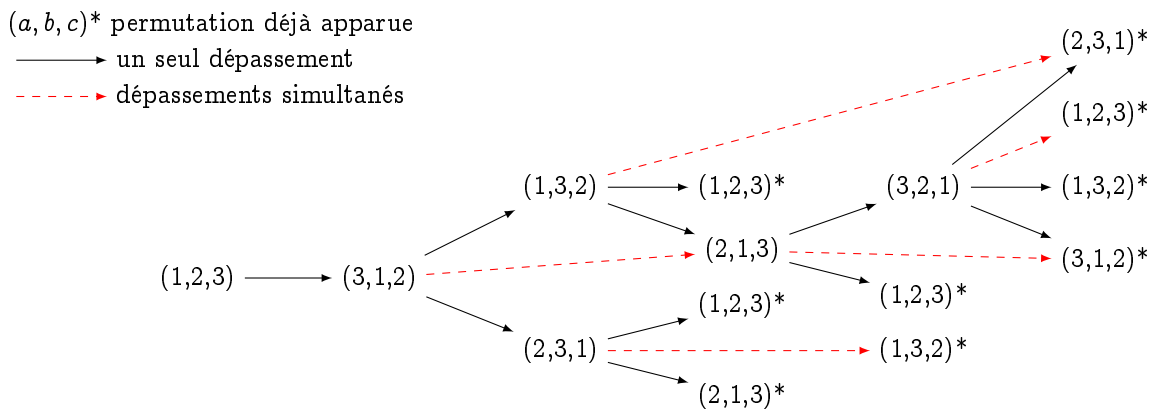


Figure 4 - Arbre des permutations possibles pour 3 coureurs

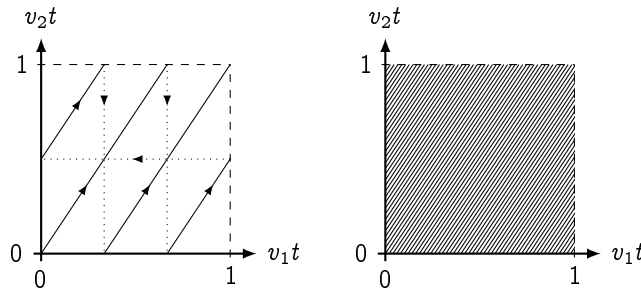


Figure 5 - Interprétation géométrique pour  $n = 2$  du théorème de Kronecker

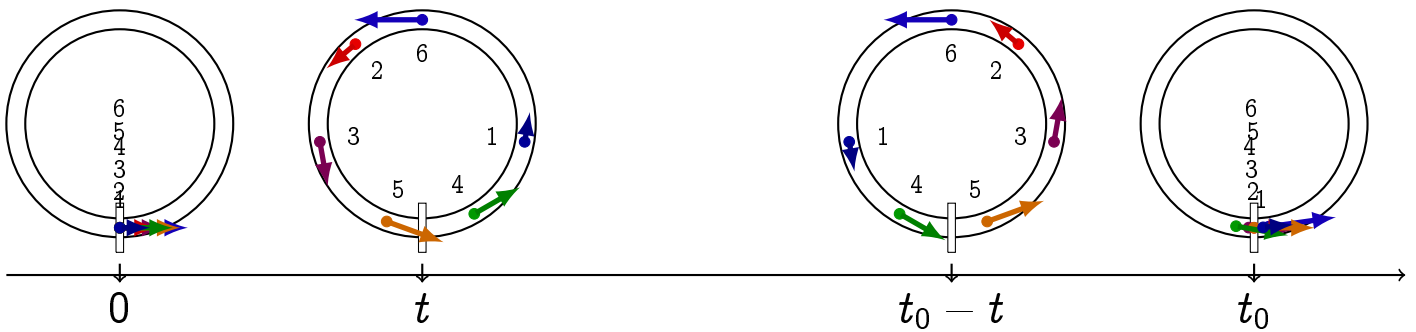


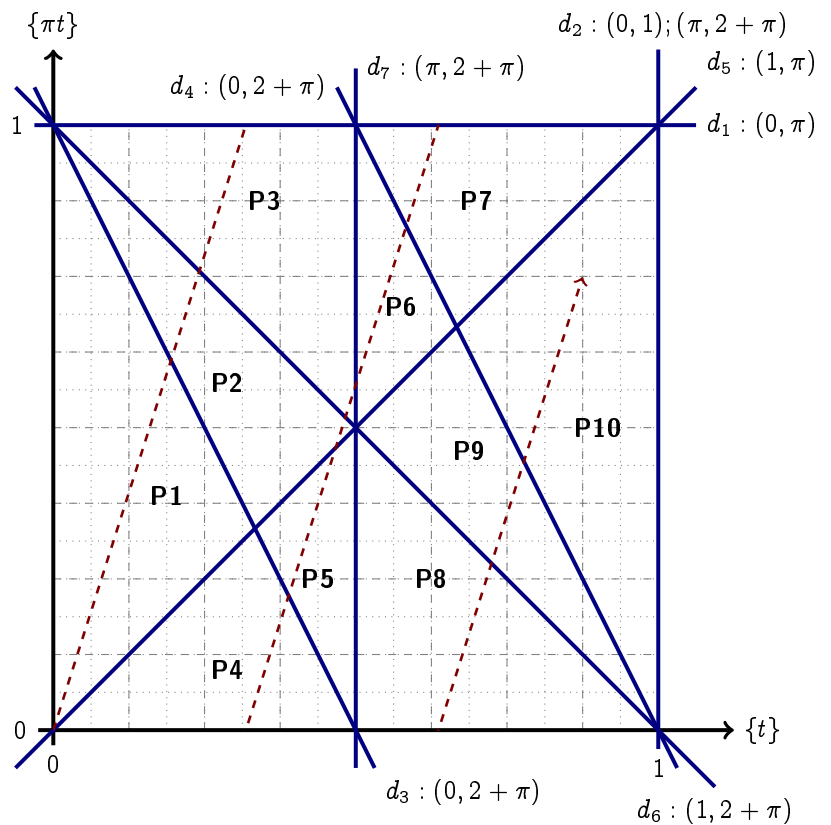
Figure 6 - Illustration de la symétrie du problème

$d_i : (v_1, v_2)$  lieu de croisement des coureurs de vitesse  $v_1$  et  $v_2$  (pas de croisement de plus de 2 coureurs ici)

$P_n = h^{-1}(V_\sigma)$  pour une des permutations  $\sigma$ .

| zone | permutation | aire |
|------|-------------|------|
| P1   | (1,2,3)     | 4/24 |
| P2   | (3,1,2)     | 2/24 |
| P3   | (1,3,2)     | 3/24 |
| P4   | (2,1,3)     | 2/24 |
| P5   | (3,2,1)     | 1/24 |
| P6   | (1,2,3)     | 1/24 |
| P7   | (3,1,2)     | 2/24 |
| P8   | (2,3,1)     | 3/24 |
| P9   | (2,1,3)     | 2/24 |
| P10  | (3,2,1)     | 4/24 |

| permutation | fréquence |
|-------------|-----------|
| (1,2,3)     | 5/24      |
| (3,1,2)     | 4/24      |
| (1,3,2)     | 3/24      |
| (2,1,3)     | 4/24      |
| (3,2,1)     | 5/24      |
| (2,3,1)     | 3/24      |



On utilise 2 coureurs « fictifs » de vitesses 1 et  $\pi$  :  $(1, \pi)$  est une famille  $\mathbb{Q}$ -linéairement indépendante qui engendre  $(1, \pi, 2 + \pi)$ . On utilise un coureur fictif de vitesse 0 pour la ligne d'arrivée.

Figure 7 - Recherche des permutations pour 3 coureurs de vitesse 1,  $\pi$ ,  $2 + \pi$